6. 有 n 个不同的整数,从中取出两组数来,要求第一组数里的最小数大于第二组的最大数,问:有多少种方法?

$$\sum_{m=2}^{n}(m-1)\binom{n}{m} = n2^{n-1}-2^{n}+1$$

11. 设有 k 种明信片,每种张数不限. 现在要分别寄给 n 个朋友,$k \geqslant n$. 若给每个朋友寄 1 张明信片,有多少种寄法? 若给每个朋友寄 1 张明信片,但每个人得到的明信片都不相同,则有多少种寄法? 若给每个朋友寄 2 张不同的明信片(不同的人可以得到相同的明信片),则有多少种寄法?

① k^{n}

② $P_{k}^{n} = \frac{k!}{n!(n-k)!}$

③ $(C_{k}^{2})^{n}$

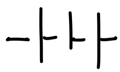
14. 由集合 $\{5\cdot a, 1\cdot b, 1\cdot c, 1\cdot d, 1\cdot e\}$ 中的全体元素构成字母序列,求

(1) 没有两个 a 相邻的序列个数;

(2) b, c, d, e 中的任何两个字母都不相邻的序列个数.

(1) $4! = 24$

(2) $4! \times \binom{6}{2} = 15 \times 24 = 360$



_a_a_a_

17. 求在 $(2x-3y)^{25}$ 的展开式中 $x^{12}y^{13}$ 的系数.

$$\binom{25}{13} \times 2^{12} \times (-3)^{13} = -\frac{25!}{13!\,12!}2^{12}3^{13}$$

28. $S = \{1\cdot a_1, 1\cdot a_2, \cdots, 1\cdot a_t, +\infty\cdot a_{t+1}, +\infty\cdot a_{t+2}, \cdots, +\infty\cdot a_k\}$,求 S 的 r 组合数.

$$\sum_{i=0}^{r}\binom{t}{i}\binom{k-t+r-i-1}{r-i}$$

6. 求解递推方程：

(1) $\begin{cases} a_n - 7a_{n-1} + 12a_{n-2} = 0, \\ a_0 = 4, a_1 = 6. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} a_n + 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 3, \\ a_0 = 0, a_1 = 1. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 1, \\ a_0 = 4, a_1 = 6. \end{cases}$

(4) $\begin{cases} a_n - 7a_{n-1} + 10a_{n-2} = 3^n, \\ a_0 = 0, a_1 = 1. \end{cases}$

(5) $\begin{cases} a_n - na_{n-1} = n!,\ n \geqslant 1, \\ a_0 = 2. \end{cases}$

(1) $x^2 - 7x + 12 = 0$

$x_1 = 3,\ x_2 = 4$

$a_n = c_1 3^n + c_2 4^n$

代入 $a_0 = 4, a_1 = 6$ 得 $a_n = 10 \cdot 3^n - 6 \cdot 4^n$

(2) $x^2 + 6x + 9 = 0$

$x_1 = x_2 = -3$

$\overline{a_n} = c_1(-3)^n + c_2 n(-3)^n$

代入前得 $a_n = c_1(-3)^n + c_2 n(-3)^n + \frac{3}{16}$

代入 $a_0 = 0, a_1 = 1$ 得

$a_n = -\frac{3}{16}(-3)^n - \frac{1}{12} n(-3)^n + \frac{3}{16}$

(3) $x^2 - 3x + 2 = 0$

$x_1 = 1, x_2 = 2$

$\overline{a_n} = c_1 + c_2 \cdot 2^n$

代入得 $a_n = c_1 + c_2 2^n - n$

代入 $a_0 = 4, a_1 = 6$ 得

$a_n = 3 \cdot 2^n - n + 1$

(4) $x^2 - 7x + 10 = 0$

$x_1 = 2, x_2 = 5$

$\overline{a_n} = c_1 2^n + c_2 5^n$

代入得 $a_n = c_1 2^n + c_2 5^n - \frac{9}{2} 3^n$

代入 $a_0 = 0, a_1 = 1$ 得

$a_n = \frac{8}{3} 2^n + \frac{11}{6} 5^n - \frac{9}{2} 3^n$

(5) $a_n = n! + n a_{n-1}$

$= n! + n((n-1)! + (n-1)a_{n-2})$

$= n! + n! + n(n-1)a_{n-2}$

$= 2n! + n(n-1)((n-2)! + (n-2)a_{n-3})$

$= 3n! + n(n-1)(n-2)a_{n-3}$

$= \cdots$

$= n \cdot n! + n! \cdot a_0$

$= (n+2)n!$

归纳. $n=0$ 时显然成立,

若 n 时成立, 则 $n+1$ 时,

$a_{n+1} = (n+1)! + (n+1)a_n$

$= (n+1)! + (n+1)(n+2)n!$

$= (n+3)(n+1)!$ 成立

15. 使用两个不同的信号在通信信道发送信息. 传送一个信号需要 2 μs, 传送另一个信号需要 3 μs. 一个信息的每个信号紧跟着下一个信号.

(1) 求与在 n μs 中可以发送的不同信号数有关的递推方程;

(2) 对于 (1) 的递推方程, 初始条件是什么?

(3) 在 12 μs 内可以发送多少个不同的信息?

(1) $a_n = a_{n-2} + a_{n-3}$

(2) $a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_3 = 1$

(3) $a_{12} = a_{10} + a_9 = a_8 + a_7 + a_7 + a_6$

$= a_6 + a_5 + 2(a_5 + a_4) + a_4 + a_3$

$= a_4 + a_3 + 3(a_3 + a_2) + 3(a_2 + a_1) + a_3$

$= 5a_3 + 7a_2 + 4a_1 = 12$

21. 设多重集 $S=\{+\infty\cdot a_1,+\infty\cdot a_2,+\infty\cdot a_3,+\infty\cdot a_4\}$，$c_n$ 是 S 的满足以下条件的 n 组合数，且数列 $\{c_n\}$ 的生成函数为 $C(x)$，求 $C(x)$.

(1) 每个 a_i 出现奇数次，$i=1,2,3,4$；

(2) a_1 不出现，a_2 至多出现 1 次；

(3) 每个 a_i 至少出现 10 次.

(1) $C(x)=(x+x^3+\cdots)^4=\dfrac{x^4}{(1-x^2)^4}$

(2) $C(x)=(1+x)(1+x+x^2+\cdots)^2=\dfrac{1+x}{(1-x)^2}$

(3) $C(x)=(x^{10}+x^{11}+\cdots)^4=\dfrac{x^{40}}{(1-x)^4}$

23. 把 n 个苹果(n 为奇数)恰好分给 3 个孩子，如果第一个孩子和第二个孩子分的苹果数不相同，问有多少种分法?

$(x_1+1)+(x_2+1)+(x_3+1)=n$ ， $x_i\in N$

$x_1+x_2+x_3=n-3$

$A(y)=(1+y+y^2+\cdots)^3=\dfrac{1}{(1-y)^3}$

y^{n-3} 系数为 $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$

一、二相同时， $2x_1+x_3=n-3$

分法为 $\dfrac{n-1}{2}$

$\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}-\dfrac{n-1}{2}=\dfrac{(n-1)(n-3)}{2}$

28. 一个 $1\times n$ 的方格图形用红、蓝、绿或橙色 4 种颜色涂色，如果有偶数个方格被涂成红色，还有偶数个方格被涂成绿色，问:有多少种方案?

$$A(x)=\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)^2\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)^2$$

$$=(e^x)^2\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2$$

$$=\frac{1}{4}e^{4x}+\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{4}$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(4x)^n}{n!}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2x)^n}{n!}+\frac{1}{4}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}4^{n-1}\frac{x^n}{n!}+\sum_{n=0}^{+\infty}2^{n-1}\frac{x^n}{n!}+\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow a_n=\begin{cases}4^{n-1}+2^{n-1}, & n\geq 1\\ 1, & n=0\end{cases}$$