

T319 - Introdução ao Aprendizado de Máquina: *Regressão Linear (Parte I)*



Inatel

Felipe Augusto Pereira de Figueiredo
felipe.figueiredo@inatel.br

Motivação

- **Exemplo 1:** Estimar o preço de casas.

5 quartos, 3 vagas na garagem, 1 piscina, cond. de luxo, 500 m^2



R\$ 1.000.000,00

1 quarto, sem vaga na garagem, bairro afastado, 70 m^2



R\$ 200.000,00

2 quartos, 1 vaga na garagem, centro, 200 m^2

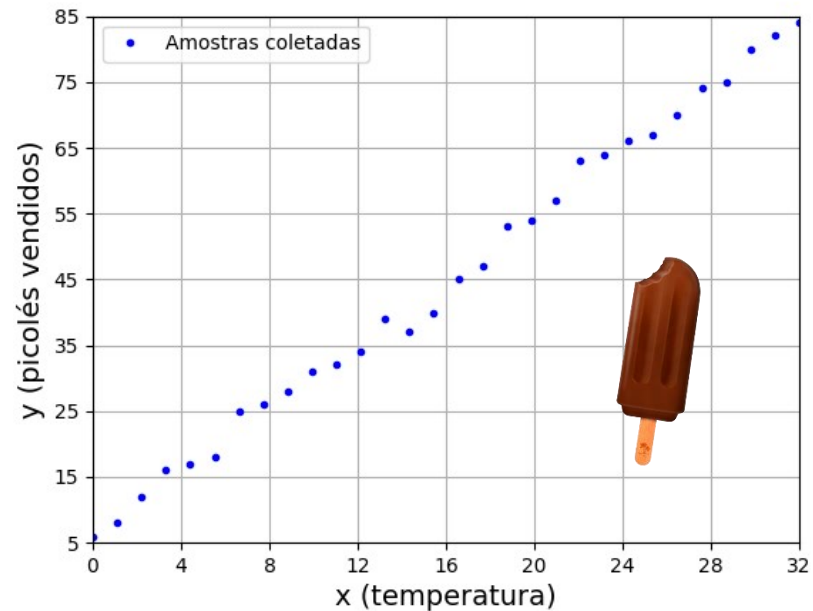


???

- Podemos usar **regressão** para encontrar uma relação matemática, $h(x)$, entre o n° de quartos, n° de vagas na garagem, piscina, localização, área, etc. de uma casa e seu valor.
- **Objetivo:** estimar o valor de casas que serão colocadas à venda.

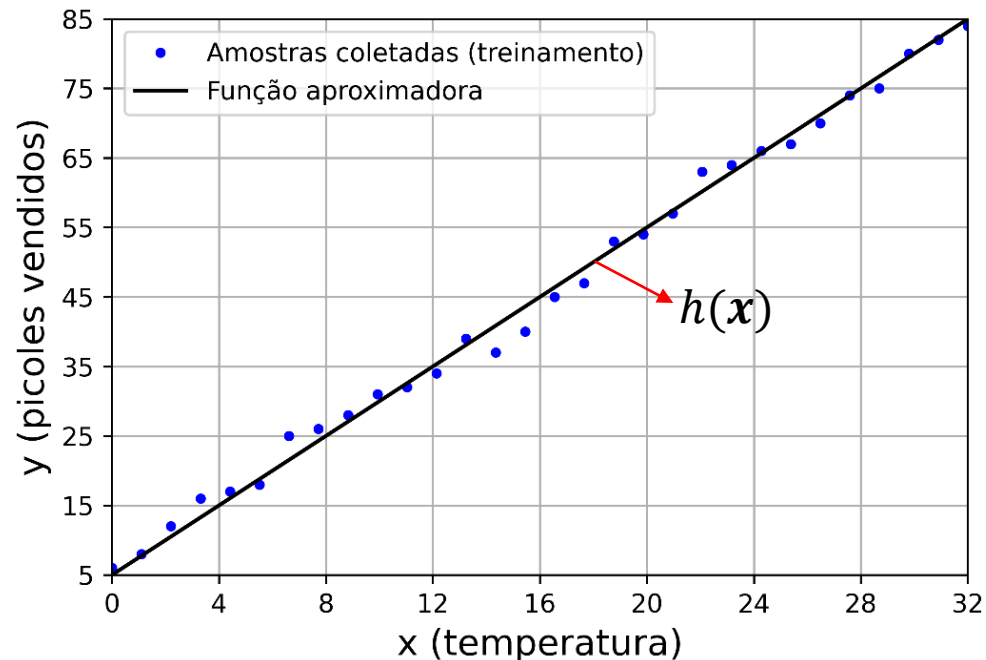
Motivação

- **Exemplo 2:** Estimar as vendas de picolés.



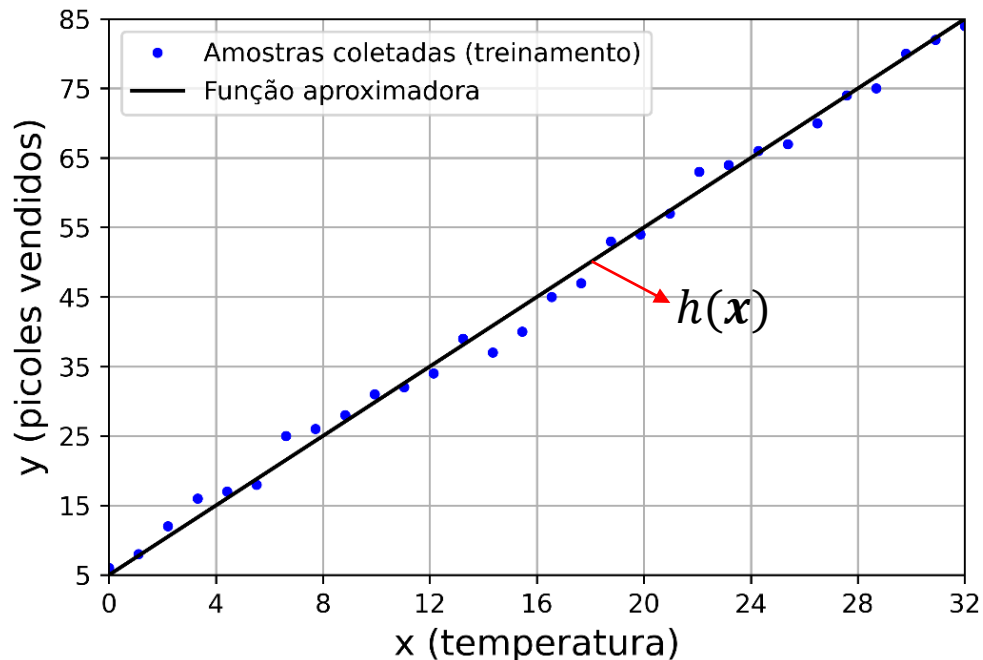
- Podemos usar regressão para encontrar um mapeamento, $h(x)$, entre a temperatura média de um dia e a quantidade de picolés vendidos.
- **Objetivo:** reduzir o desperdício e aumentar os lucros.

Regressão linear



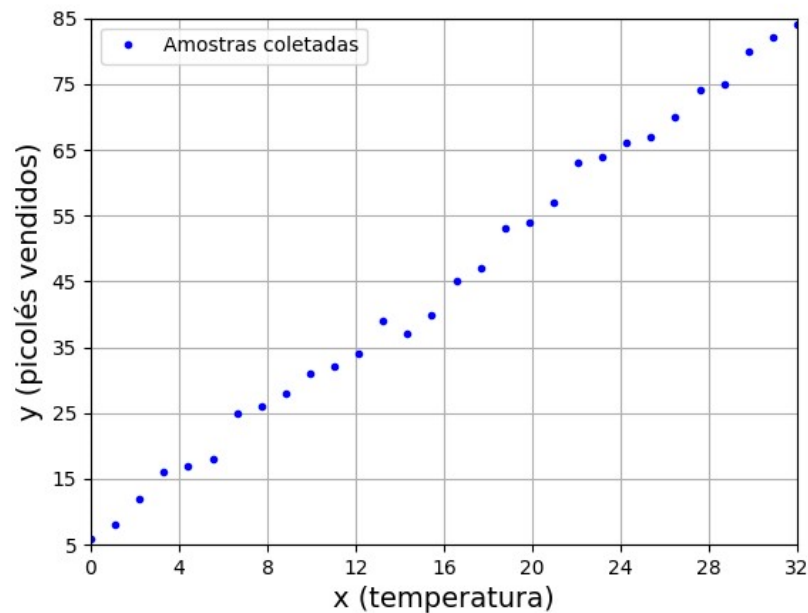
- É um dos mais simples, antigos e conhecidos algoritmos de aprendizado de máquina.
- Regressão linear também é conhecida como ***aproximação de funções*** ou ***ajuste de curvas***.
- Vai nos dar ***intuições*** importantes para o ***entendimento*** de ***algoritmos mais complexos***, como ***classificadores*** e ***redes neurais***.

Qual o objetivo da regressão linear?



- **Objetivo:** encontrar uma função, $h(x)$, que **mapeie** as entradas, x , em uma variável de saída $\hat{y} = h(x)$, de tal forma que $h(x)$ se ajuste aos dados coletados de **forma ótima**.
 - Ótimo no sentido da **minimização da diferença** entre as previsões feitas por $h(x)$, i.e., os valores de \hat{y} , e os valores esperados de saída, y .
- No contexto da regressão linear, nos chamamos as entradas, x , de **atributos** e os valores esperados de saída, y , de **rótulos**.

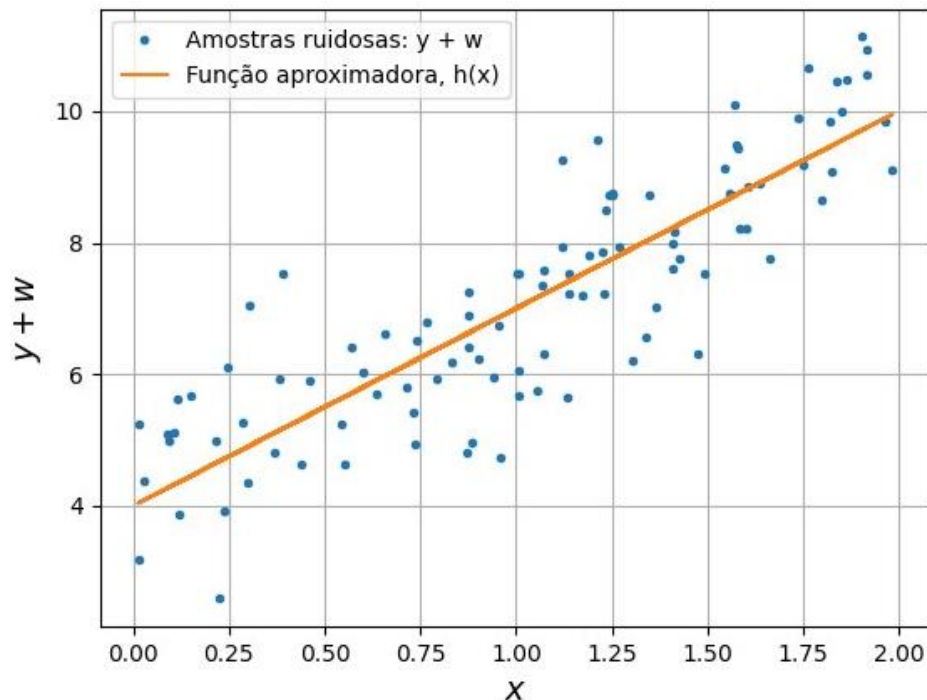
Relação matemática real entre x e y



Não existe realmente uma função por trás desse comportamento, mas podemos encontrar uma função que o aproxima com regressão.

- Na grande maioria dos casos, ***não existe*** um ***relação matemática***, i.e., uma função, que realmente ***descreve*** a ***relação entre as entradas, x , e as saídas esperadas, y*** , dos dados em um conjunto.
- Porém, mesmo nestes casos, ainda podemos tentar modelar a relação entre x e y da melhor forma possível usando regressão.
- Quando essa função existe, a chamamos de ***função verdadeira*** ou ***objetivo***, a qual é, normalmente, denota por $f(x)$.

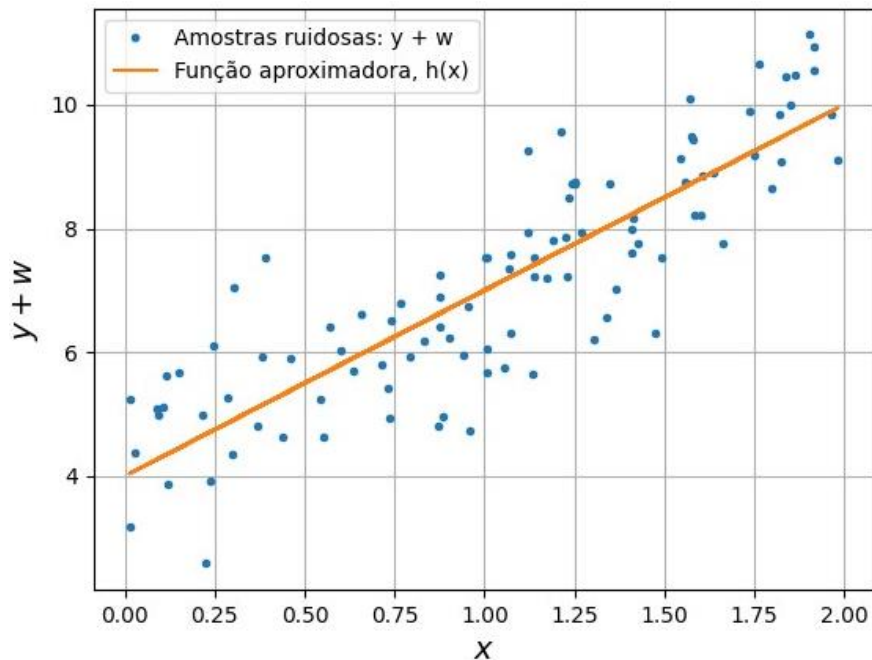
Dados ruidosos



OBS.: w representa o ruído contaminando os dados.

- Em geral, em problemas de regressão, lidamos com ***dados que estão sujeitos a ruído***.
- Exemplos de introdução de ruído aos dados:
 - **Previsão de preços de imóveis:** os preços de imóveis podem ser influenciados por mudanças na taxa de juros, inflação, preferências do comprador, valor sentimental, etc.
 - **Previsão de preços de ações:** os preços de ações podem ser influenciados por notícias políticas, mudanças econômicas, eventos globais, etc.
- Nos nossos exemplos, vamos modelar o ruído como uma variável aleatória Gaussiana.

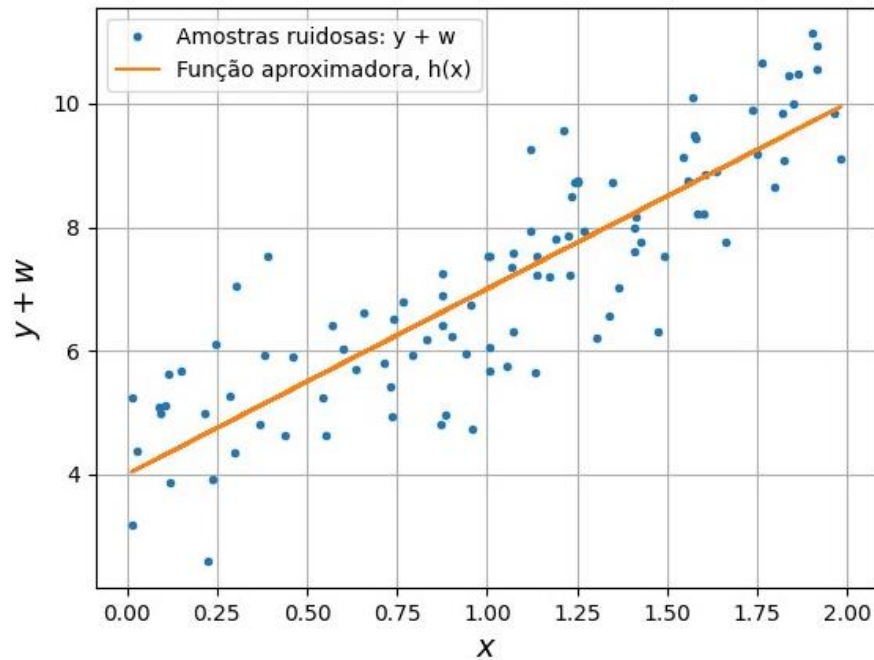
Regressão linear



OBS.: w representa o ruído contaminando os dados.

- Assim, o **objetivo** da regressão linear é encontrar uma função $h(x)$ que descreva a relação entre os **valores coletados**, x e y , **mesmo que os dados estejam corrompidos por ruído**.
- Em outras palavras, a regressão busca capturar o **padrão geral por trás dos dados ruidosos**.
- Esse conjunto de valores coletados, ou experiências prévias, será chamado de **conjunto de treinamento**.

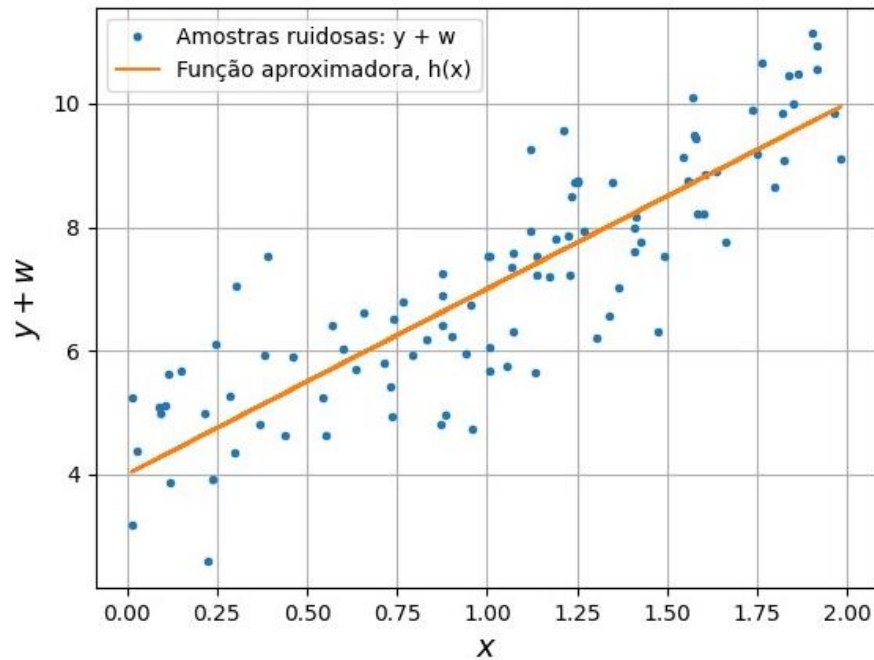
Qual é o paradigma de aprendizado?



OBS.: w representa o ruído contaminando os dados.

- Dado que possuímos um **conjunto** de valores de entrada, x (os **atributos**), e os seus respectivos valores esperados de saída, y (os **rótulos**), **que tipo de aprendizado é realizado pela regressão linear?**

Qual é o paradigma de aprendizado?



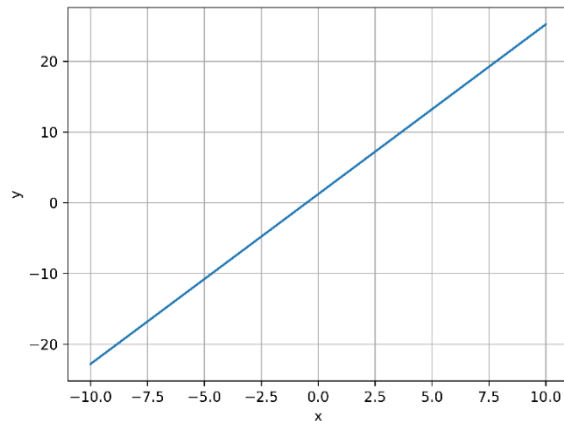
OBS.: w representa o ruído contaminando os dados.

- Dado que possuímos um **conjunto** de valores de entrada, x (os **atributos**), e os seus respectivos valores esperados de saída, y (os **rótulos**), **que tipo de aprendizado é realizado pela regressão linear?**

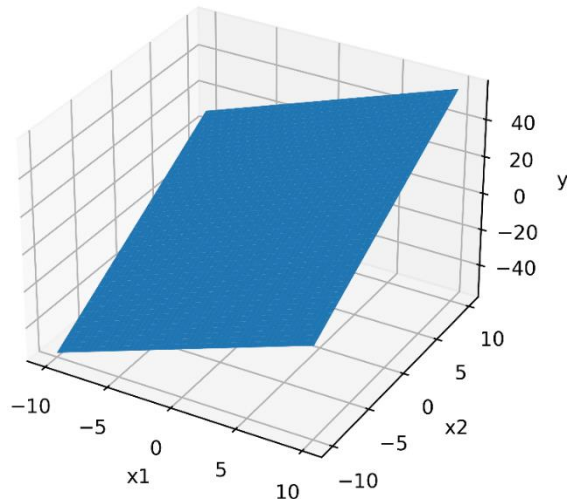
**Aprendizado
supervisionado**

Por que linear?

$$h(x_1) = a_0 + a_1x_1 \text{ (reta)}$$



$$h(\mathbf{x}) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 \text{ (plano)}$$



- A **regressão** é chamada de **linear** porque a saída da **função aproximadora**, \hat{y} , é modelada como sendo uma **combinação linear dos atributos**, \mathbf{x} .
- Ou seja, usamos uma **função linear** para modelar o relacionamento entre \mathbf{x} e y .
- Por exemplo, com um atributo, x_1 , temos a equação de uma **reta**:

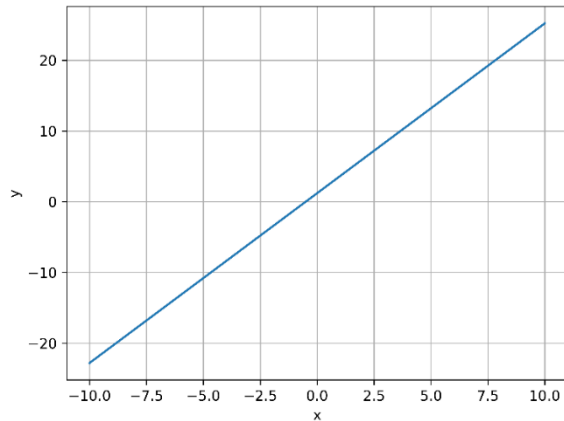
$$\hat{y} = h(\mathbf{x}) = a_0 + a_1x_1.$$

- Já com dois atributos, x_1 e x_2 , temos a equação de um **plano**:

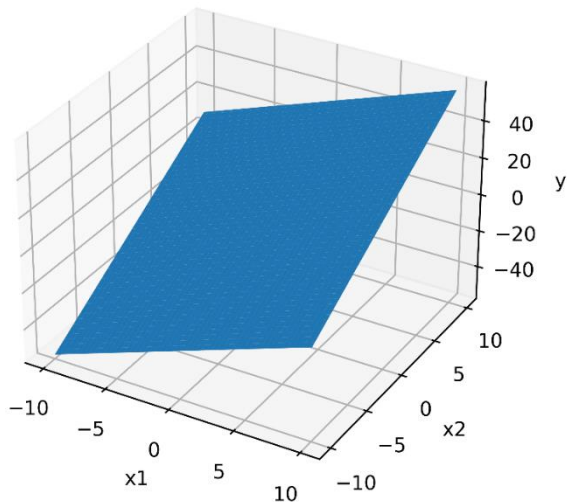
$$\hat{y} = h(\mathbf{x}) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2.$$

Por que linear?

$$h(x_1) = a_0 + a_1 x_1 \text{ (reta)}$$



$$h(\mathbf{x}) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 \text{ (plano)}$$



- Uma **generalização** para qualquer **número de atributos**, K , é dada pela equação do **hiperplano**:
$$\hat{y} = h(\mathbf{x}) = a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_K x_K = a_0 + \sum_{i=1}^K a_i x_i.$$

Número de atributos
- O **hiperplano** será o **primeiro formato** de **função aproximadora** (também, chamado de **modelo**) que iremos utilizar.
- O **modelo** é definido pela **equação** e pelos **pesos**, $a_i, \forall i$.
- Existem outros formatos de funções (i.e., modelos), como os **polinômios**, os quais veremos mais adiante.

Por que linear?

Observação

- A palavra **linear** no contexto da regressão significa “**linear com relação aos pesos**” e não com relação aos **atributos**, x .
- Desta forma, os seguintes **modelos** também são lineares com relação aos pesos:

$$\left. \begin{array}{l} \checkmark \hat{y} = h(x) = a_0 + a_1 \log x_1 + a_2 \cos x_2 \\ \checkmark \hat{y} = h(x) = a_0 + a_1 e^{x_1} \\ \checkmark \hat{y} = h(x) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3 \end{array} \right\}$$

Mesmo não tendo um mapeamento linear das entradas na saída, continuamos tendo uma combinação linear dos atributos em relação aos pesos.

- Exemplo de um modelo não-linear: $\hat{y} = h(x) = \frac{a_0 x_1}{a_1 + x_1}$.

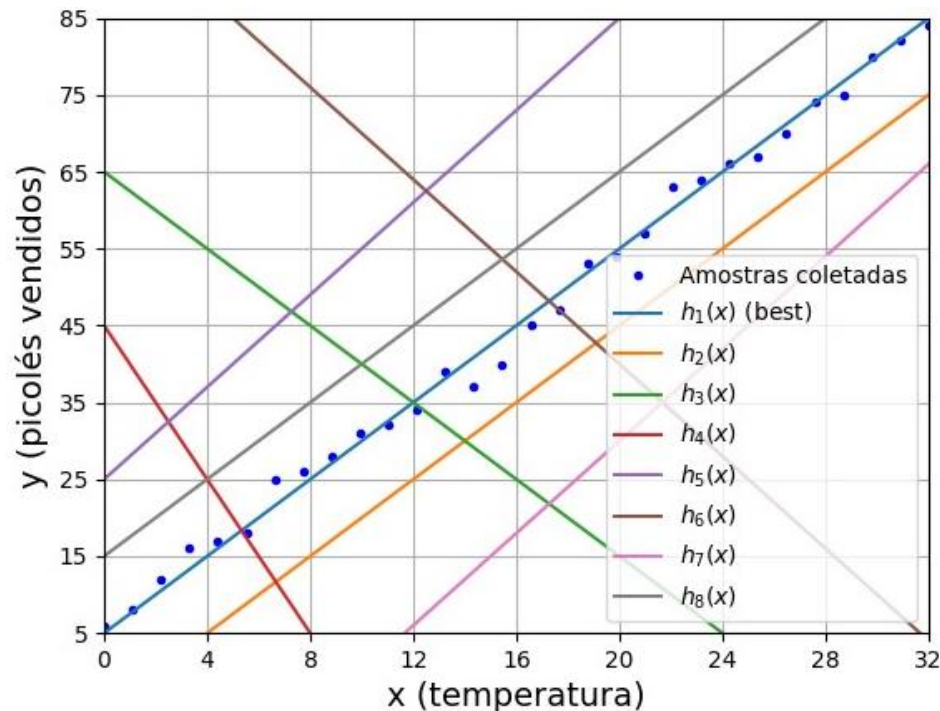
Não é possível expressar a equação como uma combinação linear dos atributos.

- Em geral, não é possível aplicar algumas das técnicas de regressão que veremos em breve a modelos não-lineares.

Função hipótese

- No contexto da regressão, a **função aproximadora**, $h(x)$, é chamada de **função hipótese** pois refere-se à **explicação proposta para a relação entre as entradas, x e a saída esperada, y .**
 - Por exemplo, nossa **hipótese** no laboratório 1 foi que uma **reta** explica bem a relação entre a temperatura média de um dia e o número de picolés vendidos.
- Dado o formato da equação da **função hipótese**, a solução que melhor mapeia x em y encontra-se dentro do **espaço de hipóteses, H .**
- **Espaço de hipóteses** é o conjunto de todas as possíveis **funções hipótese**.
- Em outras palavras, é o **espaço** criado por **todas as combinações possíveis de pesos, $a_i, \forall i$, da função hipótese.**

Espaço de hipóteses



A figura mostra algumas possíveis funções hipótese que modelam o relacionamento entre x e y .

- Assim, no nosso exemplo da previsão da quantidade de picolés vendidos, onde usamos a ***equação de uma reta*** como ***função hipótese***,

$$\hat{y} = h(x) = a_0 + a_1 x_1,$$

o ***espaço de hipóteses contém todas as diferentes retas possíveis*** que podem ser usadas para mapear os dados.

- Porém, claro, ***apenas uma é a melhor segundo o critério de minimização da diferença***.

Refinamento do objetivo da regressão linear

- Agora que temos um formato definido para $h(\mathbf{x})$, ou seja, o **modelo**, podemos refinar o objetivo da regressão um pouco mais.
- **Objetivo:** **Encontrar** os **pesos**, a_0, a_1, \dots, a_K , que façam com que $h(\mathbf{x})$ se **ajuste de forma ótima** ao conjunto de dados coletado.
 - **Ótima** no sentido em que $h(\mathbf{x})$ minimiza o erro (i.e., diferença) entre os valores de saída do modelo, \hat{y} , e os esperados, y .
- Na sequência, definiremos uma **função de erro** que nos ajudará a encontrar os **pesos ótimos** do modelo.
 - **Pesos ótimos:** conjunto de pesos da função hipótese, $h(\mathbf{x})$, que fazem com que o erro seja minimizado.

Definição formal do problema

Informação disponível

- Conjunto de N observações ou ***pares de treinamento***: $\{x(i), y(i)\}$, $i = 0, \dots, N - 1$, onde
 - $x(i) = [1, x_1(i), \dots, x_K(i)]^T \in \mathbb{R}^{K+1 \times 1}$ é o ***vetor de atributos*** (vetor coluna) com dimensão $(K + 1 \times 1)$ contendo os i -ésimos valores dos ***atributos***.
 - $y(i) \in \mathbb{R}$ é o i -ésimo ***rótulo*** (valor esperado de saída) referente ao vetor de atributos, $x(i)$.
- As N observações formam o ***conjunto de treinamento***, ou seja, o conjunto de amostras coletadas que utilizaremos para ***treinar o modelo***.
- Notem que o ***vetor de atributos*** tem sempre um elemento a mais do que o número de atributos, K .
- Como veremos, esse elemento, o primeiro, tem valor constante igual a 1 para que possamos representar o ***modelo*** em ***formato matricial***.

Definição formal do problema

Modelo

- Função do hiperplano

$$\hat{y}(i) = h(\mathbf{x}(i)) = a_0 + \sum_{i=1}^K a_i x_i = \mathbf{a}^T \mathbf{x}(i),$$

Representação vetorial

onde $\mathbf{a} = [a_0, \dots, a_K]^T$ é um vetor **coluna** com dimensão $(K + 1 \times 1)$ contendo os **pesos** da **função hipótese**.

Observações

- a_0 é o **coeficiente linear**, ou seja, é o valor de $h(\mathbf{x})$ que intercepta o eixo das ordenadas, y , a_0 é conhecido também como **intercept** ou **bias**.
- Como a_0 não tem um **atributo** relacionado a ele, para **facilitar a representação matricial**, criamos um **atributo falso**, x_0 , chamado de **atributos de bias**, com valor constante igual a $x_0 = 1$.

Definição formal do problema

Objetivo

- Encontrar o ***vetor de pesos***, \mathbf{a} , que minimiza o ***erro***, dado por uma ***função de erro***, $J_e(\mathbf{a})$, entre a aproximação, $\hat{y}(i)$, e o valor esperado, $y(i)$, para ***todos os exemplos do conjunto de treinamento***.
- Ou seja, o ***treinamento*** do modelo ***envolve*** a ***minimização de uma função de erro***.
- Isso pode ser escrito como um problema de otimização:

$$\min_{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{K+1 \times 1}} J_e(\mathbf{a}).$$

- Portanto, para que consigamos treinar o modelo, precisamos ***definir*** uma ***função de erro***.

Função de erro

- Existem várias possibilidades para se definir a **função de erro**.
- Porém, em problemas de regressão, é comum utilizar-se o **erro quadrático médio (EQM)**

$$J_e(\mathbf{a}) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (y(i) - \hat{y}(i))^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (y(i) - h(\mathbf{x}(i), \mathbf{a}))^2,$$

Erro entre a saída esperada e a saída da função hipótese.

onde N é o número de exemplos ou observações.

- O **EQM** nada mais é do que a **média aritmética do quadrado dos erros**.
- Veremos mais adiante a razão pela qual o **EQM** é utilizado.
- O vetor de pesos é colocado em evidência na função hipótese para deixar claro que o **erro varia com o valor dos pesos**.
 - Variando os pesos, ficamos mais próximos ou distantes da função hipótese que minimiza o erro, i.e., da **função hipótese ótima**. Estamos caminhando no espaço de hipóteses.

Função de erro

- A **função de erro** pode ser reescrita em **formato matricial** como

$$J_e(\mathbf{a}) = \frac{1}{N} \|\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{a}\|^2,$$

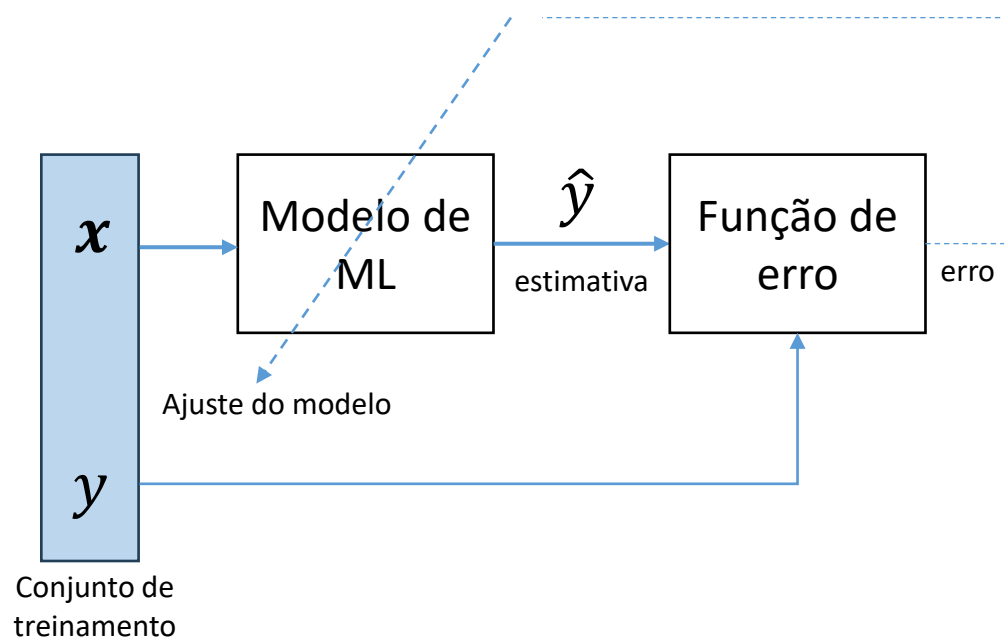
onde $\mathbf{y} = [y(0), \dots, y(N-1)]^T$ é um **vetor coluna** com dimensão $(N \times 1)$ contendo todos os valores esperados e $\mathbf{X} = [\mathbf{x}(0), \dots, \mathbf{x}(N-1)]^T$ é uma **matriz** com dimensão $(N \times K + 1)$ contendo todos os vetores de atributo.

- Então, para encontrarmos o **vetor de pesos**, \mathbf{a} , devemos **minimizar a função de erro**

$$\min_{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{K+1 \times 1}} \|\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{a}\|^2.$$

OBS.: Por ser constante, o termo $1/N$ não influencia na minimização e, portanto, pode ser omitido na equação acima.

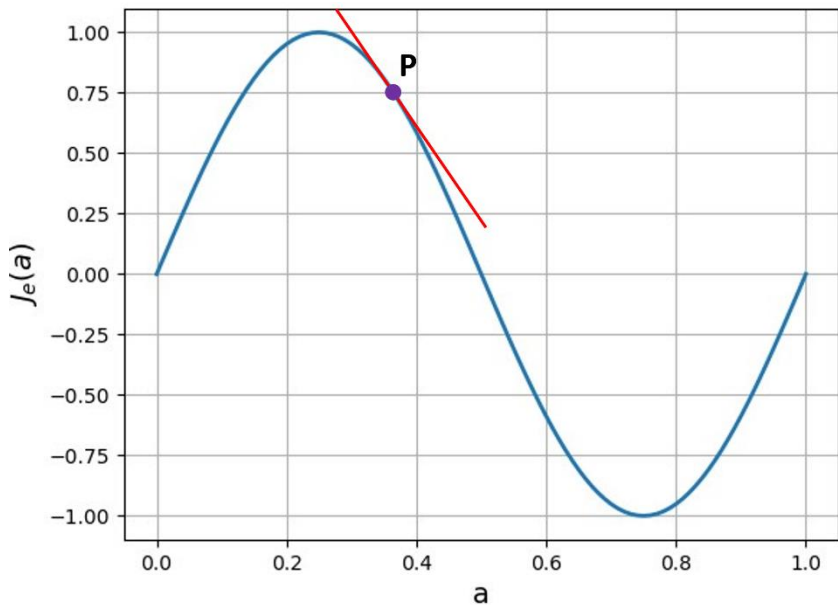
Resumo do problema da regressão



- Portanto, resumindo, nosso objetivo é **treinar** um **modelo**, a partir de um **conjunto de treinamento**, que minimize o **erro** de aproximação.
- Assim, para **treinar** o modelo, precisamos encontrar **maneiras** de **ajustar seus pesos** de forma que o erro seja minimizado.
- Na sequência veremos duas maneiras de se encontrar o **conjunto de pesos ótimo** através da **minimização da função de erro**.

Como encontramos os pesos que minimizam a função de erro?

Como minimizar a função de erro?



A reta vermelha é **tangente** à curva no ponto P (roxo). Sua **inclinação** é dada pela **derivada parcial** da função naquele ponto.

- Da disciplina de cálculo, sabemos que derivando a **função de erro** em relação ao vetor \mathbf{a} e igualando a derivada à 0, nós encontramos o **ponto** (i.e., os valores dos pesos) onde a **taxa de variação da função é nula**

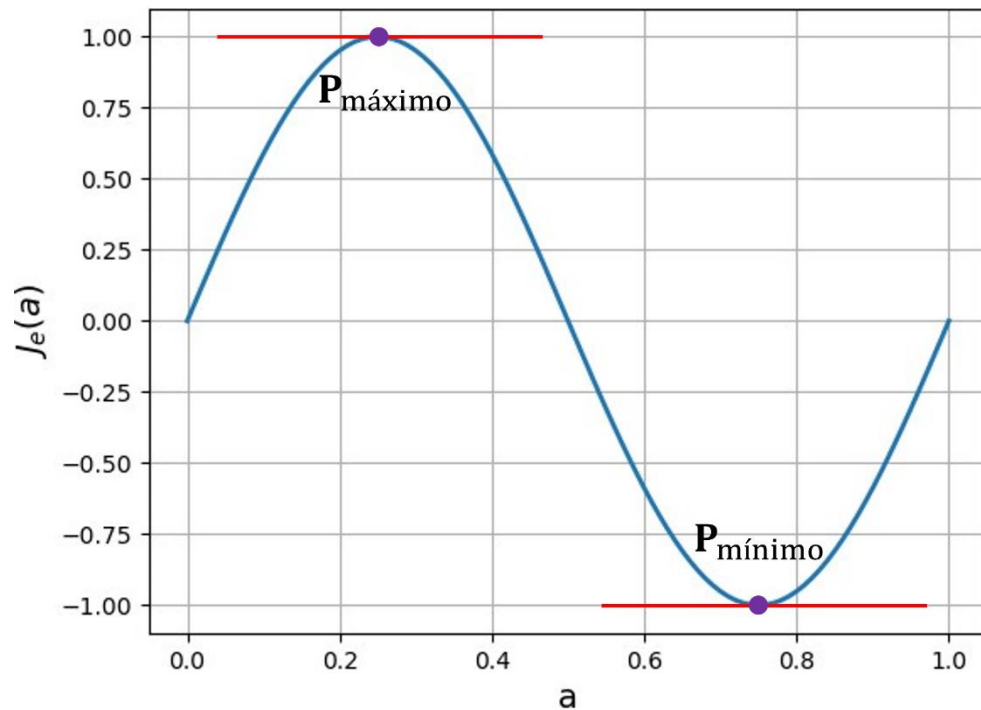
$$\frac{\partial \|\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{a}\|^2}{\partial \mathbf{a}} = 0.$$

- Após aplicarmos a derivada parcial, chegamos à seguinte equação

$$2\mathbf{a}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X} - 2\mathbf{y}^T \mathbf{X} = 0.$$

- A equação acima pode também ser interpretada como o **ponto** onde a **inclinação de uma reta tangente à função de erro é nula**.

Como minimizar a função de erro?



- Porém, esse **ponto** onde a taxa de variação da função de erro é nula pode ocorrer tanto em um **ponto de mínimo** quanto em um **ponto de máximo** da **função**, pois em ambos os pontos a taxa de variação (ou **inclinação** da reta tangente) é **nula**.
- Porém, no nosso caso, estamos interessados no **ponto** onde a **função de erro tem o seu menor valor**.
- É nesse ponto que encontramos os pesos que nos dão a **função hipótese ótima**.

Então, como sabemos se o ponto encontrado é um mínimo ou um máximo da função?

Como minimizar a função de erro?

- Se a *inclinação da reta tangente é nula* **E** a *derivada parcial de segunda ordem* da função de erro for **positiva**, então o **ponto** nos dá o mínimo da função,

$$\frac{\partial^2 \|y - Xa\|^2}{\partial^2 a} = 2X^T X.$$

- Se a **matriz de atributos**, X , tiver **posto** igual a $K + 1$, então a matriz $X^T X$ é **positiva semi-definida** e, portanto, o **ponto** encontrado acima é **realmente o ponto de mínimo** da **função de erro**.
 - **Posto de uma matriz**: é o número de linhas ou colunas linearmente independentes da matriz.
 - Uma matriz quadrada $X^T X$ é **positiva semi-definida** se $z^T X^T X z = \|Xz\|_2^2 \geq 0, \forall z \neq 0$.

Equação normal

- Agora que sabemos que se a matriz de atributos tiver $K + 1$ **colunas linearmente independentes** encontramos o **ponto de mínimo da função** através da sua **derivada parcial**, nós podemos resolver a equação da derivada parcial e encontrar o vetor de pesos ótimo.

- Assim, resolvendo a equação em função de \mathbf{a} , temos

$$2\mathbf{a}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X} - 2\mathbf{y}^T \mathbf{X} = 0,$$

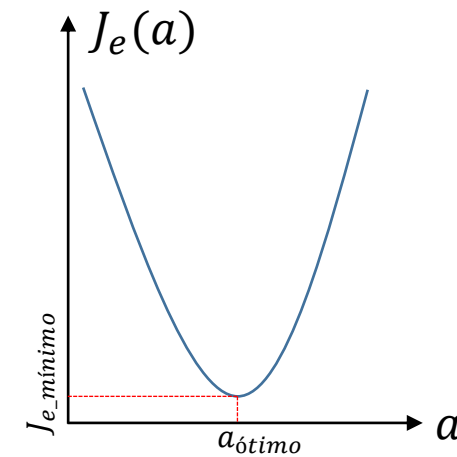
$$\mathbf{a} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}.$$

- Essa equação é conhecida como **equação normal** e nos dá a **solução ótima** em relação a minimização do **erro quadrático médio** para esse **sistema de equações lineares**.
- Notem que só precisamos do conjunto de amostras coletadas, \mathbf{X} e \mathbf{y} , para encontrar o **vetor de pesos ótimo**, \mathbf{a} .

Observações quanto a equação normal

1. A equação encontra uma ***solução única*** se e somente se a matriz, $X^T X$, for ***invertível*** (i.e., ***não-singular***).
 - Para que a matriz seja invertível, ela deve ter ***posto*** igual a $K + 1$.
2. A equação só funciona para sistemas ***determinados*** ou ***sobredeterminados***, ou seja, quando o número de equações (i.e., pares x e y) é ***igual ou maior*** do que o número de incógnitas (i.e., pesos), ou seja, $N \geq K + 1$.
3. Para sistemas ***subdeterminados***, ou seja, que têm menos equações do que incógnitas, a matriz $X^T X$ tem ***posto*** menor do que $K + 1$ e, portanto, é ***singular*** (i.e., a matriz $X^T X$ não é invertível).
 - Neste caso, não existe solução ou ela não é única.

Superfície de Erro



- E se plotarmos a função de erro em função dos pesos, \mathbf{a} ?

$$J_e(\mathbf{a}) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (y(i) - \hat{y}(i))^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (y(i) - h(\mathbf{x}(i), \mathbf{a}))^2.$$

- Que forma vocês acham que ela terá?
- $J_e(\mathbf{a})$ faz o **mapeamento** entre o **vetor de pesos** e o erro correspondente:
 - $J_e(\mathbf{a}): \mathbb{R}^{K+1 \times 1} \rightarrow \mathbb{R}$. Esse mapeamento define o que conhecemos como **superfície de erro**.
- Se expandirmos $J_e(\mathbf{a})$ notamos que ela possui forma **quadrática** com respeito ao **vetor de pesos**, \mathbf{a} .

$$J_e(\mathbf{a}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{a}\|^2 = \mathbf{y}^T \mathbf{y} - \mathbf{y}^T \mathbf{X}\mathbf{a}^T - \mathbf{a}^T \mathbf{X}^T \mathbf{y} + \boxed{\mathbf{a}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X} \mathbf{a}}.$$

Termo
quadrático,
 $\|\mathbf{X}\mathbf{a}\|^2$.

- Consequentemente, a superfície é **convexa** (i.e., tem forma de **tigela**) e, portanto, possui um **único mínimo** (chamado de **mínimo global**), que é encontrado, por exemplo, pela **equação normal**.
- Este é o motivo de usarmos o **erro quadrático médio** como **função de erro**.

Superfície de Erro: Exemplo

- Vamos supor a seguinte **função observável**

$$y_{\text{noisy}}(n) = y(n) + w(n),$$

onde $w(n) \sim N(0, 1)$ e $y(n)$ é a **função objetivo** (ou **modelo gerador**) dada por

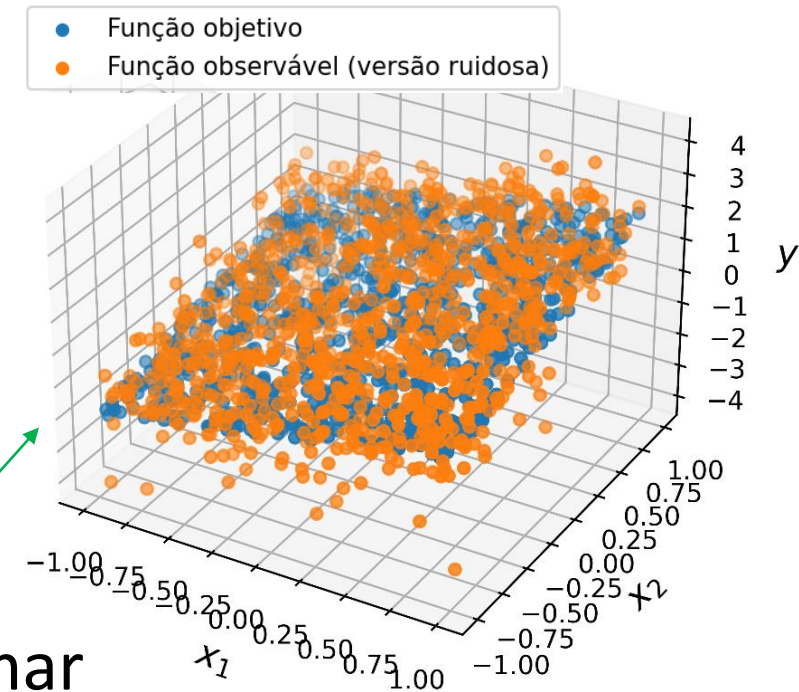
$$y(n) = a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n),$$

onde $x_1(n)$ e $x_2(n) \sim U(-1, 1)$ e $a_1 = a_2 = 1$.

- Agora, suponhamos que nós quiséssemos aproximar a **função objetivo** a partir, apenas, de suas **amostras ruidosas** com a seguinte **função hipótese**

$$h(\mathbf{x}, n) = \hat{y}(n) = \hat{a}_1 x_1(n) + \hat{a}_2 x_2(n).$$

- Como encontraríamos os valores de \hat{a}_1 e \hat{a}_2 ?



Comparação da **função objetivo** com sua versão ruidosa.

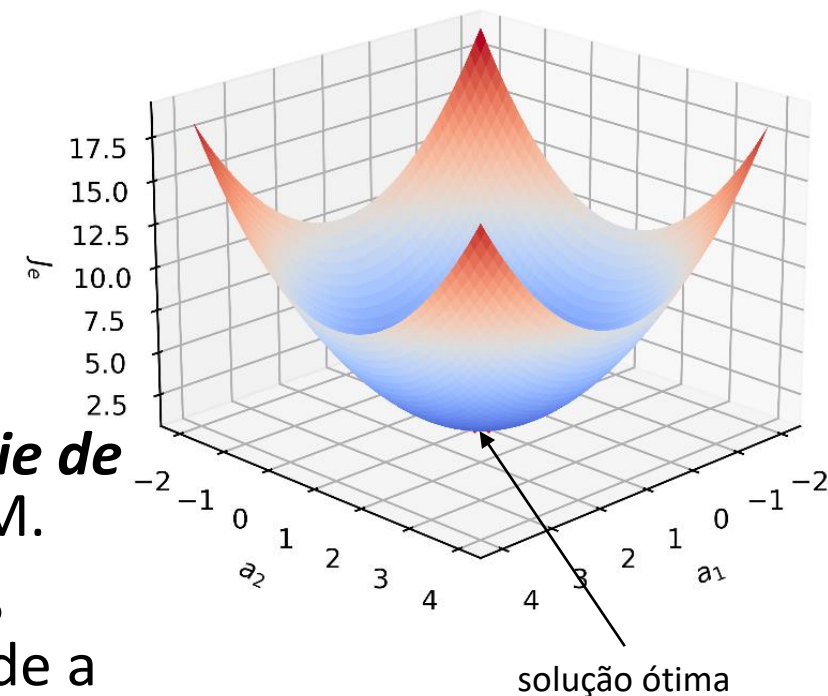
OBS.: Se tivéssemos mais de dois atributos, já não seria possível plotar uma figura.

Superfície de Erro: Exemplo

- Até o momento, conseguiríamos encontrar com a **equação normal** ou **visualmente**, plotando a **superfície de erro** a partir da função do **erro quadrático médio (EQM)**:

$$J_e(a_1, a_2) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left(y_{\text{noisy}}(n) - \hat{y}(n) \right)^2$$
$$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left(y_{\text{noisy}}(n) - (\hat{a}_1 x_1(n) + \hat{a}_2 x_2(n)) \right)^2.$$

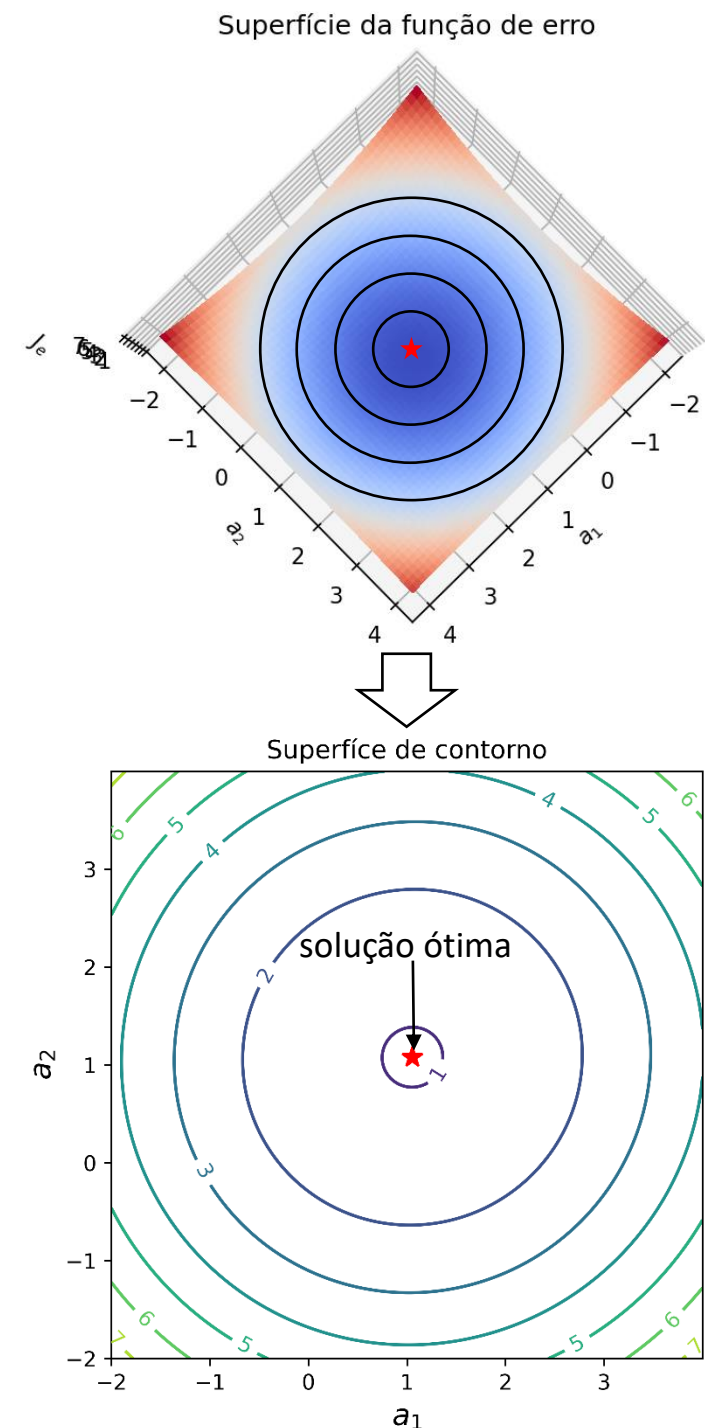
- Os valores de erro, $J_e(a_1, a_2)$, para plotarmos a **superfície de erro** são obtidos variando-se \hat{a}_1 e \hat{a}_2 na equação do EQM.
- A **superfície de erro** é representada por uma figura em 3 dimensões, onde cada par de valores \hat{a}_1 e \hat{a}_2 corresponde a um erro, $J_e(a_1, a_2)$.
- Percebam que devido a superfície ser **convexa**, temos apenas **um ponto de mínimo**, o **mínimo global**.



Superfície de Erro: Exemplo

- Outra figura importante que podemos plotar a partir dos resultados obtidos para plotarmos a superfície de erro é chamada de **superfície de contorno**.
- Uma **linha de contorno** é uma **curva ao longo da qual a função tem um valor constante**.
- No da superfície de erro, cada uma das linhas indica uma curva ao longo da qual o **erro** é **constante**.
- Ou seja, qualquer par de valores \hat{a}_1 e \hat{a}_2 ao longo de uma curva terá o mesmo valor de erro.

[Exemplo: error_surface_example2.ipynb](#)



Superfícies de erro com diferentes formatos

- Agora veremos que ***nem toda superfície de erro tem formato de tigela, mas continuam sendo convexas.***

- Para demonstrar isso vamos supor a seguinte ***função observável***

$$y_{\text{noisy}}(n) = y(n) + w(n),$$

onde a ***função objetivo*** é dada por

$$y(n) = a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n).$$

- Agora, suponhamos que nós quiséssemos aproximar a ***função objetivo*** com a seguinte ***função hipótese***

$$\hat{y}(n) = h(\mathbf{x}(n)) = \hat{a}_1 x_1(n) + \hat{a}_2 x_2(n).$$

- Inserindo a ***função hipótese*** na ***função de erro*** temos

$$J_e(\mathbf{a}) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [y_{\text{noisy}}(n) - (\hat{a}_1 x_1(n) + \hat{a}_2 x_2(n))]^2.$$

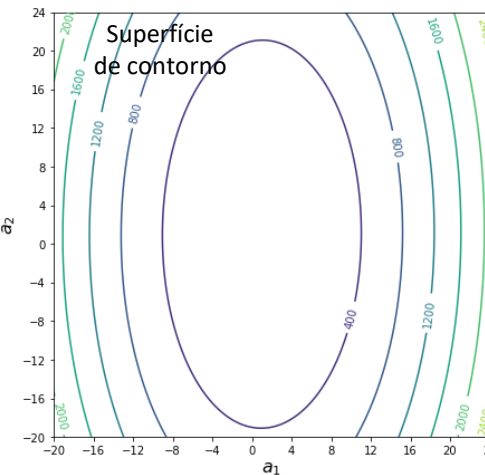
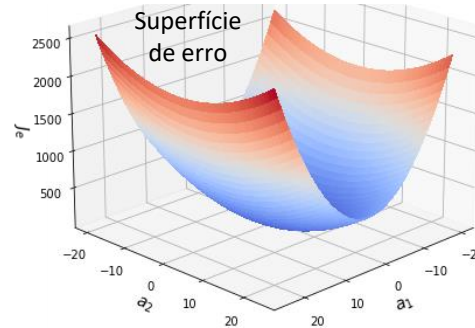
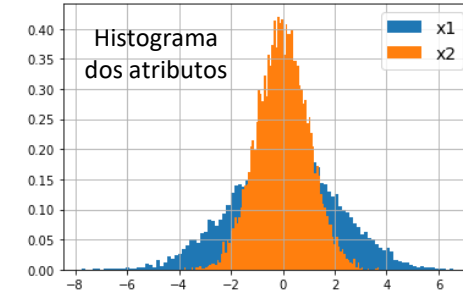
- Caso $x_1(n) \gg x_2(n), \forall n$, então $x_1(n)$ terá uma ***influência maior no erro resultante***, o que pode ser expresso de forma aproximada como

$$J_e(\mathbf{a}) \approx \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [y_{\text{noisy}}(n) - \hat{a}_1 x_1(n)]^2.$$

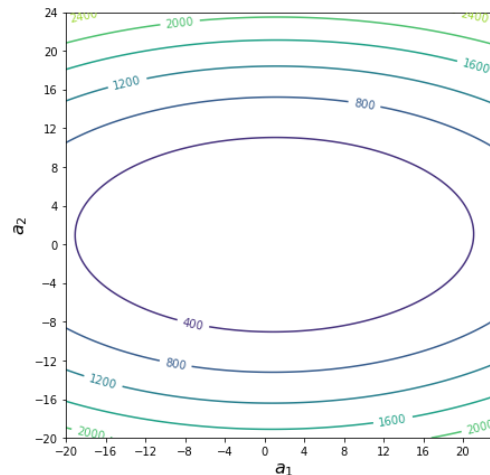
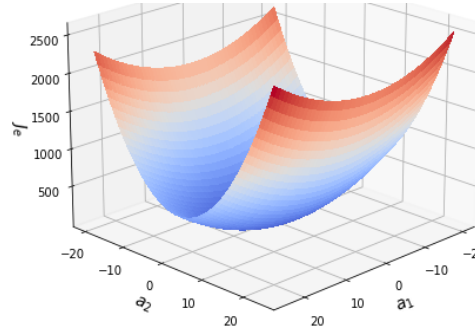
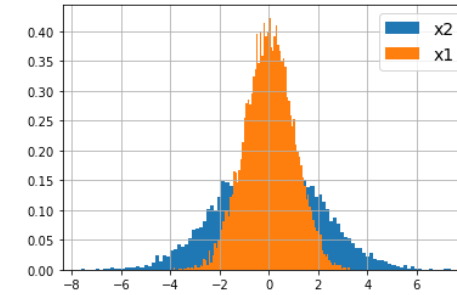
- Portanto, o erro entre y_{noisy} e $h(\mathbf{x}(n))$ será ***dominado pelo atributo*** $x_1(n)$ e, portanto, pequenas variações de \hat{a}_1 farão com que o erro varie rapidamente.

Superfícies de erro com diferentes formatos

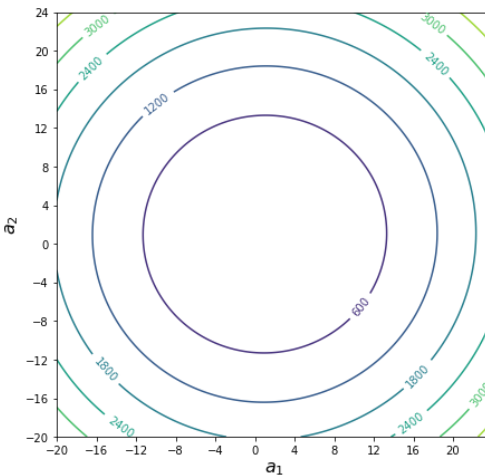
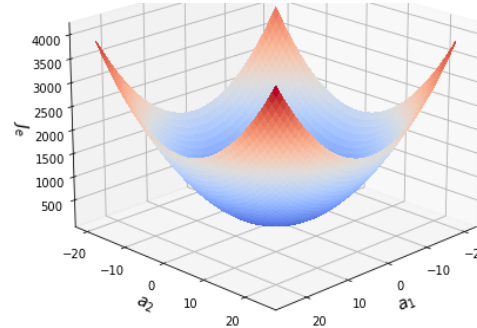
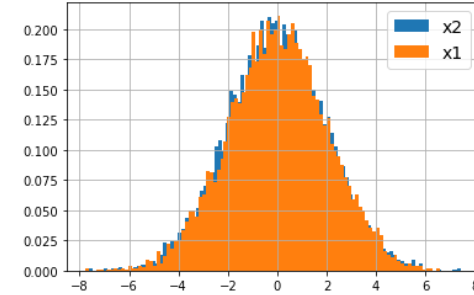
- **Coluna 1:** x_1 tem intervalo de variação maior do que x_2 . Portanto, o **peso** da variação de \hat{a}_1 no **erro** é maior, ou seja, o erro varia mais rapidamente com variações de \hat{a}_1 , resultando num **vale**.
- **Coluna 2:** x_2 tem intervalo de variação maior do que x_1 . Então, o **peso** da variação de \hat{a}_2 no erro é maior, resultando em um vale.
- **Coluna 3:** x_1 e x_2 têm intervalos semelhantes, então, a variação tanto de \hat{a}_1 quanto de \hat{a}_2 tem **pesos** semelhante na variação do erro (tigela).



$$x_1 = 2 * \text{randn}(N, 1) \\ x_2 = \text{randn}(N, 1)$$



$$x_1 = \text{randn}(N, 1) \\ x_2 = 2 * \text{randn}(N, 1)$$



$$x_1 = 2 * \text{randn}(N, 1) \\ x_2 = 2 * \text{randn}(N, 1)$$

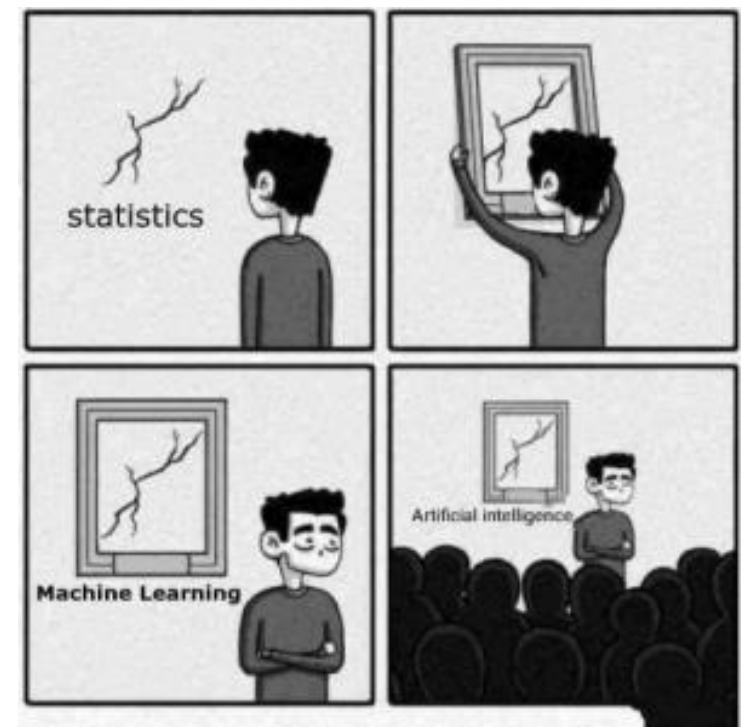
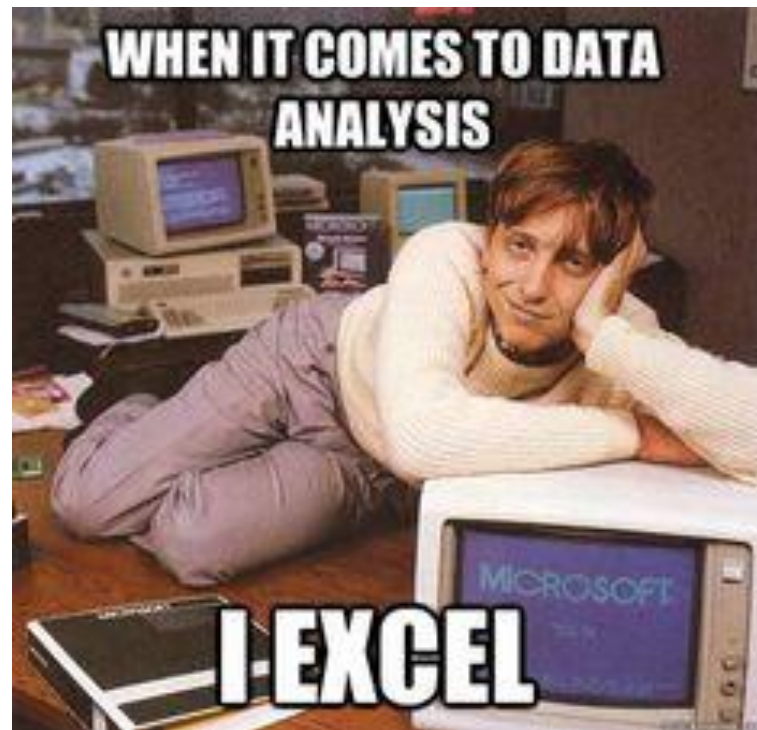
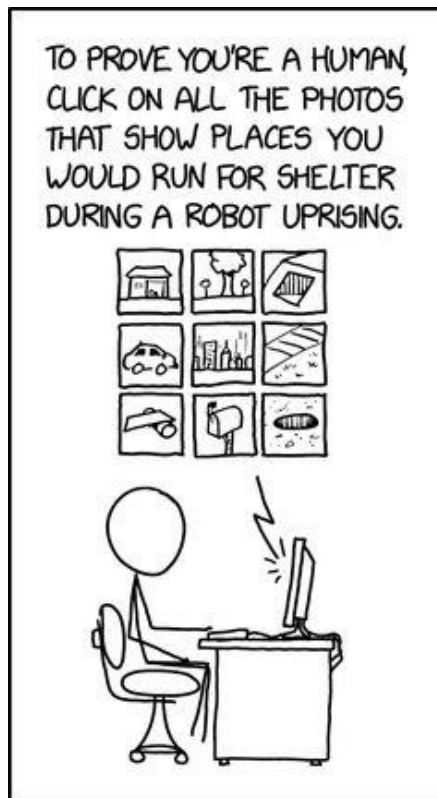
Desvantagens da forma fechada (Eq. Normal)

- **Alta complexidade computacional:** a solução da **equação normal** envolve o cálculo da inversa de $X^T X$, o qual tem complexidade computacional que varia de $O(K^{2.4})$ a $O(K^3)$, onde K é o número de atributos.
 - **Exemplo:** Se o número de **atributos**, K , dobrar, o tempo para cálculo aumenta de $2^{2.4} = 5.3$ a $2^3 = 8$ vezes.
- Dependendo do número de **exemplos**, N , e de **atributos**, x , a matriz X pode consumir muita memória.
- **Portanto, essa abordagem não é escalonável!**
- Adicionalmente, para irmos além dos modelos lineares (i.e., modelos não-lineares como classificadores e redes neurais) precisamos lidar com o fato de que nem sempre existem formas fechadas como a **equação normal**.
- **Solução:** abordagens iterativas.
 - São métodos que “**procuram**” de forma iterativa os pesos ótimos no espaço de soluções.
 - **Espaço de soluções** é um outro nome para a **superfície de erro**.
 - Um exemplo de abordagem iterativa é o algoritmo do **gradiente descendente**.
 - O algoritmo busca iterativamente o ponto mais baixo da superfície de erro.

Tarefas

- **Quiz:** “*T319 - Quiz - Regressão: Parte I*” que se encontra no MS Teams.
- **Exercício Prático:** [Laboratório #2](#).
 - Pode ser acessado através do link acima (Google Colab) ou no GitHub.
 - Vídeo explicando o laboratório: Arquivos -> Material de Aula -> Laboratório #2
 - Se atentem aos prazos de entrega.
 - [Instruções para resolução e entrega dos laboratórios](#).
 - **Laboratórios podem ser resolvidos em grupo, mas as entregas devem ser individuais.**
- **Projeto final já está disponível no *github*, logo abaixo do lab. 6.**

Obrigado!



Albert Einstein: Insanity Is Doing
the Same Thing Over and Over Again
and Expecting Different Results

Machine learning:



