

2024 秋 “音乐与数学” 第四次作业

(无需提交题面部分, 只提交答题纸)

一、选择题

1. 一个二元关系被称为一个等价关系, 当且仅当它同时具备若干性质. 下列哪一项不是等价关系所要求的性质?
A. 自反性;
B. 对称性;
C. 完备性;
D. 传递性;
E. 以上都要求.
2. 一个代数结构 $(G, *)$ 被称为一个群, 当且仅当它同时具备若干性质. 下列哪一项不是群所必须要求的性质?
A. 结合律: $(a * b) * c = a * (b * c), \forall a, b, c \in G$;
B. 交换律: $a * b = b * a, \forall a, b \in G$;
C. 单位元: G 中存在单位元 e , 满足 $a * e = e * a = a, \forall a \in G$;
D. 逆元素: 对任意 $a \in G$, 存在逆元素 $b \in G$, 使得 $a * b = b * a = e$;
E. 以上都要求.
3. 十二平均律下, 我们将相差若干个八度音程的音 (即不同音组的音) 和不同音名的等音均视为 “等价” 的, 则得到的全部十二个等价类构成音类空间. 请选出下列说法中错误的一项.
A. 在音类空间上, 音类序列 $\flat B, \sharp B, \sharp G, \bar{A}$ 可以由著名的 “巴赫动机” $(\flat B, \bar{A}, \bar{C}, \sharp B)$ 经过 $T_4 * I$ 变换得到;
B. 在某个自然小调内的一段旋律经过严格移调后, 一定存在某个自然小调调式, 使移调后的所有音都落在其中;
C. 在音类空间上, 移调和倒影变换生成的群 $\langle T, I \rangle$ 中的元素满足结合律, 但不满足交换律;
D. 音类空间可以与整数模 12 的同余类集合 \mathbb{Z}_{12} 建立 1-1 对应, \bar{C} 对应 $\bar{0}$, $\sharp C$ 对应 $\bar{1}$, \dots , \bar{B} 对应 $\bar{11}$;
E. (如果上述选项描述都正确, 请选此项).
4. 利用音类空间 \mathcal{PC} 与整数模 12 的同余类集合 \mathbb{Z}_{12} 之间的 1-1 对应, 保持音类 \bar{C} 不变的倒影变换 I 可以描述为 $I: x \mapsto -x \pmod{12}$. 请在下列选项中选出保持音类 $\flat E$ 不变的倒影变换 J 的表达式

- A. $J : x \mapsto 3 - x \pmod{12}$;
- B. $J : x \mapsto 6 - x \pmod{12}$;
- C. $J : x \mapsto 9 - x \pmod{12}$;
- D. $J : x \mapsto 12 - x \pmod{12}$.

5. 下列关于音类空间 \mathcal{PC} 上的变换群的说法中, 正确的有 () 项.

- (a) 由移调变换 T 和倒影变换 I 生成的群 $\mathcal{D} = \langle T, I \rangle$ 同构于正十二边形的变换群, 即二面体群 D_{24} ;
- (b) 群 \mathcal{D} 不是阿贝尔群 (交换群), 但是由移调变换 T 生成的子群 $\mathcal{T} = \langle T \rangle$ 是阿贝尔群;
- (c) 利用音类空间 \mathcal{PC} 与整数模 12 的同余类集合 \mathbb{Z}_{12} 之间的 1-1 对应, 群 \mathcal{D} 中的元素 $T^k * I$ 可以表示为 $T^k * I : x \mapsto k - x \pmod{12}$, $0 \leq x \leq 11$;
- (d) 由移调变换 T 、倒影变换 I 和逆行变换 R 生成的群 $\mathcal{M} = \langle T, I, R \rangle$ 的阶要比 \mathcal{D} 的阶更大, 即 $|\mathcal{M}| > |\mathcal{D}|$.

- A. 0;
- B. 1;
- C. 2;
- D. 3;
- E. 4.

6. 根据勋伯格十二音技术, 给定初始音列的数字形式

$$P_0 = 0, a_1, \dots, a_{11}$$

其中 a_1, \dots, a_{11} 是 $1, \dots, 11$ 的一个排列, 则对正整数 $k : 1 \leq k \leq 11$, 移调音列 P_k 可以写成

$$P_k = k, a_1 + k, \dots, a_{11} + k \pmod{12}$$

请在下列选项中选出倒影音列 I_k 的一般表达式.

- A. $I_k = -k, a_1 - k, \dots, a_{11} - k \pmod{12}$;
- B. $I_k = 2k, 2k - a_1, \dots, 2k - a_{11} \pmod{12}$;
- C. $I_k = -k, -a_1 - k, \dots, -a_{11} - k \pmod{12}$;
- D. $I_k = k, k - a_1, \dots, k - a_{11} \pmod{12}$.

7. 根据勋伯格十二音技术, 由一个初始音列出发生成的音列矩阵中, 共有 () 条互不相同的音列.

- A. 48;
- B. 48 或 24;
- C. 48 或 24 或 12;
- D. 48 或 24 或 18 或 12.

8. 五声音阶 pc 集 $\{\sharp C, \sharp D, \sharp F, \sharp G, \sharp A\}$ 的距离向量为 $(0, 3, 2, 1, 4, 0)$, 则作为其补集的七声音阶 $\{C, D, E, F, G, A, B\}$ 的距离向量为:
- A. $(2, 5, 4, 3, 6, 1)$;
 B. $(2, 4, 5, 3, 6, 1)$;
 C. $(2, 4, 3, 6, 5, 1)$;
 D. $(2, 5, 3, 6, 4, 1)$.
9. 下列有关新黎曼群 $\mathcal{N} = \langle P, R, L \rangle$ 的说法中, 哪一项是错误的?
- A. 新黎曼群中共有 24 个不同的变换;
 B. 可以通过平行变化 P 相互转换的一对大、小三和弦一定不会同时出现在同一条自然大调音阶中;
 C. 存在某个大三和弦, 在被 $R * (P * L)^3 * P$ 作用后得到 C 小三和弦.;
 D. 新黎曼群中, $L * R * P = P * R * L$;
 E. (如果上述选项描述都正确, 请选此项).
10. 下列有关新黎曼群 $\mathcal{N} = \langle P, R, L \rangle$ 的说法中, 哪一项是错误的?
- A. P, R, L 这三个变换都可以仅改变三和弦中的一个音类而保持另外两个不变, 因此在和声进行中使用这三个变换有助于保持和声听感的连贯性;
 B. 新黎曼群可以只由 R 与 L 生成, 因为存在关系式 $P = R * (L * R)^2$;
 C. C 大三和弦经过 $R * L * R$ 变换后可以获得 D 小三和弦;
 D. (如果上述选项描述都正确, 请选此项).

二、音列矩阵

安东·韦伯恩 (Anton Friedrich Wilhelm von Webern, 1883-1945) 作于 1928 年的《交响曲》(Symphony, Op. 21) 采用的初始音列为:

$$P_0: A \sharp F G \flat A E F B \flat B D \sharp C C \flat E$$

请根据十二音技术完成**数字形式**的音列矩阵, 并在正确的位置写出对应音列的名字 (如 P_3, RI_7 等等) .

三、计算题

在以下各题中, 均省略表示等价类的上划线.

1. 求下列 pc 集的距离向量 δ , 并写出其对应的和弦名称 (如: 大三和弦、大小七和弦等) .

$$\{A, C, \flat E\}, \quad \{0, 5, 9\}, \quad \{D, \sharp F, \sharp A\}, \quad \{2, 5, 7, 11\}$$

2. 在音类圆周上画出 G 小三和弦、 $\flat B$ 大三和弦的图形，并回答：它们在倒影变换 I 的作用下分别变成哪个三和弦？
3. 在五度圆周上画出 f 自然小调音阶、 E 自然大调音阶的图形，并回答：它们的关系大（小）调是什么？
4. 卡洛·杰苏阿尔多（Carlo Gesualdo, 1566-1613）的牧歌（madrigal）结尾部分如下图所示。试分析其三和弦的序列，依次写出出现的和弦名称（例如 $d \rightarrow D \rightarrow b$ ），并找出新黎曼群 $\mathcal{N} = \langle P, R, L \rangle$ 中相应的变换所对应的字。



(请打印此页作答)

一、选择题

- ## 二、音列矩阵

三、计算题

- ## 2. G 小三和弦

$\flat B$ 大三和弦

在 I 作用下变为: _____

在 I 作用下变为: _____

- | | |
|----|----------|
| 3. | f 自然小调 |
|----|----------|

E 自然大调

其关系大调是：_____

其关系小调是：_____

4. 和弦进行: _____, 对应变换: _____.