信息学中的概率统计: 作业五

截止日期: 2024年11月29日(周五)下课前。如无特殊情况,请不要提交电子版!

第一题

给定二维随机变量 X,Y。证明 $\mathrm{Corr}(X,Y)=\pm 1$ 当且仅当存在实数 $a\neq 0,b$,使得 P(Y=aX+b)=1。 提示:利用结论(无需证明),若随机变量 Z 满足 $\mathrm{Var}(Z)=0$,则 P(Z=E(Z))=1。

第二题

对于 $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$, $-1 < \rho < 1$, 二维随机变量 $U, V \sim N(0, 0, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ 。本题中,我们将计算 $E(\text{ReLU}(U) \cdot \text{ReLU}(V))$ 。这里, $\text{ReLU}(x) = \max\{x, 0\}$ 。

设二维随机变量 $(X,Y) \sim N(0,0,1,1,\rho)$,令二维随机变量 (R,Θ) 满足 $R \geq 0, \Theta \in [0,2\pi]$,且

$$\begin{cases} X = R \cdot (\sqrt{1 - \rho^2} \cdot \cos \Theta + \rho \cdot \sin \Theta) = R \cdot \sin(\arccos \rho + \Theta) \\ Y = R \sin \Theta \end{cases}$$

- $(1) \ \diamondsuit \ x = r \cdot (\sqrt{1-\rho^2} \cdot \cos\theta + \rho \cdot \sin\theta), \ y = r \sin\theta. \ \text{wit} \ x^2 + y^2 2\rho xy = r^2(1-\rho^2).$
- (2) 计算 R, Θ 的联合密度函数, R 和 Θ 的各自的边际密度函数, 并判断 R 和 Θ 的独立性。
- (3) 计算 $E(ReLU(X) \cdot ReLU(Y))$ 。提示: 利用结论 (无需证明)

$$\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2/2} dx = 2,$$

$$\int_0^{\pi - \arccos \rho} (\rho \cdot \sin^2 \theta + \sqrt{1 - \rho^2} \sin \theta \cos \theta) d\theta = \frac{1}{2} \left(\rho (\pi - \arccos \rho) + \sqrt{1 - \rho^2} \right).$$

- (4) 验证 $(\sigma_1 X, \sigma_2 Y)$ 与 (U, V) 服从相同的分布。
- (5) 计算 $E(\text{ReLU}(U) \cdot \text{ReLU}(V))$ 。

第三题

在课上我们考虑了如下矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$: 对于任意 $1 \leq i,j \leq n,\ A_{i,j} \sim N(0,1),\$ 且不同元素相互独立。计算 $E(\operatorname{trace}(A^3))$ 和 $E(\operatorname{trace}(A^4))$ 。提示:首先考虑 n=1 的情况,并参考作业三第六题。

第四题

(1) 令 X_1, X_2, \ldots, X_n 为独立同分布随机变量,且 $X_i \sim N(0,1)$ 。令 $Y = \sum_{i=1}^n X_i^2$ 。对于任意实数 $t \in [0,1/4)$,证明

$$E(e^{t(Y-n)}) \le e^{2t^2n} \,.$$

提示: 首先考虑 n=1 的情况,并参考作业三第六题,以及作业一第三题的提示。

(2) 对于任意 $0 \le \Delta < 1$, 证明

$$P(Y \ge (1+\Delta)n) \le e^{-n\Delta^2/8}$$
.

提示:根据 $0 \le \Delta < 1$,选择合适的 t 使得 $t \in [0,1/4)$,并使用马尔可夫不等式。

(3) 对于任意 $0 \le \Delta < 1$, 证明

$$P(Y \le (1 - \Delta)n) \le e^{-n\Delta^2/8}$$