复杂度

https://github.com/CoderMJLee

http://cnblogs.com/mjios

什么是算法

- 算法是用于解决特定问题的一系列的执行步骤

```java
// 计算a跟b的和
public static int plus(int a, int b) {
    return a + b;
}

// 计算1+2+3+...+n的和
public static int sum(int n) {
    int result = 0;
    for (int i = 1; i <= n; i++) {
        result += i;
    }
    return result;
}
```

- 使用不同算法，解决同一个问题，效率可能相差非常大
  - 比如：求第 n 个斐波那契数（fibonacci number）

如何评判一个算法的好坏?

```java
// 计算1+2+3+...+n的和
public static int sum1(int n) {
    int result = 0;
    for (int i = 1; i <= n; i++) {
        result += i;
    }
    return result;
}

// 计算1+2+3+...+n的和
public static int sum2(int n) {
    return (1 + n) * n / 2;
}
```

■ 如果单从执行效率上进行评估，可能会想到这么一种方案

□ 比较不同算法对同一组输入的执行处理时间

□ 这种方案也叫做：事后统计法

■ 上述方案有比较明显的缺点

□ 执行时间严重依赖硬件以及运行时各种不确定的环境因素

□ 必须编写相应的测算代码

□ 测试数据的选择比较难保证公正性

■ 一般从以下维度来评估算法的优劣

□ 正确性、可读性、健壮性（对不合理输入的反应能力和处理能力）

□ 时间复杂度（time complexity）：估算程序指令的执行次数（执行时间）

□ 空间复杂度（space complexity）：估算所需占用的存储空间

大O表示法（Big O）

■ 一般用大O表示法来描述复杂度，它表示的是数据规模 n 对应的复杂度

■ 忽略常数、系数、低阶

- 9 >> $O(1)$
- $2n + 3$ >> $O(n)$
- $n^2 + 2n + 6$ >> $O(n^2)$
- $4n^3 + 3n^2 + 22n + 100$ >> $O(n^3)$
- 写法上，n^3 等价于 n^3

■ 注意：大O表示法仅仅是一种粗略的分析模型，是一种估算，能帮助我们短时间内了解一个算法的执行效率

对数阶的细节

- 对数阶一般省略底数

$$\log_2 n = \log_2 9 * \log_9 n$$

- 所以 $\log_2 n$ 、$\log_9 n$ 统称为 $\log n$

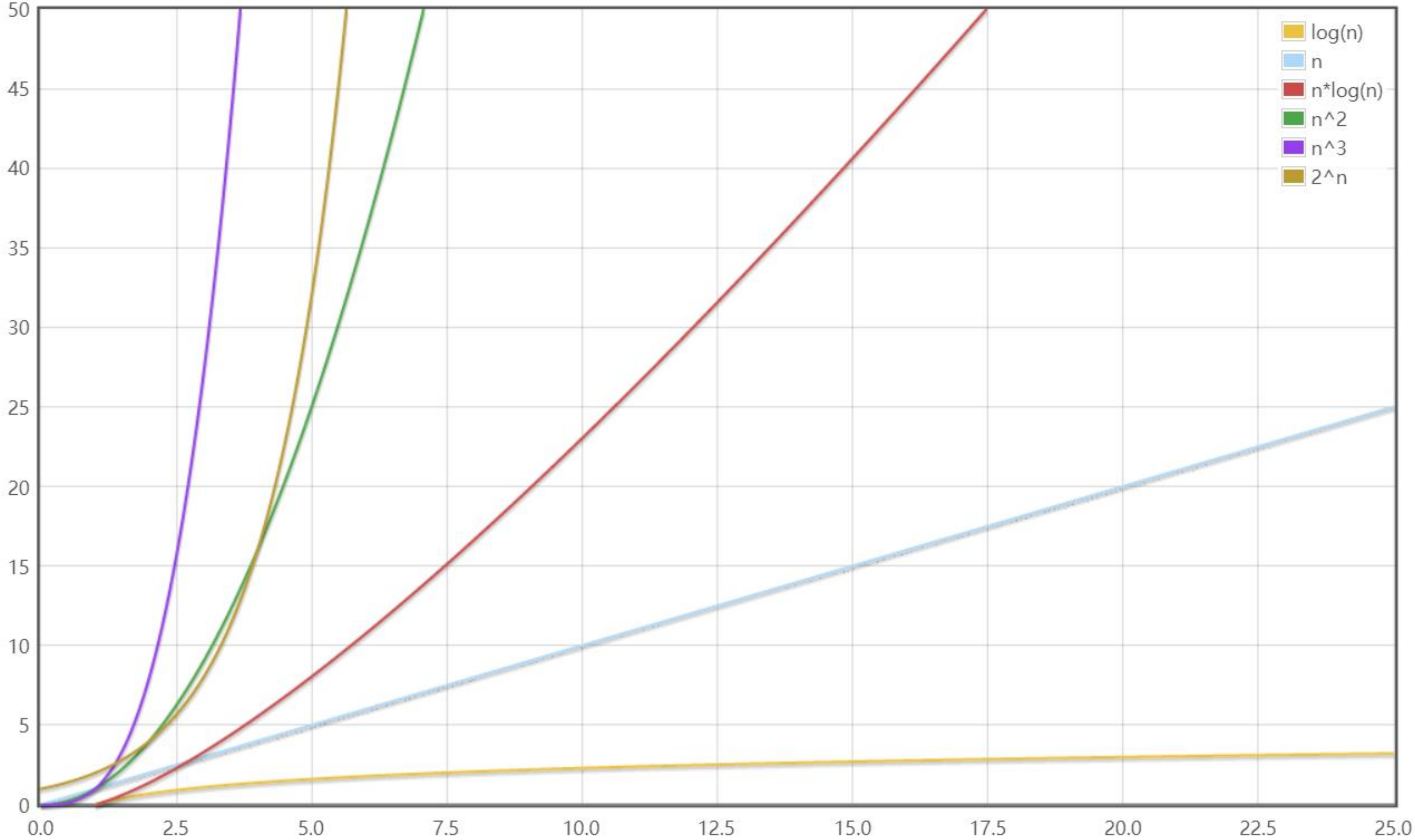
常见的复杂度

执行次数	复杂度	非正式术语
12	O(1)	常数阶
$2n+3$	O(n)	线性阶
$4n^2+2n+6$	O(n^2)	平方阶
$4\log_2 n+25$	O(logn)	对数阶
$3n+2n\log_3 n+15$	O(nlogn)	nlogn阶
$4n^3+3n^2+22n+100$	O(n^3)	立方阶
2^n	O(2^n)	指数阶

- O(1) < O(logn) < O(n) < O(nlogn) < O(n^2) < O(n^3) < O(2^n) < O(n!) < O(n^n)

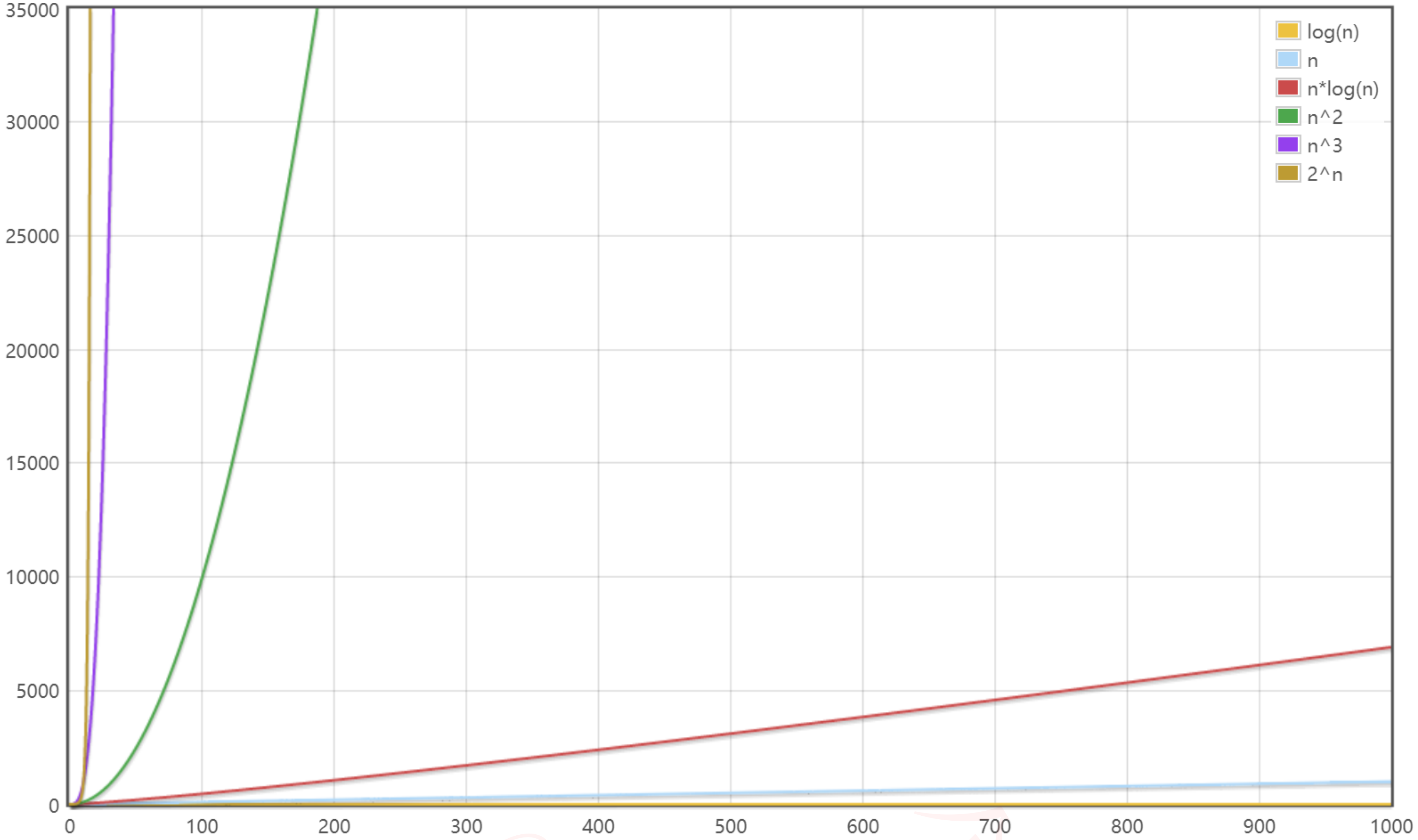
- 可以借助函数生成工具对比复杂度的大小
  - https://zh.numberempire.com/graphingcalculator.php

数据规模较小时



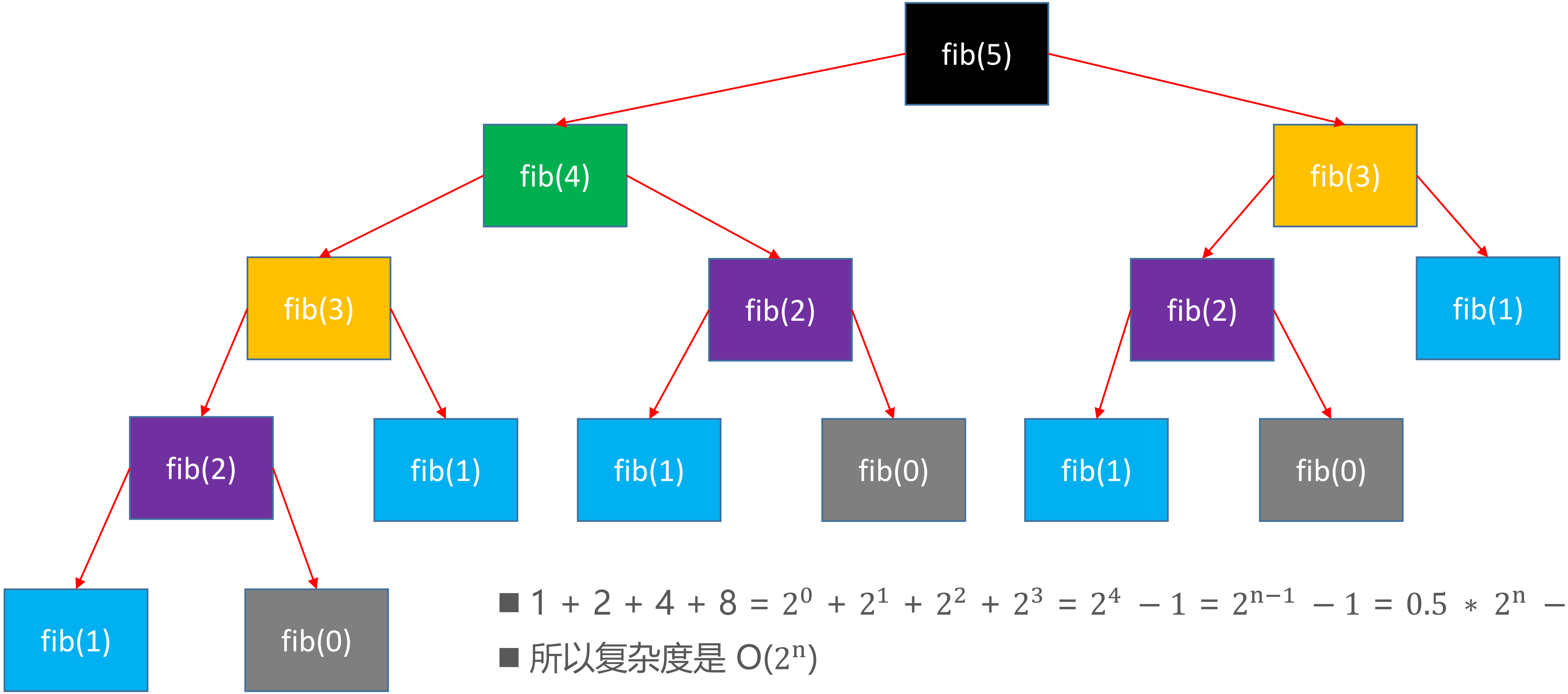
log(n)
n
n*log(n)
n^2
n^3
2^n
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0
12.5
15.0
17.5
20.0
22.5
25.0

数据规模较大时



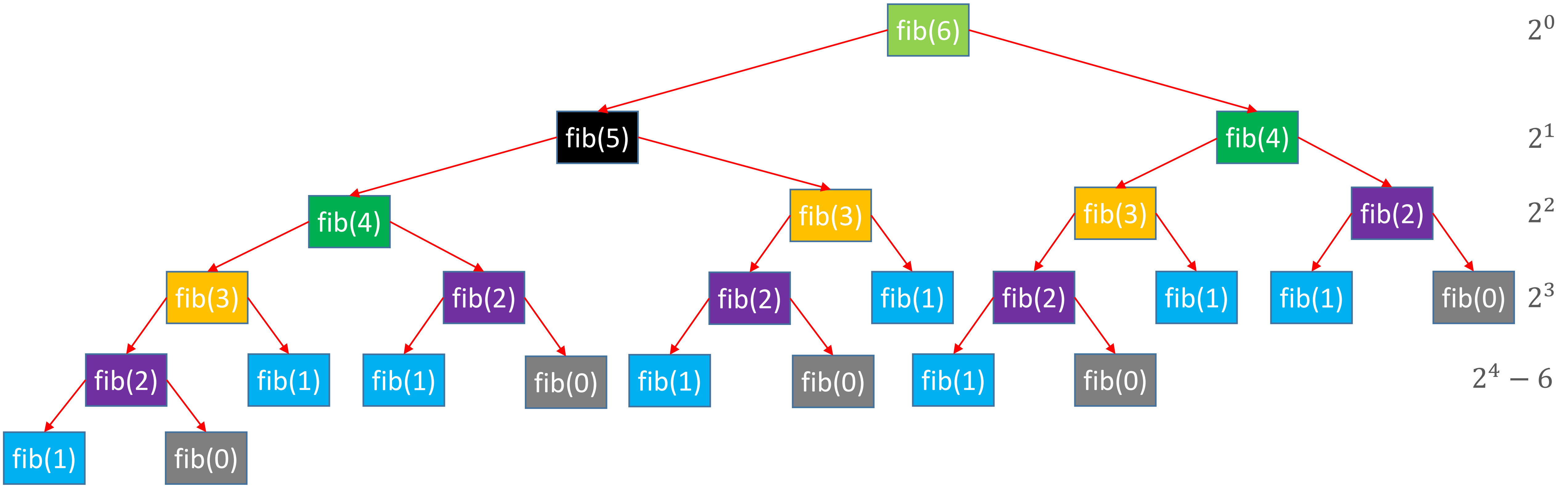
35000
30000
25000
20000
15000
10000
5000
0
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000
log(n)
n
n*log(n)
n^2
n^3
2^n

fib函数的时间复杂度分析



- $1 + 2 + 4 + 8 = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 = 2^4 - 1 = 2^{n-1} - 1 = 0.5 * 2^n - 1$
- 所以复杂度是 $O(2^n)$

fib函数的时间复杂度分析



■ 呈现的是指数级增长的趋势

fib函数的时间复杂度分析

$O(2^n)$

```java
public static int fib1(int n) {
    if (n <= 1) return n;
    return fib1(n - 2) + fib1(n - 1);
}
```

$O(n)$

```java
public static int fib2(int n) {
    if (n <= 1) return n;

    int first = 0;
    int second = 1;
    while (n-- > 1) {
        second += first;
        first = second - first;
    }
    return second;
}
```

- 他们的差别有多大?
  - 如果有一台1GHz的普通计算机，运算速度 10^9 次每秒（ n 为 64 ）
  - O(n) 大约耗时 $6.4 * 10^{-8}$ 秒
  - $O(2^n)$ 大约耗时 584.94 年
  - 有时候算法之间的差距，往往比硬件方面的差距还要大

- Something interesting
  - 我是一个斐波那契程序员
  - 因为我每天都在改昨天和前天的bug

斐波那契的线性代数解法 – 特征方程

$$F(n) = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n. \qquad x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}. \qquad c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

```java
public static int fib3(int n) {
    double c = Math.sqrt(5);
    return (int)((Math.pow((1 + c) / 2, n) - Math.pow((1 - c) / 2, n)) / c);
}
```

时间复杂度：视为 O(1)

算法的优化方向

- 用尽量少的存储空间
- 用尽量少的执行步骤（执行时间）
- 根据情况，可以
  - 空间换时间
  - 时间换空间

多个数据规模的情况

```java
public static void test(int n, int k) {
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        System.out.println("test");
    }

    for (int i = 0; i < k; i++) {
        System.out.println("test");
    }
}
```

$O(n + k)$

更多知识

- 更多复杂度相关的知识，会在后续讲解数据结构、算法的过程中穿插
- 最好、最坏复杂度
- 均摊复杂度
- 复杂度震荡
- 平均复杂度
- ……

leetcode

- 一个用于练习算法的好网站
- https://leetcode.com/
- https://leetcode-cn.com/

- 斐波那契数
- https://leetcode-cn.com/problems/fibonacci-number/