信息学中的概率统计: 作业四

截止日期: 2024 年 11 月 15 日 (周五) 下课前。如无特殊情况,请不要提交电子版!

第一题

一个盒子中有 n 个小球,编号分别为 $1,2,\ldots,n$ 。从盒子中取出 $k \le n$ 个小球,每次等概率从盒子中剩余的小球中取出一个,且每次取完后均不放回。也即,第一次取小球时,每个小球被取出的概率均为 $\frac{1}{n}$ 。第二次取小球时,剩余的 n-1 个小球各自被取出的概率均为 $\frac{1}{n-1}$ 。以此类推,直至一共取出 k 个小球。定义随机变量 X_1,X_2,\ldots,X_k ,其中 X_i ($1 \le i \le k$)表示第 i 次取出小球的编号。

- (1) 对于 $1 \le i < j \le k$,判断 X_i 是否与 X_j 相互独立。
- (2) 计算 X_1, X_2, \ldots, X_k 的联合分布列。
- (3) 对于 $1 \le i \le k$, 计算 X_i 的边际分布列。
- (4) 对于任意 $1 \le i < j \le k$ 和 $1 \le a_i, a_j \le n$, 计算 $P(X_i = a_i \cap X_j = a_j)$ 。
- (5) 利用恒等式 $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, 对于 $1 \le i \le k$, 计算 $E(X_i)$ 和 $\mathrm{Var}(X_i)$ 。
- (6) 对于 $1 \le i < j \le k$,计算 $Cov(X_i, X_j)$ 。

第二题

将 n 个编号为 $1,2,\ldots,n$ 的小球随机打乱,每一种排列等概率出现。用 π_1,π_2,\ldots,π_n 表示随机打乱后每个位置上小球的编号,也即 π_i 表示随机打乱后,位置为 i 的小球的原始编号。对于 1 < i < n,我们称 i 是一个局部极大值,当且仅当 $\pi_i > \pi_{i-1}$ 且 $\pi_i > \pi_{i+1}$ 。令随机变量 X 表示所有 1 < i < n 中局部极大值的总数量。计算 E(X)。

第三题

令随机变量 $X \sim G(p)$, 也即随机变量 X 服从参数为 p 的几何分布。证明

$$E(X^2) = p + E((X+1)^2)(1-p),$$

$$E(X^3) = p + E((X+1)^3)(1-p),$$

并计算 $E(X^2)$ 和 $E(X^3)$ 。

第四题

令 X_1, X_2, \ldots 为一列同分布的离散随机变量。离散随机变量 N 取正整数值,且 N, X_1, X_2, \ldots ,相互独立。在课上,我们证明了 $E\left(\sum_{i=1}^N X_i\right) = E(N) \cdot E(X_1)$ 。

(1) 给出例子使得

$$\operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) \neq E(N) \cdot \operatorname{Var}(X_1).$$

(2) 证明

$$\operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_{i}\right) = E(N) \cdot \operatorname{Var}(X_{1}) + \operatorname{Var}(N)(E(X_{1}))^{2}.$$

第五题

(1) 对于正整数 r 和实数 $0 ,给定 <math>X \sim NB(1,p)$, $Y \sim NB(r,p)$,也即随机变量 X 服从参数为 1,p 的负二项分布,随机变量 Y 服从参数为 r,p 的负二项分布。若 X 和 Y 相互独立,证明 $X+Y \sim NB(r+1,p)$,也即 X+Y 服从参数为 r+1,p 的负二项分布。提示:使用恒等式

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}.$$

(2) 对于正整数 $r,~X_1,X_2,\ldots,X_r$ 为独立同分布的随机变量,且均服从 G(p),也即参数为 p 的几何分布。证明 $X_1+X_2+\cdots+X_r\sim NB(r,p)$ 。