信息学中的概率统计:作业二

截止日期: 2024 年 10 月 18 日 (周五) 下课前。如无特殊情况,请不要提交电子版!

第一题

对于任意 $a \ge 1$,构造**非负**离散随机变量 X,使得 $P(X \ge a \cdot E(X)) = 1/a$ 。

第二题

在课上,我们介绍了 n 重伯努利试验。如果某个随机试验只有两个可能的结果 A 和 \overline{A} ,且 P(A) = p,将 试验独立地重复进行 n 次,令 X 表示结果 A 的发生次数。在课上,我们利用二项式系数的性质证明了 E(X) = np。在本题中,我们将用另一种方法计算 E(X) 和 $E(X^2)$ 。

- (1) 对于任意 $t \in \mathbb{R}$, 计算 $E\left(e^{Xt}\right)$ 。
- (2) 对于任意 $t \in \mathbb{R}$, 证明

$$E\left(e^{Xt}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} \cdot E(X^i).$$

提示: 对于固定的 $0 \le k \le n$, 考虑对 e^{kt} 应用泰勒公式。

(3) 利用上一问中的结论,计算 E(X) 和 $E(X^2)$ 。提示:令 $f(t) = E\left(e^{Xt}\right)$ 。如何利用上一问中的结论,通过 f(t) 求得 E(X) 和 $E(X^2)$?

第三题

在课上,我们考虑了如下球与桶模型:有n个球,每个球都等可能被放到m个桶中的任一个。在本题中,我们考虑m=n的情况,并假设 $n=m\geq 2$ 。

- (1) 随机变量 X_i 表示第 i 个桶中球的数量。对于任意 $i \in \{1, 2, ..., n\}$,证明 $E(X_i) = 1$ 。
- (2) 对于任意 $i \in \{1, 2, ..., n\}$ 和任意 $1 \le k \le n$, 证明 $P(X_i = k) \le \frac{1}{k!}$.
- (3) 定义随机变量 $Y = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, 证明 $P(Y \ge 4\log_2 n) \le 1/n$ 。提示: 考虑使用 Union Bound。
- (4) 证明 $E(Y) \leq 5 \log_2 n$.

第四题

给定离散随机变量 X, 证明对于任意实数 c, $E((X-c)^2) \ge \text{Var}(X)$ 。

第五题

给定离散随机变量 X,假设其期望 E(X) 和标准差 $\sigma(X)$ 均存在。对于任意实数 m,若满足 $P(X \ge m) \ge 1/2$ 且 $P(X \le m) \ge 1/2$,证明 $|E(X) - m| \le \sqrt{2}\sigma$ 。

第六题

令 $X \sim \pi(\lambda)$, 也即随机变量 X 服从参数为 $\lambda > 0$ 的泊松分布。

- (1) 对于任意实数 t, 计算 $E(e^{tX})$ 。
- (2) 证明对于任意实数 x > 0,

$$P((x/\lambda)^X \ge (x/\lambda)^x) \le \frac{e^{-\lambda}(e\lambda)^x}{x^x}$$
.

(3) 证明对于任意 $x > \lambda$,

$$P(X \ge x) \le \frac{e^{-\lambda}(e\lambda)^x}{x^x},$$

且对于任意 $0 < x < \lambda$,

$$P(X \le x) \le \frac{e^{-\lambda}(e\lambda)^x}{x^x}$$
.

(4) 证明

$$P(|X - \lambda| \ge 0.2\lambda) \le 2 \cdot e^{-0.01\lambda}$$