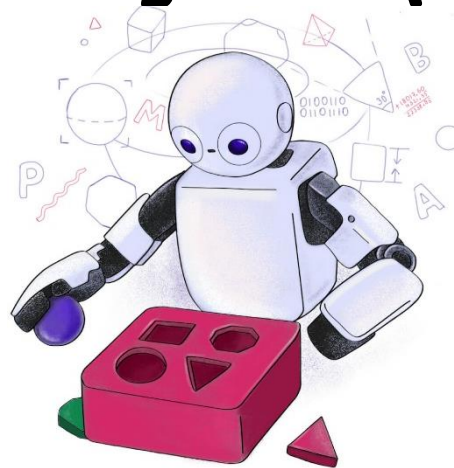


# T320 - Introdução ao Aprendizado de Máquina II: *Classificação (Parte II)*



**Inatel**

Felipe Augusto Pereira de Figueiredo  
felipe.figueiredo@inatel.br

# Recapitulando

- Anteriormente, vimos exemplos de uso de algoritmos de ***classificação***.
  - Detecção de spams.
  - Análise de sentimentos.
  - Reconhecimento de dígitos.
- Definimos o problema da classificação e concluimos que ele também é um problema de ***aprendizado supervisionado***.
- Aprendemos que as classes são separadas através de ***funções discriminantes*** e que o desafio é encontrar uma função adequada e os pesos correspondentes.
- A partir da aula de hoje, começamos a discutir como encontrar os pesos.

# Classificação linear

- Como vimos, o objetivo da **classificação** é usar as características (i.e., atributos) de, por exemplo, um objeto para identificar a qual classe ele pertence.
- Um **classificador linear** atinge esse objetivo tomando uma decisão de classificação com base no valor de uma **combinação linear** dos **atributos**, ou seja, na saída de uma **função discriminante linear**.

- A saída de um **classificador linear** é dada por

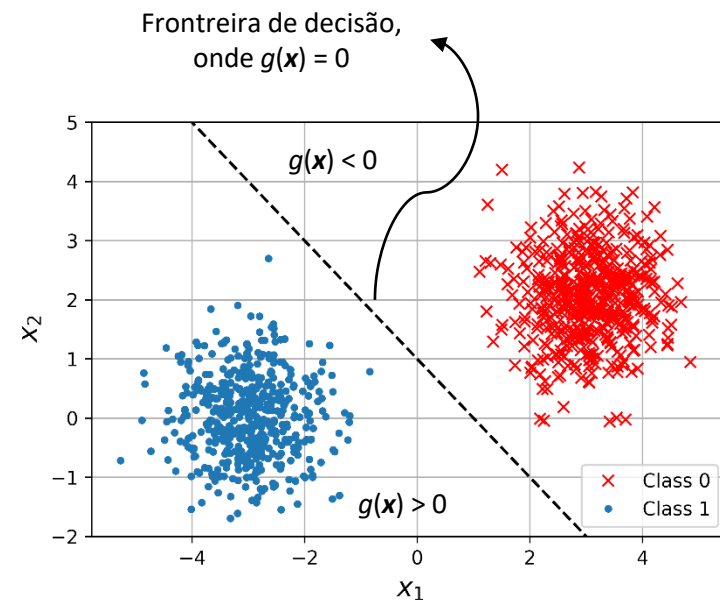
$$y = h_a(\mathbf{x}) = f(g(\mathbf{x})) = f(a_0 + \cdots + a_K x_K) = f\left(\sum_{k=0}^K a_k x_k\right) = f(\mathbf{a}^T \mathbf{x}),$$

onde  $h_a(\mathbf{x})$  é conhecida como **função hipótese de classificação**,  $\mathbf{x} = [1, x_1, \dots, x_K]^T$  e  $f(\cdot)$  é uma **função de limiar de decisão**.

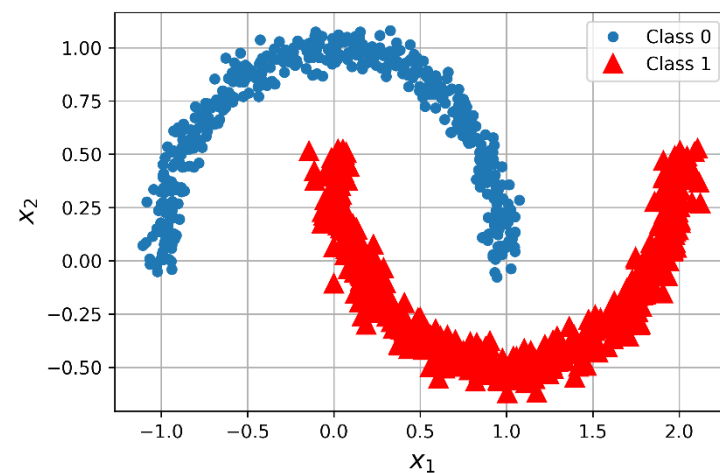
- **Função de limiar de decisão** é uma função que converte a saída da **função discriminante linear**,  $\mathbf{a}^T \mathbf{x}$  (produto escalar), na saída desejada, ou seja, na classe  $C_q$ ,  $q = 1, \dots, Q$ , do objeto.
- Ela é apenas uma formalização matemática para os **ifs** e **elses** que usamos para definir as classes.
- Originalmente, as **funções discriminantes** são formadas por equações de hiperplanos:  $\sum_{k=0}^K a_k x_k$ .

# Classificação linear

- Dado um **conjunto de treinamento**, a tarefa do **classificador** é a de **aprender** uma **função hipótese de classificação**,  $h_a(x)$ , que recebe um exemplo (e.g.,  $x_1$  e  $x_2$ ) e retorna a classe do exemplo.
- **Classificadores binários** têm como saída o valor **0** caso o exemplo pertença à classe  $C_1$  (**classe negativa**) ou **1** caso ele pertença à classe  $C_2$  (**classe positiva**).
- Para que um **classificador linear** funcione corretamente, as duas classes devem ser **linearmente separáveis**.
- Isso significa que as classes devem ser **suficientemente separadas** umas das outras para garantir que a **superfície de decisão** consista de um **hiperplano**.
- Classes que podem ser separadas por um **hiperplano** são chamadas de **linearmente separáveis**.
- Na primeira figura, a **fronteira de decisão** é definida por uma **função discriminante** que é uma **reta**:  $g(x) = 1 - x_1 - x_2$ .
- Na segunda figura, devido à proximidade das classes, não existe um **hiperplano** que as separe.



Classes linearmente separáveis.



Classes não-linearmente separáveis.

# Classificação não-linear

- Originalmente, **classificação linear** é usada quando as classes podem ser separadas por **superfícies de decisão lineares**.
- Ou seja, as **funções discriminantes** são **hiperplanos**:  $\sum_{k=0}^K a_k x_k$ .
- Mas e se não pudermos separar as classes com um **hiperplano**, ou seja, se elas não forem **linearmente separáveis**?
- Nestes casos, usamos **funções discriminantes não-lineares**, como, por exemplo, **polinômios**:
  - $g(x) = (x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2 - r^2$ , Círculo centrado em  $(a, b)$  e com raio  $r$ .
  - $g(x) = \frac{(x_1 - a)^2}{c^2} + \frac{(x_2 - b)^2}{d^2} - 1$ , Elipse centrada em  $(a, b)$ , com largura  $2c$  e altura  $2d$ .
  - $g(x) = (x_1 - a)(x_2 - b) - c$ , Hipérbole retangular com eixos paralelos às suas assíntotas.
- Portanto, quando usamos uma **função discriminante não-linear**, convertemos **classificadores lineares** em **classificadores não-lineares** através de uma **transformação dos atributos**.
  - $g(x) = (x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2 - r^2 = x_1^2 - 2ax_1 + x_2^2 - 2bx_2 + (a^2 + b^2 - r^2)$
- Esta transformação pode ser vista também como uma mudança do **espaço de entrada**, o que normalmente leva ao **aumento das dimensões de entrada** ou **mudança dos eixos**.

# Limiar de decisão rígido

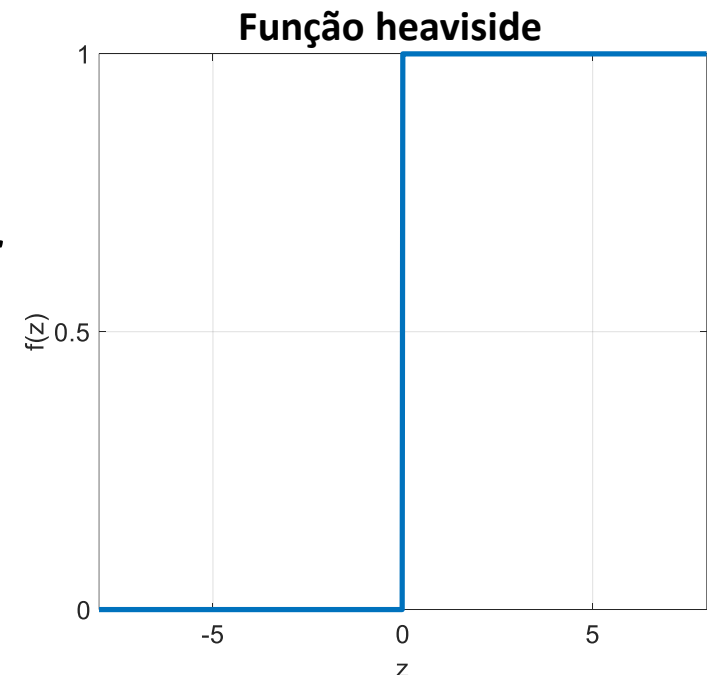
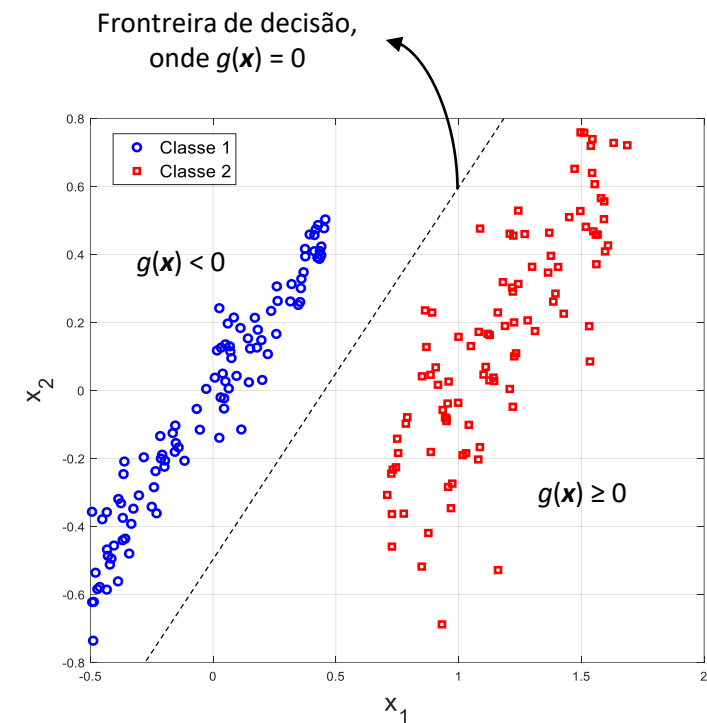
- Para o exemplo ao lado, podemos definir a **função hipótese de classificação** como

$$y = h_a(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{a} < 0 \text{ (Classe 1)} \\ 1, & g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{a} \geq 0 \text{ (Classe 2)} \end{cases}$$

- Percebam que a saída da **função hipótese** é **binária**, ou seja, temos apenas 2 possíveis valores, 0 ou 1.
- O mapeamento entre o valor da função discriminante,  $g(\mathbf{x})$ , e a saída 0 ou 1 é feito através da **função de limiar de decisão**,  $f(g(\mathbf{x}))$ .
- Uma **função de limiar de decisão** que faça o mapeamento do valor de  $g(\mathbf{x})$  em apenas 2 valores é chamada de **função de limiar de decisão rígido**.
- A **função de limiar de decisão rígido** é mostrada na figura ao lado e é definida como

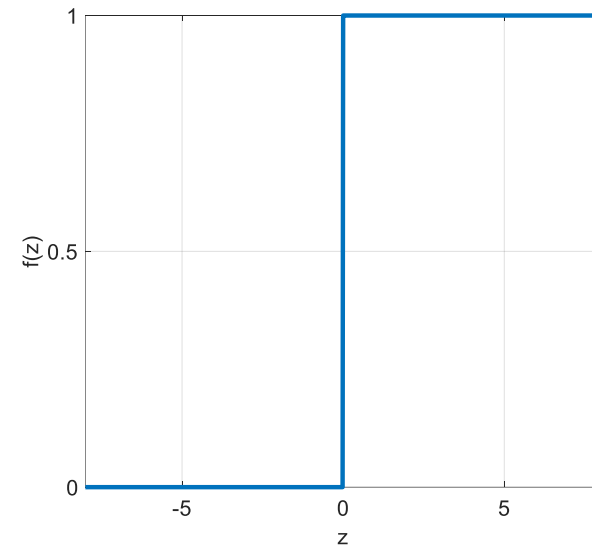
Conhecida  
também como  $\longrightarrow$  **função heaviside**.

$$f(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ 1, & z > 0 \\ \text{Indeterminado,} & z = 0 \end{cases}$$



# Classificação com limiar de decisão rígido

- Agora que a **função hipótese**,  $h_a(x)$ , tem uma forma matemática bem definida, precisamos pensar em como encontrar os pesos,  $a$ .
- Nós queremos encontrá-los de tal forma que **o erro de classificação seja minimizado**, ou seja, que os exemplos sejam atribuídos às suas respectivas classes.
- No caso da **regressão linear**, nós fizemos isso de duas maneiras:
  - i. de forma fechada (através da **equação normal**) fazendo a derivada parcial com relação aos pesos igual a zero e resolvendo a equação para os pesos;
  - ii. e através do algoritmo do **gradiente descendente**.
- Entretanto, com a **função de limiar rígido**, nenhuma das duas abordagens é possível devido a **derivada** de  $f(g(x))$  ser igual a zero em todos os pontos exceto em  $g(x) = x^T a = 0$ , onde ela é indeterminada.
- **Portanto, o que podemos fazer?**



# Classificação com limiar de decisão rígido

- Uma possível abordagem para o problema da aprendizagem quando utilizamos um **limiar de decisão rígido** é utilizar uma **regra intuitiva** de atualização dos **pesos** que converge para uma solução **dado que exista uma função discriminante adequada e que as classes não se sobreponham**.

Os pesos são atualizados a cada novo exemplo, ou seja, amostra a amostra.

- A **regra de atualização** dos **pesos** é dada pela seguinte equação

$$\mathbf{a} = \mathbf{a} + \alpha \left( y(i) - h_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}(i)) \right) \mathbf{x}(i), \forall i,$$

a qual é essencialmente idêntica à regra de atualização para a **regressão linear** quando utilizamos o **gradiente descendente estocástico**,  $\alpha$  onde é o passo de aprendizagem.

- Por razões que discutiremos em breve, esta regra é chamada de **regra de aprendizagem do perceptron**.
- Essa regra de aprendizagem é aplicada a um exemplo por vez, escolhendo exemplos aleatoriamente, assim como fizemos com o **gradiente descendente estocástico**.
- Como estamos considerando classificadores com valores de saída iguais a 0 ou 1, o comportamento da regra de atualização será diferente do comportamento para a regressão linear, como veremos a seguir.



# Classificação com limiar de decisão rígido

- Observem a equação de atualização dos pesos

$$\mathbf{a} = \mathbf{a} + \alpha \left( y(i) - h_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}(i)) \right) \mathbf{x}(i).$$

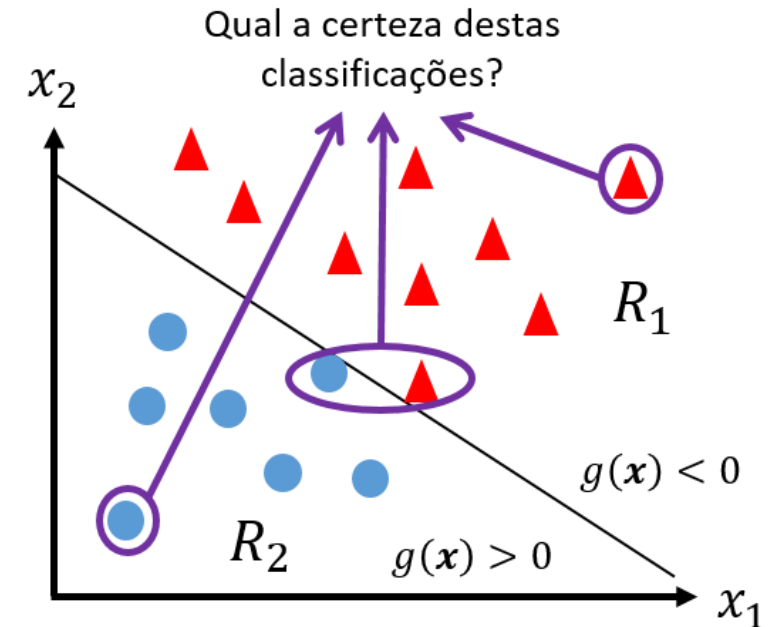
- Ambos, o valor esperado,  $y$ , e a saída da **função hipótese**,  $h_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ , assumem os valores 0 ou 1, portanto, existem 3 possibilidades:
  - Se a saída estiver correta, i.e.,  $y = h_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ , então os pesos não são atualizados.
  - Se  $y = 1$ , mas  $h_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = 0$ , então o peso  $a_k$  tem seu valor **aumentado** quando o valor de  $x_k$  é positivo e **diminuído** quando o valor de  $x_k$  é negativo.
    - Isso faz sentido pois nós queremos aumentar o valor do produto escalar  $\mathbf{x}^T \mathbf{a}$ , ou seja,  $g(\mathbf{x})$ , de tal forma que  $h_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$  tenha como saída o valor 1.
  - Se  $y = 0$ , mas  $h_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = 1$ , então o peso  $a_k$  tem seu valor **diminuído** quando o valor de  $x_k$  é positivo e **aumentado** quando o valor de  $x_k$  é negativo.
    - Isso faz sentido pois nós queremos diminuir o valor do produto escalar  $\mathbf{x}^T \mathbf{a}$ , ou seja,  $g(\mathbf{x})$ , de tal forma que  $h_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$  tenha como saída o valor 0.

# Classificação com limiar de decisão rígido

- A **regra de aprendizagem do perceptron** converge para um **separador perfeito** quando:
  - As classes são **suficientemente separadas** umas das outras, ou seja, não se sobrepõem.
  - Existe uma **função discriminante adequada para o problema**, mesmo que não seja um **hiperplano**.
- **Separador perfeito**: com erro de classificação igual a zero, ou seja, todos os exemplos são perfeitamente classificados.
- Porém, na prática essa situação não é muito comum.
- Nesse caso, a **regra de aprendizagem do perceptron** falha em convergir para uma solução perfeita.
- Em geral, essa regra não converge para uma solução estável para valores fixos do **passo de aprendizagem**,  $\alpha$ , mas se  $\alpha$  decresce de acordo com as iterações, então a regra tem uma chance de convergir para uma solução de erro mínimo quando os exemplos são apresentados de forma aleatória.
- Podemos também usar o **early-stop** e utilizar os **pesos** que resultaram no menor erro de validação.

# Classificação com limiar de decisão rígido

- Outro problema com classificadores que usam **limiar de decisão rígido** é a falta de informação sobre a **confiança** do classificador quanto a um resultado.
- No exemplo ao lado, dois exemplos estão bem próximos da **fronteira de decisão** enquanto outros dois estão bem distantes dela.
- O classificador com **limiar rígido**, faria uma previsão **completamente confiante** pelo valor 1 para os dois pontos azuis e 0 para os dois triângulos vermelhos, mesmo eles tendo valores bem diferentes de  $g(x)$ .
- Em muitas situações, nós precisamos de previsões mais graduadas, que indiquem incertezas quanto à classificação.



- Os pontos distantes da **fronteira de decisão** têm valores **absolutos** de  $g(x)$  bem maiores do que os dos pontos próximos, os quais têm valores de  $g(x)$  muito próximos de 0.
- Ou seja, a confiança deveria ser maior para pontos distantes da fronteira.
- Porém, isso não é refletido na saída do classificador com limiar rígido.

# Tarefas

- **Quiz:** “*T320 - Quiz - Classificação (Parte II)*” que se encontra no MS Teams.
- **Exercício Prático:** [Laboratório #2](#).
  - Pode ser baixado do MS Teams ou do GitHub.
  - Pode ser respondido através do link acima (na nuvem) ou localmente.
  - [Instruções para resolução e entrega dos laboratórios](#).
  - **Atividades podem ser feitas em grupo, mas as entregas devem ser individuais.**

Obrigado!

