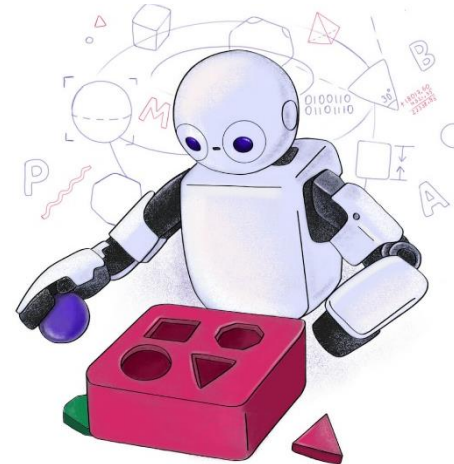


TP557 - Tópicos avançados em IoT e Machine Learning: *Minimizando o erro*



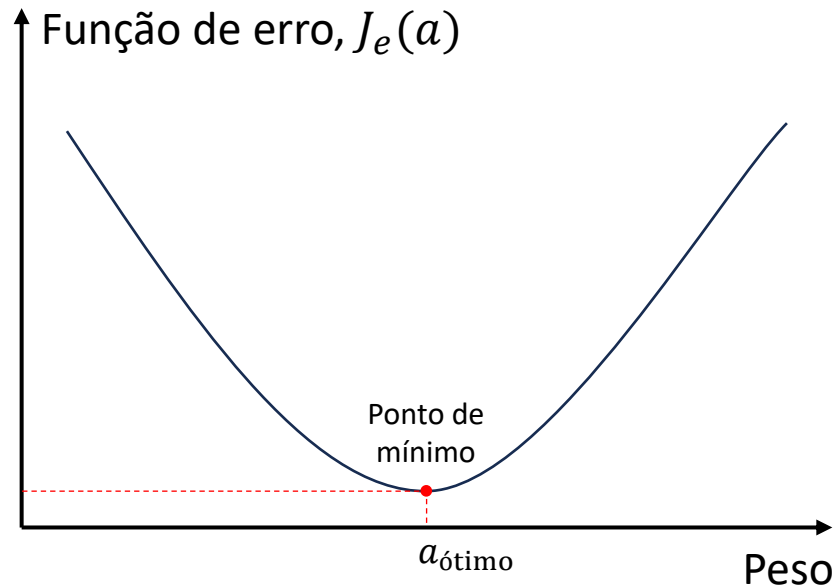
Inatel

Felipe Augusto Pereira de Figueiredo
felipe.figueiredo@inatel.br

O que vamos ver?

- Anteriormente, vimos como funciona o processo (*loop*) de treinamento.
 1. Damos um palpite.
 2. Medimos a precisão desse palpite com a função de erro.
 3. Então usamos a informação do erro para dar outro palpite, esperando que ele seja um pouco melhor do que o anterior.
- Em geral, esse processo se repete até que o erro seja minimizado.
- A ideia é que quanto menor o erro, mais preciso é o seu palpite.
- Portanto, neste tópico, exploraremos como minimizar o erro.

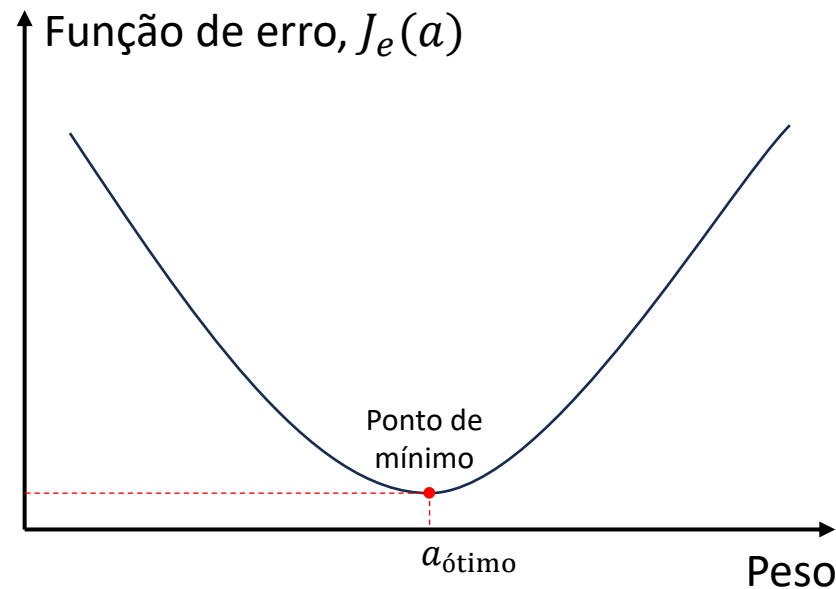
Vetores gradiente



A função de erro, $J_e(a)$, quantifica a diferença entre y e \hat{y} .

- Vamos primeiro ver com vetores gradiente nos ajudam a minimizar o erro.
- Ou seja, entender como eles nos ajudam a encontrar o **ponto de mínimo da função de erro**.
- Consequentemente, entenderemos como o algoritmo de otimização (ou treinamento) dos modelos funciona.
- **OBS.:** Vamos usar $J_e(a)$ para definir uma função de erro genérica.

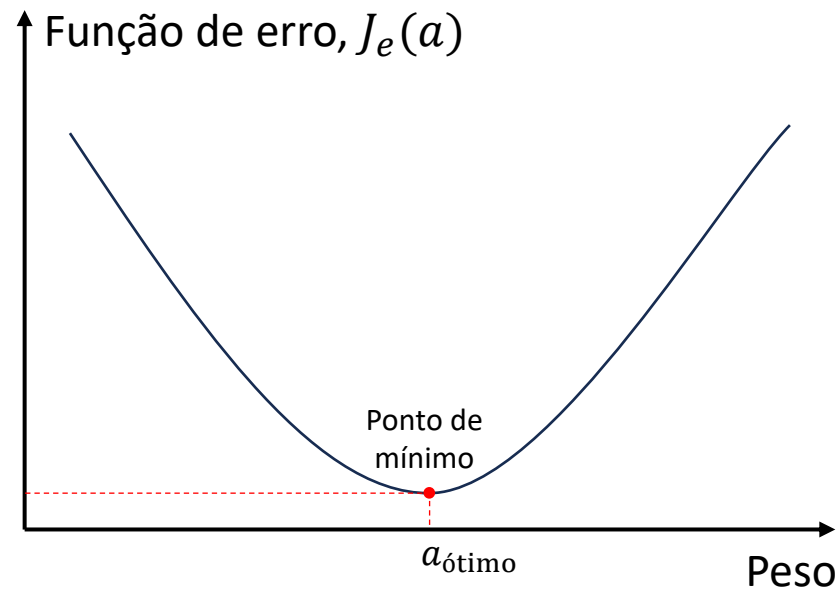
Função de erro



$$J_e(a) = \text{MSE} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\hat{y}_n(a) - y_n)^2$$

- Lembrem-se que a função de erro é função dos pesos.
- Ou seja, o erro varia se variarmos os valores dos pesos.
- Portanto, variando os pesos, conseguimos, em alguns casos, visualizar a superfície de erro.
- O ponto mais baixo dessa superfície nos dá os valores dos pesos que minimizam a função de erro.

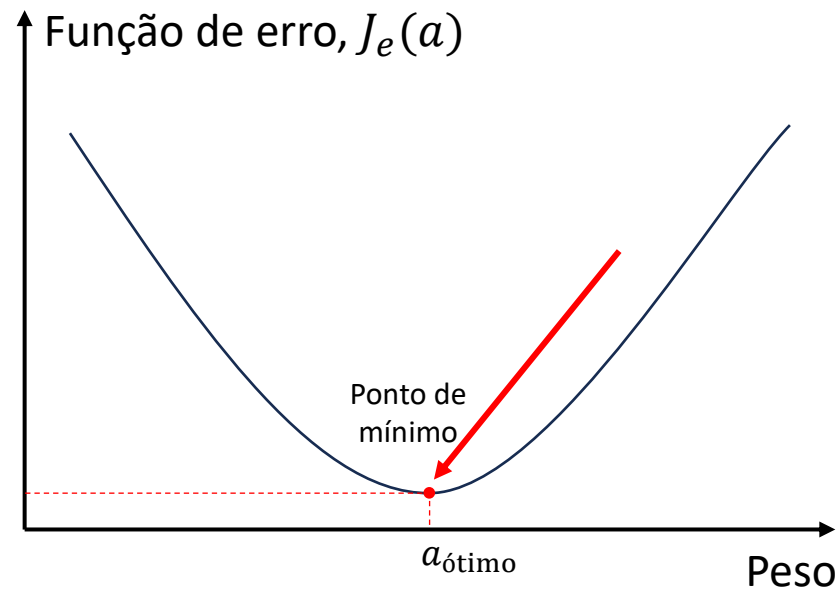
Formato da função de erro



$$J_e(a) = \text{MSE} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\hat{y}_n(a) - y_n)^2$$

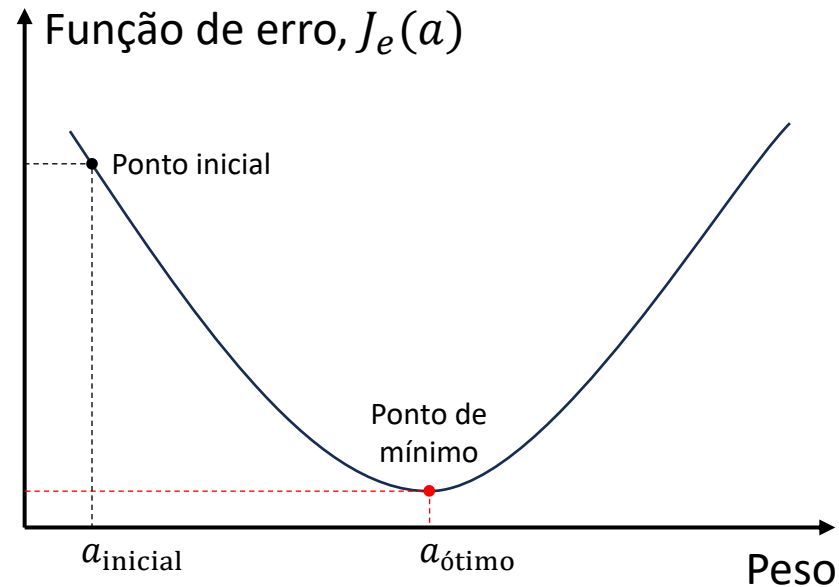
- Lembrem-se que a função de erro que usamos anteriormente, a **função do EQM, é quadrática**.
- E como vimos no exemplo, **funções quadráticas** têm a **forma de parábolas convexas**.
- A **convexidade** é **importante** pois **garante** que a **função tenha apenas um ponto de mínimo, o mínimo global**.
- Isso permite que encontremos a solução ótima de forma mais eficiente.

Ponto de mínimo de uma função convexa



- Se queremos encontrar o **mínimo** da função, basta buscarmos a **parte mais baixa da parábola**.
- Não importa quais sejam os valores dos pesos e onde a função de erro é plotada no gráfico, nós **sempre teremos certeza de que o mínimo está na parte inferior da parábola**.

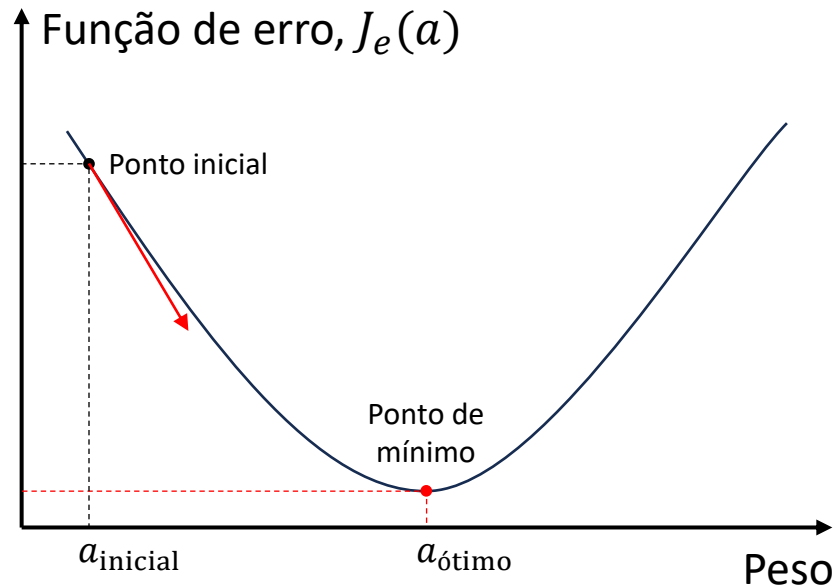
O erro indica o caminho a ser seguido



- Assim, se dermos um palpite (**ponto inicial**) sobre os valores dos **pesos da função hipótese**, como mostrado ao lado, e calcularmos o **erro**, ele será **alto** e, conseqüentemente, saberemos que **estamos longe do ponto de mínimo**.
- Portanto, quanto menor o erro, mais próximo estaremos do ponto ótimo.
- **OBS.:** Em geral, o erro nunca será igual a 0 devido aos dados estarem corrompidos por ruído.

Como encontramos o ponto de mínimo através
do erro?

Vetor gradiente

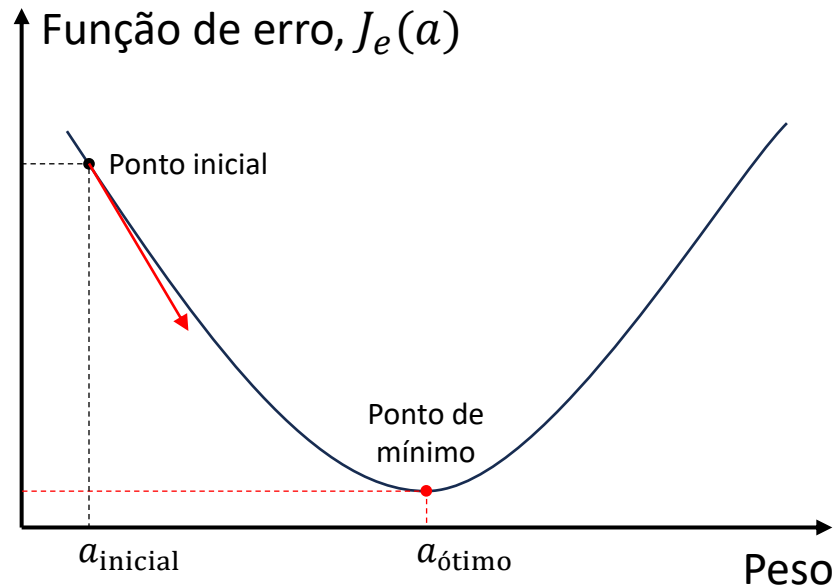


- Se nós diferenciarmos a função de erro em um ponto qualquer em relação aos pesos, nós obtemos o ***vetor gradiente***

$$\nabla J_e(\mathbf{a}) = \frac{\partial J_e(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}}.$$

- Ele sempre aponta na ***direção de maior crescimento da função*** a partir de um determinado ponto.

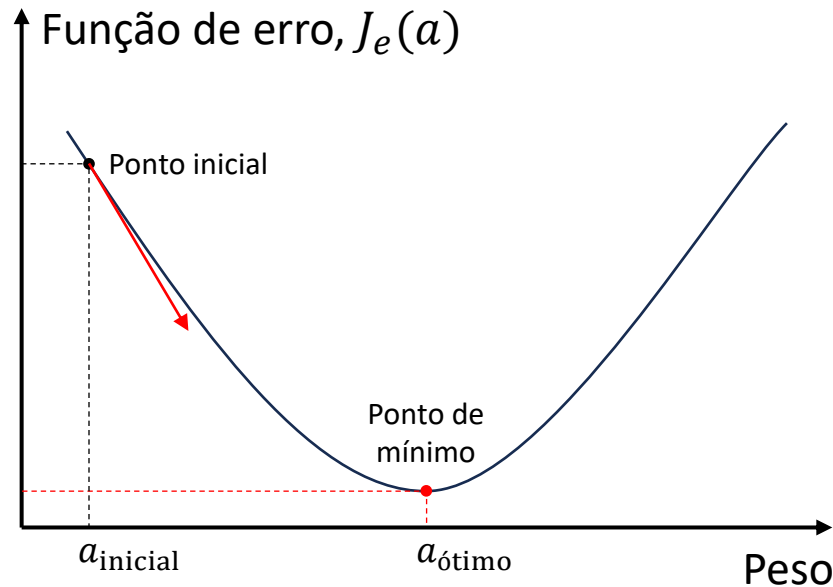
Vetor gradiente



No caso da função ter apenas um argumento, o vetor gradiente dá a inclinação de uma reta tangente ao ponto onde ele é calculado.

- O gradiente pode ser também interpretado como a **inclinação** de um **plano tangente à curva** no ponto onde ele é calculado.
 - Quanto **maior o valor absoluto** do gradiente, **mais inclinada é a reta tangente** naquele ponto.
 - Portanto, **um valor igual a 0 indica inclinação nula**.
 - Onde isso ocorre? **Em pontos de máximo e de mínimo**.

Vetor gradiente



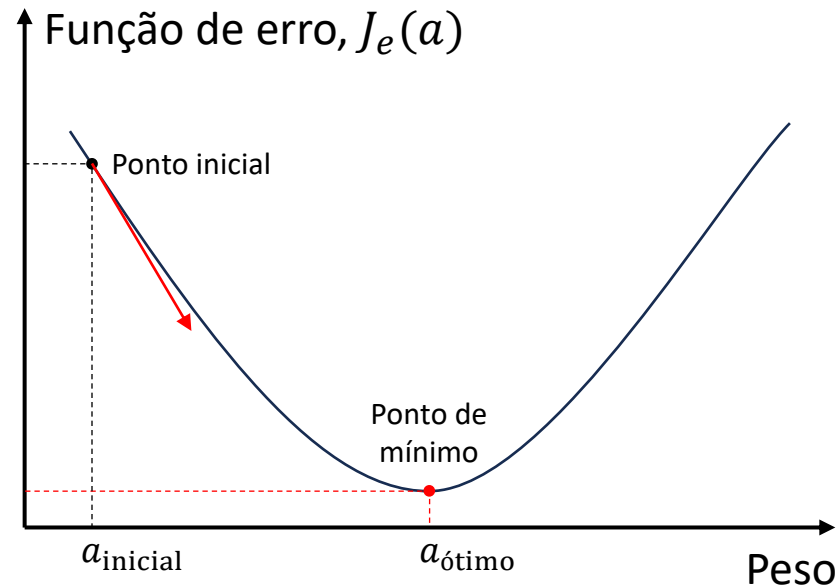
O objetivo é minimizar a função de erro *indo na direção contrária* a indicada pelo gradiente.

- Porém, queremos **encontrar o mínimo** da função, o que devemos fazer?
- Basta irmos na **direção oposta** a indicada pelo vetor gradiente (i.e., negativo do gradiente)

$$-\nabla J_e(\mathbf{a}) = -\frac{\partial J_e(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}}$$

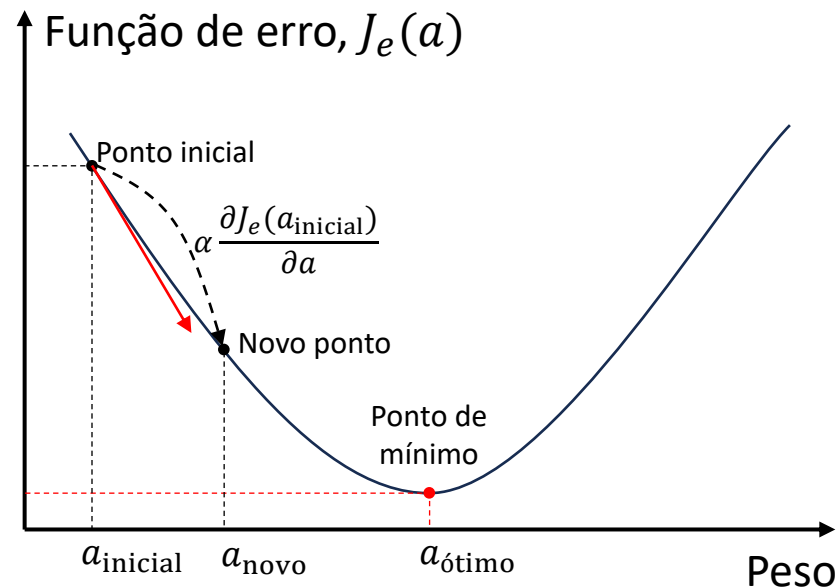
- O **negativo do gradiente aponta para a direção de maior decréscimo da função** a partir de um dado ponto.

Qual a distância até o mínimo?



- Entretanto, o gradiente *não dá informação sobre a distância até o ponto de mínimo*, mas pelo menos sabemos a direção correta.
- Podemos fazer a analogia com uma bola solta em uma ladeira.
- A gravidade dá a direção até a parte mais baixa da ladeira, mas não dá a distância até lá.

Passo de aprendizagem

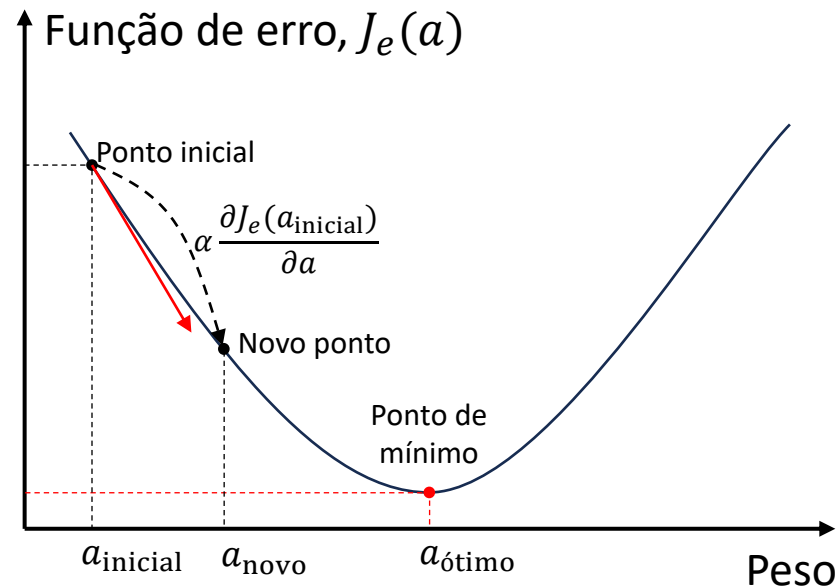


$$a_{\text{novo}} = a_{\text{inicial}} - \alpha \frac{\partial J_e(a_{\text{inicial}})}{\partial a}$$

sentido apostado ao apontado pelo gradiente

- Portanto, se quisermos **seguir até o ponto de mínimo** a partir de um ponto qualquer, podemos **dar um passo na direção apontada pelo gradiente**.
- Nós sabemos a direção do mínimo e podemos escolher o **tamanho do passo** para darmos naquela direção.
- O passo de aprendizagem determina a **porcentagem do gradiente que é adicionada aos pesos**.
- A equação ao lado é chamada de **equação de atualização dos pesos**.

Passo de aprendizagem

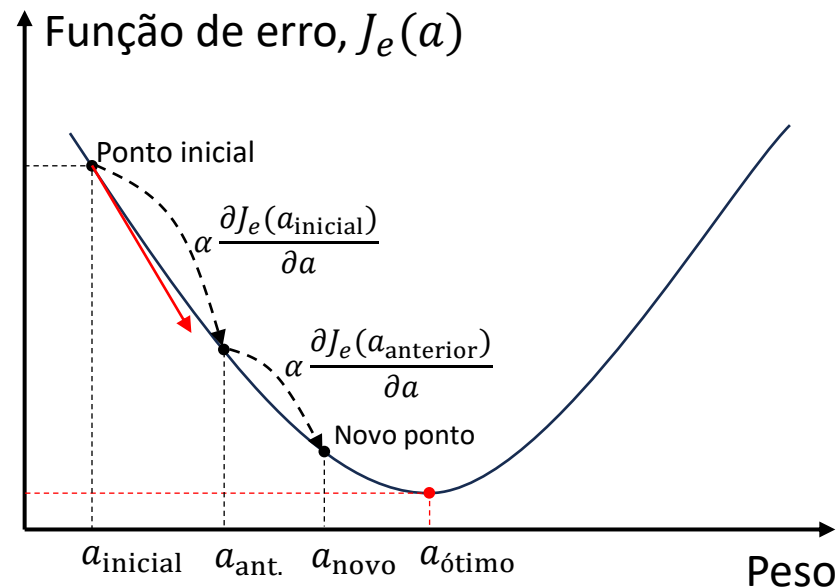


$$a_{\text{novo}} = a_{\text{inicial}} - \underbrace{\alpha \frac{\partial J_e(a_{\text{inicial}})}{\partial a}}_{\text{Termo de atualização}}$$

sentido aposto ao apontado pelo gradiente

- O **tamanho do passo** é frequentemente chamado de **taxa ou passo de aprendizagem** e é, normalmente, denotado pela letra grega α .
- Se o peso atual está à esquerda do mínimo, o **termo de atualização** faz com que o novo peso seja maior do que o anterior.
- Se o peso atual está à direita do mínimo, o **termo de atualização** faz com que o novo peso seja menor do que o anterior.

Otimização iterativa

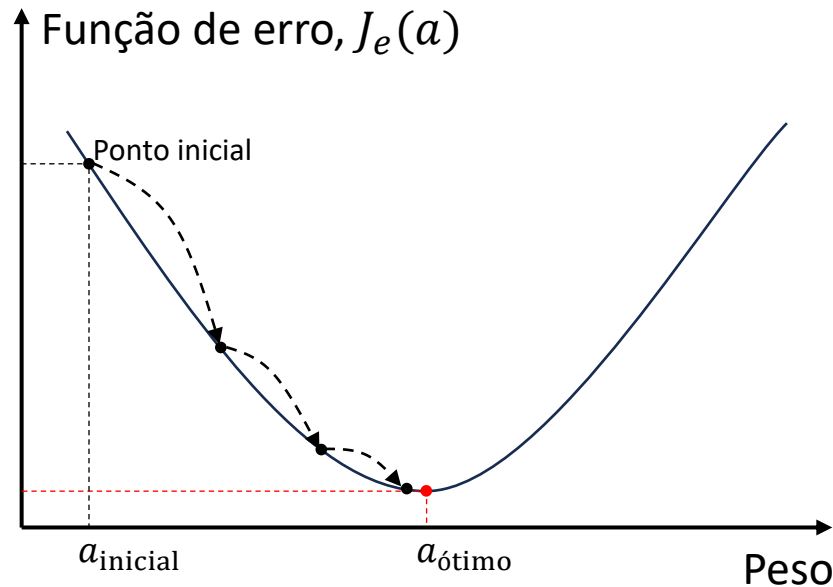


$$a_{\text{novo}} = a_{\text{anterior}} - \alpha \frac{\partial J_e(a_{\text{anterior}})}{\partial a}$$

Equação de atualização dos pesos

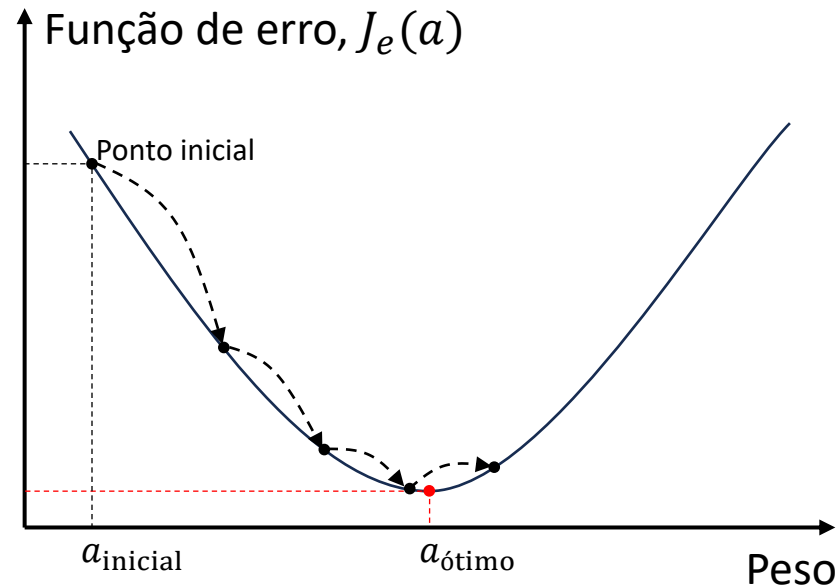
- Portanto, dada a ***direção do gradiente e um passo de aprendizagem***, agora podemos ***iterativamente*** dar passos em direção ao ponto de mínimo.
- A cada ***iteração*** calculamos o gradiente no ponto atual, atualizamos os pesos com uma porcentagem do gradiente e calculamos o gradiente no novo ponto.
- ***Repetimos*** esse processo ***até*** que a ***inclinação da reta tangente ao ponto atual se torne igual a 0***, indicando que o ponto de mínimo foi atingido.
- ***O que ocorre quando o gradiente é 0?***

Tamanho do passo de aprendizagem



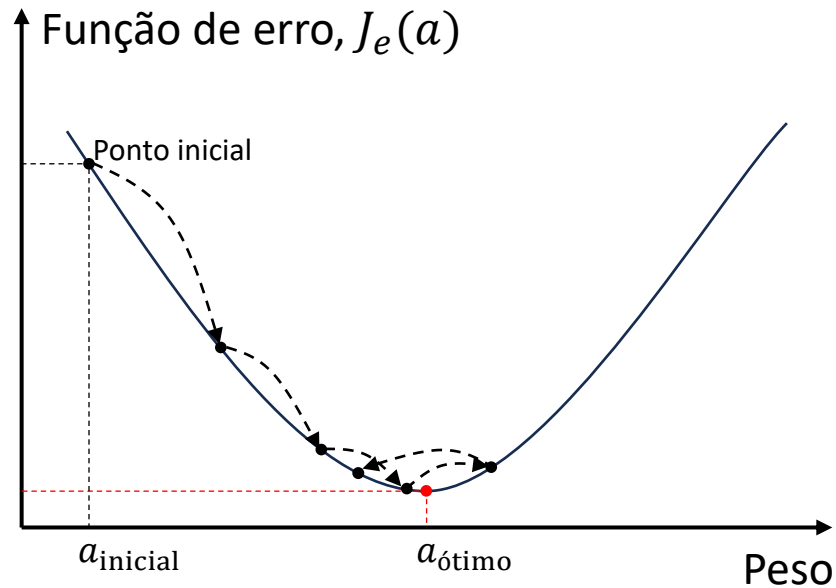
- O objetivo é que a cada nova iteração, nos movamos para mais e mais perto do ponto de mínimo, $a_{\text{ótimo}}$.
- Porém, devemos tomar **cuidado**, com o **tamanho do passo de aprendizagem**.
- O valor do passo de aprendizagem é um **hiperparâmetro** crucial para o GD.
 - **Hiperparâmetros** são parâmetros do modelo que **não são aprendidos durante o treinamento**, mas sim definidos pelo desenvolvedor antes do treinamento.
- Ele influencia a velocidade e a convergência do treinamento.

Tamanho do passo de aprendizagem



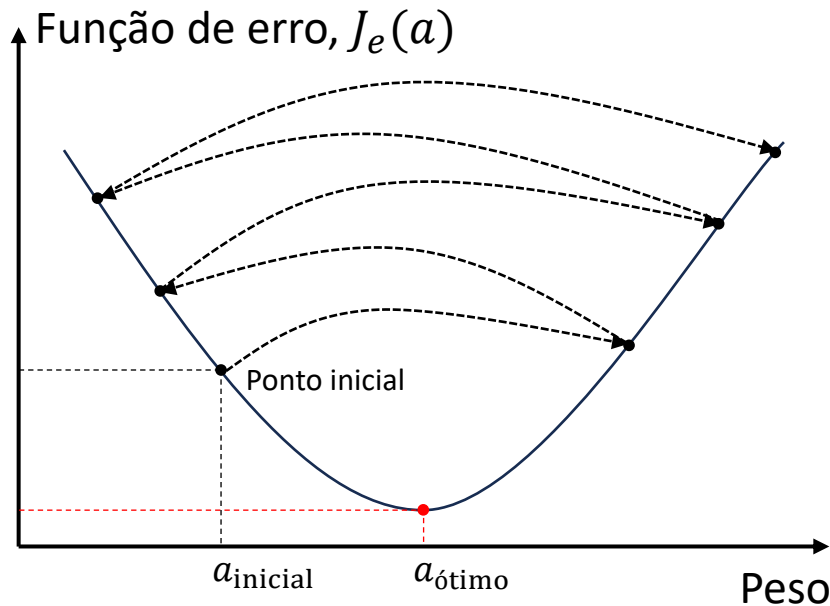
- Se o passo de aprendizagem for **muito grande** , podemos ultrapassar o ponto de mínimo.

Tamanho do passo de aprendizagem



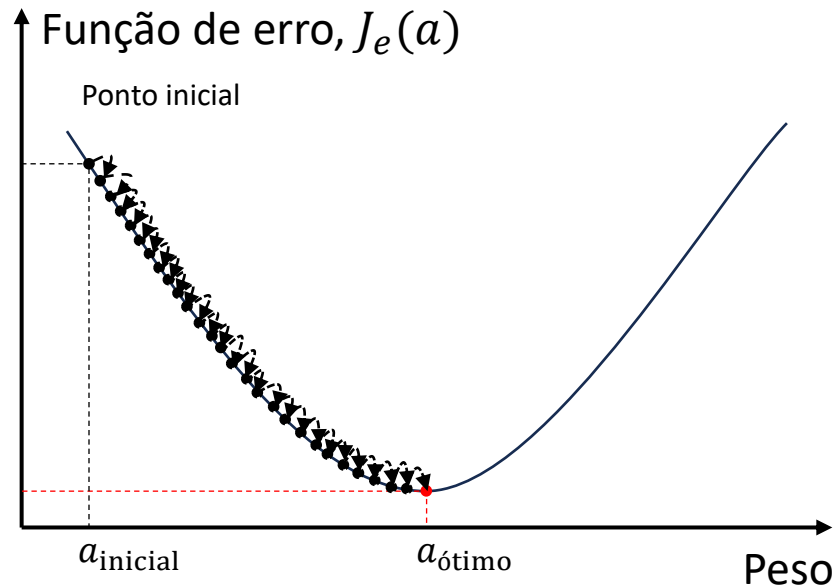
- Se o passo de aprendizagem for **muito grande** , o processo de otimização pode ficar **ziguezagueando** de um lado para o outro do fundo da função **sem nunca atingir o ponto de mínimo** .

Tamanho do passo de aprendizagem



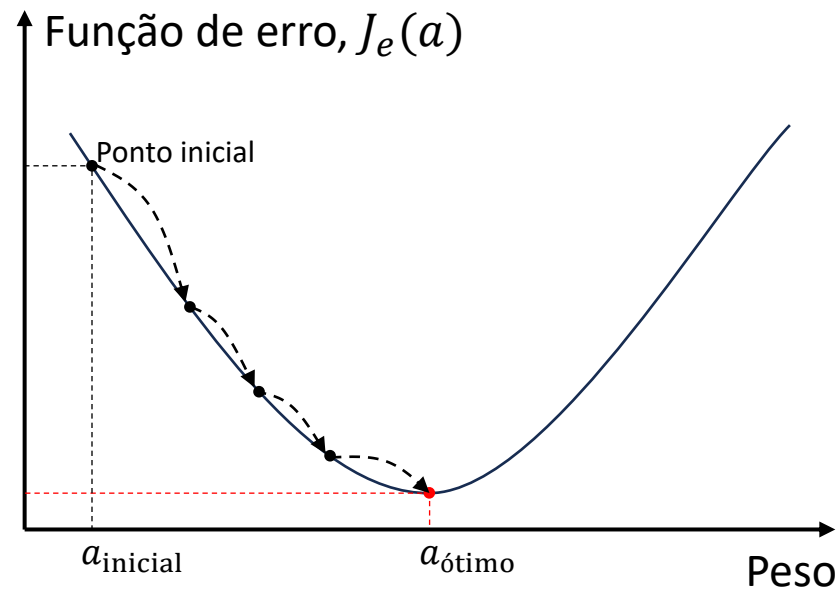
- Dependendo do quão grande for o valor do passo de aprendizagem, pode ocorrer até a **divergência** ao invés da convergência.
- Ou seja, ao invés de se aproximar do ponto de mínimo, o algoritmo **se distancia** dele a cada iteração.
- Se isso ocorrer, após algumas iterações, ocorre o estouro da precisão numérica das variáveis envolvidas na regra de atualização dos pesos.

Tamanho do passo de aprendizagem



- Outra questão, **menos problemática** que passos grandes, é a situação oposta.
- Passos **muito pequenos** fazem com que se **leve muito tempo**, i.e., iterações, para atingir o ponto de mínimo.
- Se cada iteração levar um tempo razoável para ser executada, o tempo necessário para se atingir o ponto de mínimo pode ser muito grande.
- Porém, **se esperarmos** tempo suficiente, a **convergência é garantida**.

Qual o tamanho de passo de aprendizagem usar?



- É importante escolhermos um passo de aprendizagem que **acelere a convergência sem causar oscilações em torno do ponto de mínimo**.
- Em geral, um bom valor para o passo é encontrado por **tentativa e erro**.
- Uma forma mais avançada é ajustar o passo ao longo das iterações.
 - Usamos **valores grandes no início**, em pontos distantes do mínimo, e o **reduzimos gradualmente** ao longo das iterações.

Formas de se ajustar o passo de aprendizagem

Taxa constante


$$\mathbf{a}(i + 1) = \mathbf{a}(i) - \alpha \frac{\partial J_e(\mathbf{a}(i))}{\partial \mathbf{a}}$$

Dcaimento linear e exponencial

$$\mathbf{a}(i + 1) = \mathbf{a}(i) - \alpha(i) \frac{\partial J_e(\mathbf{a}(i))}{\partial \mathbf{a}}$$

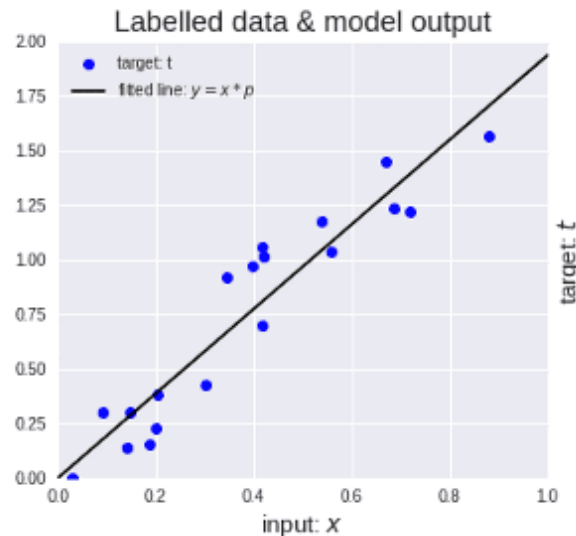
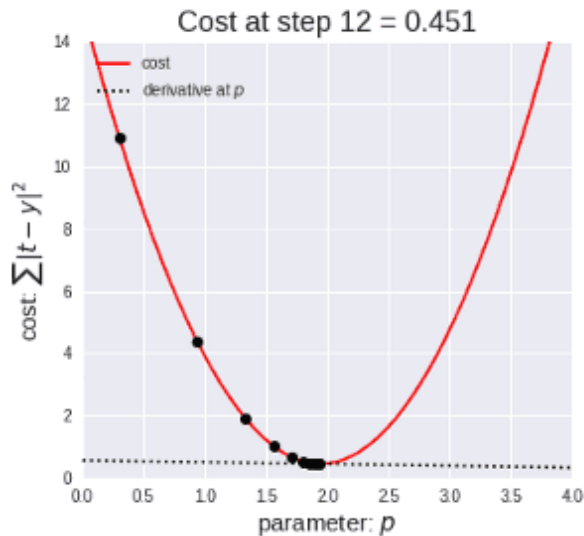
Adaptação automática

$$\mathbf{a}(i + 1) = \mathbf{a}(i) - \alpha(i) \frac{\partial J_e(\mathbf{a}(i))}{\partial \mathbf{a}}$$

 Um passo por elemento do gradiente

- Existem várias técnicas de ajuste do valor do passo de aprendizagem durante o treinamento para melhorar o modelo, como:
 - Taxa constante,
 - Decaimento linear e exponencial,
 - Adaptação automática com os algoritmos Adagrad, RMSProp e Adam.
- As duas primeiras usam **um passo para todos os pesos**, já a última, usa **um passo independente por peso**.
- Cada técnica visa otimizar a convergência e o desempenho do modelo.

Gradiente descendente



- Esse ***processo iterativo de otimização*** que discutimos até agora é chamado de ***gradiente descendente (GD)***.
- Ele está por trás do aprendizado de vários algoritmos de ML: regressão linear, regressão logística, redes neurais em geral, máquinas de vetores de suporte, aprendizado por reforço, etc.
- Como veremos, o GD pode ser implementado de ***3 formas diferentes dependendo de como calculamos o gradiente.***

$\mathbf{a} \leftarrow$ inicializa em um ponto qualquer do espaço de pesos
loop até convergir ou atingir o número máximo de iterações do

$$\mathbf{a} \leftarrow \mathbf{a} - \alpha \frac{\partial J_e(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} \text{ (eq. de atualização dos pesos)}$$

Versões do gradiente descendente

- Para entendermos as 3 versões do GD, vamos primeiro encontrar o vetor gradiente, $\frac{\partial J_e(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}}$, e substituí-lo na equação de atualização dos pesos.

- Considerando o EQM como função de erro e a seguinte função hipótese

$$\hat{y}(n) = \underbrace{a_0 + a_1 x_1(n) + \cdots + a_K x_K(n)}_{\text{Equação do hiperplano}} = \sum_{i=0}^K a_i x_i(n) = \mathbf{a}^T \mathbf{x}(n),$$

onde K é o número de entradas (chamadas de **atributos**), $a_i, \forall i$ e $x_i, \forall i$ são os pesos e entradas da função, respectivamente, $x_0 = 1$ (**atributo de bias**) e \mathbf{a} e $\mathbf{x}(n)$ são vetores coluna com todos os pesos e entradas, respectivamente.

- Agora podemos encontrar o vetor gradiente.

Versões do gradiente descendente

- O **vetor gradiente** da **função de erro em relação aos pesos** é dado por

$$\begin{aligned}\frac{\partial J_e(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (y(n) - \hat{y}(n))^2 \right] \\ &= -\frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [y(n) - \hat{y}(n)] \mathbf{x}(n) = -\frac{2}{N} \mathbf{X}^T (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}),\end{aligned}$$

onde \mathbf{X} é uma matriz $(N \times K + 1)$ com todos os atributos para os N instantes de tempo considerados (i.e., N é o **número de exemplos coletados**) e \mathbf{y} e $\hat{\mathbf{y}}$ são vetores coluna $(N \times 1)$ com todos os valores esperados e de saída da função hipótese para os N instantes de tempo considerados, respectivamente.

- Esse cálculo pode ser diretamente estendido a polinômios.

Versões do gradiente descendente

- Substituindo o ***vetor gradiente*** na ***equação de atualização dos pesos***, temos

$$\mathbf{a} = \mathbf{a} - \alpha \frac{\partial J_e(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} = \mathbf{a} + \alpha \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{M-1} [y(n) - \hat{y}(n)] \mathbf{x}(n).$$

- Podemos ter ***3 versões diferentes, dependendo da quantidade de exemplos***, M , considerados no somatório acima:
 - ***Gradiente descendente em batelada*** (GDB).
 - ***Gradiente descendente estocástico*** (GDE).
 - ***Gradiente descendente em mini-lotes*** (GDML).

Gradiente descendente em batelada

$$\mathbf{a} = \mathbf{a} + \alpha \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [y(n) - \hat{y}(n)] \mathbf{x}(n).$$

- Utiliza **todos os exemplos** do conjunto de treinamento (i.e., $M = N$) para o cálculo do gradiente.
- Pode ser **computacionalmente complexo** dependendo do tamanho do modelo e do conjunto de dados.
 - Por processar todos os exemplos, pode ser lento em conjuntos muito grandes e consumir muita memória.
- **Convergência** para o mínimo global é **garantida** quando a função de erro é **convexa**.
- É a versão que **obtem os melhores resultados**.

Gradiente descendente estocástico

$$\mathbf{a} = \mathbf{a} + \alpha 2[y(n_{\text{random}}) - \hat{y}(n_{\text{random}})]\mathbf{x}(n_{\text{random}}).$$

- Utiliza *apenas um exemplo* do conjunto de treinamento (i.e., $M = 1$) para calcular uma *estimativa estocástica do gradiente*.
 - Versão estocástica pois a cada iteração toma-se uma amostra *aleatória* do conjunto para calcular a estimativa do gradiente.
- Quando os *dados de treinamento são ruidosos*, a *estimativa* do gradiente *é ruidosa*, fazendo com que a *convergência não ocorra* ou *não seja garantida*.
- Entretanto, é mais rápido e usa menos CPU e memória do que o GDB.

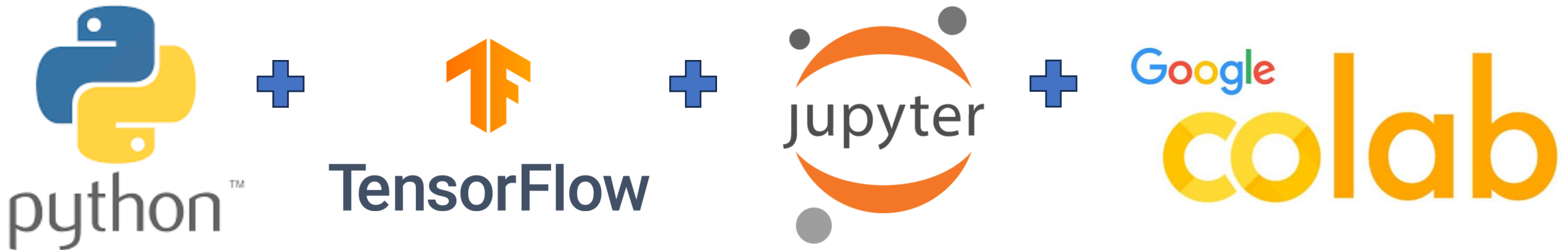
Gradiente descendente em mini-lotes

$$\mathbf{a} = \mathbf{a} + \alpha \frac{2}{MB} \sum_{n=0}^{MB-1} [y(n) - \hat{y}(n)] \mathbf{x}(n).$$

- Utiliza um **subconjunto de exemplos**, MB , do conjunto de treinamento ($M = MB$) para o cálculo do gradiente.
- Por, em geral, usar um **subconjunto** de exemplos, $1 < MB < N$, é mais rápido que o GDB e mais preciso e estável do que o GDE.
- Porém, por MB ser variável, essa versão é vista como uma **generalização** das duas versões anteriores, pois MB pode ser feito igual a 1 ou N .
- Portanto, por ser flexível, é a **versão mais usada no treinamento de redes neurais**.

Exemplo

- [Gradiente descendente](#).



Atividades

- Quiz: “***TP557 – Minimizando o erro***”.
- Exercício: [Gradiente descendente](#).

Perguntas?

Obrigado!

Anexo:

Cálculo do vetor gradiente

Cálculo do vetor gradiente

Considerando o hiperplano como a função hipótese

$$\hat{y}(n) = \mathbf{a}^T \mathbf{x}(n).$$

O vetor gradiente é calculado como

$$\frac{\partial J_e(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} = \left[\frac{\partial J_e(\mathbf{a})}{\partial a_0} \quad \dots \quad \frac{\partial J_e(\mathbf{a})}{\partial a_K} \right]^T.$$

Assim, o vetor gradiente da função de erro em relação aos pesos é dado por

$$\frac{\partial J_e(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (y(n) - \hat{y}(n))^2 \right].$$

Cálculo do vetor gradiente

Como a operação de derivada é distributiva, podemos reescrever a equação acima como

$$\frac{\partial J_e(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\partial (y(n) - \hat{y}(n))^2}{\partial \mathbf{a}}.$$

Substituindo a função hipótese na equação acima, temos

$$\frac{\partial J_e(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\partial (y(n) - \mathbf{a}^T \mathbf{x}(n))^2}{\partial \mathbf{a}}.$$

Cálculo do vetor gradiente

Aplicando a regra da cadeia, reescrevemos a equação anterior como

$$\frac{\partial J_e(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} = -\frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (y(n) - \mathbf{a}^T \mathbf{x}(n)) \frac{\partial \mathbf{a}^T \mathbf{x}(n)}{\partial \mathbf{a}}.$$

Sabendo que a derivada de $\frac{\partial \mathbf{a}^T \mathbf{x}(n)}{\partial \mathbf{a}}$ é igual a $\mathbf{x}(n)$, reescrevemos a equação anterior como

$$\frac{\partial J_e(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} = -\frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [y(n) - \hat{y}(n)] \mathbf{x}(n).$$

Cálculo do vetor gradiente

Fazendo $y(n) - \hat{y}(n) = d(n)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial J_e(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} &= -\frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [y(n) - \hat{y}(n)] \mathbf{x}(n) \\ &= -\frac{2}{N} \left\{ d(0) \begin{bmatrix} x_0(0) \\ \vdots \\ x_K(0) \end{bmatrix} + d(1) \begin{bmatrix} x_0(1) \\ \vdots \\ x_K(1) \end{bmatrix} + \cdots + d(N-1) \begin{bmatrix} x_0(N-1) \\ \vdots \\ x_K(N-1) \end{bmatrix} \right\} \\ &= -\frac{2}{N} \begin{bmatrix} d(0)x_0(0) + d(1)x_0(1) + \cdots + d(N-1)x_0(N-1) \\ \vdots \\ d(0)x_K(0) + d(1)x_K(1) + \cdots + d(N-1)x_K(N-1) \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Notem que a equação acima é um **vetor coluna** com dimensão $K + 1 \times 1$.

Cálculo do vetor gradiente

Podemos reescrever a equação (i.e., vetor) anterior como uma multiplicação matricial

$$\frac{\partial J_e(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} = -\frac{2}{N} \begin{bmatrix} x_0(0) & x_0(1) & \cdots & x_0(N-1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_K(0) & x_K(1) & \cdots & x_K(N-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d(0) \\ d(1) \\ \vdots \\ d(N-1) \end{bmatrix}$$

Percebam que temos a multiplicação de uma matriz com dimensão $K + 1 \times N$ por um vetor coluna de dimensão $N \times 1$.

A matriz contém em cada linha todos os valores de $n = 0$ a $n = N - 1$ de um **único** atributo.

O vetor contém em cada linha a diferença $d(n) = y(n) - \hat{y}(n)$ para $n = 0$ até $n = N - 1$.

Cálculo do vetor gradiente

Se definirmos uma matriz que contém todos os N exemplos de todos os $K + 1$ atributos e que tem dimensão $N \times K + 1$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_0(0) & \cdots & x_K(0) \\ x_0(1) & \cdots & x_K(1) \\ \vdots & & \vdots \\ x_0(N-1) & \cdots & x_K(N-1) \end{bmatrix},$$

e dois vetores coluna com dimensões $N \times 1$ contendo todos os valores esperados (i.e., rótulos) e todos os valores preditos

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y(0) \\ \vdots \\ y(N-1) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \hat{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \hat{y}(0) \\ \vdots \\ \hat{y}(N-1) \end{bmatrix}$$

Cálculo do vetor gradiente

Usando a matriz e os vetores definidos no slide anterior, podemos reescrever o vetor gradiente como

$$\begin{aligned} & \frac{\partial J_e(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} \\ &= -\frac{2}{N} \begin{bmatrix} x_0(0) & x_0(1) & \cdots & x_0(N-1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_K(0) & x_K(1) & \cdots & x_K(N-1) \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(N-1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{y}(0) \\ \hat{y}(1) \\ \vdots \\ \hat{y}(N-1) \end{bmatrix} \right) \\ &= -\frac{2}{N} \mathbf{X}^T (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) \end{aligned}$$

O resultado da multiplicação matricial acima continua resultando em um **vetor coluna** com dimensão $K + 1 \times 1$, ou seja, $(K + 1 \times N) \times (N \times 1) = K + 1 \times 1$.

Equação de atualização dos pesos

Utilizando o resultado anterior, podemos reescrever a equação de atualização dos pesos como

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \mathbf{a} - \alpha \frac{\partial J_e(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} \\ &= \mathbf{a} + \alpha \frac{2}{N} \mathbf{X}^T (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}).\end{aligned}$$

A soma acima deve resultar em um vetor coluna com dimensão $K + 1 \times 1$, pois esta é a dimensão dos dois vetores sendo somados.

Lembrem-se que $K + 1 \times 1$ é a dimensão do vetor \mathbf{a} , o qual contém todos os pesos do modelo e que $\frac{2}{N} \mathbf{X}^T (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})$ tem dimensão $K + 1 \times 1$ também.

Equação de atualização dos pesos

Podemos reescrever a equação de atualização dos pesos como

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} &= \mathbf{a} - \alpha \frac{\partial J_e(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} = \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_K \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} \frac{\partial J_e(\mathbf{a})}{\partial a_0} \\ \vdots \\ \frac{\partial J_e(\mathbf{a})}{\partial a_K} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_K \end{bmatrix} + \alpha \frac{2}{N} \begin{bmatrix} x_0(0) & x_0(1) & \cdots & x_0(N-1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_K(0) & x_K(1) & \cdots & x_K(N-1) \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(N-1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{y}(0) \\ \hat{y}(1) \\ \vdots \\ \hat{y}(N-1) \end{bmatrix} \right) \\
 &= \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_K \end{bmatrix} + \alpha \frac{2}{N} \left\{ \begin{bmatrix} d(0)x_0(0) + d(1)x_0(1) + \cdots + d(N-1)x_0(N-1) \\ \vdots \\ d(0)x_K(0) + d(1)x_K(1) + \cdots + d(N-1)x_K(N-1) \end{bmatrix} \right\}.
 \end{aligned}$$