1.导语

1.1 导语的导语

引出“网络”的概念，网络无处不在，既包括实物的网络，如电网、路网，也包括虚拟的抽象的网络，如供应链网络。网络问题中的核心是高效的将某个实体从一个点移动到另一个点。

1.2 网络流中的三个基本问题

（1）最短路径问题。求从一个点到另一个点的最短路

（2）最大流量问题。在弧有容量的条件下，求两点间的最大流量

（3）最小费用流问题。在弧有成本（和容量）的条件下，网络中的两点（或多点）间进行传输如何使费用最省。

这些问题一旦规模稍大，可行的方案数将爆炸式增长，因此不能用枚举的方法进行求解，这本书研究的主要内容是对网络流问题的建模以及寻找高效的（至少是可行的）算法进行求解。

1.3 网络流模型与几种经典的特殊情况

1）最小费用流问题 Minimum Cost Flow Problem

$$min \sum_{(i,j)\in A} cij * xij$$

$$s.t. \sum_{j} xij - \sum_{j} xji = bi \ \forall i$$

$$lij < xij < uij \ \forall (i,j)$$

可用于产品从制造厂到仓库或从仓库到零售商的分销问题；原材料和中间产品通过生产线中的各个加工站之间的流动问题；汽车通过城市街道网络的路线；电话系统的呼叫线路问题。

2）最短路问题 Shortest path problem

b（s）=1、b（t）=-1 和 b（i）=0 的最小费用流问题

3）最大流量问题 Maximum flow problem.

引入一个额外的弧（t，s），c=-1，上限为∞，其余弧有上限无成本，b（i）=0，问题转换为最小费用流问题，常用于管道网络中石油产品的最大稳态流量，道路网络中的汽车流量，电信网络中的信息流量，以及电力网络中的电流量问题

4）分配问题 Assignment problem

点集分为两个 N1 和 N2（|N1|=|N2|），对于$i \in N1$，$b(i) = 1$，对于$i \in N2$，$b(i) = -1, uij = 1$，问题转化为最小费用流问题，可用于将人员分配到项目，将工作分配给机器，将租户分配到公寓，将医学院毕业生分配到可用的实习岗位

5）运输问题 Transportation problem.

点集分为两个 N1 和 N2，对于$i \in N1$，$b(i) > 0$，对于$i \in N2$，$b(i) < 0$，问题转换为最小费用流问题

6）流通问题 Circulation problem

对于所有节点，b(i)=0 的最小费用流问题。如果某条弧必须被使用（如航空公司需要在城市 i 与城市 j 之间提供服务），将该弧的下限 uij=0，可用于航空公司的航线安排表的设计

1.4 最小费用流问题的推广

1）凸费用流问题 Convex cost flow problems

成本是流量的凸函数的最小费用流问题，可用于由于电阻导致的电力网络功率损耗；城市交通网络的拥塞成本以及通信网络的扩展成本

2）广义网络流问题 Generalized flow problems

特点："弧"本身会产生或消耗"流"，此时可添加μij表示与弧相关的乘子。可用于通过电线的电力传输，功率随行进距离而损失；管道或运河中的水流通过渗漏或蒸发而失去；易腐商品的运输，以及现金管理方案，其中弧表示投资机会，乘数表示投资价值的升值或贬值

3）多商品流问题 Multicommodity flow problems

最小费用流问题描述了单一类商品在网络上的流动，多商品流问题即为几种商品在同一网络上流动。可用于将乘客从不同的来源运输到城市中的不同目的地；非均质油轮的航路（在速度，承载能力和运营成本方面均非均质）；从生产谷物的国家到食用谷物的国家之间运输不同谷物品种；在通信网络中不同始发目的地对之间的消息传输。

1.5 其他网络模型

1）最小生成树问题 Minimum spanning tree problem

生成覆盖无向网络中所有节点的树。可用于建设跨越多个城市的高速公路或铁路；铺设连接海上钻探现场，炼油厂和消费市场的管道；设计本地接入网；在控制面板上进行电线连接

2）匹配问题 Matching problems

特点是每个节点最多使用到该集中的一个弧，因此匹配问题中个节点最多与一个其他节点匹配，并且某些节点可能不与任何其他节点匹配。

1.6 一些网络流的应用

1）房屋重新分配

2）钢梁的分类问题

核心思路在于将所有类型的钢梁作为一条链路，问题即可转化为最短路问题

$$cij = Kj + Cj \sum_{k=i+1}^{j} Dk$$

3）比赛问题

该问题没有特定的目标函数，而是寻找是否存在可行解，核心在于巧妙的表达获胜

$$\sum_{j} xij + (i-1)c - \sum_{j} xji = ai, \forall i \in N$$

$$0 \le xij \le c$$

随笔：看这一段时由于英语水平不过关，把问题理解错了，得到了该问题的一个变体

考虑 n 个团队之间的循环锦标赛，假设每个团队参与的对战次数为 c 次。 假设没有游戏以平局结束。ai（1 <= i <= n）表示在比赛结束时第 i 队获得的胜利次数。 我们如何确定给定的一组非负整数 a1,a2,...,an 能否代表 n 支球队的获胜记录？

节点 i（i∈N）表示团队 i，有向弧（i，j）表示 i 队战胜 j 队

$$\sum_{j,j\ne i} xij = ai, \forall i \in N$$

$$\sum_{j,j\ne i} xij + \sum_{j,j\ne i} xji = c, \forall i \in N$$

$$xij + xji \le 1, \forall i, j$$

4）移山填海

简单的最小成本流问题

5）打字机更新问题

6）配对立体扬声器

7）测量金属物体的均质性

8）电网

凸费用流问题

9）指定能源政策

10）学校的种族平衡

一种多商品流问题

练习

1.1

（1）设弧（t,s）,b(t)=b(s)=0，uts=1，cts=-M

（2）设虚拟节点 t，uit=1，cit=-M，i∈N2，uti=∞，i∈N1

（3）设虚拟节点 s，t，usi=d（i），i∈N1，uit=-d（i），i∈N2，uts=∞，cts=-M

1.2

设虚拟节点 s，d（s）=demand-supply，csj=-Pj，j∈N2

1.3

$$cij = Kj + \sum_{k=i+1}^{j} ceil\left(\frac{Dk}{floor\left(\frac{Lj}{Lk}\right)}\right)(Cj - \beta(Lj\%Lk))$$

1.4

首先，if 人数！=任务数，补充虚拟节点

b（i）=1，b（j）=-1，uij=1，cij=-dij

1.5

兼容的男女 cij=-1

1.6

（1）先分类，设棋盘上第 a 行第 b 列的格子∈N1，a+b 是偶数，其余格子∈N2，如果

节点 i 与节点 j 相邻，cij=-1，看最终结果是否等于格子总数的一半

（2）

1.8

，假设家庭总人数=汽车总容量，设家庭为节点 i，汽车为节点 j，b（i）=家庭成员数，b（j）=-容量，uij=1