4. (1) 写出图 5.4.5(a) 中顶点 v_1 的邻域 $N(v_1)$ 和闭邻域 $\overline{N}(v_1)$.

(2) 写出图 5.4.5(b) 中顶点 u_1 的先驱元集 $\Gamma^-(u_1)$、后继元集 $\Gamma^+(u_1)$、邻域 $N(u_1)$ 及闭邻域 $\overline{N}(u_1)$.

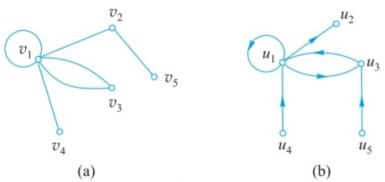


图 5.4.5

(1) $N(v_1)=\{v_2,v_3,v_4\}$

$\overline{N}(v_1)=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$

(2) $\Gamma^-(u_1)=\{u_3,u_4\}$

$\Gamma^+(u_1)=\{u_2,u_3\}$

$N(u_1)=\{u_2,u_3,u_4\}$

$\overline{N}(u_1)=\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$

7. 已知有向图 D 的度数列为 $(2,3,2,3)$, 出度列为 $(1,2,1,1)$, 求 D 的入度列及 $\Delta(D),\delta(D),\Delta^+(D),\delta^+(D)$, $\Delta^-(D),\delta^-(D)$.

入度列 $=(1,1,1,2)$

$\Delta(D)=3$, $\delta(D)=2$

$\Delta^+(D)=\Delta^-(D)=2$, $\delta^+(D)=\delta^-(D)=1$

15. 下列各数列中哪些是可简单图化的? 对于可简单图化的数列试给出两个非同构的简单图.

(1) $(2,3,3,5,5,6,6)$.

(2) $(1,1,2,2,3,3,5,5)$.

(3) $(2,2,2,2,3,3)$.

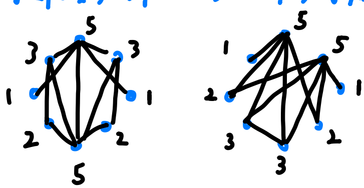
(1) $\Delta=6\le 7-1$

设 $d(v_1)=d(v_2)=6$, $d(v_3)=d(v_4)=5$, $d(v_i)\ge d(v_j)$ $(i<j)$,

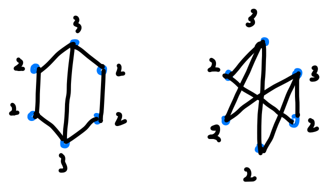
则 v_1,v_2 与 v_5 邻接, v_3,v_4 各自与 v_1,v_2 外的3个点邻接,

则 v_5 被 v_3,v_4 同时邻接, 即 $d(v_5)\ge 4$, 矛盾

(2) $\Delta=5\le 8-1$



(3) $\Delta=3\le 6-1$



21. 无向图 G 如图 5.4.6 所示.

(1) 求 G 的全部点割集和边割集，并指出其中的割点和桥(割边).

(2) 求 G 的点连通度 $\kappa(G)$ 和边连通度 $\lambda(G)$.

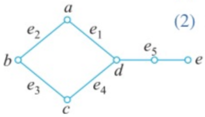


图 5.4.6

(1) 点割集：$\{a,c\}$ $\{d\}$

边割集：$\{e_5\}$ $\{e_1,e_4\}$ $\{e_2,e_3\}$ $\{e_3,e_4\}$ $\{e_1,e_2\}$

割点：d，桥：e_5

(2) $\kappa(G)=1$，$\lambda(G)=1$

43. 有向图 D 如图 5.4.9 所示.

(1) D 中有多少种非同构的圈？有多少种非同构的简单回路？

(2) 求 a 到 d 的短程线和距离 $d\langle a,d\rangle$.

(3) 求 d 到 a 的短程线和距离 $d\langle d,a\rangle$.

(4) 判断 D 是哪类连通图.

(5) 对 D 的基图求解 (1), (2), (3).

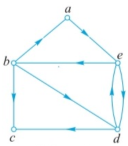


图 5.4.9

2, 3, 4, 5

5

(1) 2种，3种

(2) aed，$d\langle a,d\rangle=2$

(3) $deba$，$d\langle d,a\rangle=3$

(4) 单向连通图

(5) 4种，5种；aed，$d\langle a,d\rangle=2$；dea，$d\langle d,a\rangle=2$

45. 有向图 D 如图 5.4.11 所示. 求：

(1) v_2 到 v_5 长度为 1, 2, 3, 4 的通路数.

(2) v_5 到 v_5 长度为 1, 2, 3, 4 的回路数.

(3) D 中长度为 4 的通路数(含回路).

(4) D 中长度小于等于 4 的回路数.

(5) 写出 D 的可达矩阵.

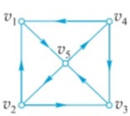


图 5.4.11

$$A=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1\\1&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\\1&0&1&0&0\\0&1&0&1&0\end{bmatrix}$$

$a_{2,5}=0$

$a_{5,5}=0$

$$B=A+A^2+A^3+A^4=\begin{bmatrix}2&1&2&1&5\\5&2&5&2&2\\2&1&2&1&5\\5&2&5&2&2\\2&5&2&5&4\end{bmatrix}$$

$$A^2=\begin{bmatrix}0&1&0&1&0\\0&0&0&0&2\\0&1&0&1&0\\0&0&0&0&2\\2&0&2&0&0\end{bmatrix}$$

$a_{2,5}=2$

$a_{5,5}=0$

$\sum_i b_{ii}=8+4=12$

$$A^3=\begin{bmatrix}2&0&2&0&0\\0&2&0&2&0\\2&0&2&0&0\\0&2&0&2&0\\0&0&0&0&4\end{bmatrix}$$

$a_{2,5}=0$

$a_{5,5}=4$

(1) 0, 2, 0, 0

(2) 0, 0, 4, 0

(3) 32

(4) 12

(5) $P=I$

$$A^4=\begin{bmatrix}0&0&0&0&4\\4&0&4&0&0\\0&0&0&0&4\\4&0&4&0&0\\0&4&0&4&0\end{bmatrix}$$

$a_{2,5}=0$

$a_{5,5}=0$

$\sum_i\sum_j a_{ij}=4+8+4+8+8=32$

50. 设 G 是 n 阶 m 条边的无向连通图,证明 $m \geqslant n-1$.

$n=1$ 时显然成立,

假设 n 时成立,考虑 $n+1$ 时,

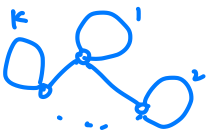
G 是 $(n+1)$ 阶连通图,则 $G-v_{n+1}$ 是 n 阶连通图,

由归纳假设,$G-v_{n+1}$ 的边数 $\geqslant n-1$,

由 $v_i\ (i\leqslant n)$ 连通 v_{n+1} 至少要一条边,即 $m\geqslant (n-1)+1$,成立

故原命题成立

5. 在 $k(\geqslant 2)$ 个长度大于等于 3 的彼此分离的圈(全为无向的或全为有向的)之间至少加多少条新边(有向的加有向边),才能使所得的图为欧拉图?



k 条

记圈为 $G_1,\cdots,G_k$,$G_i\ (1\leqslant i\leqslant k)$ 上有顶点 v_i^*,

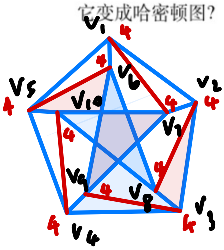
则在 G_i 上有以 v_i^* 为起点和终点的路径 $v_i^* C_i v_i^*$,

则加入新边 $(v_i^*, v_{i+1}^*)\ (1\leqslant i\leqslant k-1)$ 和 (v_k^*, v_1^*),

则有欧拉回路 $v_1^* C_1 v_1^* v_2^* C_2 v_2^* \cdots v_k^* C_k v_k^* v_1^*$

当加入 $k-1$ 条时,不能构成欧拉回路

11. 彼得松图既不是欧拉图,也不是哈密顿图. 至少加几条新边才能使它成为欧拉图?又至少加几条新边才能使它变成哈密顿图?



10 阶 3-正则图

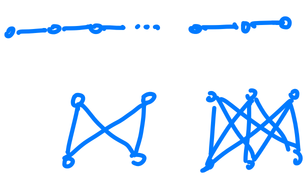
欧拉图 $\Leftrightarrow$ 无奇度顶点

至少加 5 条新边使得度数均为偶数 $\Rightarrow$ 欧拉图

哈密顿图至少加 1 条新边即可 (v_8, v_1)

$v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_{10} v_7 v_9 v_6 v_8 v_1$

13. 今有 $2k, k\geqslant 2$, 个人去完成 k 项任务. 已知每个人均能与另外 k 个人中的任何人组成一组(每组 2 个人)去完成他们共同熟悉的任务,问:这 $2k$ 个人能否分成 k 组(每组 2 人),每组完成一项他们共同熟悉的任务?



$d(v)=k \Rightarrow \forall\, i,j$,$v_i, v_j$ 不邻接,

有 $d(v_i)+d(v_j)=2k$

故为哈密顿图,记哈密顿回路为

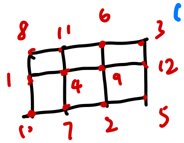
$v_1 v_2 \cdots v_{2k} v_1$,则分组为 $v_1v_2, v_3v_4, \cdots, v_{2k-1}v_{2k}$

故可以分为 k 组

17. 国际象棋中的马走日字，即在 (x,y) 格子的马可以走到 $(x\pm2,y\pm1),(x\pm1,y\pm2)$ 中的任何一个，只要棋盘中有这个格子. 马从某个格子，开始走遍所有的格子且每个格子只走一次称作马的周游. 证明:

(1) 在 3×4 的棋盘上存在马的周游.

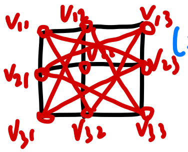
(2) 在 3×3 的棋盘上不存在马的周游.



(1) 记格点为 $V_{11}, V_{12}, \cdots, V_{34}$，G上有边 $(V_{ij}, V_{i\pm2,j\pm1})$，$(V_{ij}, V_{i\pm1,j\pm2})$，

即证G上存在哈密顿通路

$V_{21}V_{33}V_{14}V_{22}V_{34}V_{13}V_{32}V_{11}V_{23}V_{31}V_{12}V_{24}$ 为一条哈密顿通路



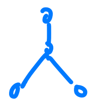
(2) 即证 G 不是半哈密顿图，因为 V_{22} 为孤立点，故得证

19. 设 $G=\langle V,E\rangle$ 为一无向图. 若对于任意的 $V_1\subset V$ 且 $V_1\neq\varnothing$，均有

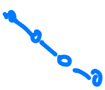
$$P(G-V_1)\leqslant|V_1|,$$

则 G 是哈密顿图. 以上结论成立吗? 为什么?

不成立. 下图不是哈密顿图，但满足条件.



5. $n(\geqslant3)$ 阶无向树 T 的最大度 $\Delta(T)$ 至少为几? 最多为几?



n阶树有 $(n-1)$ 条边，$\Delta(T)_{max}=n-1$，当只有一个分支点时取到

至少有1个分支点，$\Delta(T)_{min}=2$，当分支点度数均为2时取到

10. 什么样的无向树 T 既是欧拉图，又是哈密顿图?

当T为非平凡图，T中无回路，故不是欧拉图或哈密顿图

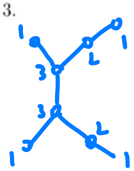
当T为平凡树时，T既是欧拉图又是哈密顿图

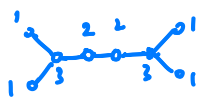
13. 在下面两个正整数数列中，哪个(些)能充当无向树的度数列? 若能，请画出 3 棵非同构的无向树.

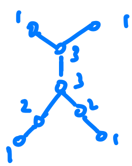
(1) 1, 1, 1, 1, 2, 3, 3, 4.

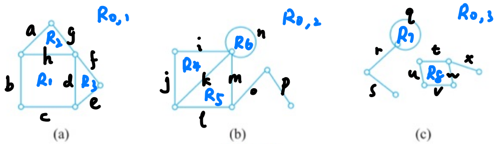
(2) 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3.

(2) 能.









(a) (b) (c)

图 8.4.4

3. 图 8.4.4 所示的 3 个图都是平面嵌入,先给图中各边标定顺序,然后求出图中各面的边界及次数.

(a) R_1 的边界为 $bcdh$, $\deg(R_1)=4$

R_2 ahg , $\deg(R_2)=3$

R_3 def , $\deg(R_3)=3$

$R_{0,1}$ $abcefg$, $\deg(R_{0,1})=6$

(b) R_4 ijk , $\deg(R_4)=3$

R_5 klm , $\deg(R_5)=3$

R_6 n , $\deg(R_6)=1$

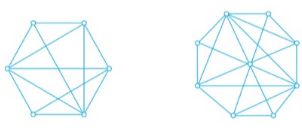
$R_{0,2}$ $ijloppomn$, $\deg(R_{0,2})=9$

(c) R_7 q , $\deg(R_7)=1$

R_8 $tuvw$, $\deg(R_8)=4$

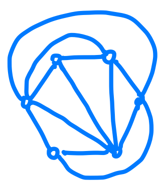
$R_{0,3}$ $qrssr$ 和 $tuvwxx$, $\deg(R_{0,3})=11$

7. 证明图 8.4.6 所示的两个图都是极大平面图.

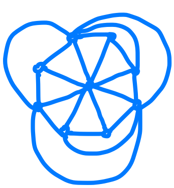


(a) (b)

图 8.4.6



(a) 与左图同构且左图 $\forall i$, $\deg(R_i)=3$, 即 (a) 为极大平面图



同理, (b) 与左图同构且 $\forall i$, $\deg(R_i)=3$, 即 (b) 为极大平面图 .

9. 图 8.4.7 所示的图是极小非平面图吗? 为什么?

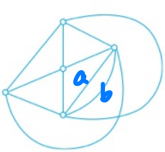


图 8.4.7

不是. a, b 为平行边, 减去其中 1 条不改变是否为平面图, 故不是极小非平面图

14. 设 G 是简单平面图,面数 $r < 12, \delta(G) \geqslant 3$. 证明:$G$ 中存在次数小于等于 4 的面. 举例说明,当 $r = 12$ 时,上述结论不成立.

若G不是连通图,考虑其连通分支,

即只考虑G是连通图. 假设 $\forall i$, $\deg(R_i) \geqslant 5$, 则

$$\begin{cases} n - m + r = 2 & ① \\ \sum \deg(R_i) = 2m \geqslant 5r & ② \\ \sum d(v_i) = 2m \geqslant 3n & ③ \end{cases}$$

①代入③得 $2m \geqslant 3(2+m-r) = 6+3m-3r$

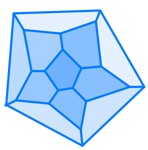
$\Rightarrow m \leqslant 3r-6$

又② $\Rightarrow \frac{5}{2} r \leqslant m \leqslant 3r-6$

$\Rightarrow r \geqslant 12$, 与 $r<12$ 矛盾,

故G中存在次数 $\leqslant 4$ 的面.

当 $r=12$ 时 $\forall i$, $\deg(R_i)=5$, $d(v_i)=3$



如左图, $r=12$.

27. 设 G^* 为平面图 G 的对偶图,G^{**} 是 G^* 的对偶图,在什么情况下,G 与 G^{**} 一定不同构?

当 G有k个连通分支

${}^*n = r$, ${}^*m = m$

$$\begin{cases} n - m + r = k+1 \\ {}^*n - {}^*m + {}^*r = 2 \end{cases} \Rightarrow {}^*r = n-k+1$$

${}^{**}n = {}^*r = n-k+1$, ${}^{**}m = m$, ${}^{**}r = {}^*n = r$

故当 $k \neq 1$ 即G不连通时, G与 G^{**} 一定不同构.

3. 求图 9.4.4 所示的无向图 G 的两个极小点覆盖集、一个最小点覆盖集及点覆盖数 α_0.

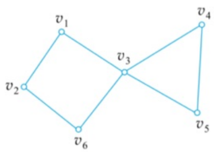


图 9.4.4

极小点覆盖：$\{v_2, v_3, v_5\}$ $\{v_1, v_6, v_4, v_5\}$

最小点覆盖：$\{v_2, v_3, v_5\}$

$\alpha_0 = 3$

10. 举例说明：

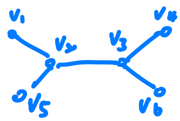
(1) 图的极小支配集不一定是点独立集.

(2) 图的极小支配集不一定是最小支配集.

(3) 图的极大点独立集不一定是最大点独立集.

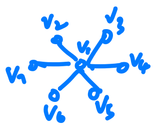
(4) 图的极大匹配不一定是最大匹配.

(1)



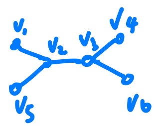
在左图中，$\{v_2, v_3\}$ 是极小支配集但不是点独立集

(2)



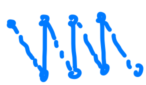
在左图中，$\{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ 是极小支配集但 $\{v_1\}$ 是最小支配集

(3)



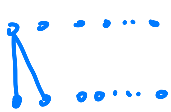
在左图中，$\{v_1, v_5, v_3\}$ 是极大点独立集但 $\{v_1, v_5, v_4, v_6\}$ 是最大点独立集

(4)



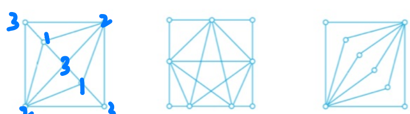
在左图中，实线是极大匹配，虚线是最大匹配

17. n 位教师教 n 门课程，已知每位教师至少能教两门课程，而每门课程至多有两位教师能教，问：能否每位教师正好教一门课？



将教师集和课程集视作二部图的 V_1, V_2，边表示教师能教课程，由题意，$\exists t=2$ s.t. V_1 中顶点至少关联 t 条边，V_2 中顶点至多关联 t 条边，故存在完备匹配，即能每位教师正好教一门课.

21. 求图 9.4.7 所示的各图的点色数.



(a) (b) (c)

图 9.4.7

(a) 不是完全图也不是奇圈，故 $\chi \le \Delta = 4$

有奇圈，故 $\chi \ge 3$，故 $\chi = 3$ 或 4，

如图可用3种颜色着色，故 $\chi = 3$

(b) $\chi \le \Delta = 5$，有奇圈，故 $\chi \ge 3$，有完全图 K_5，故 $\chi \ge 5$，

即 $\chi = 5$

(c) 二部图，$\chi = 2$

28. 设 G^* 为图 9.4.9 所示的平面图 G 的对偶图，画出 G^*，通过求 $\chi(G^*)$ 求 $\chi^*(G)$.

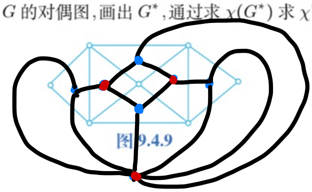
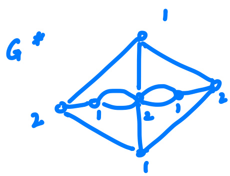


图 9.4.9



$\chi(G^*) \le \Delta(G^*) = 4$

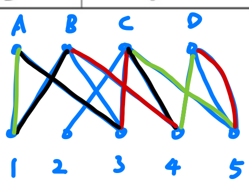
如图可用2个颜色着色，故 $\chi(G^*) = 2$

则 $\chi^*(G) = \chi(G^*) = 2$

33. 某中学高三年级有 5 个班，由 4 名教师（A，B，C，D）为他们授课，周一每名教师为每个班上课的节数如表 9.4.1 所示．问：本年级周一至少要安排多少节课？需要多少个教室？

表 9.4.1

	1 班	2 班	3 班	4 班	5 班
A	1	0	1	0	0
B	1	0	1	1	0
C	0	1	1	1	1
D	0	0	0	1	2



边着色数为安排多少节课

同一种颜色边数为多少个教室

二部图的边色数 $\chi' = \Delta = 4$，

此时，同色最大边数 $\ge 12/4 = 3$，

如左图，可使其 $= 3$.

故至少安排 4节课，3个教室.