一、（7 分）某射击小组共有 20 名射手，其中一级射手 4 人，二级射手 7 人，三级射手 6 人，四级射手 3 人。一、二、三、四级射手在一次射击中能中十环的概率分别为 0.9、0.7、0.5、0.3。现从该小组中任选一名，求他在一次射击中能中十环的概率。

解：选中一级射手为A，二级为B，三级为C，四级为D，射中十环为E

$$P(E)=P(EA)+P(EB)+P(EC)+P(ED)$$
$$=P(A)P(E|A)+P(B)P(E|B)+P(C)P(E|C)+P(D)P(E|D)$$
$$=\frac{4}{20}\times0.9+\frac{7}{20}\times0.7+\frac{6}{20}\times0.5+\frac{3}{20}\times0.3$$
$$=0.62$$

二、（10 分）若已知男性中有 5%的色盲，女性中有 0.5%的色盲，现在从男女人数相等的人群中随机地挑选一人，恰好是色盲，问此人是男性的概率是多少？

解：男性为M，女性为W，色盲为A

$$P(M|A)=\frac{P(MA)}{P(A)}=\frac{P(A|M)P(M)}{P(A|M)P(M)+P(A|W)P(W)}=\frac{0.05\times0.5}{0.05\times0.5+0.005\times0.5}=\frac{10}{11}$$

三、（15 分）一学生完成同一课程的两次作业，第一次作业合格的概率为p，若第一次作业合格则第二次作业合格的概率也是p，若第一次作业不合格则第二次作业合格的概率是$\frac{p}{4}$。

（1）（5 分）若至少有一次作业合格才可参加期末考试，求他可以参加期末考试的概率；

（2）（10 分）若已知他第二次作业合格了，求他第一次作业合格的概率。

解：(1) 第一次合格为A_1，第二次合格为A_2

$$P=1-P(\overline{A_1}\,\overline{A_2})=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}|\overline{A_1})=1-(1-p)(1-\frac{p}{4})=\frac{5}{4}p-\frac{1}{4}p^2$$

(2)
$$P(A_1|A_2)=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_2)}=\frac{P(A_1)P(A_2|A_1)}{P(A_1)P(A_2|A_1)+P(\overline{A_1})P(A_2|\overline{A_1})}=\frac{p\times p}{p\times p+(1-p)\times\frac{p}{4}}$$
$$=\frac{4p^2}{3p^2+p}=\frac{4p}{3p+1}$$

四、（20 分）一袋球中装有 6 只球，编号为 1,2,3,4,5,6，在袋中同时取 4 只，以X表示取出的 4 只球中的最大号码，求X的分布律，分布函数。

解：$P(4) = \frac{1}{C_6^4} = \frac{1}{15}$，$P(5) = \frac{C_4^3}{C_6^4} = \frac{4}{15}$，$P(6) = \frac{C_5^3}{C_6^4} = \frac{2}{3}$

$$\begin{array}{c} X \\ P \end{array} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{15} & \frac{4}{15} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \qquad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 4 \\ \frac{1}{15}, & 4 \le x < 5 \\ \frac{1}{3}, & 5 \le x < 6 \\ 1, & 6 \le x \end{cases}$$

五、（8 分）一箱产品中有 10 件正品，5 件次品，现从该箱中任取 3 件产品，以X表示取出的 3 件产品中的次品数，求：X的数学期望$E(X)$；

解：$P(0) = \frac{C_{10}^3}{C_{15}^3} = \frac{24}{91}$，$P(1) = \frac{C_5^1 C_{10}^2}{C_{15}^3} = \frac{45}{91}$，$P(2) = \frac{C_5^2 C_{10}^1}{C_{15}^3} = \frac{20}{91}$，$P(3) = \frac{C_5^3}{C_{15}^3} = \frac{2}{91}$

$$E(X) = 1 \times \frac{45}{91} + 2 \times \frac{20}{91} + 3 \times \frac{2}{91} = 1$$

六、（20 分）连续型随机变量X的概率密度函数为

$$f(x) = Ae^{-2|x|}, \qquad (-\infty < x < +\infty),$$

（1）（6 分）求常数A的值；

（2）（7 分）求随机变量X的分布函数；

（3）（7 分）求随机变量X落在区间$(-2,3)$内的概率。

解：(1) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2A\int_0^{+\infty} e^{-2x}dx = -Ae^{-2x}\Big|_0^{+\infty} = A = 1$

(2) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x} e^{-2|x|}dx$

$x \le 0$时，$F(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}$

$x > 0$时，$F(x) = \int_{-\infty}^{0} e^{2x}dx + \int_0^x e^{-2x}dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x}\Big|_0^x = 1 - \frac{1}{2}e^{-2x}$

综上，$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{2x}, & x \le 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-2x}, & x > 0 \end{cases}$

(3) $P(-2 \le X \le 3) = F(3) - F(-2) = 1 - \frac{1}{2}e^{-6} - \frac{1}{2}e^{-4}$

七、（20 分）设随机变量X的概率密度为:

$$f(x) = e^{-x}, \qquad (0 < x < +\infty),$$

求：

（1）（10 分）求$E(X)$；

（2）（10 分）求$D(X)$。

解：(1) $E(X) = \int_0^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$

$= -\int_0^{+\infty} x\, de^{-x} = -xe^{-x} + \int_0^{+\infty} e^{-x} dx$

$= (-xe^{-x} - e^{-x})\Big|_0^{+\infty} = 1$

(2) $D(X) = E\{[X - E(X)]^2\} = E[(x-1)^2]$

$= \int_0^{+\infty} (x-1)^2 f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} (x-1)^2 e^{-x} dx$

$= -\int_0^{+\infty} (x-1)^2 de^{-x} = -(x-1)^2 e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x} \cdot 2(x-1)\,dx$

$= 1 + 2\left(\int_0^{+\infty} xe^{-x} dx - \int_0^{+\infty} e^{-x} dx\right)$

$= 1 + 2\left(e^{-x}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} x\, de^{-x}\right)$

$= 1 + 2\left(-1 - xe^{-x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x} dx\right)$

$= 1 + 2\left(-1 - e^{-x}\Big|_0^{+\infty}\right) = 1$