

T319 - Introdução ao Aprendizado de Máquina: *Regressão Linear (Parte VI)*



Inatel

Felipe Augusto Pereira de Figueiredo
felipe.figueiredo@inatel.br

Recapitulando

- Anteriormente, vimos como selecionar o melhor modelo de regressão utilizando as técnicas de validação cruzada: holdout, k-Fold e leave-P-out.
- Escolhemos sempre o modelo menos complexo e que ainda apresenta valores baixos de erro.
- Uma abordagem alternativa é a procura por *funções hipótese* que minimizem o erro e a complexidade da *função hipótese*.
- Portanto, hoje, veremos outras formas de se selecionar o melhor modelo de regressão de forma que o erro e a complexidade da hipótese sejam minimizadas.
 - **Regularização:** penaliza funções hipótese muito complexas, ou seja, muito flexíveis.
 - **Early-stop:** encerra o treinamento de algoritmos iterativos quando o erro de validação for o menor possível.

Regularização: penalizando a complexidade dos modelos

- A **regularização** é outra forma de se escolher o melhor modelo.
- A ideia por trás da **regularização** é penalizar, explicitamente, **hipóteses** complexas.
- Técnicas de **regularização** podem reduzir o risco de **sobreajuste** do modelo ao conjunto de treinamento, aumentando sua capacidade de **generalização**.
- O **sobreajuste** pode ser evitado incorporando **penalizações** proporcionais à alguma **norma** do vetor de pesos ao processo de treinamento.
- As principais técnicas de **regularização** são: *ridge regression*, LASSO e *elastic-net*.

Ridge Regression

- Ao invés de minimizarmos apenas o erro quadrático médio, como fizemos antes, introduzimos um **termo de penalização** proporcional à **norma Euclidiana** (ou seja, a norma L2) do vetor de pesos:

$$\min_{\mathbf{a} \in \mathbb{R}} (\|\mathbf{y} - \Phi \mathbf{a}\|^2 + \lambda \|\mathbf{a}\|_2^2) \text{ com } \|\mathbf{a}\|_2^2 = \sum_{i=1}^K a_i^2$$



onde $\lambda \geq 0$ é o **fator de regularização**, Φ é a matriz de atributos e \mathbf{a} é o vetor de pesos.

- Podemos re-escrever o **problema de regularização** como um **problema de otimização** com restrições da seguinte forma

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{a} \in \mathbb{R}} \|\mathbf{y} - \Phi \mathbf{a}\|^2 \\ \text{s. a. } \|\mathbf{a}\|_2^2 \leq c, \end{aligned}$$

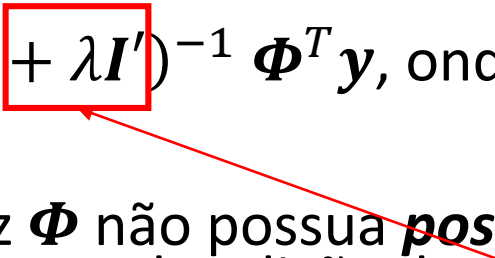
- Se c diminui, $\|\mathbf{a}\|_2^2$ também diminui até que se $c \rightarrow 0$, então $a_i \rightarrow 0$.
- Se c aumenta, $\|\mathbf{a}\|_2^2$ pode assumir valores maiores até que se $c \rightarrow \infty$, então $a_i \rightarrow \infty$.

onde c restringe a magnitude dos pesos e é inversamente proporcional à λ .

- Portanto, λ modifica a complexidade (ou seja, flexibilidade) da função hipótese.
- OBS.:** o peso a_0 não é considerado no cálculo da **norma L2**, pois a **complexidade** se deve à ordem do modelo e a_0 apenas dita o deslocamento em relação ao eixo y .

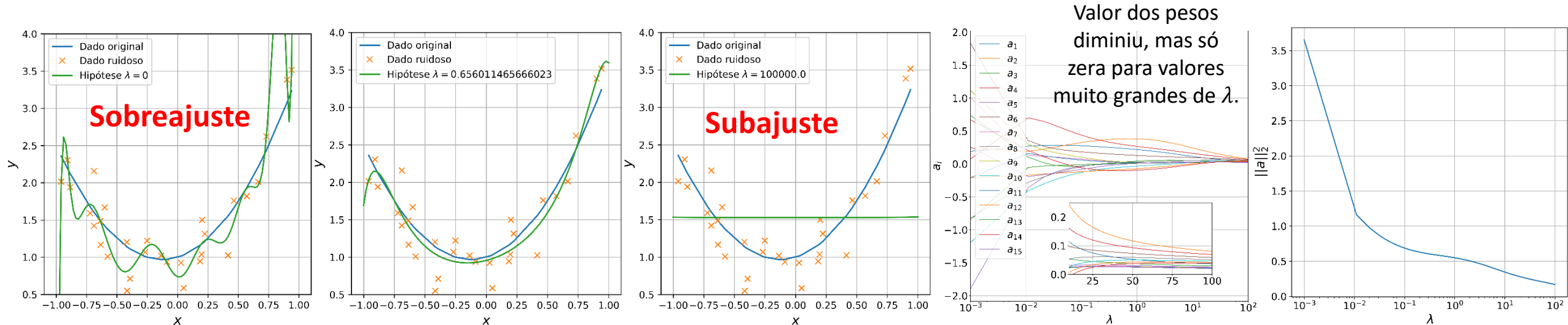
Ridge Regression

- A equação de erro regularizado, $\|\mathbf{y} - \Phi\mathbf{a}\|_2^2 + \lambda\|\mathbf{a}\|_2^2$, continua sendo quadrática com relação aos pesos, e portanto, a superfície de erro continua sendo convexa.
- Desta forma, encontramos uma solução de forma fechada seguindo o mesmo procedimento que usamos para encontrar a **equação normal**:

$$\mathbf{a} = (\Phi^T \Phi + \lambda \mathbf{I}')^{-1} \Phi^T \mathbf{y}, \text{ onde } \mathbf{I}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$


- **OBS.1:** mesmo que a matriz Φ não possua **posto completo**, a inversa na equação acima sempre existirá por conta da adição do **termo de regularização** à diagonal principal da matriz quadrada $\Phi^T \Phi$.
- **OBS.2:** como a **norma L2** é diferenciável, os problemas de aprendizagem usando a regularização de Ridge podem ser resolvidos iterativamente através do **algoritmo do gradiente descendente**.
- **OBS.3:** o termo de regularização deve ser adicionado apenas à função de erro durante o treinamento. Depois que o modelo é treinado, a avaliação do desempenho do modelo não utiliza a regularização.

Ridge Regression: Exemplo



- Função hipótese polinomial de grau 15.
- Modelo treinado com 30 amostras geradas a partir de $y_{\text{noisy}} = 1 + 0.5x + 2x^2 + w$, onde $x \sim U(-1,1)$ e $w \sim N(0,1)$.
- Com $\lambda = 0$, regressão de Ridge se torna uma regressão polinomial sem regularização.
- Conforme λ aumenta, o modelo não se “contorce” tanto e passa a se ajustar aos dados de treinamento.
- Se λ continuar aumentando, todos os pesos acabarão muito próximos de zero e o resultado será uma linha reta que passa pela **média dos dados de treinamento**.
- O aumento de λ leva a hipóteses menos complexas. Isso reduz a variância do modelo, mas aumenta seu bias. Ou seja, ele tende a **subajustar**.
- Conforme λ aumenta, os pesos e a norma L2 do vetor de pesos diminuem.
- Utiliza-se técnicas de validação cruzada para encontrar o valor ideal de λ .

[Exemplo: ridge_regression.ipynb](#)

LASSO Regression

- A **regressão LASSO** (*Least Absolute Shrinkage and Selection Operator*) adiciona à função de erro um **termo de penalização** proporcional à **norma L1** do vetor de pesos.

$$\min_{\mathbf{a} \in \mathbb{R}} (\|\mathbf{y} - \Phi \mathbf{a}\|^2 + \lambda \|\mathbf{a}\|_1),$$


onde $\|\mathbf{a}\|_1 = \sum_{i=1}^K |a_i|$ e $\lambda \geq 0$ é o **fator de regularização**.

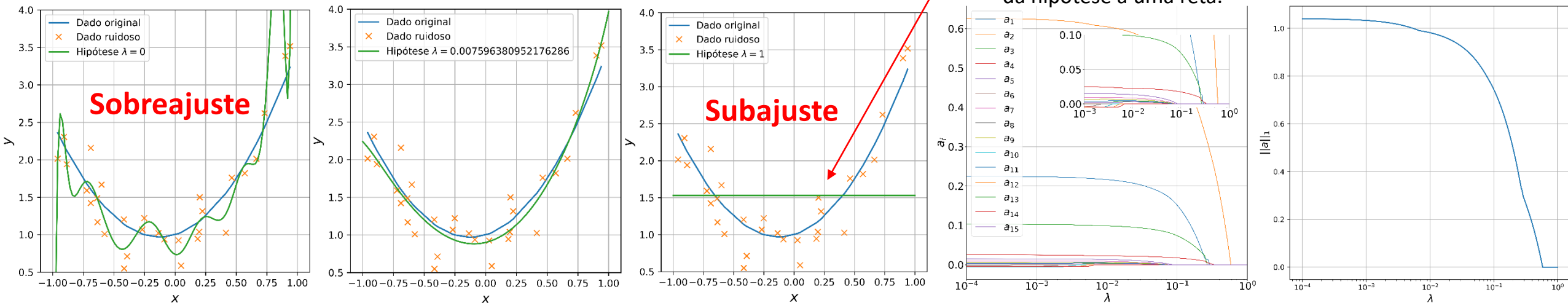
- Podemos re-escrever o **problema de regularização** acima como um **problema de otimização** com restrições da seguinte forma

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{a} \in \mathbb{R}} & \|\mathbf{y} - \Phi \mathbf{a}\|^2 \\ \text{s. a. } & \|\mathbf{a}\|_1 \leq c, \end{aligned}$$

onde c restringe a magnitude dos pesos e é inversamente proporcional à λ .

OBS.: a_0 também não faz parte do cálculo da norma.

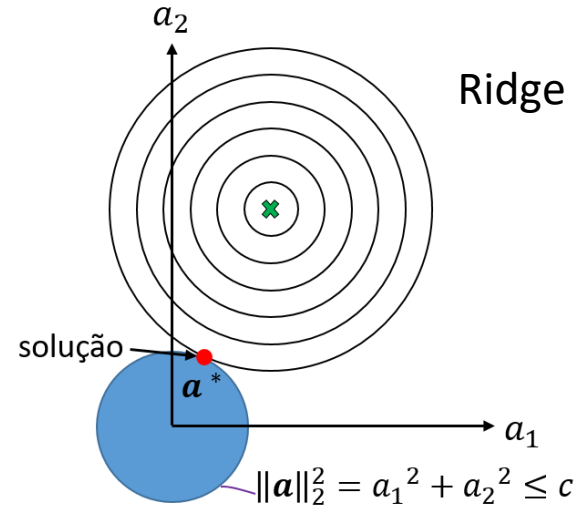
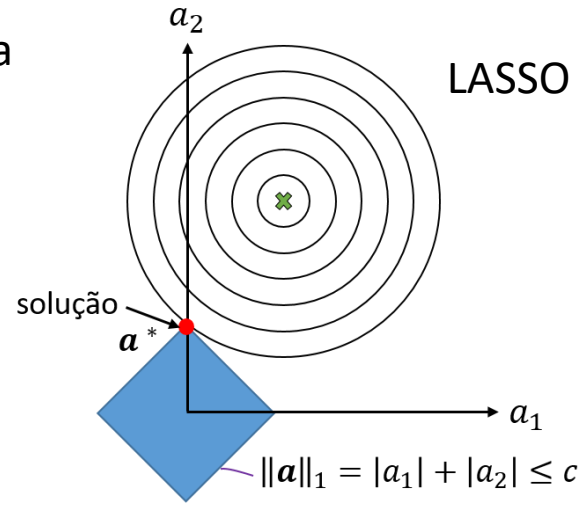
LASSO Regression



- Mesmas funções geradora e hipótese do exemplo anterior.
- Valores pequenos de λ fazem LASSO se comportar como regressão tradicional e valores muito grandes fazem os pesos serem anulados.
- A regularização com **norma L1** tem como vantagem a produção de **modelos esparsos**.
- Ou seja, vários elementos do vetor de pesos acabam sendo **anulados**, indicando que os pesos correspondentes são irrelevantes.
- Isso sugere a ocorrência implícita de um processo de **seleção automática de atributos**, e leva a **modelos mais regulares**, ou seja, **menos complexos**.
- **Desvantagem:** como a **norma L1** não possui derivada no ponto $a_i = 0, \forall i$, o problema da minimização não possui solução em forma fechada.
- Utiliza-se técnicas de validação cruzada para encontrar o valor ideal de λ .

Vantagem do LASSO sobre Ridge

- O quadrado azul representa o conjunto de pontos \mathbf{a} no espaço de pesos bidimensional que tenham norma L1 menor do que c .
- A solução deve estar em algum lugar dentro do quadrado.



Ridge

- O círculo azul representa o conjunto de pontos \mathbf{a} no espaço de pesos bidimensional que tenham norma L2 menor do que c .
- A solução deve estar em algum lugar dentro do círculo.

• Por que a regressão LASSO tem com vantagem a produção de modelos esparsos?

- Figura mostra as curvas de nível da função de erro de um problema de regressão linear, bem como as regiões do **espaço de hipóteses** em que as restrições L1 (esquerda) e L2 (direita) são válidas, considerando o caso em que dois pesos estão sujeitos a regularização (a_1 e a_2).
- A solução para ambos os métodos corresponde ao ponto, dentro da **região de factibilidade** (área em azul), mais próximo do ponto de mínimo da função de erro.
- É fácil ver que para uma posição arbitrária do mínimo, será comum que um **canto** (ou ponta) do quadrado seja o ponto mais próximo do ponto de mínimo.
- Os **cantos** na **região de factibilidade** da restrição L1 aumenta as chances de alguns pesos assumirem o valor zero.
- E claro, os **cantos** são os pontos que possuem um valor igual a 0 em alguma das dimensões (i.e., pesos).

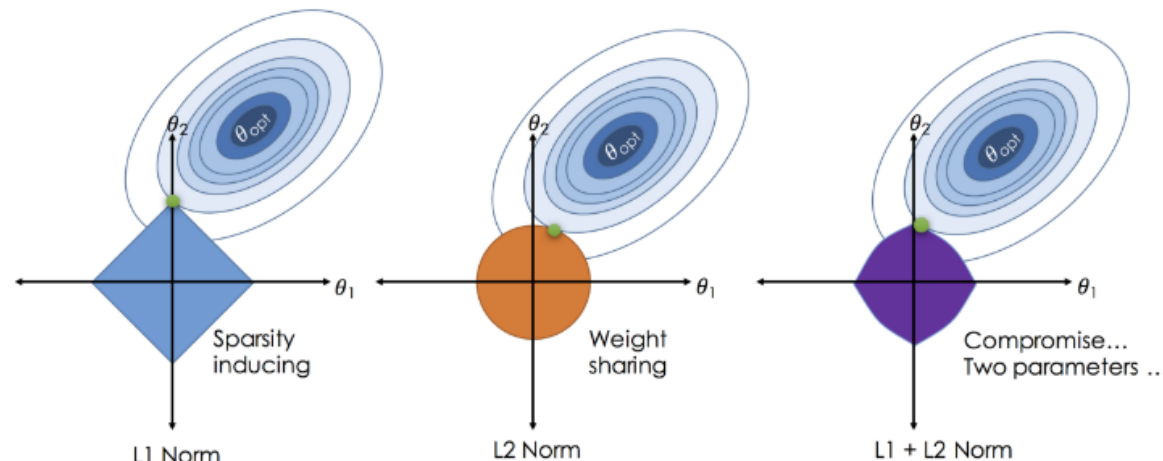
Elastic-net

- Elastic-net é uma solução intermediária entre as regressões Ridge e LASSO.
- Nada mais é do que uma combinação entre as penalizações baseadas nas normas L1 e L2 do vetor de pesos.

$$\min_{\mathbf{a} \in \mathbb{R}} (\|\mathbf{y} - \Phi \mathbf{a}\|^2 + \lambda [\kappa \|\mathbf{a}\|_1 + (1 - \kappa) \|\mathbf{a}\|_2^2]),$$

onde $\kappa \in [0, 1]$.

- Quando $\kappa = 0$, a Elastic-net é equivalente a Ridge regression, e quando $\kappa = 1$, ela é equivalente a Regressão Lasso.
- Utiliza-se técnicas de validação cruzada para encontrar os valores ideais de κ e λ .



O hiperparâmetro κ dita a relação de compromisso entre as duas regularizações.

Quando utilizar regressão LASSO, Ridge ou Elastic-Net?

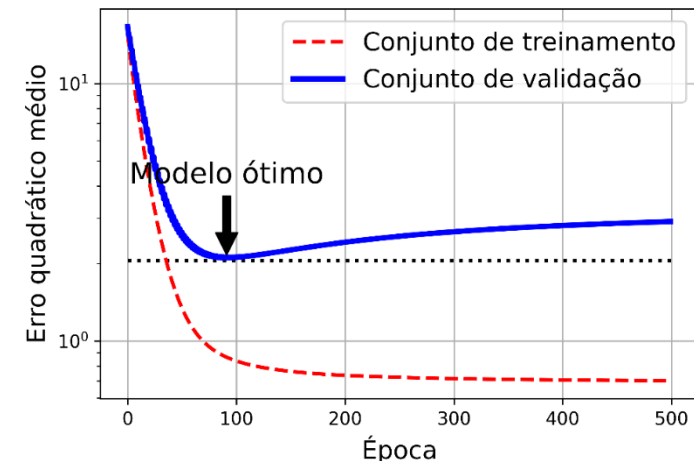
- **Regressão de Ridge:** um bom começo. No entanto, se você suspeitar que apenas alguns atributos são realmente úteis, você deve preferir LASSO ou Elastic-Net.
- **Regressão LASSO:** boa para ***seleção automática de atributos***. No entanto, se o número de atributos for maior que o número de exemplos de treinamento, ou quando houverem atributos fortemente correlacionados, deve-se usar a regressão Elastic-Net.
- **Elastic-Net:** é mais versátil que as anteriores, pois o parâmetro de elasticidade κ é ajustável. Uma proporção de 50% entre as penalizações L1 e L2 é uma boa escolha inicial para esse parâmetro.

Early-stop: Parada antecipada

- Uma forma de se **regularizar** algoritmos de **aprendizado iterativo**, como o **gradiente descendente**, é interromper seu treinamento assim que o **erro de validação** comece a crescer sistematicamente.
- Essa abordagem é chamada de **early-stop** e pode ser vista como uma **regularização no tempo**.
- Assim como as outras abordagens, ela tem o objetivo de evitar o **sobreajuste** de um modelo.
- Intuitivamente, o algoritmo do **gradiente descendente** tenderá a aprender modelos cada vez mais complexos à medida que o número de épocas aumenta.
- Ao regularizar no **tempo**, a complexidade do modelo pode ser controlada, melhorando sua **generalização**.

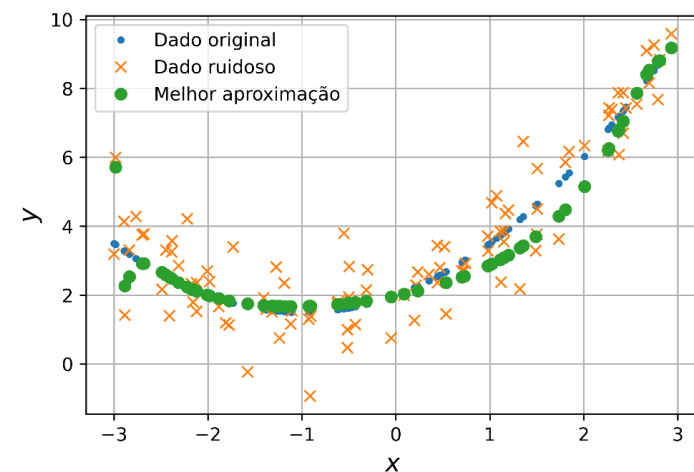
Early-stop: Exemplo

- Existem duas estratégias para se definir o critério de parada:
 - Interromper o treinamento quando o erro de validação aumenta por ***P*** épocas sucessivas.
 - **Problema:** como o erro de validação pode oscilar bastante (e.g., SGD), nem sempre é fácil desenvolver detectores automáticos de mínimos e encerrar o treinamento.
 - Permitir que o treinamento prossiga, mas sempre armazenando os pesos associados ao ***menor erro de validação***.
- A figura mostra um modelo de regressão polinomial com grau igual a 90 sendo treinado usando o ***gradiente descendente estocástico*** e apenas 100 amostras de treinamento.
- À medida que as épocas passam, o algoritmo aprende e seu erro quadrático médio no conjunto de treinamento diminui, juntamente com o erro de predição no conjunto de validação.
- No entanto, após algumas épocas, o erro de validação para de diminuir e começa a crescer.
- Isso indica que o modelo começou a ***sobreajustar*** aos dados de treinamento.



$$y_{\text{noisy}} = 2 + x + 0.5x^2 + w,$$

onde $x \sim U(-3,3)$ e $w \sim N(0,1)$



[Exemplo: early_stopv2.ipynb](#)

Tarefas

- **Quiz:** “*T319 - Quiz - Regressão: Parte VI (1S2021)*” que se encontra no MS Teams.
- **Exercício Prático:** [Projeto Prático](#).
 - Pode ser baixado do MS Teams ou do GitHub.
 - Pode ser respondido através do link acima (na nuvem) ou localmente.
 - [Instruções para resolução e entrega dos laboratórios](#).
 - **Laboratórios podem ser feitos em grupo.**

Obrigado!

