离散数学基础期中试题（2023.11.9）

一、（每题 2 分，共 20 分）不定项选择题。

1. 下面哪些是集合$\{a, \{\emptyset\}, \{a,b\}, c, d\}$的子集？（　　）

   A. $\{a\}$　　B. $\emptyset$　　C. $\{a,b\}$　　D. $\{a,c\}$

2. 下面哪些关系是等价关系？（　　）

   A. 整数的整除关系　B. 无向图中顶点可达关系　C. 整数的模55同余关系　D. 偏序关系

3. 以下哪些集合与自然数集$\mathbb{N}$等势？（　　）

   A. $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$　B. 全体素数集合　C. 所有有理数集合　D. $P(\mathbb{N})$

4. 关于正整数2023和119的正确说法有（　　）.

   A. 2023是素数　B. 2023与119互素　C. 119整除2023　D. 2023和119是模16同余的

5. 若简单图G有度数列$(1,1,2,2,3,3)$，则下列说法一定正确的是（　　）.

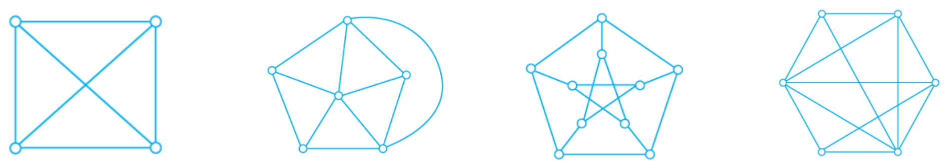
   A. 图G是树　B. 图G有初级回路　C. 图G是连通图　D. 图G恰有4种互不同构的

6. 5阶竞赛图可能同时是（　　）.

   A. 有向欧拉图和有向哈密顿图　　B. 有向欧拉图但不是有向哈密顿图

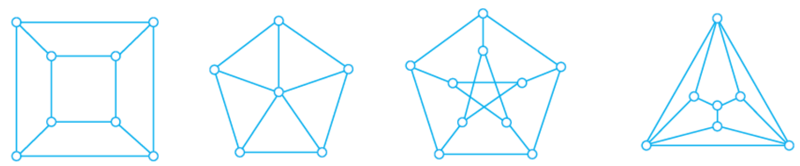
   C. 有向哈密顿图但不是有向欧拉图　　D. 不是有向欧拉图也不是有向哈密顿图

7. 下面4个图中，仅有（　　）是平面图.



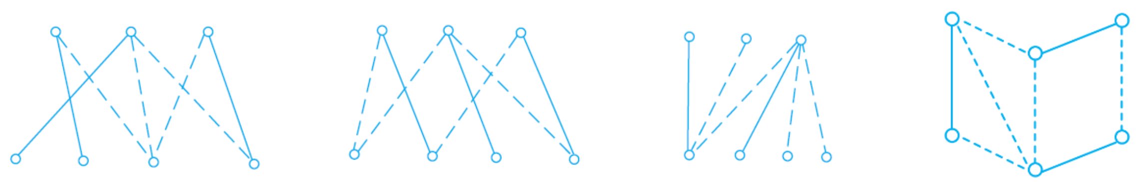
A　　B　　C　　D

8. 下面4个图中，所有色数为4的图是（　　）.



A　　B　　C　　D

9. 下面各图中，（　　）中的实线边是完备匹配.



A　　B　　C　　D

10. 某车站有6个入口处，每个入口处每次只能进一人，如果多人进同一个入口，次序不同就算不同的方案，且不要求每个入口都有人进，那么一组9个人进站的方案数为（　　）.

    A. $C(14,5)$　　B. $C(14,6)$　　C. $P(14,5)$　　D. $P(14,9)$

二、（每空 2 分，共 20 分）填空题。请将结果填写在答题纸上，无需计算过程。

1. 设选离散课的同学为集合A，选算法课的同学为集合B，选编译课的同学为集合C，则选且只选了离散课和算法课中一门、并同时选了编译课的同学可用A,B,C表示为______________.
2. 给定集合$\{1,2,3\}$上的关系$R=\{\langle 3,1\rangle\}$, 则R的自反、对称、传递闭包$tsr(R)$是______________.
3. 若函数$F(x)=x^2+1, G(x)=1/(1+x)$, $\circ$为右复合，则$F\circ G^{-1}(x)=$_____________.
4. 一次同余方程$2023x\equiv 11 \pmod 9$在$\{90,91,\ldots,98\}$中的解的个数为_____个.
5. 在同构意义下，4阶自补图有_____个.
6. 任何非平凡无向树至少有______片树叶.
7. 设G是7阶15条边的简单平面图，则G的所有面中，次数最小值为_____.
8. 马路上有n盏灯，现需关掉其中k盏，且不能关掉相邻的2盏灯，有________种方法.
9. 在$(x_1-x_2+2x_3-2x_4)^8$的展开式中$x_1^3x_2^2x_3x_4^2$项的系数是（请计算出具体结果）________.
10. 递推方程$H(n)-H(n-1)=7n$的通解$H(n)=$ ______________.

三、（每题 2 分，共 20 分）判断题。对的请打√，错的打×。

1. 反对称关系指的是所有不满足对称性的关系. （　　）
2. 任意偏序集必存在极小元. （　　）
3. 若F为单射函数，G不为单射函数，$\circ$为右复合，则$F\circ G$一定不为单射函数. （　　）
4. 正整数a和b互素的充要条件是存在整数x和y使得$ax+by=1$. （　　）
5. 单向连通图的充要条件是存在着过所有顶点的有向通路. （　　）
6. 在一棵树上，任意边都是桥，任意顶点都是割点. （　　）
7. 设G是$n\ (\geq 3)$阶m条边的简单平面图，则$m\leq 3n-6$，且$\delta(G)\leq 4$. （　　）
8. 同构的平面图的对偶图不一定是同构的. （　　）
9. 设无向简单图G没有孤立点，则G的极大点独立集都是极小支配集，但G的最大点独立集未必是最小支配集. （　　）
10. 设N是正整数，将N允许重复地有序拆分成r个部分的方案数为$C(N-1,r-1)$. （　　）

四、（每题 10 分，共 20 分）计算题，需要写出解题过程。

1. 某班共$4n$名同学，分布在n排、每排4个的座位上，新学期开始后，要重新分配座位，要求每名同学新座位和原座位不同，并且其中一名同学因为近视只能坐在第一排中间2个位置中的一个，即这次他能坐的位置只有一个且和原座位不同，求换座位的方案数.
2. 求 $2023^{11} \bmod 9$.

五、（每题 10 分，共 20 分）证明题。

1. 证明：在同构意义下，所有（非标定的）无向图构成的集合为可数集.
2. 定义：设G是无向简单图，v是G的一个顶点，若$\alpha_0(G-v)<\alpha_0(G)$，则称$v$是一个临界点，其中$\alpha_0$表示图的点覆盖数.

   求证：无向简单图G中顶点v是临界点当且仅当存在含v的最小点覆盖.