4. 设 F 表示一年级大学生的集合，S 表示二年级大学生的集合，M 表示数学专业学生的集合，R 表示计算机专业学生的集合，T 表示选修离散数学课程学生的集合，G 表示星期一晚上参加音乐会的学生的集合，H 表示星期一晚上很迟才睡觉的学生的集合. 下列句子所对应的集合表达式分别是什么？请从备选的答案中挑出来.

(1) 所有计算机专业二年级的学生在选修离散数学课程； 3

(2) 这些且只有这些选修离散数学课程的学生或者星期一晚上去听音乐会的学生在星期一晚上很迟才睡觉； 4

(3) 选修离散数学课程的学生都没参加星期一晚上的音乐会； 5

(4) 这个音乐会只有大学一、二年级的学生参加； 7

(5) 除去数学专业和计算机专业以外的二年级学生都去参加了音乐会. 8

备选答案：

① $T \subseteq G \cup H$	② $G \cup H \subseteq T$	③ $S \cap R \subseteq T$
④ $H = G \cup T$	⑤ $T \cap G = \varnothing$	⑥ $F \cup S \subseteq G$
⑦ $G \subseteq F \cup S$	⑧ $S - (R \cup M) \subseteq G$	⑨ $G \subseteq S - (R \cap M)$

5. 判断下列陈述是否正确.

(1) $\varnothing \subseteq \varnothing$. ✓

(2) $\varnothing \in \varnothing$. ✗

(3) $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$. ✓

(4) $\varnothing \in \{\varnothing\}$. ✓

(5) $\{a,b\} \subseteq \{a,b,c,\{a,b,c\}\}$. ✓

(6) $\{a,b\} \in \{a,b,c,\{a,b\}\}$. ✓

(7) $\{a,b\} \subseteq \{a,b,\{\{a,b\}\}\}$. ✓

(8) $\{a,b\} \in \{a,b,\{\{a,b\}\}\}$. ✗

16. 设集族 $\mathcal{A} = \{\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\},\{\varnothing\}\}$，计算下列表达式.

(1) $\cup\mathcal{A}$.

(2) $\cap\mathcal{A}$.

(1) $\cup \mathcal{A} = \{1,2,3,\varnothing\}$

(2) $\cap \mathcal{A} = \varnothing$

38. 设全集 E 为 n 元集，按照某种给定顺序排列为 $E = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$. 在计算机中可以用长为 n 的 0,1 串表示 E 的子集. 令 m 元子集 $A = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_m}\}$，则 A 所对应的 0-1 串为 $j_1 j_2 \cdots j_n$，其中

$$j_k = \begin{cases} 1, & k = i_1, i_2, \cdots, i_m, \\ 0, & \text{否则}. \end{cases}$$

例如，设 $E = \{1,2,\cdots,8\}$，则 $A = \{1,2,5,6\}$ 和 $B = \{3,7\}$ 对应的 0-1 串分别为 11001100 和 00100010.

(1) 设 A 对应的 0-1 串为 10110010，则 $\sim A$ 对应的 0-1 串是什么？

(2) 设 A 与 B 对应的 0-1 串分别为 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 和 $j_1 j_2 \cdots j_n$，且 $A \cup B, A \cap B, A - B, A \oplus B$ 对应的 0-1 串分别为 $a_1 a_2 \cdots a_n, b_1 b_2 \cdots b_n, c_1 c_2 \cdots c_n, d_1 d_2 \cdots d_n$，求 $a_k, b_k, c_k, d_k, k = 1,2,\cdots,n$.

(1) 01001101

(2) $a_k = \begin{cases} 0, & i_k = j_k = 0 \\ 1, & \text{否则} \end{cases}$

$b_k = i_k \cdot j_k$

$c_k = \begin{cases} 1, & i_k - j_k = 1 \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$

$d_k = |i_k - j_k|$

40. 设 $\mathcal{A} = \{\{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\}$，计算

(1) $P(\mathcal{A})$.

(2) $P(\cup\mathcal{A})$.

(3) $\cup P(\mathcal{A})$.

(1) $P(\mathcal{A}) = \{\varnothing, \{\{\varnothing\}\}, \{\{\{\varnothing\}\}\}, \{\{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\}\}$

(2) $P(\cup\mathcal{A}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$

(3) $\cup P(\mathcal{A}) = \{\{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\} = \mathcal{A}$

45. 在 1–300 之间的整数(1 和 300 包含在内)中分别求满足以下条件的整数个数.

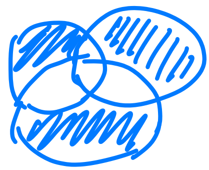
(1) 同时能被 3,5 和 7 整除;

(2) 不能被 3 和 5,也不能被 7 整除;

(3) 可以被 3 整除,但不能被 5 和 7 整除;

(4) 可以被 3 或 5 整除,但不能被 7 整除;

(5) 只被 3,5 和 7 之中的一个数整除.



设 A,B,C 分别为能被 3, 5, 7 整除

(1) $|A\cap B\cap C| = \lfloor 300/\mathrm{lcm}(3,5,7)\rfloor = \lfloor 300/105\rfloor = 2$

(2) $|\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}| = 300 - |A| - |B| - |C| + |A\cap B| + |B\cap C| + |A\cap C| - |A\cap B\cap C|$

$= 300 - \lfloor 300/3\rfloor - \lfloor 300/5\rfloor - \lfloor 300/7\rfloor + \lfloor 300/\mathrm{lcm}(3,5)\rfloor$

$+ \lfloor 300/\mathrm{lcm}(3,7)\rfloor + \lfloor 300/\mathrm{lcm}(5,7)\rfloor - \lfloor 300/\mathrm{lcm}(3,5,7)\rfloor$

$= 300 - 100 - 60 - 42 + 20 + 14 + 8 - 2$

$= 138$

(3) $|A\cap\bar{B}\cap\bar{C}| = |A| - |A\cap B| - |A\cap C| + |A\cap B\cap C|$

$= \lfloor 300/3\rfloor - \lfloor 300/\mathrm{lcm}(3,5)\rfloor - \lfloor 300/\mathrm{lcm}(3,7)\rfloor + \lfloor 300/\mathrm{lcm}(3,5,7)\rfloor$

$= 100 - 20 - 14 + 2$

$= 68$

(4) $|(A\cup B)\cap\bar{C}| = |A\cup B\cup C| - |C| = 300 - |\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}| - |C|$

$= 300 - 138 - \lfloor 300/7\rfloor = 300 - 138 - 42$

$= 120$

(5) $|A\oplus B\oplus C| = |A\cup B\cup C| - |A\cap B| - |A\cap C| - |B\cap C| + 2|A\cap B\cap C|$

$= 162 - 20 - 14 - 8 + 2\times 2$

$= 124$

10. 给定 $\mathbb{Z}^+$ 上的关系 R 和 S: $\forall x,y\in\mathbb{Z}^+$,满足

$$xRy \Leftrightarrow x\text{整除}y;$$
$$xSy \Leftrightarrow 5x \leqslant y.$$

对于下面每个小题,确定哪些有序对属于给定的关系:

(1) 关系:$R\cup S$;有序对:$\langle 2,6\rangle,\langle 3,17\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 0,0\rangle$;

(2) 关系:$R\cap S$;有序对:$\langle 3,6\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,12\rangle$;

(3) 关系:$\sim R$(以全域关系为全集);有序对:$\langle 1,5\rangle,\langle 2,8\rangle,\langle 3,15\rangle$.

(1) $<2,6>$ $<3,17>$ $<0,0>$

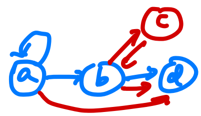
(2) $<2,12>$

(3) 无

16. 设 $A=\{a,b,c,d\}$, R_1,R_2 为 A 上的关系,其中

$$R_1=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,d\rangle\},$$
$$R_2=\{\langle a,d\rangle,\langle b,c\rangle,\langle b,d\rangle,\langle c,b\rangle\}.$$

求 $R_1\circ R_2, R_2\circ R_1, R_1^2, R_2^3$.



$R_1\circ R_2=\{<a,d>,<a,c>\}$

$R_2\circ R_1=\{<c,d>\}$

$R_1^2=\{<a,a>,<a,b>,<a,d>\}$

$R_2^3=\{<b,c>,<c,b>,<b,d>\}$

26. 设 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$, R 为 A 上的关系,R 的关系图如图 2.7.7 所示.

(1) 求 R^2,R^3 的集合表达式;

(2) 求 $r(R),s(R),t(R)$ 的集合表达式.

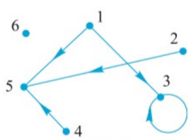


图 2.7.7

(1) $R^2=\{<1,3>,<3,3>\}$

$R^3=\{<1,3>,<3,3>\}$

(2) $r(R)=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>,$
$<4,4>,<5,5>,<6,6>,$
$<1,5>,<2,5>,<1,3>,$
$<4,5>\}$

$s(R)=\{<1,5>,<5,1>,<2,5>,<5,2>,$
$<4,5>,<5,4>,<3,3>,<1,3>,<3,1>\}$

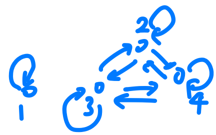
$t(R)=\{<1,5>,<2,5>,<4,5>,<1,3>,<3,3>\}$

31. 设 $A=\{1,2,3,4\}$，R 是 A 上的等价关系，且 R 在 A 上所构成的等价类是 $\{1\},\{2,3,4\}$.

(1) 求 R;

(2) 求 $R\circ R^{-1}$;

(3) 求 R 的传递闭包.



(1) $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,4\rangle,$
$\langle 3,2\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 2,2\rangle,$
$\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$

(2) $R\circ R^{-1}=R\circ R=R^2=R$

(3) $t(R)=R$

36. 设 $A=\{1,2,3,4\}$，在 $A\times A$ 上定义二元关系 R,

$$\forall\langle u,v\rangle,\langle x,y\rangle\in A\times A,\ \langle u,v\rangle R\langle x,y\rangle\Leftrightarrow u+y=x+v.$$

(1) 证明 R 是 $A\times A$ 上的等价关系;

(2) 确定由 R 引起的对 $A\times A$ 的划分.

(1) ① 自反 $x+y=x+y\Leftrightarrow\langle x,y\rangle R\langle x,y\rangle$

② 对称. $\langle u,v\rangle R\langle x,y\rangle\Leftrightarrow u+y=x+v$

$\Leftrightarrow\langle x,y\rangle R\langle u,v\rangle$

③ 传递 $\begin{cases}\langle u,v\rangle R\langle x,y\rangle\Leftrightarrow u+y=x+v\\ \langle x,y\rangle R\langle s,t\rangle\Leftrightarrow x+t=y+s\end{cases}$

$\Rightarrow u+t=v+s\Rightarrow\langle u,v\rangle R\langle s,t\rangle$

故 R 是 $A\times A$ 上的等价关系

(2) $A\times A/R=\{\{\langle u,v\rangle\mid u-v=i\}\mid i=-3,-2,\cdots,3\}$

46. 分别画出下列各偏序集 $\langle A,R_{\preccurlyeq}\rangle$ 的哈斯图，并找出 A 的极大元、极小元、最大元和最小元.

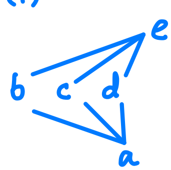
(1) $A=\{a,b,c,d,e,f\}$,

$R_{\preccurlyeq}=\{\langle a,d\rangle,\langle a,c\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,e\rangle,\langle b,e\rangle,\langle c,e\rangle,\langle d,e\rangle\}\cup I_A$.

(2) $A=\{a,b,c,d,e\}$,

$R_{\preccurlyeq}=\{\langle c,d\rangle\}\cup I_A$.

(1)



最大元、极大元：e

最小元、极小元：a

(2)

无最大元、最小元

极大元：a, b, d, e

极小元：c, a, b, e

49. 设 $\langle A, R\rangle$ 为偏序集，在 A 上定义新的关系 S 如下：$\forall x, y \in A, xSy \Leftrightarrow yRx$，称 S 为 R 的对偶关系.

(1) 证明：S 也是 A 上的偏序关系；

(2) 如果 R 是整数集合上的小于等于关系，那么 S 是什么关系？如果 R 是正整数集合上的整除关系，那么 S 是什么关系？

(3) 偏序集 $\langle A, R\rangle$ 和 $\langle A, S\rangle$ 中的极大元、极小元、最大元、最小元等之间有什么关系？

(1) ① 自反： $\forall x \in A$，$xSx \Leftrightarrow xRx$

因为 R 为偏序关系 $\Rightarrow \forall x \in A$，$xRx$

故 S 自反

② 反对称： $xSy \wedge ySx \Rightarrow xRy \wedge yRx \Rightarrow x=y$

③ 传递 $\forall x, y, z \in A$，$xSy \wedge ySz$

$\Rightarrow yRx \wedge zRy$

$\Rightarrow zRx \Rightarrow xSz$

故 S 是 A 上的偏序关系

(2) 大于等于

被整除

(3) 极大元是对方的极小元，

极小元是对方的极大元，

若存在最大元，则为对方最小元，

若存在最小元，则为对方最大元.

5. 设 $X=\{a,b,c,d\}, Y=\{1,2,3\}, f=\{\langle a,1\rangle,\langle b,2\rangle,\langle c,3\rangle\}$,判断下列陈述是否正确.

(1) f 是从 X 到 Y 的二元关系,但不是从 X 到 Y 的函数; ✓

(2) f 是从 X 到 Y 的函数,但不是满射,也不是单射; ✗

(3) f 是从 X 到 Y 的满射,但不是单射; ✗

(4) f 是从 X 到 Y 的双射. ✗

12. 设 $f: S\to T, A$ 和 B 都是 S 的子集,证明:

(1) $f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$;

(2) 举出反例说明等式 $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$ 不是永远成立;

(3) 说明对于什么函数上述等式成立.

(1) $A\cap B\subseteq A \Rightarrow f(A\cap B)\subseteq f(A)$

同理: $f(A\cap B)\subseteq f(B)$

$\Rightarrow f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$

(2) $A=\{1\}$, $B=\{2\}$, $f=\{<1,0>,<2,0>\}$

此时 $f(A\cap B)=\emptyset$, $f(A)\cap f(B)=0$

故 $f(A\cap B)\neq f(A)\cap f(B)$

(3) 单射.

若f为单射, $f(A)\cap f(B)=\{f(x)\mid x\in A\}\cap\{f(x)\mid x\in B\}$

(由单射) $=\{f(x)\mid x\in A\cap B\}$

$=f(A\cap B)$

14. 设 S 为集合, A,B 是 S 的子集, χ_X 表示 X 的特征函数,且

$\chi_A=\{\langle a,1\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,0\rangle,\langle d,0\rangle\}$,

$\chi_B=\{\langle a,0\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,0\rangle,\langle d,1\rangle\}$.

求 $\chi_{A\cap B}$.

$A=\{a,b\}$, $B=\{b,d\}$, $A\cap B=\{b\}$

$\chi_{A\cap B}=\{<a,0>,<b,1>,<c,0>,<d,0>\}$

20. 设 $f, g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, 且

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & x=0,1,2,3, \\ 0, & x=4, \\ x, & x \geqslant 5, \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} \frac{x}{2}, & x \text{ 为偶数}, \\ 3, & x \text{ 为奇数}. \end{cases}$$

(1) 求 $f \circ g$;

(2) 说明 $f \circ g$ 是否为单射、满射、双射.

(1) $(f \circ g)(x) = g(f(x)) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+1), & x=1,3 \\ 3, & x=0,2,\ \geq 5\text{的奇数} \\ 0, & 4 \\ \frac{x}{2}, & >5\text{的偶数} \end{cases}$

(2) $f \circ g$ 不是单射，因为 $(f \circ g)(2) = (f \circ g)(0) = 3$

不是双射

是满射 $\quad 2i\,(i \geq 3) \xrightarrow{f \circ g} 3, 4, 5, \cdots$

$1 \to 1$, $3 \to 2$, 故 $\forall n \in N\ \exists x$ s.t. $f \circ g(x) = n$.

23. 设 f_1, f_2, f_3, f_4 为实数集 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的函数, 且

$$f_1(x)=\begin{cases} 1, & x \geqslant 0, \\ -1, & x<0, \end{cases};\ f_2(x)=x;\ f_3(x)=\begin{cases} -1, & x \text{ 为整数}, \\ 1, & \text{否则}, \end{cases};\ f_4(x)=1.$$

若在 $\mathbb{R}$ 上定义二元关系 $E_i: \forall x, y \in \mathbb{R}, \langle x, y\rangle \in E_i \Leftrightarrow f_i(x)=f_i(y)$, 则 E_i 是 $\mathbb{R}$ 上的等价关系, 称作 f_i 导出的等价关系. 求商集 $\mathbb{R}/E_i, i=1,2,3,4$.

$$\mathbb{R}/E_1 = \{\{x \mid x \geq 0\}, \{x \mid x < 0\}\}$$

$$\mathbb{R}/E_2 = \mathbb{R}/I = \{\{x\} \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{R}/E_3 = \{\mathbb{Z}, \mathbb{R}-\mathbb{Z}\}$$

$$\mathbb{R}/E_4 = \{\mathbb{R}\}$$

28. 设 $n \in \mathbb{Z}^{+}$, 证明

$$(\log n)^{\log n} = n^{\log \log n},$$
$$4^{\log n} = n^2,$$
$$2 = n^{1/\log n},$$
$$2^{\sqrt{2 \log n}} = n^{\sqrt{2/\log n}}.$$

(1) $\log (\log n)^{\log n} = \log n \log\log n = \log n^{\log\log n}$

$\Rightarrow (\log n)^{\log n} = n^{\log\log n}$

(2) $4^{\log n} = 2^{2\log n} = 2^{\log n^2} = n^2$

(3) $\log 2 = \frac{1}{\log n} \log n = 1 \Rightarrow 2 = n^{\frac{1}{\log n}}$

(4) $2^{\sqrt{2\log n}} = (n^{\frac{1}{\log n}})^{\sqrt{2\log n}} = n^{\sqrt{2/\log n}}$