8. 设 $*$ 为 $\mathbb{Z}^+$ 上的二元运算，$\forall x, y \in \mathbb{Z}^+$，

$$x * y = \min(x, y), \text{ 即 } x \text{ 和 } y \text{ 之中较小的数.}$$

(1) 求 $4 * 6, 7 * 3$.

(2) $*$ 在 $\mathbb{Z}^+$ 上是否满足交换律、结合律和幂等律？

(3) 求 $*$ 运算的单位元、零元及 $\mathbb{Z}^+$ 中所有可逆元素的逆元.

(1) $4 * 6 = 4, \quad 7 * 3 = 3$

(2) 满足交换律：$x * y = \min(x, y) = \min(y, x) = y * x$

满足结合律：$(x * y) * z = \min(\min(x,y), z) = \min(x, y, z)$

$x * (y * z) = \min(x, \min(y, z)) = \min(x, y, z)$

$\Rightarrow (x * y) * z = x * (y * z)$

满足幂等律. $x * x = \min(x, x) = x$

(3) 单位元：$\forall y, \ e * y = \min(e, y) = y$

取 $y = e+1 \Rightarrow$ 无单位元

零元：$\forall y, \ \theta * y = \min(\theta, y) = \theta$

$\Rightarrow \theta = 1$

无可逆元素

17. 设 $V_1 = \langle \{1,2,3\}, \circ, 1 \rangle$，其中 $x \circ y$ 表示取 x 和 y 之中较大的数. $V_2 = \langle \{5,6\}, *, 6 \rangle$，其中 $x * y$ 表示取 x 和 y 之中较小的数. 求出 V_1 和 V_2 的所有子代数. 指出哪些是平凡子代数，哪些是真子代数.

V_1 的子代数：$\{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,3\}$

其中平凡子代数为 $\{1\}, \{1,2,3\}$

真子代数为 $\{1,2\}, \{1,3\}, \{1\}$

V_2 的子代数：$\{6\}, \{5,6\}$

其中平凡子代数为 $\{6\}, \{5,6\}$

真子代数为 $\{6\}$

18. $V = \langle \mathbb{R}^*, \cdot \rangle$，其中 $\mathbb{R}^*$ 为非零实数集，$\cdot$ 为普通乘法，判断下面的哪些函数是 V 的自同态，是否为单自同态、满自同态和自同构. 计算 V 的同态像.

(1) $f(x) = |x|$；　(2) $f(x) = 2x$；　(3) $f(x) = x^2$；

(4) $f(x) = 1/x$；　(5) $f(x) = -x$；　(6) $f(x) = x + 1$.

(1) $f(x \cdot y) = xy$

$f(x) \cdot f(y) = |xy|$

不是自同态

(2) $f(x \cdot y) = 2xy$

$f(x) \cdot f(y) = 4xy$

不是自同态

(3) $f(x \cdot y) = (xy)^2$

$f(x) \cdot f(y) = x^2 y^2 = f(xy)$

是自同态，$f(1) = f(-1)$，$f(x) > 0$

故不是单/满自同态，不是自同构

(4) $f(xy)=\frac{1}{xy}$

$f(x)\cdot f(y)=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}=f(xy)$

是自同态

$f(x)=f(y)\Rightarrow\frac{1}{x}=\frac{1}{y}\Rightarrow x=y\Rightarrow$ 单

$\forall y\in\mathbb{R}^{*}\ \exists x=\frac{1}{y}$ s.t. $f(x)=y\Rightarrow$ 满

故是单、满自同态，是自同构

(5) $f(xy)=-xy$

$f(x)\cdot f(y)=(-x)\cdot(-y)=xy$

不是自同态

(6) $f(xy)=xy+1$

$f(x)\cdot f(y)=(x+1)(y+1)$

不是自同态

故(3)、(4)是V的自同态，

(3)不是单/满自同态，不是自同构，

(4)是单、满自同态，是自同构

20. 设 $V_1=\langle A,\circ\rangle, V_2=\langle B,*\rangle$ 为同类型代数系统，$V_1\times V_2$ 是积代数，定义函数 $f:A\times B\to A, f(\langle x,y\rangle)=x$，证明 f 是 $V_1\times V_2$ 到 V_1 的同态映射.

$f(\langle x_1,y_1\rangle\cdot\langle x_2,y_2\rangle)=f(\langle x_1\circ x_2,\ y_1*y_2\rangle)=x_1\circ x_2$

$f(\langle x_1,y_1\rangle)\circ f(\langle x_2,y_2\rangle)=x_1\circ x_2$

$\Rightarrow f(\langle x_1,y_1\rangle\cdot\langle x_2,y_2\rangle)=f(\langle x_1,y_1\rangle)\circ f(\langle x_2,y_2\rangle)$

即 f 是 $V_1\times V_2$ 到 V_1 的同态映射

2. 判断下列集合关于指定的运算是否构成半群、独异点和群.

(1) a 是正实数，$G=\{a^n|n\in\mathbb{Z}\}$，运算是普通乘法；

(2) $\mathbb{Q}^+$ 为正有理数集，运算是普通乘法；

(3) $\mathbb{Q}^+$ 为正有理数集，运算是普通加法；

(4) 一元实系数多项式的集合关于多项式的加法；

(5) 一元实系数多项式的集合关于多项式的乘法；

(1) 结合律 $(a^{n_1}a^{n_2})a^{n_3}=a^{n_1+n_2+n_3}=a^{n_1}(a^{n_2}a^{n_3})$

$\Rightarrow$ 构成半群

单位元 $\forall n,\ a^e\cdot a^n=a^n\Rightarrow e=0,\ a^e=1$

$\Rightarrow$ 构成独异点　逆元 $a^n\cdot(a^n)^{-1}=1\Rightarrow(a^n)^{-1}=a^{-n}\in G$

$\Rightarrow$ 构成群

(2) 结合律 $(xy)z=x(yz)$

$\Rightarrow$ 构成半群

单位元 $\forall y,\ ey=y\Rightarrow e=1$

$\Rightarrow$ 构成独异点

逆元 $x\cdot x^{-1}=1\Rightarrow x^{-1}=\frac{1}{x}\in\mathbb{Q}^+$

$\Rightarrow$ 构成群

(3) 结合律 $(x+y)+z = x+(y+z)$

$\Rightarrow$ 构成半群

单位元 $\forall y,\ e+y=y \Rightarrow e=0 \notin \mathbb{Q}^+$

$\Rightarrow$ 不构成独异点

$\Rightarrow$ 不构成群

(4) 结合律 记 $f = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots$

$g = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + \cdots$

$h = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + \cdots$

$$(f+g)+h = [(a_0+b_0)+c_0] + \cdots + [(a_n+b_n)+c_n]x^n + \cdots$$
$$= [a_0+(b_0+c_0)] + \cdots + [a_n+(b_n+c_n)]x^n + \cdots$$
$$= f+(g+h)$$

$\Rightarrow$ 构成半群

单位元 $\forall f,\ e+f=f \Rightarrow e=0$

$\Rightarrow$ 构成独异点

逆元 $f+f^{-1}=0 \Rightarrow f^{-1} = (-a_0)+(-a_1)x+\cdots+(-a_n)x^n+\cdots \in [x_R]$

$\Rightarrow$ 构成群

(5) 结合律 $(fg)h = \left(\left(\sum_{i\geq 0} a_i x^i\right)\left(\sum_{i\geq 0} b_i x^i\right)\right)\left(\sum_{i\geq 0} c_i x^i\right)$

$$= \left(\sum_{i\geq 0} a_i x^i\right)\left(\left(\sum_{i\geq 0} b_i x^i\right)\left(\sum_{i\geq 0} c_i x^i\right)\right) = f(gh)$$

$\Rightarrow$ 构成半群

单位元 $\forall f,\ ef=f \Rightarrow e=1$

$\Rightarrow$ 构成独异点

逆元 $f\cdot f^{-1}=1 \Rightarrow f^{-1} = \dfrac{1}{a_0+a_1x+\cdots} \notin [x_R]$

$\Rightarrow$ 不构成群

(6) $U_n = \{x | x \in \mathbb{C}, x^n = 1\}$, n 为某个给定的正整数, $\mathbb{C}$ 为复数集合, 运算是复数乘法.

(6) 结合律 $(xy)z = x(yz)$

$\Rightarrow$ 构成半群

单位元 $\forall x,\ ex=x \Rightarrow e=1 \in U_n$

$\Rightarrow$ 构成独异点

逆元 $x\cdot x^{-1}=1 \Rightarrow x^{-1}=\frac{1}{x} \Rightarrow (x^{-1})^n = \frac{1}{x^n} = 1 \Rightarrow x^{-1} \in U_n$

$\Rightarrow$ 构成群

12. 设 $\mathbb{Z}_n=\{0,1,\cdots,n-1\}$，令

$$T=\{x|x\in\mathbb{Z}_n\,(x,n)=1\},$$

这里的 (x,n) 表示 x 与 n 的最大公因数，证明 T 关于模 n 乘法构成 Abel 群.

因为 $T\subseteq \mathbb{Z}_n$，$\mathbb{Z}_n$ 显然是 Abel 群

故只需证明 ① T 非空 ② T 对 $\otimes$ 封闭 ③ $e=1\in T$ 且 $x^{-1}\in T$

① $e=1\in\mathbb{Z}_n$ 且 $(1,n)=1 \Rightarrow \{1\}\in T$

② $\forall\, x,y\in T$，$(x,n)=1$，$(y,n)=1$

$\Rightarrow \exists\, a,b,c,d\in\mathbb{Z}^+$, s.t.

$ax+bn=1$，$cy+dn=1$

$(ax)(cy)=(1-bn)(1-dn)$

$=1-(b+d)n+bdn^2$

$(ac)xy+[(b+d)+bdn]n=1$

$\Rightarrow (xy,n)=1$

$x\otimes y=xy \pmod n \Rightarrow (x\otimes y,n)=1$

$\Rightarrow x\otimes y\in T$

即 T 对 $\otimes$ 封闭

③ 显然 $1\in T$（①中已证）

$x\otimes x^{-1}=1 \Rightarrow x\cdot x^{-1}=1 \pmod n$

$(x,n)=1 \Rightarrow ax+bn=1 \Rightarrow x\otimes a=1$

若 $a\geq n$，取 $a'=a-kn \Rightarrow x\otimes a'=1$，$a'\in T$

29. 设 σ,τ 是 5 元置换，且

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&4&5&3\end{pmatrix},\quad \tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&4&5&1&2\end{pmatrix}.$$

(1) 计算 $\sigma\tau,\tau\sigma,\sigma^{-1},\tau^{-1},\sigma^{-1}\tau\sigma$；

(2) 将 $\sigma\tau,\tau^{-1},\sigma^{-1}\tau\sigma$ 表成不交的轮换之积；

(3) 将 (2) 中的置换表示成对换之积，并说明哪些为奇置换，哪些为偶置换.

(1) $\sigma\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&3&1&2&5\end{pmatrix}$

$\tau\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&5&3&2&1\end{pmatrix}$

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^{-1}\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(2) $\sigma\tau = (1,4,2,3)$

$\tau^{-1} = (1,4,2,5,3)$

$\sigma^{-1}\tau\sigma = (1,5,2,4,3)$

(3) $\sigma\tau = (1\ 4)(1\ 2)(1\ 3)$ 奇置换

$\tau^{-1} = (1\ 4)(1\ 2)(1\ 5)(1\ 3)$ 偶置换

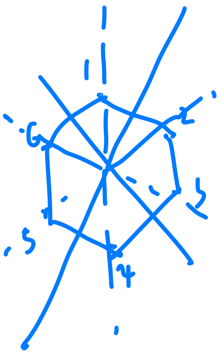
$\sigma^{-1}\tau\sigma = (1\ 5)(1\ 2)(1\ 4)(1\ 3)$ 偶置换

31. 一个圆环上等距地镶有 6 颗珠子,每颗珠子可以是红、蓝、黄 3 种颜色,问:有多少种不同的镶嵌方案?

由Polya定理: $M = \frac{1}{|G|}\sum_{k=1}^{g} m^{c(\sigma_k)}$

$N=\{1,2,3,4,5,6\}$ 上的置换群为

$G=\{(1), (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6), (1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6), (1\ 4)(2\ 5)(3\ 6), (1\ 5\ 3)(2\ 6\ 4), (1\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2), (2\ 6)(3\ 5), (1\ 5)(2\ 4), (4\ 6)(1\ 3), (1\ 2)(3\ 6)(4\ 5), (1\ 6)(2\ 5)(3\ 4), (5\ 6)(1\ 4)(2\ 3)\}$



(分别对应顺时针旋转 $0°, 60°, 120°, 180°, 240°, 300°$ 及翻转)

对应 $c(\sigma_k)$ 为 $\{6,1,2,3,2,1,4,4,4,3,3,3\}$

$\Rightarrow M = \frac{1}{12}(3^6 + 2\times3^1 + 2\times3^2 + 3\times3^4 + 4\times3^3) = 92$

34. 判断下列集合和给定运算是否构成环、整环和域，如果不能构成，说明理由.

(1) $A=\{a+b\mathrm{i}|a,b\in\mathbb{Q}\}$，其中 $\mathrm{i}^2=-1$，运算为复数加法和乘法.

(2) $A=\{2z+1|z\in\mathbb{Z}\}$，运算为实数加法和乘法.

(3) $A=\{2z|z\in\mathbb{Z}\}$，运算为实数加法和乘法.

(4) $A=\{x|x\in\mathbb{N}\}$，运算为实数加法和乘法.

(5) $A=\{a+b\sqrt[4]{5}|a,b\in\mathbb{Q}\}$，运算为实数加法和乘法.

(1) 构成环、整环、域

(2) 不能构成环，因为若 $\forall x\in A$，$e+x=x \Rightarrow e=0\notin A$

即不含单位元

$\Rightarrow$ 不能构成整环、域

(3) 构成环

不能构成整环，因为若 $\forall x\in A$，$e\cdot x=x \Rightarrow e=1\notin A$

故不能构成域

(4) 不能构成环，$e=0$，$-x\notin N$

即不存在逆元

故不能构成整环、域

(5) 不能构成环

$\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[4]{5}=\sqrt[2]{5}\notin A$

故不能构成整环、域

1. 图 14.2.5 给出了 6 个偏序集的哈斯图. 判断其中哪些是格. 如果不是格，说明理由.

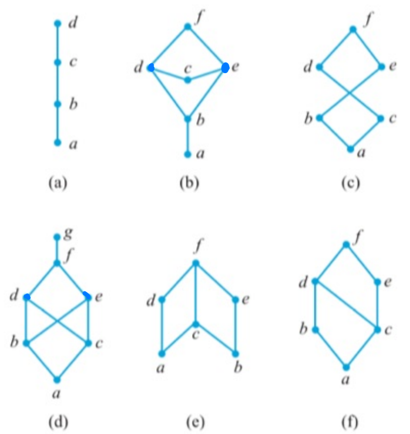


图 14.2.5

(a) (c) (f) 是格

(b) 中 $\{d,e\}$ 有极大下界 c 和 b，不可比，无最大下界

(d) 中 $\{d,e\}$ 有极大下界 c 和 b 不可比，无最大下界

(e) 中 $\{a,b\}$ 无下界

12. 对下列各题给定的集合和运算判断它们是哪一类代数系统(半群、独异点、群、环、域、格、布尔代数),并说明理由.

(1) $S_1=\left\{1,\frac{1}{2},2,\frac{1}{3},3,\frac{1}{4},4\right\}$, $*$ 为普通乘法.

(2) $S_2=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$, $\forall a_i,a_j\in S_2, a_i*a_j=a_i$,这里的 n 是给定的正整数,且 $n\geqslant 2$.

(3) $S_3=\{0,1\}$, $*$ 为普通乘法.

(4) $S_4=\{1,2,3,6\}$, $\forall x,y\in S_4$, $x\circ y$ 和 $x*y$ 分别表示求 x 和 y 的最小公倍数和最大公因数.

(5) $S_5=\{0,1\}$, $*$ 表示模 2 加法, $\circ$ 为模 2 乘法.

(1) 不是代数系统, $2*\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\notin S_1$, 不封闭

(2) 是半群. 因为运算封闭且符合结合律 $(a_i*a_j)*a_k=a_i*(a_j*a_k)=a_i$

不存在单位元 e s.t. $\forall a_i$, $e*a_i=e=a_i$

故不是独异点

(3) 是半群、独异点

因为运算封闭, 符合结合律, 有单位元 $1\in S$,

而 0 没有逆元使得 $0\cdot 0^{-1}=1$, 故不是群

(4) 是格、布尔代数

因为 lcm, gcd 满足交换、结合、吸收律

且 S_4 中元素 a 存在补元 $6/a$, 且 lcm, gcd 满足分配律

故为格, 布尔代数

(5) 是环、域

因为对加法有结合、交换律, 有单位元 $0\in S_5$ 且加法逆元为自身

对乘法有结合律、交换律, 单位元 $1\in S_5$, 且 $ab=0\Rightarrow a=0$ or $b=0$

且 $\forall a\in S_5^*=\{1\}$, $a^{-1}=1\in S_5$, 故为域