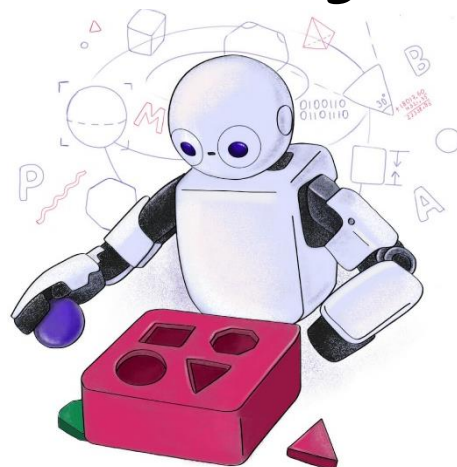


T320 - Introdução ao Aprendizado de Máquina II: *Redes Neurais Artificiais (Parte II)*



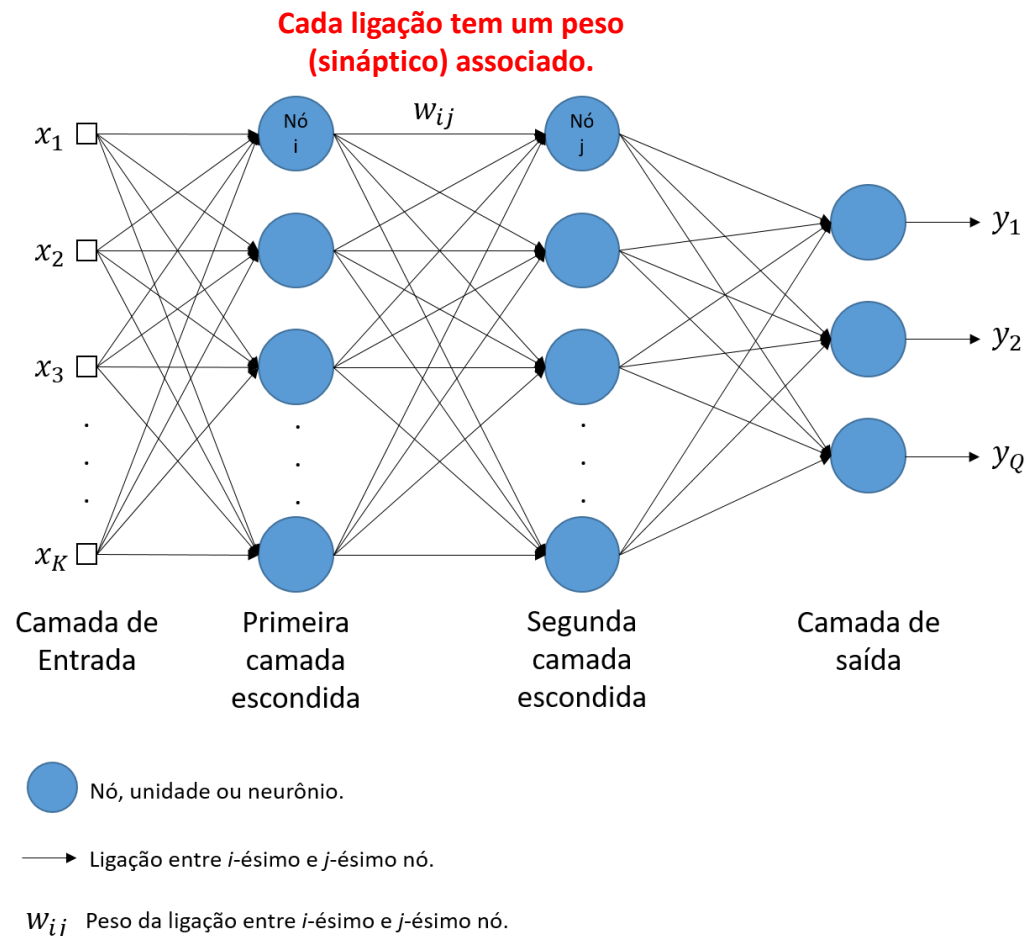
Inatel

Felipe Augusto Pereira de Figueiredo
felipe.figueiredo@inatel.br

Recapitulando

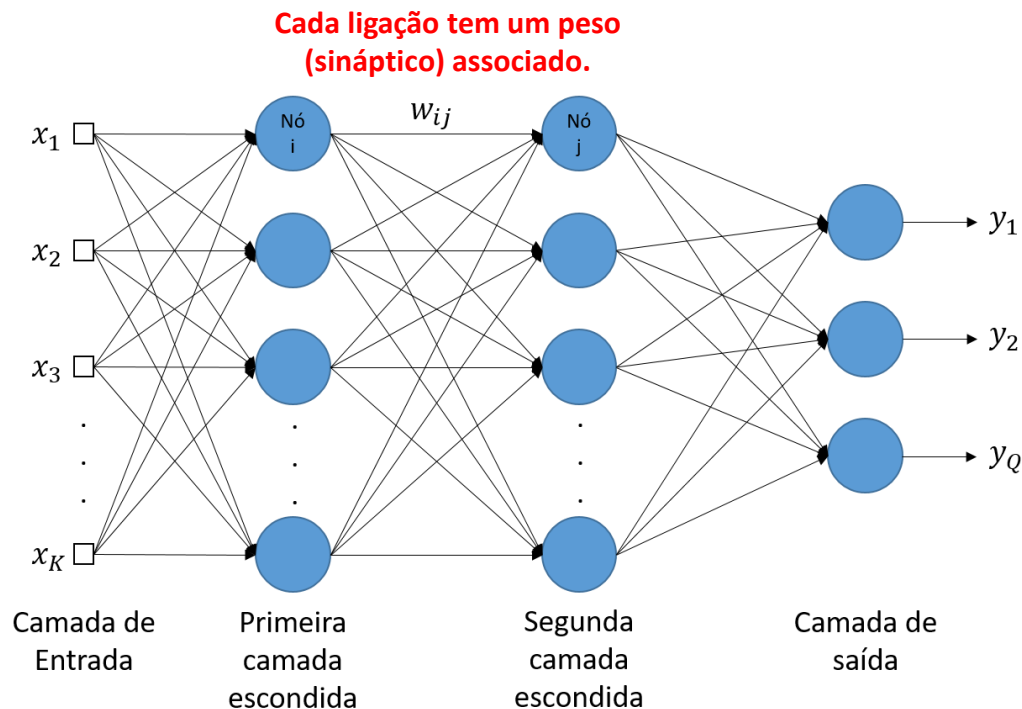
- Fizemos uma analogia entre um neurônio e os modelos de McCulloch e Pitts e do Perceptron.
- Vimos a evolução do modelo de McCulloch e Pitts para o Perceptron.
- Aprendemos suas características, diferenças e como ambos funcionam.
- Verificamos que um Perceptron é semelhante ao regressor logístico.
- Constatamos que um **único** Perceptron não é capaz de separar classes não-lineares, como, por exemplo, o problema da lógica XOR.
- Porém, quando combinamos vários deles, conseguimos criar um separador não-linear.
- Neste tópico, veremos que esta união de Perceptrons origina o que chamamos de **redes neurais artificiais (RNAs)**.

Perceptron de múltiplas camadas



- Uma **rede neural** nada mais é do que uma **combinação de neurônios** conectados entre si através de **ligações direcionadas** (ou seja, as conexões têm uma direção associada).
 - Neurônios também são chamados de **nós** ou **unidades**.
 - **Cada ligação** entre nós **possui um peso (sináptico) associado**.
- As **propriedades da rede neural** são determinadas por sua **arquitetura**, i.e., como os neurônios estão conectados, quantidade neurônios e de camadas escondidas, função de ativação, etc.

Perceptron de múltiplas camadas



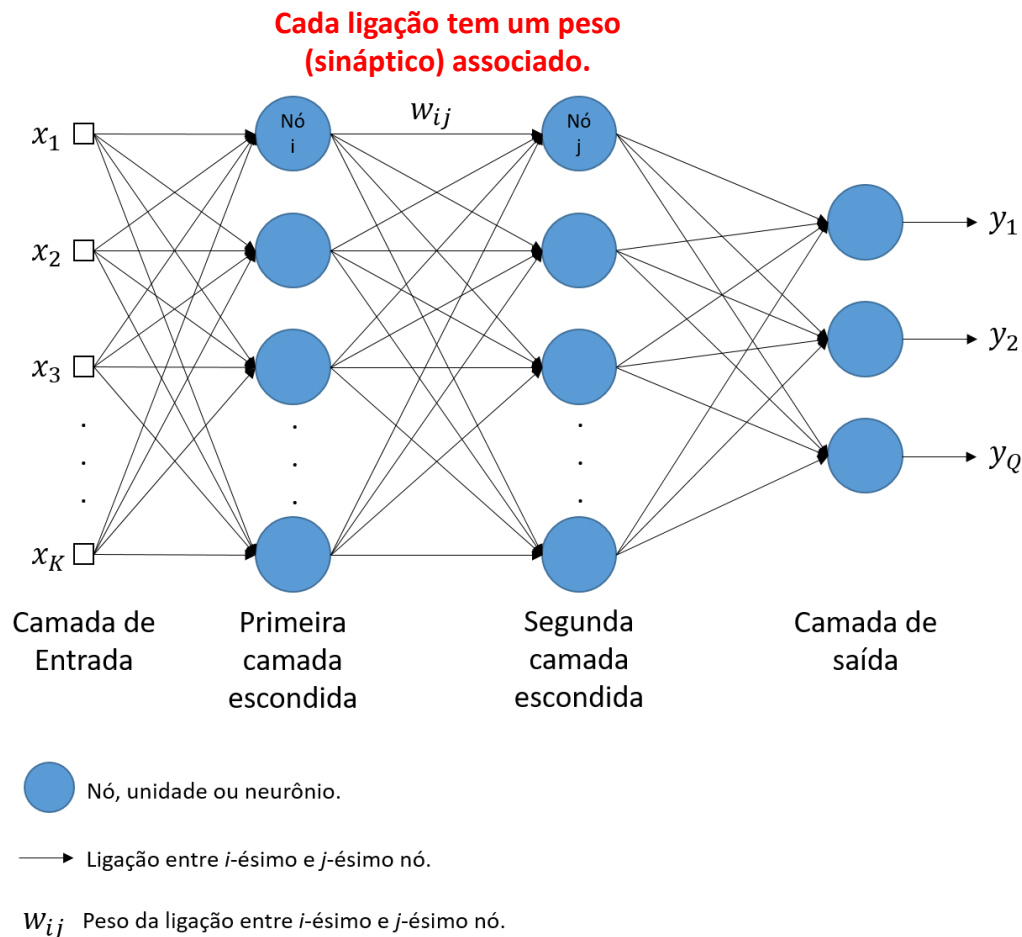
- Algumas das **limitações dos perceptrons** (e.g., classificação apenas de classes linearmente separáveis) podem ser **superadas adicionando-se camadas intermediárias de perceptrons**.
- As camadas intermediárias são também chamadas de **ocultas** ou **escondidas**.

● Nó, unidade ou neurônio.

→ Ligação entre i -ésimo e j -ésimo nó.

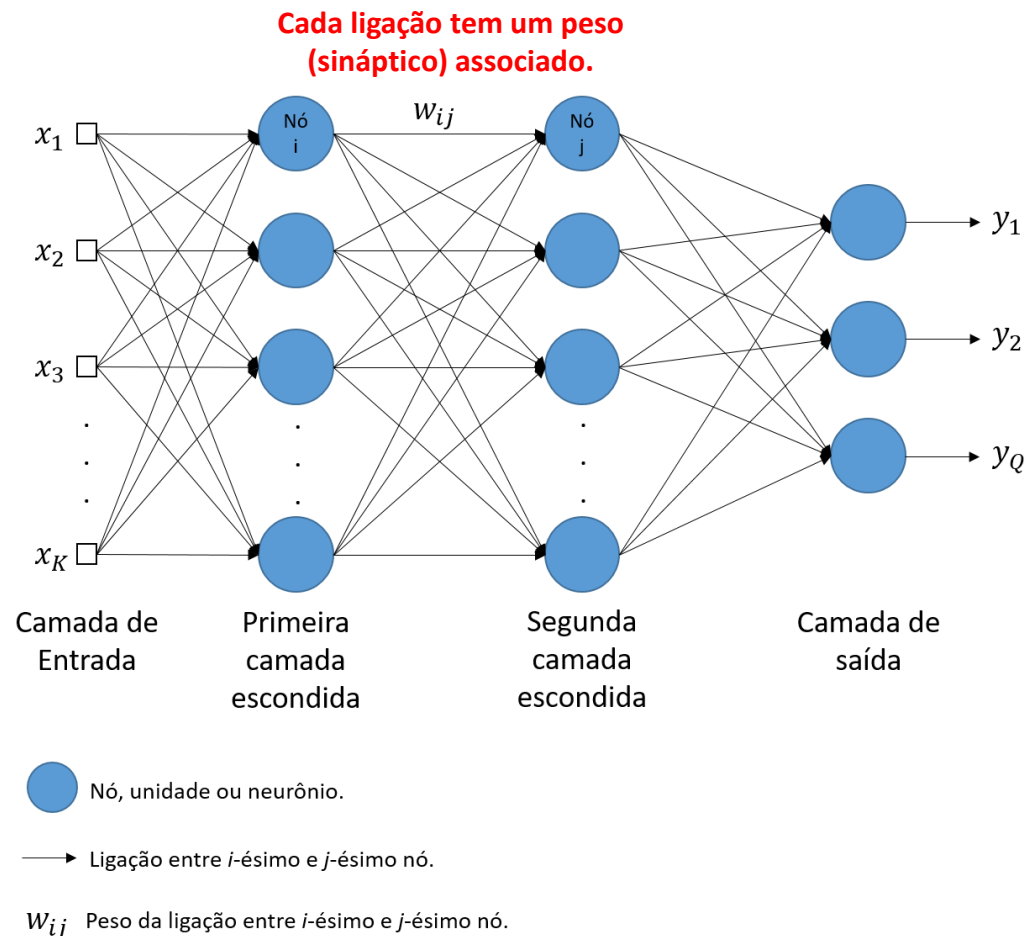
w_{ij} Peso da ligação entre i -ésimo e j -ésimo nó.

Perceptron de múltiplas camadas



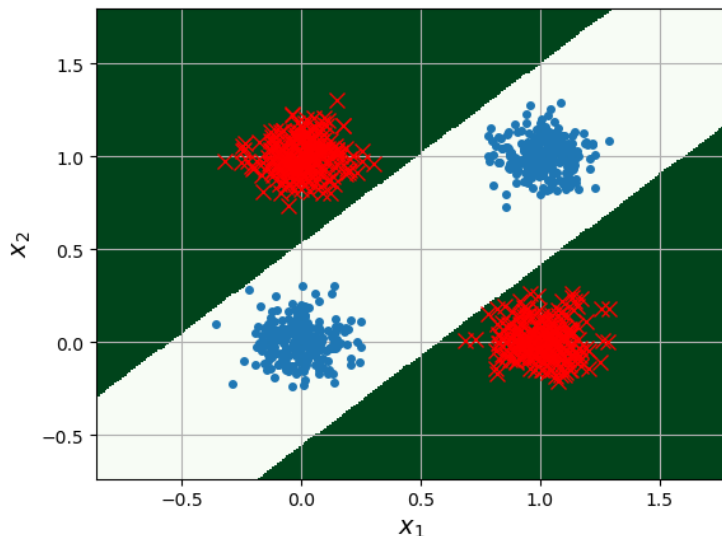
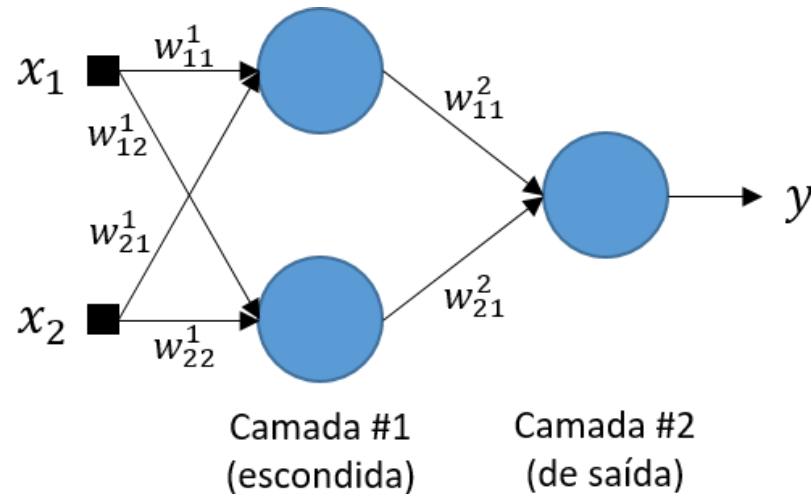
- A rede ao lado é do tipo **densamente conectada** e de **alimentação direta**.
 - Cada uma das saídas de uma camada **se conecta a todos os nós** da camada seguinte através de pesos sinápticos.
 - Os **dados fluem através da rede em uma única direção**, da camada de entrada para a camada de saída, sem ciclos ou *loops* de retroalimentação.
- Essa rede é chamada de **perceptron de múltiplas camadas** (do inglês, *Multilayer Perceptron* - MLP) ou de **rede densamente conectada (de alimentação direta)** (do inglês, *Dense Neural Network* - DNN).

Perceptron de múltiplas camadas



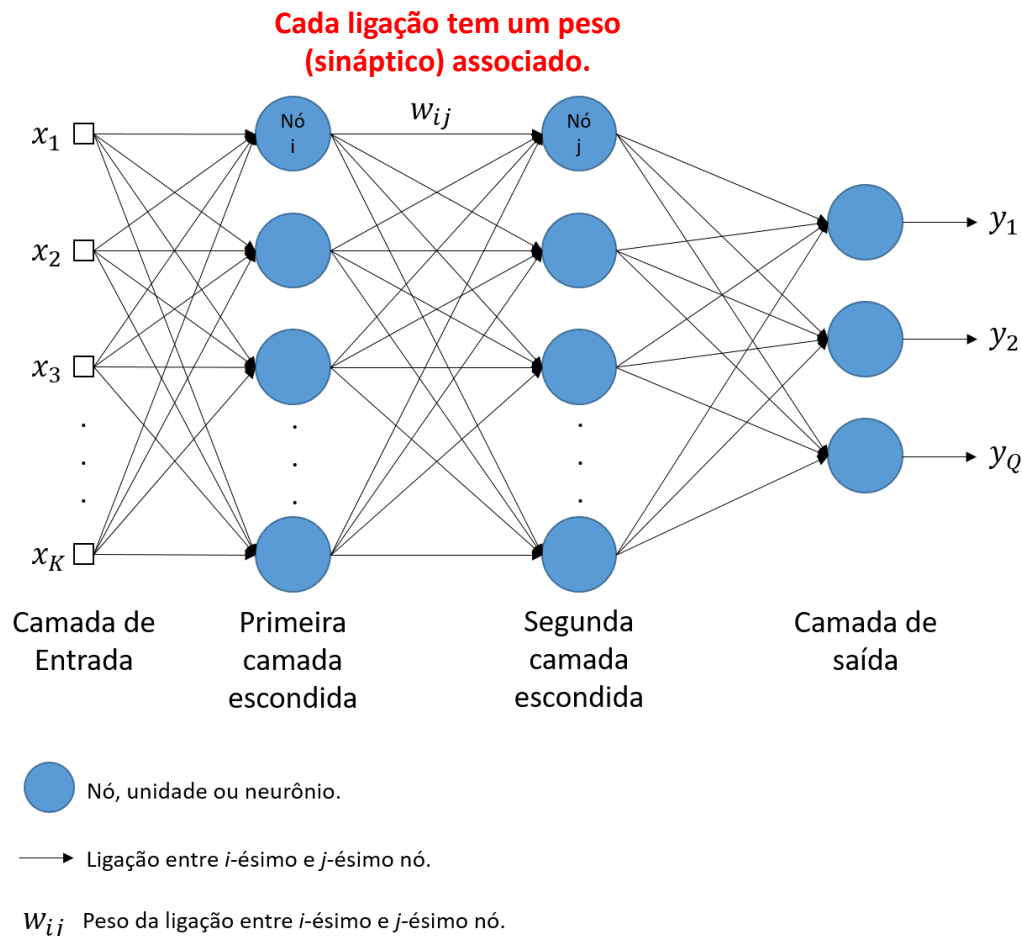
- As RNAs são o coração do ***deep learning*** ou ***aprendizado profundo***.
- O termo "***profundo***" vem fato de que essas redes podem possuir ***muitas camadas ocultas***.
- Em geral, quando uma RNA tem duas ou mais camadas ocultas, ela pode ser chamada de ***rede neural profunda*** (ou em inglês, ***Deep Neural Network - DNN***).
- A rede MLP ao lado possui duas camadas ocultas e, portanto, poderia ser chamada de DNN.

Perceptron de múltiplas camadas



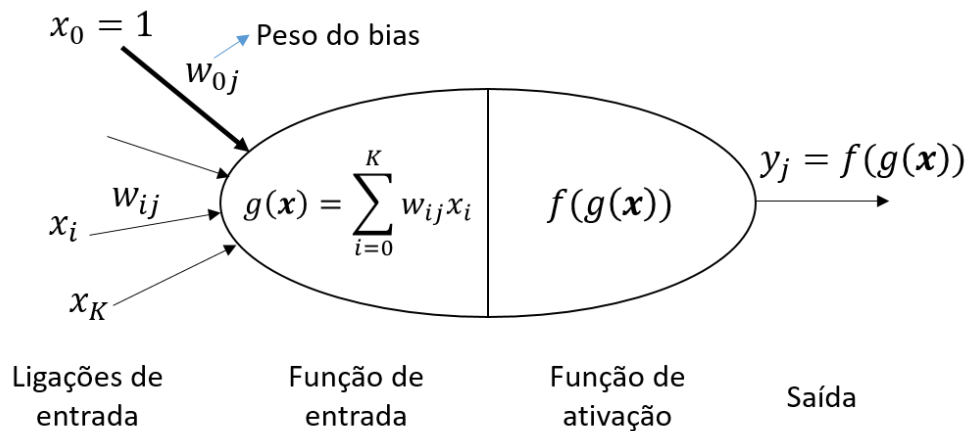
- Em particular, uma MLP com **uma camada oculta com dois nós** e **uma camada de saída com um nó** pode resolver o problema da lógica XOR.
- Lembrem-se que um único **perceptron** não é capaz de realizar essa tarefa.
- Os dois nós da camada oculta **aprendem separadores lineares** que são **combinados** para obter a **separação não linear** resultante.

Perceptron de múltiplas camadas



- Considerando **qualquer dois nós da rede**, a **ligação** do i -ésimo **nó** para o j -ésimo **nó** é feita através do **peso** w_{ij} .
- A ligação **propaga** o **signal de saída** do i -ésimo **nó** para o j -ésimo **nó**.
 - O **signal de saída** do i -ésimo nó é denotado por x_i .
- O valor do **peso** determina a **força** e o **signal** da **ligação**.
- A ligação pode ser **excitatória** ou **inibitória** dependendo do sinal do peso.

Perceptron de múltiplas camadas



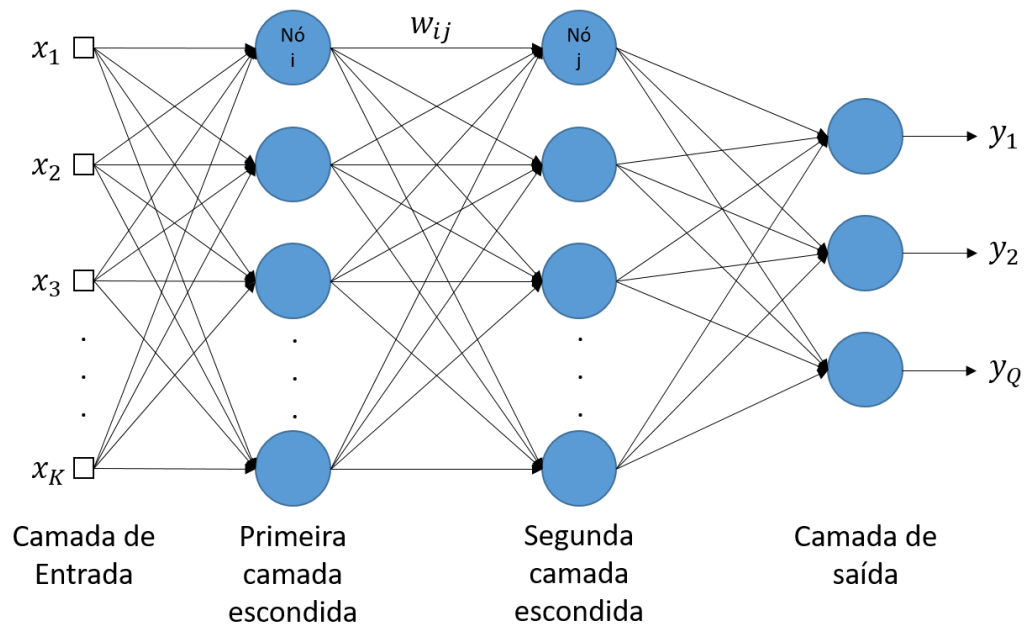
- **Cada nó** tem a entrada x_0 (i.e., o atributo de bias) sempre com valor igual a 1 e um peso associado w_{0j} , chamado de **peso de bias**.
 - Ou seja, a entrada x_0 **não está conectada a nenhum outro nó**.
- O j -ésimo **nó** calcula a **soma ponderada** de suas entradas, x_i

$$g(x) = \sum_{i=0}^K w_{ij}x_i = \mathbf{w}^T \mathbf{x},$$

e, em seguida, aplica uma **função de ativação** (i.e., de limiar), $f(\cdot)$, à soma para gerar sua saída

$$y_j = f(g(x)).$$

Perceptron de múltiplas camadas



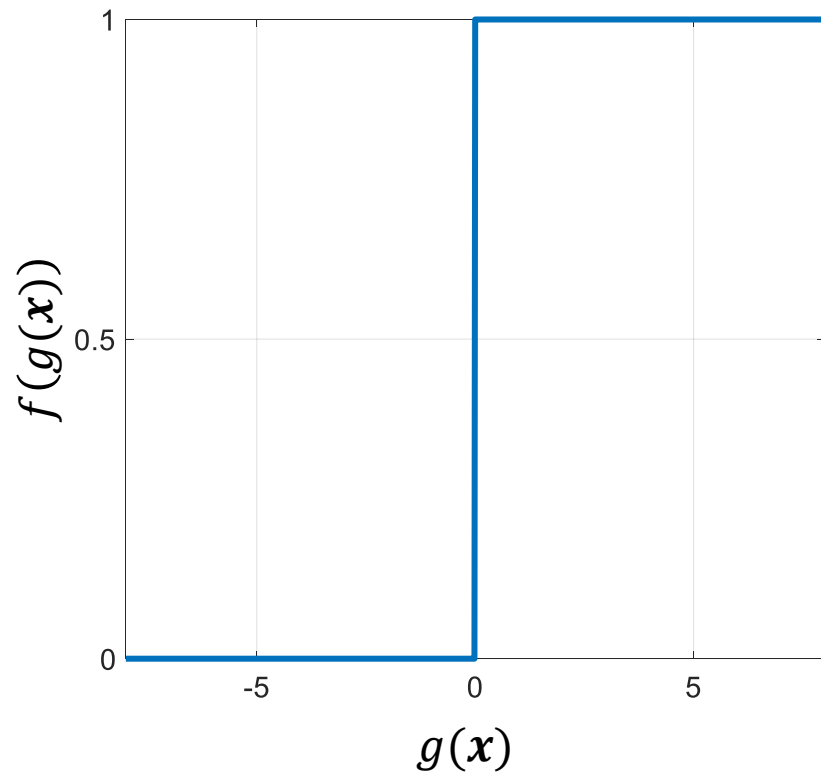
● Nó, unidade ou neurônio.

→ Ligação entre i -ésimo e j -ésimo nó.

w_{ij} Peso da ligação entre i -ésimo e j -ésimo nó.

- Existem vários tipos de **funções de ativação** que podem ser utilizadas pelos **nós** de uma rede neural.
- Cada camada pode usar funções de ativação diferentes.
- Porém, em geral, todos os nós de uma camada usam a mesma função de ativação.

Funções de ativação



- Devido a suas características, não se utiliza a ***função degrau*** como função de ativação em redes neurais.
 - Derivada sempre igual a zero, exceto na origem, onde ela é indeterminada.
- Até o surgimento das ***redes neurais profundas***, a regra era utilizar as ***funções logística*** ou ***tangente hiperbólica***, que são ***versões suavizadas da função degrau***.
 - Essas funções ***são contínuas e possuem derivada definida e diferente de 0 em todos os pontos***.

Função logística

- A saída de um nó com **função de ativação logística** (ou sigmoide) tem a seguinte expressão

$$y_j = f(g(\mathbf{x})) = \frac{1}{1 + e^{-g(\mathbf{x})}},$$

onde $g(\mathbf{x})$ é a **combinação linear das entradas do nó**.

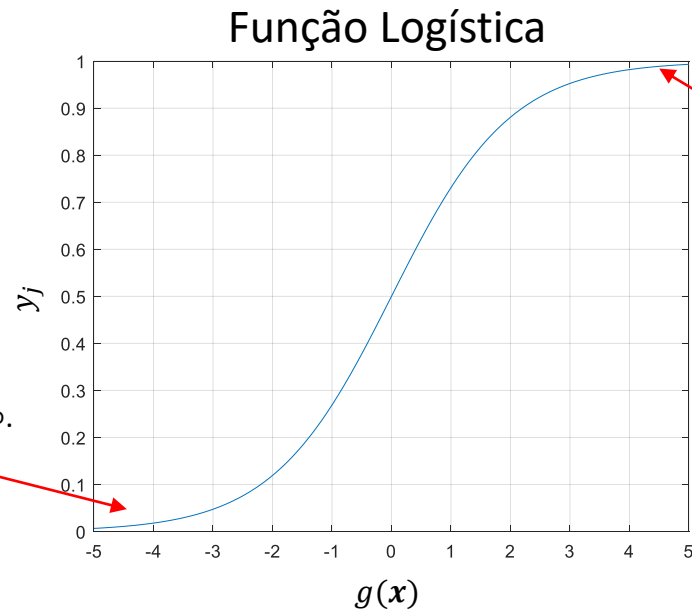
- Sua derivada é dada por

$$\frac{dy_j}{dg(\mathbf{x})} = \frac{df(g(\mathbf{x}))}{dg(\mathbf{x})} = y_j(1 - y_j) \geq 0.$$

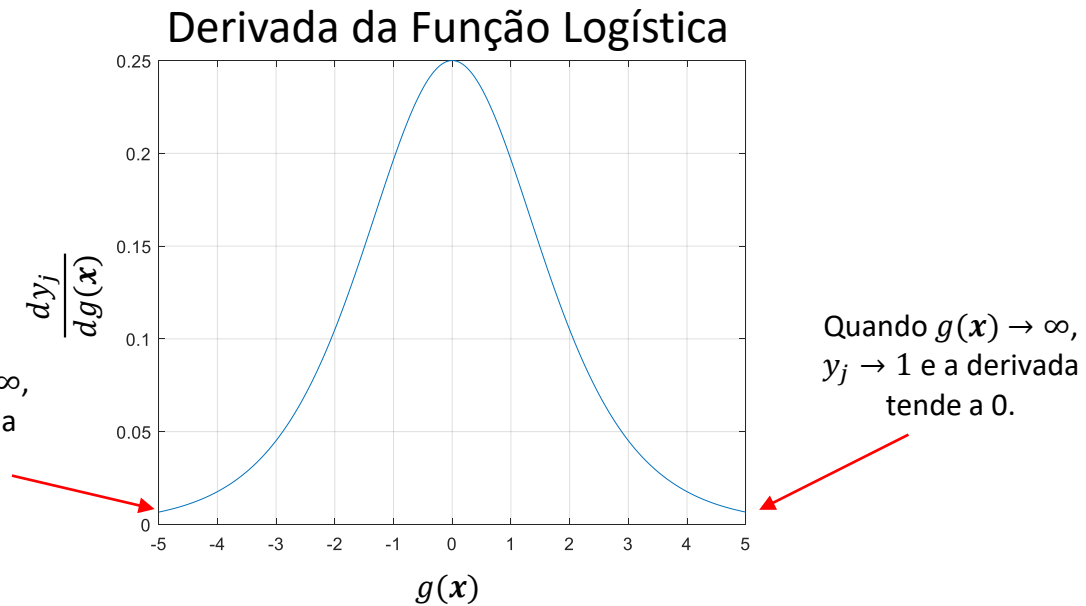
- A derivada será importante durante o processo de aprendizado da rede neural.

Função logística e sua derivada

- Percebam que o valor da derivada **sempre será menor do que 1, sendo no máximo igual a 0.25 quando $g(x) = 0$.**



Quando $g(x) \rightarrow -\infty$,
 $y_j \rightarrow 0$ e a derivada
tende a 0.



Função tangente hiperbólica

- A saída de um nó com **função de ativação tangente hiperbólica** tem sua expressão dada por

$$y_j = f(g(\mathbf{x})) = \tanh(g(\mathbf{x})) = \frac{e^{g(\mathbf{x})} - e^{-g(\mathbf{x})}}{e^{g(\mathbf{x})} + e^{-g(\mathbf{x})}}.$$

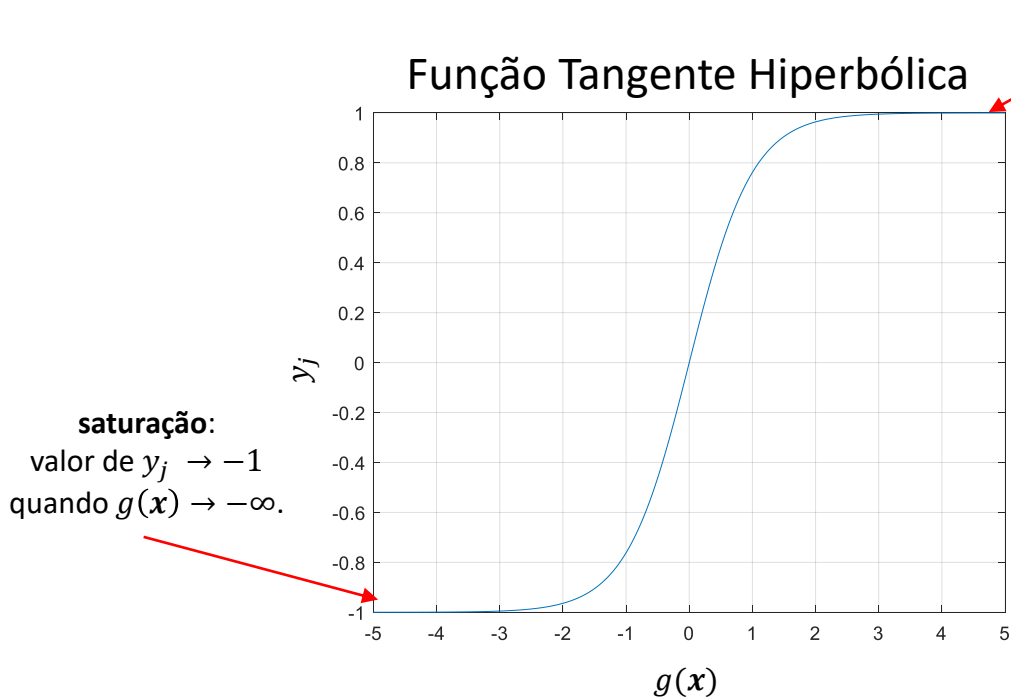
onde $g(\mathbf{x})$ é a **combinação linear das entradas do nó**.

- Sua derivada é dada por

$$\frac{dy_j}{dg(\mathbf{x})} = \frac{df(g(\mathbf{x}))}{dg(\mathbf{x})} = 1 - \tanh^2(g(\mathbf{x})) \geq 0.$$

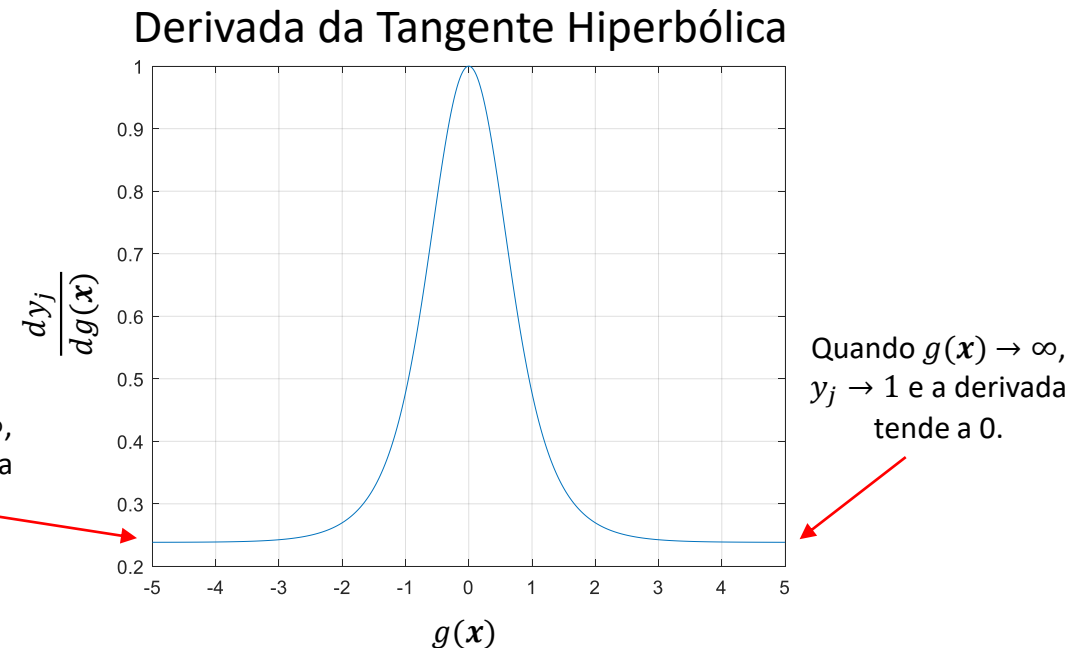
Função tangente hiperbólica e sua derivada

- A derivada é no máximo igual a 1 **exatamente** quando **quando** $g(x) = 0$, sendo menor do que 1 para todos os outros valores de $g(x)$.



saturação:
valor de $y_j \rightarrow 1$
quando $g(x) \rightarrow \infty$.

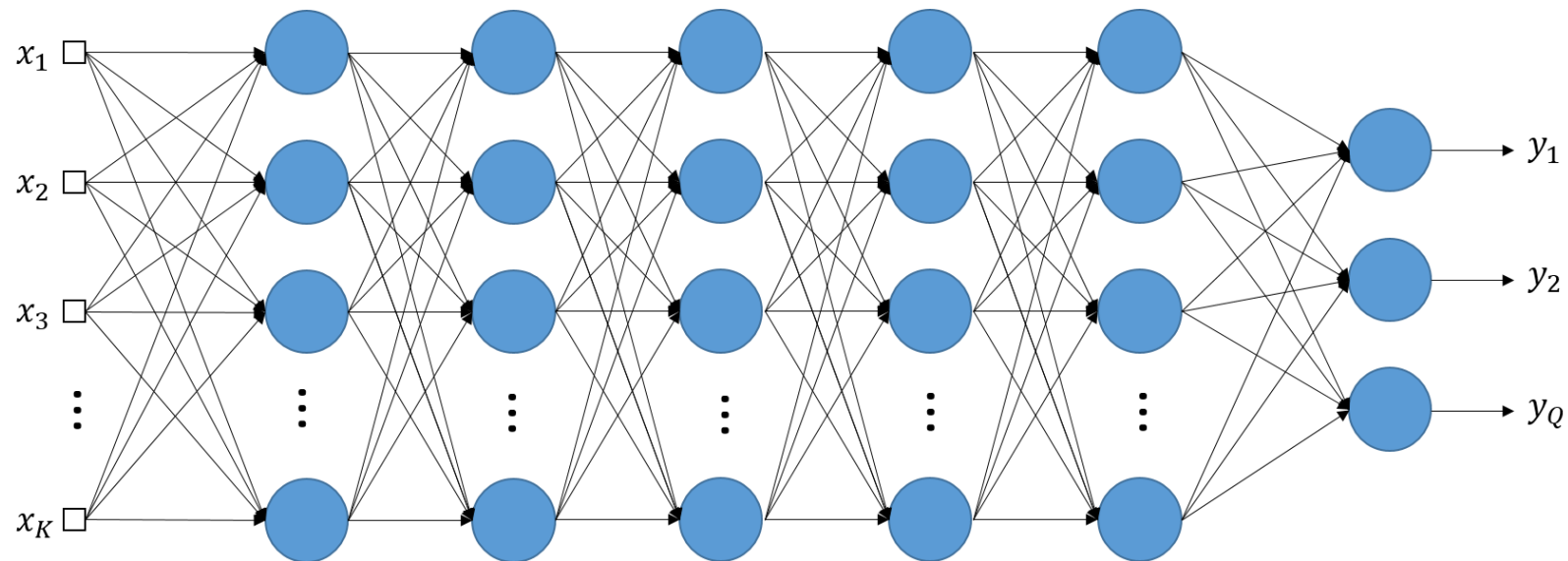
Quando $g(x) \rightarrow -\infty$,
 $y_j \rightarrow -1$ e a derivada
tende a 0.



Na sequência, veremos que esses valores de derivadas menores do que 1 causam um problema no aprendizado de redes com muitas camadas, i.e., redes profundas.

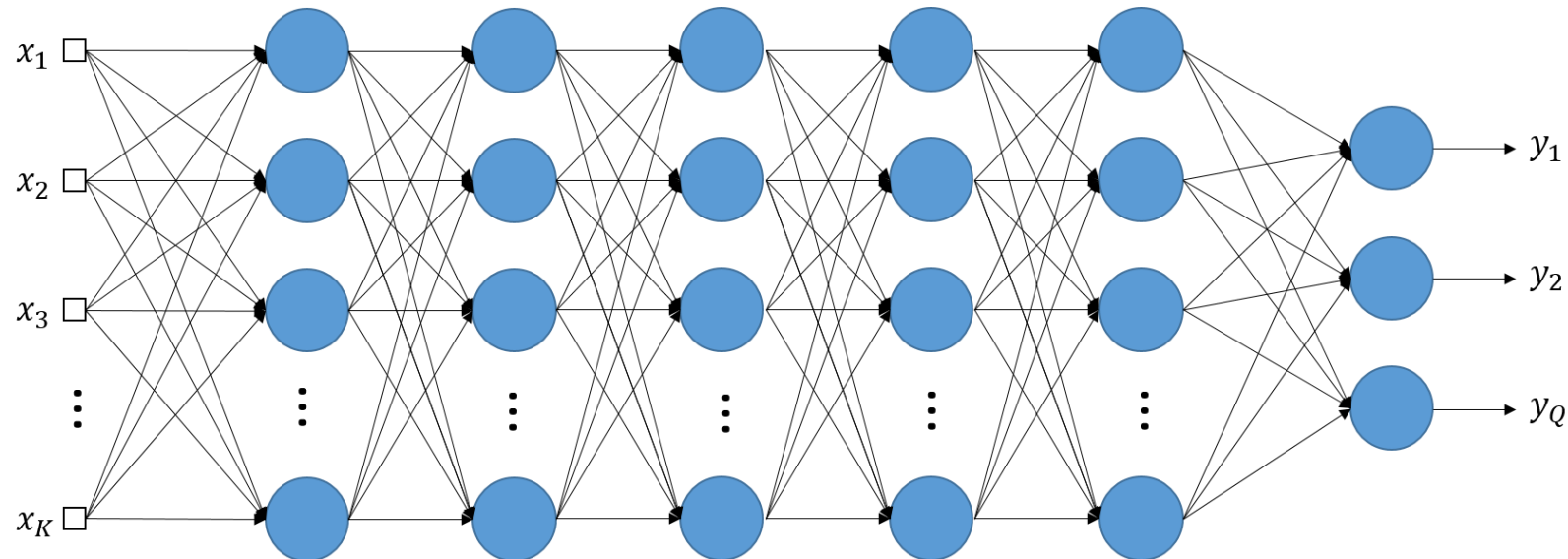
O problema da dissipação do gradiente

- É um problema encontrado quando treinamos **redes neurais profundas**, ou seja, com muitas camadas ocultas, com **métodos de aprendizado baseados no gradiente descendente** e nós usando **funções de ativação sigmoide ou tangente hiperbólica**.



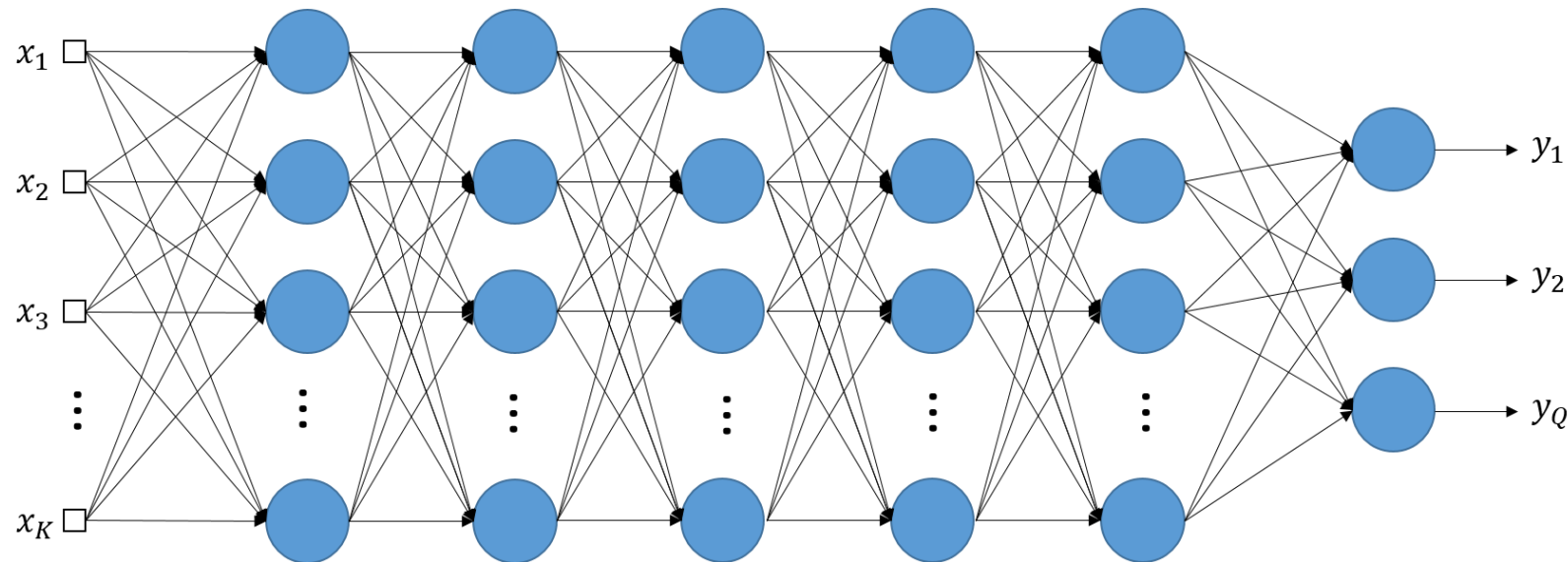
O problema da dissipação do gradiente

- Ocorre devido à natureza do **algoritmo de retropropagação**, que é usado para treinar a rede neural.
 - Para atualizar os pesos de nós das camadas ocultas, calcula-se a derivada do erro de saída em relação àquele peso e, para isso, usamos a **regra da cadeia**.
 - Ou seja, o algoritmo **propaga o erro de saída para as camadas ocultas** usando a **regra da cadeia**.



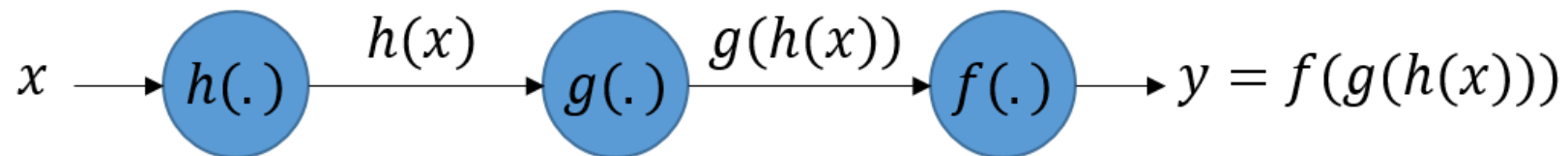
O problema da dissipação do gradiente

- Em suma, problema da dissipação do gradiente faz com que o **vetor gradiente se torne cada vez menor** conforme ele é calculado para as camadas próximas à entrada da rede, levando a uma **atualização muito pequena ou até inexistente** dos pesos destas camadas.



Regra da cadeia

- Durante o treinamento, para **atualizar os pesos dos nós de cada camada** da rede, o **algoritmo de retropropagação** calcula os vetores gradiente em relação aos pesos dessas camadas através da **regra da cadeia**.
- Vejamos o exemplo abaixo com 3 nós e pesos das ligações iguais a 1.
 - **OBS.:** As funções $f(\cdot)$, $g(\cdot)$, e $h(\cdot)$ podem ser interpretadas como sendo as funções de ativação dos nós.



- Como calculamos a derivada de y em relação à x ?

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial f(g(h(x)))}{\partial x} = \frac{\partial f(g(h(x)))}{\partial g(h(x))} \frac{\partial g(h(x))}{\partial h(x)} \frac{\partial h(x)}{\partial x}.$$

Regra da cadeia

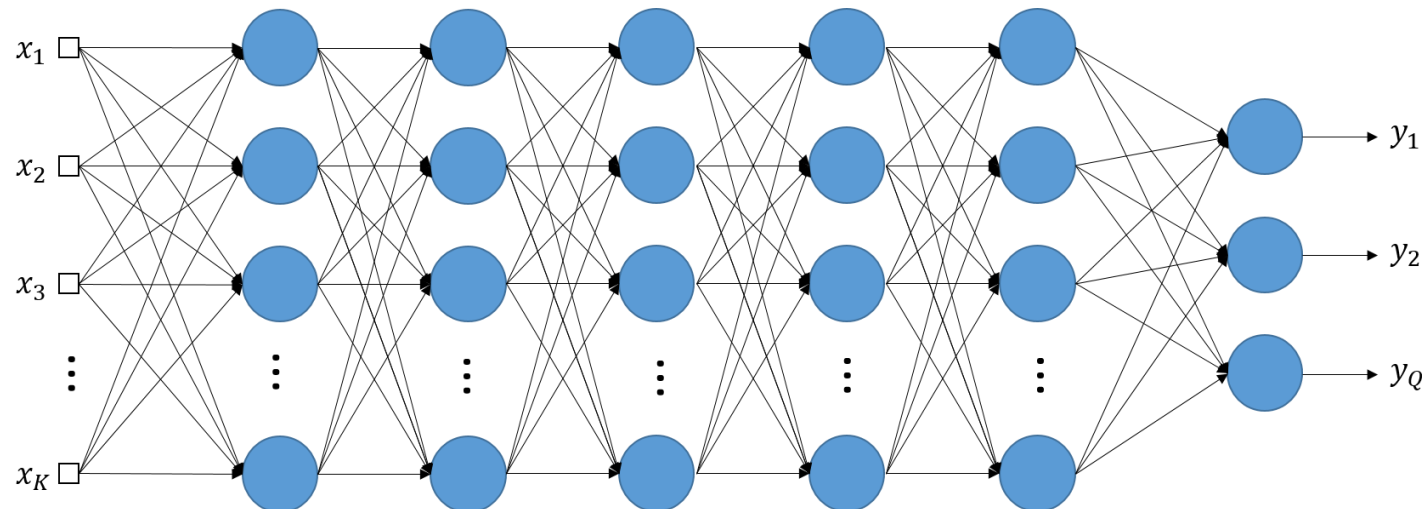
- Em outras palavras, devido à regra da cadeia, o **vetor gradiente** para a **atualização dos pesos de uma dada camada** da rede inclui o **produto das derivadas das funções de ativação dos nós desde a camada de saída até a camada desejada**.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial f(g(h(x)))}{\partial x} = \frac{\partial f(g(h(x)))}{\partial g(h(x))} \frac{\partial g(h(x))}{\partial h(x)} \frac{\partial h(x)}{\partial x}.$$

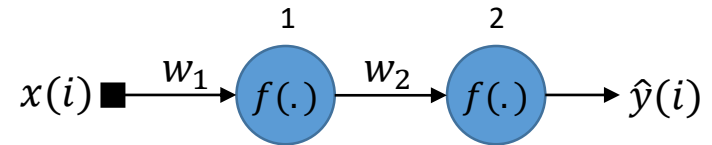
- Lembrem-se que as **funções de ativação**, como **tangente hiperbólica** ou **logística**, têm derivadas no intervalo de 0 até 1.
- Portanto, a multiplicação de vários termos menores do que 1 tende a 0 conforme o número de camadas da rede aumenta.

O problema da dissipação do gradiente

- Em uma rede com M camadas, a **retropropagação** tem o efeito de multiplicar até M valores pequenos (i.e., derivadas parciais das funções de ativação) para calcular os vetores gradiente das primeiras camadas.
- O que significa que o **gradiente diminui exponencialmente com M** .
- Assim, os **nós das camadas iniciais aprendem muito mais lentamente do que os nós das camadas finais**, pois o **vetor gradiente** daquelas camadas é **muito pequeno**, fazendo com que a **atualização dos pesos também seja pequena**.



Dissipação do gradiente



Considerações:

- 2 x neurônios com função de ativação sigmoide, $f(\cdot)$.
- $g_1 = xw_1 \rightarrow$ entrada (i.e., ativação) do primeiro neurônio.
- $z_1 = f(xw_1) \rightarrow$ saída do primeiro neurônio.
- $g_2 = z_1w_2 = f(xw_1)w_2 \rightarrow$ entrada (i.e., ativação) do segundo neurônio.
- $\hat{y} = f(f(xw_1)w_2) \rightarrow$ saída do segundo neurônio.
- **Objetivo:** minimizar o erro quadrático médio, $J_e = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{y}(i) - y(i))^2$.

Dissipação do gradiente

- As **regras de atualização** dos dois pesos são dadas por

$$w_2 = w_2 - \alpha \frac{\partial J_e}{\partial w_2},$$

$$w_1 = w_1 - \alpha \frac{\partial J_e}{\partial w_1}.$$

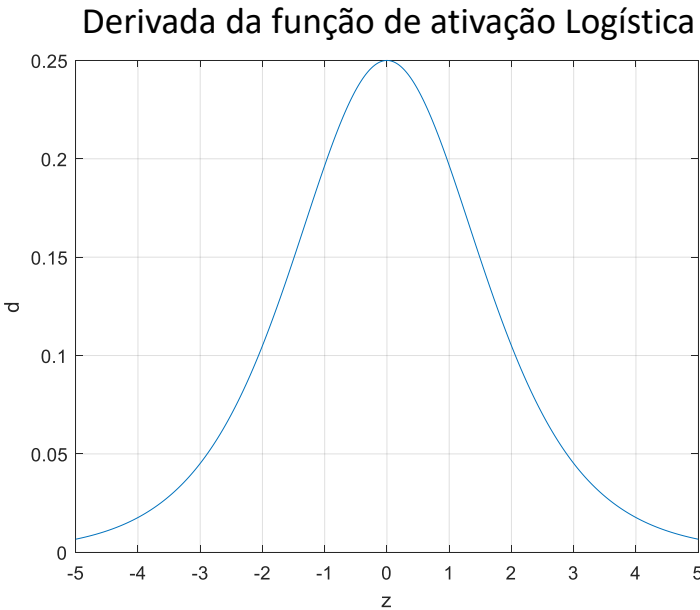
- Usando a regra da cadeia, obtemos as derivadas $\frac{\partial J_e}{\partial w_1}$ e $\frac{\partial J_e}{\partial w_2}$

$$\frac{\partial J_e}{\partial w_2} = \frac{\partial J_e}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{y}}{\partial g_2} \frac{\partial g_2}{\partial w_2},$$

$$\frac{\partial J_e}{\partial w_1} = \frac{\partial J_e}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{y}}{\partial g_2} \frac{\partial g_2}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial g_1} \frac{\partial g_1}{\partial w_1}.$$

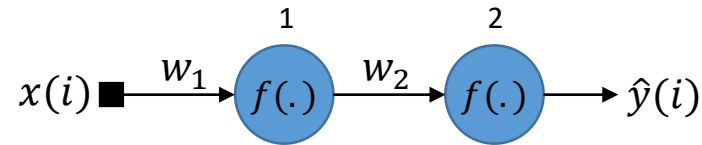
Dissipação do gradiente

$$\frac{\partial J_e}{\partial w_2} = \frac{\partial J_e}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{y}}{\partial g_2} \frac{\partial g_2}{\partial w_2},$$
$$\frac{\partial J_e}{\partial w_1} = \frac{\partial J_e}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{y}}{\partial g_2} \frac{\partial g_2}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial g_1} \frac{\partial g_1}{\partial w_1}.$$



- A derivada da função sigmoide é no máximo igual a 0.25.
- Assim, por exemplo, a primeira camada de uma rede neural com M camadas, terá as derivadas parciais da função de erro em relação a seus pesos compostas pela multiplicação de M termos no máximo iguais a 0.25.
- Isso faz com que as primeiras camadas aprendam lentamente ou nem aprendam, pois têm derivadas muito pequenas, tendendo a zero.

Explosão do gradiente



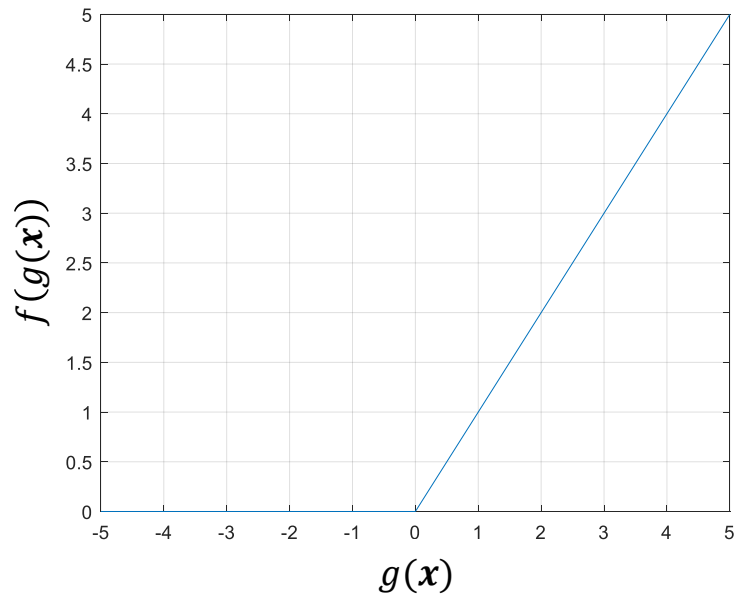
$$\frac{\partial J_e}{\partial w_1} = \frac{\partial J_e}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{y}}{\partial g_2} \frac{\partial g_2}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial g_1} \frac{\partial g_1}{\partial w_1}.$$

$\frac{\partial g_2}{\partial z_1} = \frac{\partial f(xw_1)w_2}{\partial f(xw_1)} = w_2$

A red circle highlights the term $\frac{\partial g_2}{\partial z_1}$ in the chain rule equation, with a red arrow pointing from it to the simplified equation on the right.

- Usando ReLUs, reduzimos o problema do desaparecimento do gradiente.
- Porém, caso os pesos sejam inicializados (em geral, de forma aleatória) com valores maiores do que 1, haverá a multiplicação de vários valores assim, resultando em valores de gradiente muito grandes.
- Consequentemente, os pesos da rede podem sofrer atualizações extremamente grandes, o que leva a instabilidades numéricas e a um treinamento ineficaz ou até mesmo à divergência.

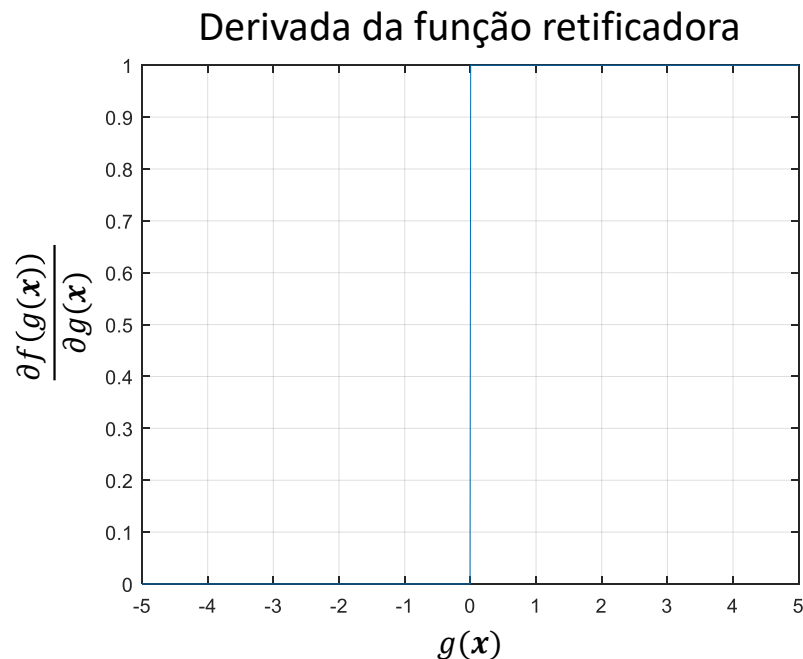
Função de ativação retificadora



$$\hat{y} = f(g(x)) = \max(0, g(x))$$

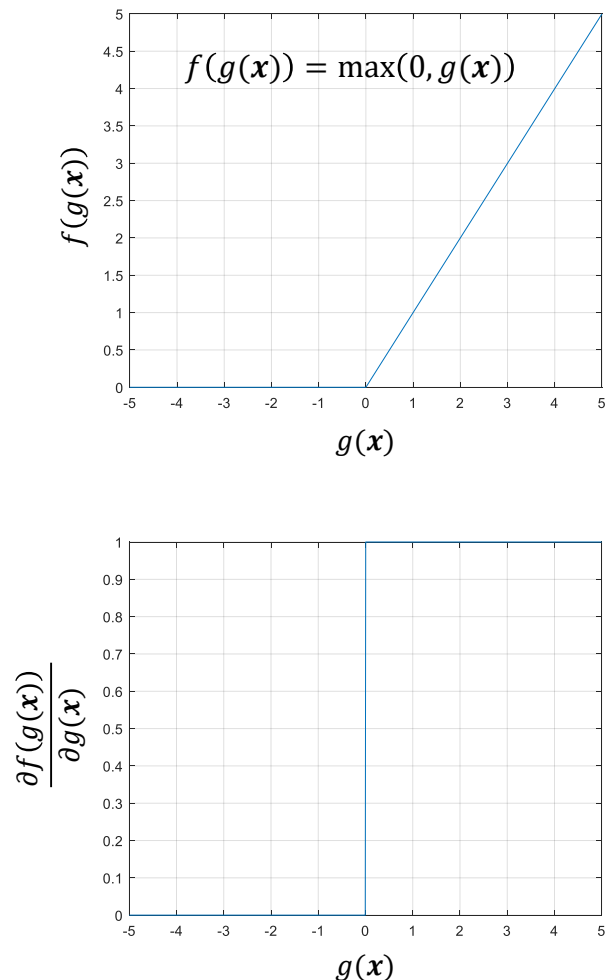
- Com o surgimento das **redes neurais profundas**, e, consequentemente, do problema do **desaparecimento do gradiente**, uma outra função de ativação, conhecida como **Rectified Linear Unit (ReLU)**, passou a ser a bastante utilizada.
- É uma **função não-linear** onde sua saída é igual 0 quando $g(x) \leq 0$ e o próprio $g(x)$ quando $g(x) > 0$.
- É uma das funções mais amplamente utilizadas em redes neurais.

Função de ativação retificadora



- Suas principais **vantagens** são a sua **simplicidade e eficiência computacional**.
 - Ela e sua derivada **são mais rápidas de se calcular** do que as funções logística e tangente hiperbólica.
- Além disso, ajuda a **minimizar o problema do desaparecimento de gradiente**, pois sua derivada é igual a 1 para $g(x) > 0$.
- Sua derivada é dada por
$$\frac{dy_j}{dg(x)} = \frac{df(g(x))}{dg(x)} = \begin{cases} 0, & \text{se } g(x) < 0 \\ 1, & \text{se } g(x) > 0 \end{cases}$$
- A derivada é indeterminada para $g(x) = 0$.

Função de ativação retificadora



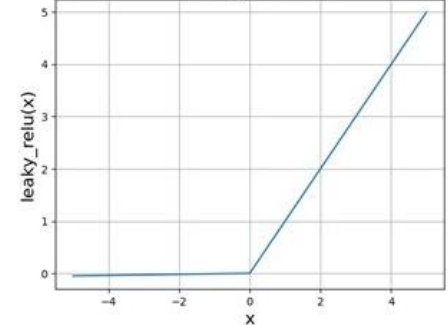
- Uma desvantagem é que ela causar o problema conhecido como **ReLU agonizante**.
- Esse **problema ocorre durante o treinamento** da rede, quando a ativação do nó, $g(x)$, é **negativa**.
- Isso faz com que sua **saída e**, consequentemente, a **derivada parcial da função de ativação sejam iguais a 0**.
- Quando isso ocorre, o **nó não tem seus pesos atualizados** durante o treinamento, **permanecendo inalterados**.

Variantes da função de ativação retificadora

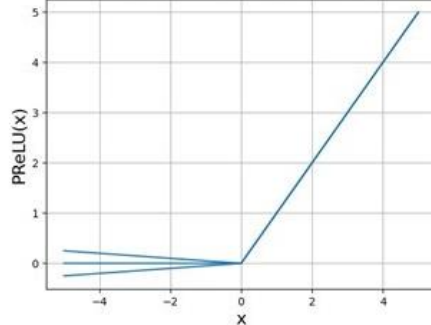
- Para resolver o problema das ***ReLU*s agonizantes**, usa-se variantes da função ReLU que possuam gradiente diferente de zero para $g(x) < 0$, como, por exemplo,

- [Leaky ReLU](#),
- [Parametric ReLU \(PReLU\)](#),
- [Gaussian Error Linear Unit \(GELU\)](#),
- [etc.](#)

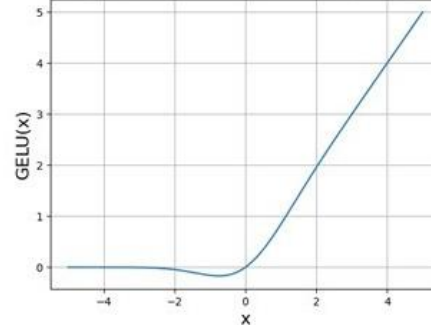
Leaky ReLU



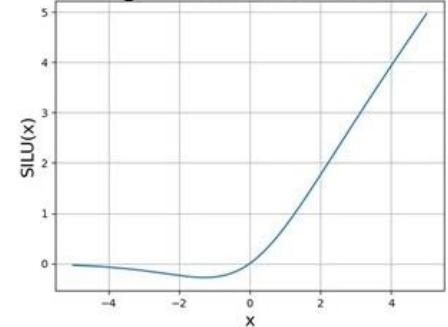
Parametric ReLU



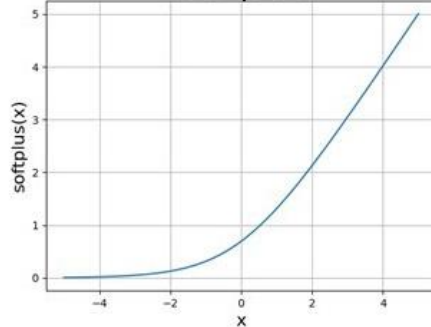
Gaussian Error Linear Unit



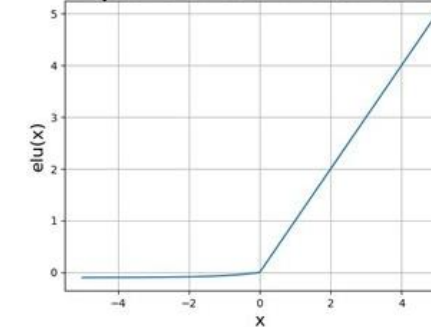
Sigmoid Linear Unit



Softplus



Exponential Linear Units



Outras formas de se minimizar a dissipação e a explosão do gradiente

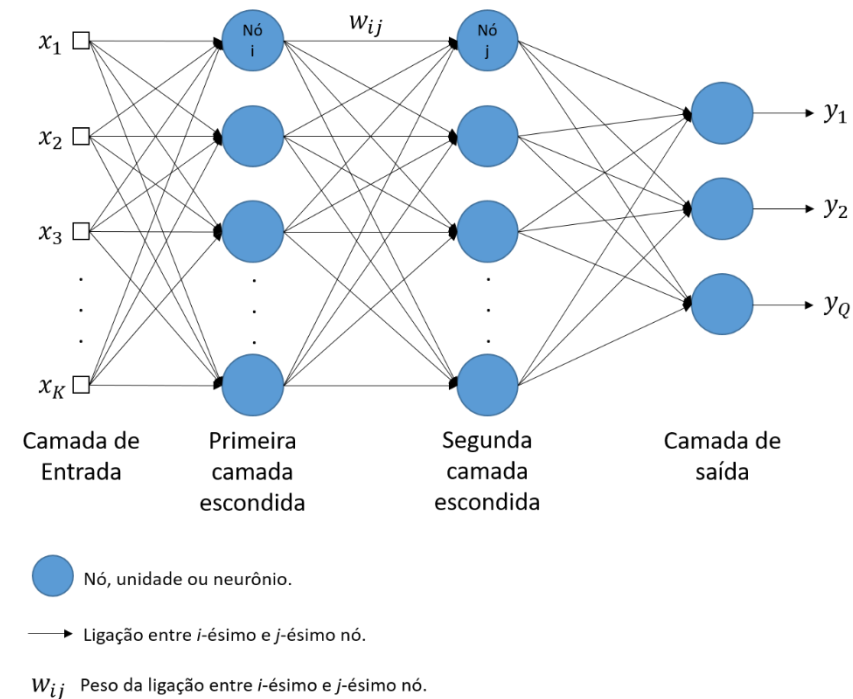
- Além do uso de funções de ativação ReLU ou de suas variantes, outras formas de se minimizar esses problemas são:
 - **Inicialização apropriada dos pesos:** garante que as *variâncias das ativações permaneça a mesma ao longo de todas as camadas*. Isso garante que o gradiente retropropagado não tenha multiplicações com valores muito pequenos ou muito grandes em qualquer camada, ajudando a mitigar ambos os problemas.
 - **Normalização de batch:** *padroniza as ativações* das camadas da rede e, na sequência, as *desloca e escalona*, mantendo-as dentro de intervalos que minimizam ambos os problemas.
 - **Poda do gradiente:** *limita (poda) os valores dos gradientes* durante o treinamento para que eles excedam algum limite pré-definido, mitigando apenas o problema da explosão do gradiente.

Tarefa

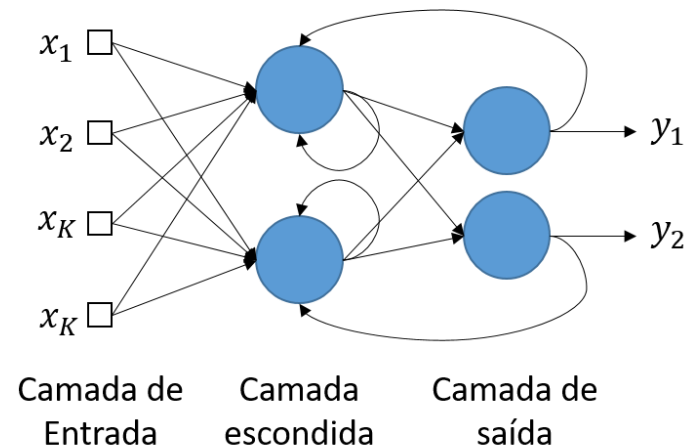
- **Quiz:** “*T320 - Quiz – Redes Neurais Artificiais (Parte III)*” que se encontra no MS Teams.

Conectando Neurônios

- Existem basicamente duas maneiras distintas para se conectar os **nós** de uma rede, **direta** e **reversa**.
- Na figura ao lado, os **nós** da rede têm conexões em apenas uma única direção.
- Esse tipo de rede é conhecida como **rede de alimentação direta** (do inglês, *feedforward*) ou **sem realimentação**.
- O sinal percorre a rede em uma única direção, da entrada para a saída.
- Os **nós** da mesma camada **não são conectados entre si**.
- Esse tipo de rede representa uma **função de suas entradas atuais** e, portanto, não possui um estado interno além dos próprios pesos.

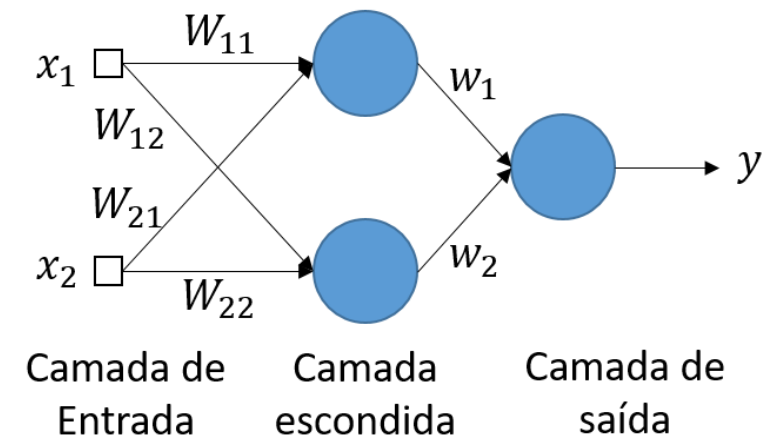


Conectando Neurônios



- Na figura acima, os **nós** da rede têm conexões em 2 direções, desta forma, o sinal percorre a rede nas direções **direta e reversa**.
- Este tipo de rede é conhecida como **rede recorrente** ou **rede com realimentação**.
- Nessas redes, a saída dos **nós** alimentam **nós** da mesma camada (inclusive o próprio **nó**) ou de camadas anteriores.
- Isso significa que a rede forma um **sistema dinâmico** que pode atingir um estado estável, exibir oscilações ou mesmo um comportamento caótico, ou seja, divergir.
- Além disso, a saída da rede é **função da entrada atual e de seu estado interno**, ou seja, de saídas anteriores.
- Portanto, **redes recorrentes** possuem **memória**.
- Essas redes são úteis para o **processamento de dados sequenciais**, como som, dados de séries temporais (preços de ações, padrões cerebrais, etc.) ou linguagem natural (escrita e fala).

Regressão Não-Linear



- A rede MLP da figura ao lado tem sua saída definida por

$$y = f(\mathbf{w}^T f(\mathbf{W}^T \mathbf{x})),$$

onde $f(\cdot)$ é a **função de ativação** escolhida, $\mathbf{W} = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix}$ e $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$.

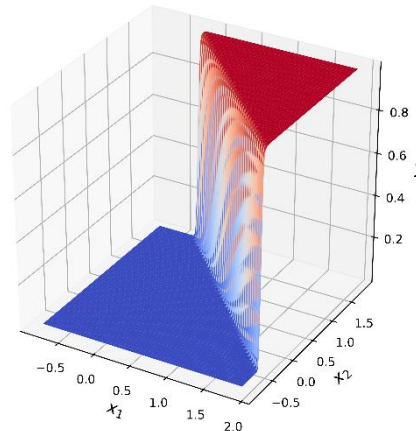
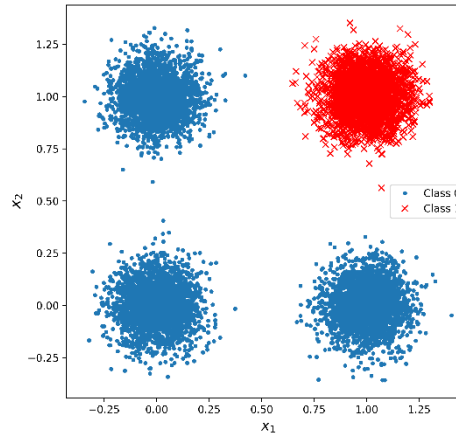
- Percebam que a saída da rede é dada pelo **aninhamento** das saídas de **funções de ativação não-lineares**.
- Sendo assim, as funções que uma rede neural pode representar (i.e., aproximar) podem ser **altamente não-lineares** dependendo da quantidade de camadas e nós.
- Portanto, redes neurais podem ser vistas como ferramentas para a realização de **regressão não-linear**, mas também podemos resolver outros problemas como os de classificação.
- Com **uma única camada oculta suficientemente grande, é possível representar qualquer função contínua das entradas** com uma precisão arbitrária (depende da topologia).
- Com **duas camadas ocultas, até funções descontínuas podem ser representadas**.
- Portanto, dizemos que as redes neurais possuem **capacidade de aproximação universal** de funções.
- Veremos alguns exemplos desta capacidade de aproximação a seguir.

Aproximação universal de funções: Classificação

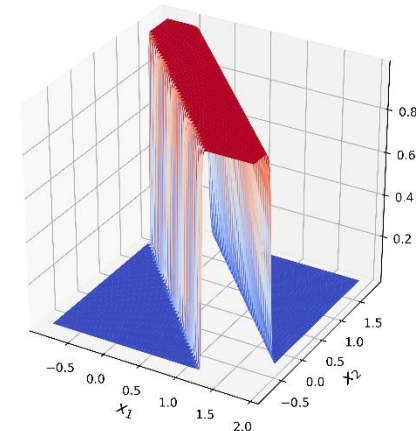
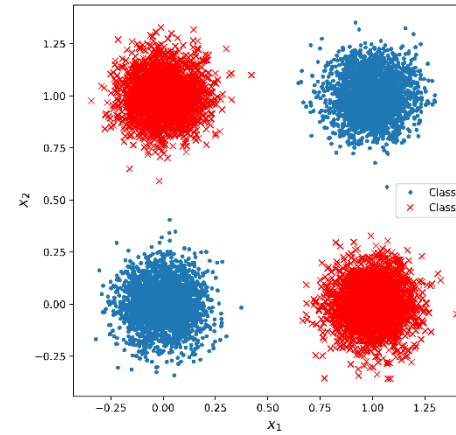
[Exemplo: FunctionApproximationWithMLP.ipynb](#)

- Fig. 1: Um nó aproxima uma função de limiar suave.
- Fig. 2: Combinando duas funções de limiar suave com direções opostas, podemos obter uma função em formato de onda.
- Fig. 3: Combinando duas ondas perpendiculares, nós obtemos uma função em formato cilíndrico.

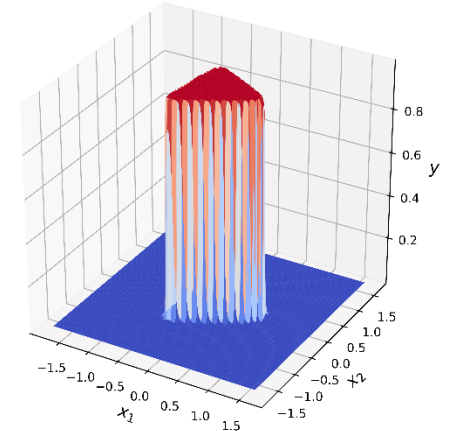
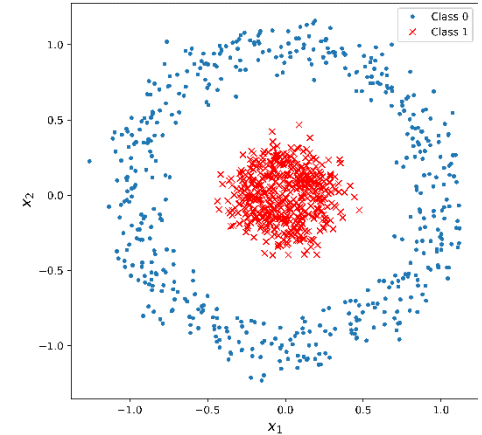
Função AND: MLP com 0 camadas escondidas, apenas um neurônio na camada de saída.
Total: 1 nó.



Função XOR: MLP com 1 camada escondida com 2 nós.
Total: 3 nós.



Círculos concêntricos: MLP com 1 camada escondida com 4 nós.
Total: 5 nós.

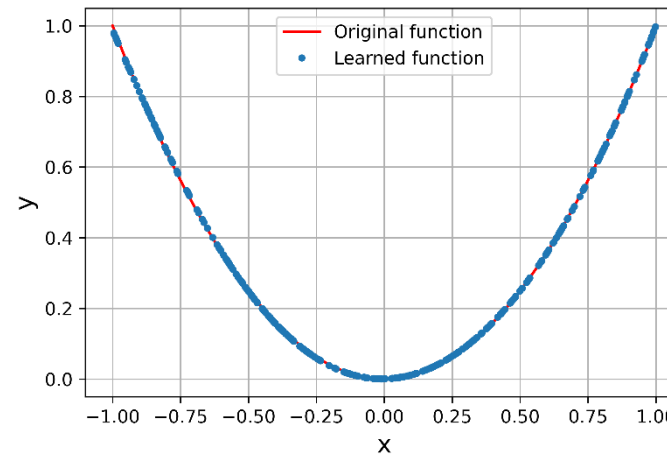


Aproximação universal de funções: Regressão

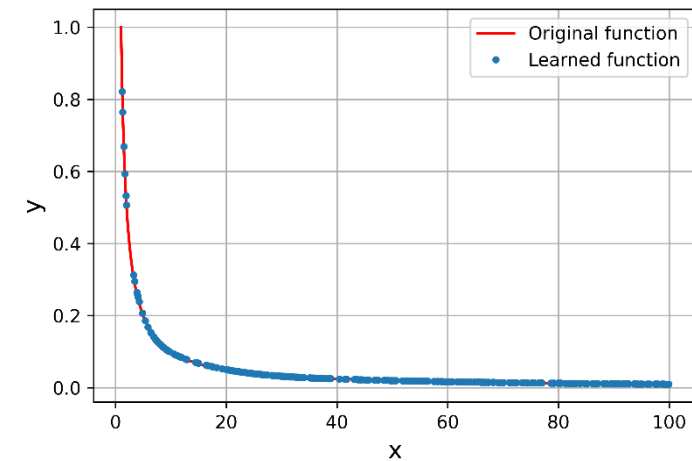
- Redes neurais podem ser usadas para aproximar funções como as mostradas abaixo:

- $f(x) = x^2, -1 \leq x \leq 1,$
- $f(x) = \frac{1}{x}, 1 \leq x \leq 100,$
- $f(x) = \sin(x), 1 \leq x \leq 2\pi.$

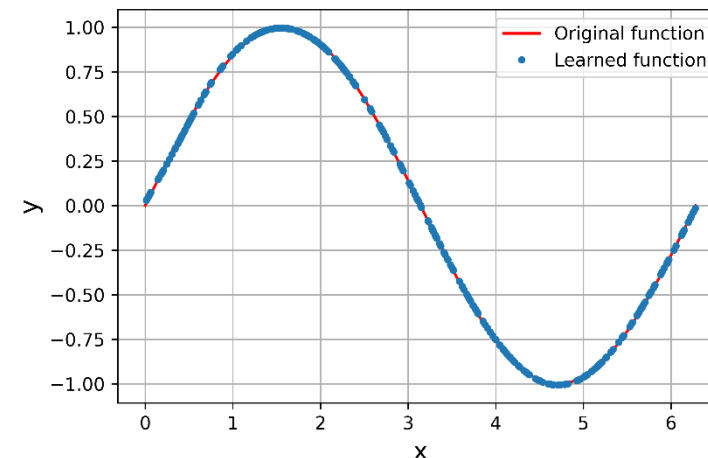
$$f(x) = x^2$$



$$f(x) = \frac{1}{x}$$



$$f(x) = \sin(x)$$



Tarefas

- **Quiz:** “*T320 - Quiz – Redes Neurais Artificiais (Parte IV)*” que se encontra no MS Teams.
- **Exercício Prático:** [Laboratório #7](#).
 - Pode ser baixado do MS Teams ou do GitHub.
 - Pode ser respondido através do link acima (na nuvem) ou localmente.
 - [Instruções para resolução e entrega dos laboratórios](#).

Obrigado!

People with no idea
about AI, telling me my
AI will destroy the world



Me wondering why my
neural network is
classifying a cat as a dog..



Deep Learning



What society thinks I do



What my friends think I do



What other computer
scientists think I do



What mathematicians think I do



What I think I do

```
In [1]:  
import keras  
Using TensorFlow backend.
```

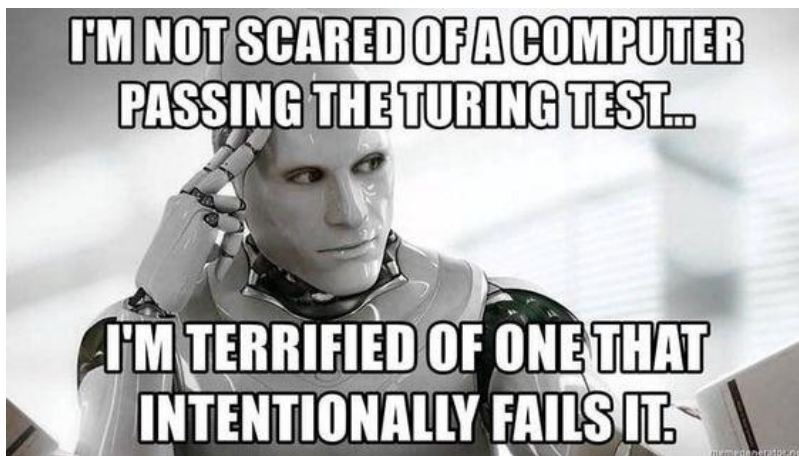
What I actually do

SO YOU ARE TELLING ME



**TO TRAIN DEEP LEARNING
MODELS IN THE BROWSER?**

**I'M NOT SCARED OF A COMPUTER
PASSING THE TURING TEST...**



**I'M TERRIFIED OF ONE THAT
INTENTIONALLY FAILS IT.**

Dog



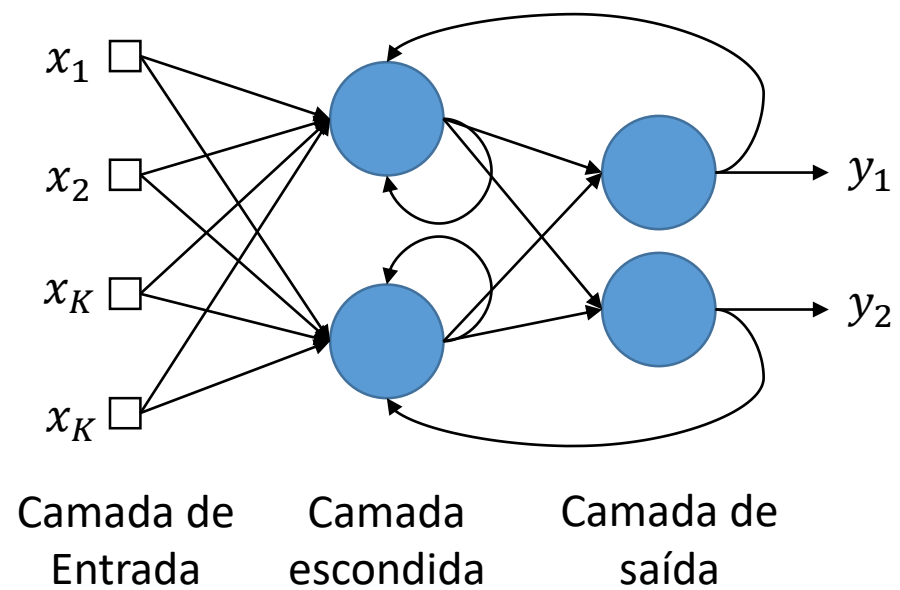
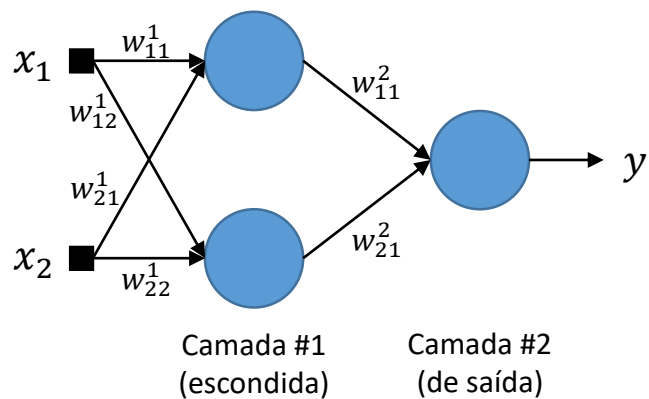
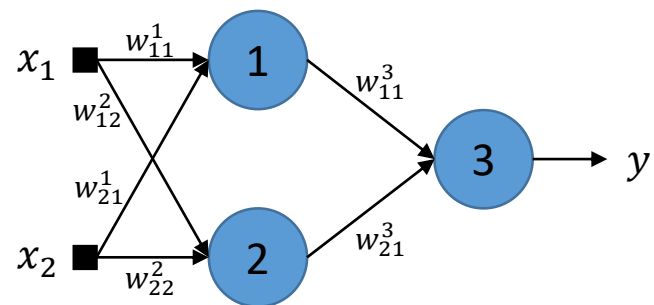
**I NEED GPU
FOR MY DUMB
NEURAL NETWORK**

ONE DOES NOT SIMPLY



**GENERATE MEMES USING DEEP
LEARNING**

Figuras



O Problema da Dissipação do Gradiente

- Vamos entender esse problema através de um exemplo.
- Dada a simplificação de uma rede neural mostrada na figura abaixo, a qual contém
 - Três nós com as seguintes funções de ativação $h(\cdot)$, $g(\cdot)$ e $f(\cdot)$.
 - Pesos w , 1 e 1, conectando os três nós, respectivamente.
 - Entrada $x = 1$.
- Para atualizarmos o valor do peso w com o gradiente descendente, precisamos encontrar a derivada parcial de y em relação à w .
- Para encontrar a derivada, usamos a regra da cadeia

$$\frac{\partial y}{\partial w} = \frac{\partial f(g(h(w)))}{\partial w} = \frac{\partial f(g(h(w)))}{\partial g(h(w))} \frac{\partial g(h(w))}{\partial h(w)} \frac{\partial h(w)}{\partial w}$$

