信息学中的概率统计：作业一

截止日期：2024 年 9 月 27 日（周五）下课前。**如无特殊情况，请不要提交电子版！**

第一题

对于 n 个事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$，从概率的公理化定义和条件概率的定义出发证明下述结论。

(1) 一般加法公式：

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\le i<j\le n} P(A_iA_j) + \sum_{1\le i<j<k\le n} P(A_iA_jA_k) + \ldots + (-1)^{n-1}P(A_1A_2\ldots A_n)。$$

(2) 一般 Union Bound：

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} P(A_i)。$$

(3) 一般乘法公式：若 $P(A_1A_2\ldots A_n) > 0$，有

$$P(A_1A_2\ldots A_n) = P(A_1)\cdot P(A_2 \mid A_1)\cdot P(A_3 \mid A_1A_2)\cdot \ldots \cdot P(A_n \mid A_1A_2\ldots A_{n-1})。$$

第二题

对于三个事件 A，B 和 C，若 $P(C) > 0$，我们称事件 A 和 B 在事件 C 发生时是条件独立的，当且仅当

$$P(AB \mid C) = P(A \mid C)P(B \mid C)。$$

对于下述命题，从概率的公理化定义和条件概率的定义出发给出证明，或给出反例。

(1) 事件 A 和 B 在事件 C 发生时是条件独立的，且有 $0 < P(C) < 1$，则事件 A 和 B 在事件 $\overline{C}$ 发生时条件独立。这里，事件 $\overline{C}$ 是事件 C 的对立事件。

(2) 事件 A 和 B 相互独立，则对于任意事件 C，若 $P(C) > 0$，事件 A 和 B 在事件 C 发生时是条件独立的。

(3) 事件 A 和 B 相互独立，则事件 A 和事件 $\overline{B}$ 相互独立。这里，事件 $\overline{B}$ 是事件 B 的对立事件。

第三题

在课上，我们考虑了如下球与桶模型：有 $n \ge 1$ 个球，每个球都等可能被放到 $m \ge 1$ 个桶中的任一个。用 $P_{n,m}$ 表示每个桶中至多有一个球的概率。在课上，我们已经证明了，

$$P_{n,m} \le e^{-\frac{n(n-1)}{2m}}。$$

现在，请证明

$$P_{n,m} \geq e^{-\frac{n(n-1)}{2m}} \cdot \left(1 - \frac{8n^3}{m^2}\right)。$$

提示：证明对于任意 $0 \leq x \leq 1/2$,

$$\ln(1-x) \geq -x - x^2。$$

第四题

将一枚骰子投掷 $n \geq 1$ 次，求在 n 次投掷中，六个数字均出现过至少一次的概率。

第五题

某路由器有 A 和 B 两种运行模式。路由器每天有等概率以 A 模式或者 B 模式运行，且每天的运行模式均独立。当以 A 模式运行时，有 90% 的概率网络堵塞，有 10% 的概率网络正常。当以 B 模式运行时，有 10% 的概率网络堵塞，有 90% 的概率网络正常。若某两天观测到网络堵塞，求这两天路由器均以 A 模式运行的概率。

第六题

对于自然数 n，m 和 k，满足 $m \geq 2k$。有 $2n$ 个 $\{1, 2, \ldots, m\}$ 的子集 $A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots, A_n, B_n \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$，满足

- 对于任意 $1 \leq i \leq n$，有 $|A_i| = |B_i| = k$；
- 对于任意 $1 \leq i \leq n$，有 $A_i \cap B_i = \emptyset$；
- 对于任意 $1 \leq i, j \leq n$，若 $i \neq j$，有 $A_i \cap B_j \neq \emptyset$。

(1) 考虑一个 $\{1, 2, \ldots, m\}$ 的随机排列，每一种排列均等概率出现。对于任意 $1 \leq i \leq n$，事件 U_i 表示在随机排列中，集合 A_i 中的元素均排在 B_i 前面。证明

$$P(U_i) = \frac{1}{\binom{2k}{k}}。$$

(2) 证明 $n \leq \binom{2k}{k}$。提示：考虑事件 $\bigcup_{i=1}^{n} U_i$ 的概率。

(3) 对于 $n = \binom{2k}{k}$，构造满足条件的 $A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots, A_n, B_n \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$。这里 m 可取任意自然数。