第三章　误差的合成与分配

任何测量结果都包含有一定的测量误差，这是测量过程中各个环节一系列误差因素共同作用的结果。如何正确地分析和综合这些误差因素，并正确地表述这些误差的综合影响，这就是误差合成要研究的基本内容。

本章较为全面地论述了误差合成与分配的基本规律和基本方法，这些规律和方法不仅应用于测量数据处理中给出测量结果的精度，而且还适用于测量方法和仪器装置的精度分析计算以及解决测量方法的拟订和仪器设计中的误差分配、微小误差取舍及最佳测量方案确定等问题。

第一节　函数误差

第二章所讨论的主要是直接测量的误差计算，但在有些情况下，由于被测对象的特点，不能进行直接测量，或者直接测量难以保证测量精度，所以需要采用间接测量。

间接测量是通过直接测量与被测的量之间有一定函数关系的其他量，按照已知的函数关系式计算出被测的量。因此间接测量的量是直接测量所得到的各个测量值的函数，而间接测量误差则是各个直接测得值误差的函数，故称这种误差为函数误差。研究函数误差的内容，实质上就是研究误差的传递问题，而对于这种具有确定关系的误差计算，也有称之为误差合成。

下面分别介绍函数系统误差和函数随机误差的计算问题。

一、函数系统误差计算

在间接测量中，函数的形式主要为初等函数，且一般为多元函数，其表达式为

$$y=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

式中，x_1，x_2，…，x_n 为各个直接测量值；y 为间接测量值。

由高等数学可知，对于多元函数，其增量可用函数的全微分表示，则上式的函数增量 $\mathrm{d}y$ 为

$$\mathrm{d}y = \frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n \tag{3-1}$$

若已知各个直接测量值的系统误差 Δx_1，Δx_2，…，Δx_n，由于这些误差值皆较小，可用来近似代替式（3-1）中的微分量 $\mathrm{d}x_1$，$\mathrm{d}x_2$，…，$\mathrm{d}x_n$，从而可近似得到函数的系统误差 Δy 为

$$\Delta y = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n \tag{3-2}$$

式（3-2）称为函数系统误差公式，而 $\partial f/\partial x_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 为各个直接测量值的误差传递系数。

有些情况下的函数公式较简单，则可直接求得函数的系统误差。

例如，若函数形式为线性公式

$$y = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

则函数的系统误差为

$$\Delta y = a_1\Delta x_1 + a_2\Delta x_2 + \cdots + a_n\Delta x_n \tag{3-3}$$

式中的各个误差传递系数 a_i 为常数。

当 $a_i = 1$ 时，则有

$$\Delta y = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \cdots + \Delta x_n \tag{3-4}$$

式（3-4）说明：当函数为各测量值之和时，其函数系统误差亦为各测量值系统误差之和。

在间接测量中，也常遇到角度测量，其函数关系为三角函数式，它常以 $\sin\varphi$、$\cos\varphi$、$\tan\varphi$ 和 $\cot\varphi$ 等形式出现。对于三角函数的系统误差，可按上述同样方法进行计算。

若三角函数为

$$\sin\varphi = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

根据式（3-2），可得三角函数的系统误差

$$\Delta\sin\varphi = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n \tag{3-5}$$

在角度测量中，需要求得的误差不是三角函数误差，而是所求角度的误差，因此必须进一步求解。

对正弦函数微分得

$$\mathrm{d}\sin\varphi = \cos\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{\mathrm{d}\sin\varphi}{\cos\varphi}$$

用系统误差代替上式中相应的微分量，则有

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta\sin\varphi}{\cos\varphi}$$

代入式（3-5）可得正弦函数的角度系统误差公式为

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\cos\varphi}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n\right) = \frac{1}{\cos\varphi}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i \tag{3-6}$$

同理可得其他三角函数的角度系统误差公式。

对于 $\cos\varphi = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，其角度系统误差公式为

$$\Delta\varphi = -\frac{1}{\sin\varphi}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i \tag{3-7}$$

对于 $\tan\varphi = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，其角度系统误差公式为

$$\Delta\varphi = \cos^2\varphi\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i \tag{3-8}$$

对于 $\cot\varphi = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，其角度系统误差公式为

$$\Delta\varphi = -\sin^2\varphi\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i \tag{3-9}$$

例 3-1 用弓高弦长法间接测量大直径 D，如图 3-1 所示，直接测得其弓高 h 和弦长 s，然后通过函数关系计算出直径 D。

若弓高与弦长的测得值及其系统误差为

$$h=50\text{mm},\ \Delta h=-0.1\text{mm}$$

$$s=500\text{mm},\ \Delta s=1\text{mm}$$

求测量结果。

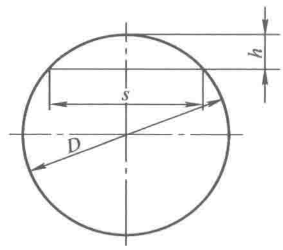

图 3-1

由图 3-1 可得函数关系式

$$D=\frac{s^2}{4h}+h$$

若不考虑测得值的系统误差，则计算出的直径 D_0 为

$$D_0=\frac{s^2}{4h}+h=\frac{500^2}{4\times 50}\text{mm}+50\text{mm}=1300\text{mm}$$

因

$$D=f(s,\ h)$$

根据式（3-2），可得直径 D 的系统误差为

$$\Delta D=\frac{\partial f}{\partial s}\Delta s+\frac{\partial f}{\partial h}\Delta h=\frac{s}{2h}\Delta s-\left(\frac{s^2}{4h^2}-1\right)\Delta h$$

式中各个误差传递系数为

$$\frac{\partial f}{\partial s}=\frac{s}{2h}=\frac{500}{2\times 50}=5$$

$$\frac{\partial f}{\partial h}=-\left(\frac{s^2}{4h^2}-1\right)=-\left(\frac{500^2}{4\times 50^2}-1\right)=-24$$

将已知各误差值及误差传递系数代入直径的系统误差式，得

$$\Delta D=5\times 1\text{mm}-24(-0.1)\text{mm}=7.4\text{mm}$$

通过修正可消除所求得的直径系统误差 ΔD，则被测直径的实际尺寸为

$$D=D_0-\Delta D=1300\text{mm}-7.4\text{mm}=1292.6\text{mm}$$

例 3-2 用某直流电桥测量电阻 R_x，如图 3-2 所示。当三个桥臂平衡时，桥臂电阻分别为 $R_1=100.0\Omega$，$R_2=50.0\Omega$，$R_3=25.0\Omega$。另外，已知三个电阻的系统误差分别为 $\Delta R_1=0.2\Omega$，$\Delta R_2=0.1\Omega$，$\Delta R_3=0.2\Omega$。求电阻 R_x 的测量结果。

根据图 3-2 所示的测量方法，电阻 R_x 的计算公式为

$$R_x=\frac{R_1}{R_2}R_3$$

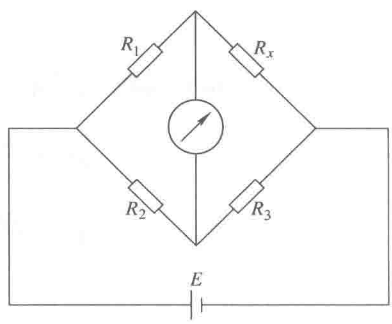

图 3-2

若不考虑测得值的系统误差，将 $R_1=100.0\Omega$、$R_2=50.0\Omega$、$R_3=25.0\Omega$ 代入上式中，得电阻值 R_0 为

$$R_0=\frac{R_1}{R_2}R_3=\frac{100}{50}\times 25\Omega=50\Omega$$

根据式（3-2），得电阻值 R_x 的系统误差 ΔR_x 为

$$\Delta R_x=\frac{\partial f}{\partial R_1}\Delta R_1+\frac{\partial f}{\partial R_2}\Delta R_2+\frac{\partial f}{\partial R_3}\Delta R_3$$

式中各个误差的传递系数为

$$\frac{\partial f}{\partial R_1}=\frac{R_3}{R_2}=\frac{25}{50}=0.5$$

$$\frac{\partial f}{\partial R_2}=-\frac{R_1R_3}{R_2^2}=-\frac{100\times 25}{50^2}=-1$$

$$\frac{\partial f}{\partial R_1}=\frac{R_1}{R_2}=\frac{100}{50}=2$$

将各个电阻值的系统误差及其误差传递系数代入待测电阻 R_x 的误差 ΔR_x 计算公式中，得

$$\Delta R_x=0.5\times 0.2\Omega-1\times 0.1\Omega+2\times 0.2\Omega=0.4\Omega$$

将所求得的电阻系统误差修正后，得到被测电阻的实际值为

$$R_x=R_0-\Delta R_x=50\Omega-0.4\Omega=49.6\Omega$$

二、函数随机误差计算

随机误差是用表征其取值分散程度的标准差来评定的，对于函数的随机误差，也是用函数的标准差来进行评定。因此，函数随机误差计算，就是研究函数 y 的标准差与各测量值 x_1，x_2，…，x_n 的标准差之间的关系。但在式（3-1）中，若以各测量值的随机误差 δx_1，δx_2，…，δx_n 代替各微分量 $\mathrm{d}x_1$，$\mathrm{d}x_2$，…，$\mathrm{d}x_n$，只能得到函数的随机误差 δy，而得不到函数的标准差 σ_y。因此，必须进行下列运算，以求得函数的标准差。

函数的一般形式为

$$y=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

为了求得用各个测量值的标准差表示函数的标准差公式，设对各个测量值皆进行了 N 次等精度测量，其相应的随机误差为

$$\begin{array}{l}
对\ x_1：\delta x_{11},\ \delta x_{12},\ \cdots,\ \delta x_{1N}\\
对\ x_2：\delta x_{21},\ \delta x_{22},\ \cdots,\ \delta x_{2N}\\
\qquad\qquad\vdots\\
对\ x_n：\delta x_{n1},\ \delta x_{n2},\ \cdots,\ \delta x_{nN}
\end{array}$$

根据式（3-1），可得函数 y 的随机误差为

$$\left.\begin{array}{l}
\delta y_1=\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\delta x_{11}+\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\delta x_{21}+\cdots+\dfrac{\partial f}{\partial x_n}\delta x_{n1}\\
\delta y_2=\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\delta x_{12}+\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\delta x_{22}+\cdots+\dfrac{\partial f}{\partial x_n}\delta x_{n2}\\
\qquad\vdots\\
\delta y_N=\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\delta x_{1N}+\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\delta x_{2N}+\cdots+\dfrac{\partial f}{\partial x_n}\delta x_{nN}
\end{array}\right\}\tag{3-10}$$

将方程组（3-10）中每个方程平方得

$$\left.\begin{aligned}
\delta y_1^2 &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \delta x_{11}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \delta x_{21}^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \delta x_{n1}^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\delta x_{i1}\delta x_{j1} \\
\delta y_2^2 &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \delta x_{12}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \delta x_{22}^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \delta x_{n2}^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\delta x_{i2}\delta x_{j2} \\
&\vdots \\
\delta y_N^2 &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \delta x_{1N}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \delta x_{2N}^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_N}\right)^2 \delta x_{nN}^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\delta x_{iN}\delta x_{jN}
\end{aligned}\right\} \tag{3-11}$$

将方程组（3-11）中各方程相加，可得

$$\begin{aligned}
\delta y_1^2 + \delta y_2^2 + \cdots + \delta y_N^2 = &\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 (\delta x_{11}^2 + \delta x_{12}^2 + \cdots + \delta x_{1N}^2) \\
&+ \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 (\delta x_{21}^2 + \delta x_{22}^2 + \cdots + \delta x_{2N}^2) \\
&+ \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 (\delta x_{n1}^2 + \delta x_{n2}^2 + \cdots + \delta x_{nN}^2) \\
&+ 2\sum_{1\leqslant i<j}^{n}\sum_{m=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\delta x_{im}\delta x_{jm}\right)
\end{aligned} \tag{3-12}$$

将式（3-12）的各项除以 N，并根据式（2-12）可得

$$\sigma_y^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x2}^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \sigma_{xn}^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\sum_{m=1}^{N}\delta x_{im}\delta x_{jm}}{N}\right)$$

若定义

$$K_{ij} = \frac{\sum_{m=1}^{N}\delta x_{im}\delta x_{jm}}{N}$$

$$\rho_{ij} = \frac{K_{ij}}{\sigma_{xi}\sigma_{xj}}$$

或

$$K_{ij} = \rho_{ij}\sigma_{xi}\sigma_{xj}$$

则可得

$$\sigma_y^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x2}^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \sigma_{xn}^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\ \rho_{ij}\sigma_{xi}\sigma_{xj}\right) \tag{3-13}$$

式中，ρ_{ij}为第 i 个测量值和第 j 个测量值之间的误差相关系数。

根据式（3-13）可由各个测量值的标准差计算出函数的标准差，故称该式为函数随机误差公式，而$\partial f/\partial x_i$（$i=1$，2，…，n）为各个测量值的误差传递系数。

若各测量值的随机误差是相互独立的，且当 N 适当大时，相关项

$$K_{ij} = \frac{\sum_{m=1}^{N}\delta_{x_{im}}\delta_{x_{jm}}}{N} = 0$$

则相关系数 ρ_{ij} 也为零，误差公式（3-13）可简化为

$$\sigma_y^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x2}^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \sigma_{xn}^2$$

$$\sigma_y = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x2}^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \sigma_{xn}^2} \tag{3-14}$$

令$\partial f/\partial x_i = a_i$，则式（3-14）可写成

$$\sigma_y = \sqrt{a_1^2\sigma_{x1}^2 + a_2^2\sigma_{x2}^2 + \cdots + a_n^2\sigma_{xn}^2} \tag{3-15}$$

各测量值随机误差间互不相关的情况较为常见，且当各相关系数很小时，也可近似地作不相关处理，因此式（3-14）或式（3-15）是较常用的函数随机误差公式。

当各个测量值的随机误差为正态分布时，式（3-15）中的标准差用极限误差代替，可得函数的极限误差公式为

$$\sigma_{\lim y} = \pm \sqrt{a_1^2\delta_{\lim}^2 x_1 + a_2^2\delta_{\lim}^2 x_2 + \cdots + a_n^2\delta_{\lim}^2 x_n} \tag{3-16}$$

在多数情况下，$a_i = 1$，且函数形式较简单，即

$$y = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

则函数的标准差为

$$\sigma_y = \sqrt{\sigma_{x1}^2 + \sigma_{x2}^2 + \cdots + \sigma_{xn}^2} \tag{3-17}$$

函数的极限误差为

$$\delta_{\lim} y = \pm \sqrt{\delta_{\lim}^2 x_1 + \delta_{\lim}^2 x_2 + \cdots + \delta_{\lim}^2 x_n} \tag{3-18}$$

三角函数的随机误差计算和一般函数的随机误差计算方法基本相同。

设三角函数的角度标准差为σ_φ，各个测量值的标准差为σ_{x1}，σ_{x2}，…，σ_{xn}，则根据三角函数的系统误差公式（3-6）~式(3-9）和式（3-14），可得相应的角度标准差公式。

1）对于$\sin\varphi = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，根据式（3-6）和式（3-14），则有

$$\sigma_\varphi = \frac{1}{\cos\varphi}\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x2}^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \sigma_{xn}^2} \tag{3-19}$$

2）对于$\cos\varphi = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，根据式（3-7）和式（3-14），则有

$$\sigma_\varphi = \frac{1}{\sin\varphi}\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x2}^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \sigma_{xn}^2} \tag{3-20}$$

3）对于$\tan\varphi = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，根据式（3-8）和式（3-14），则有

$$\sigma_\varphi = \cos^2\varphi\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x2}^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \sigma_{xn}^2} \tag{3-21}$$

4）对于$\cot\varphi = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，根据式（3-9）和式（3-14），则有

$$\sigma_\varphi = \sin^2\varphi\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x2}^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \sigma_{xn}^2} \tag{3-22}$$

若用极限误差来表示角度误差，则上述各式只需作相应的误差代换。

例 3-3 对例 3-1 用弓高弦长法间接测量大直径 D（见图 3-1）

$$D=\frac{s^2}{4h}+h$$

若已知 $h=50\text{mm}$，$\delta_{\lim}s=\pm 0.1\text{mm}$

$s=500\text{mm}$，$\delta_{\lim}h=\pm 0.05\text{mm}$

根据式（3-16），求得直径的极限误差为

$$\begin{aligned}\delta_{\lim}D &= \pm\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)^2\delta_{\lim}^2 s+\left(\frac{\partial f}{\partial h}\right)^2\delta_{\lim}^2 h}\\ &= \pm\sqrt{\left(\frac{s}{2h}\right)^2\delta_{\lim}^2 s+\left(\frac{s^2}{4h^2}-1\right)^2\delta_{\lim}^2 h}\\ &= \pm\sqrt{\left(\frac{500}{2\times 50}\right)^2\times 0.1^2+\left(\frac{500^2}{4\times 50^2}-1\right)^2\times 0.05^2}\ \text{mm}\\ &= \pm\sqrt{1.69}\text{mm}=\pm 1.3\text{mm}\end{aligned}$$

则所求直径的最后结果为

$$\begin{aligned}D &= (D_0-\Delta D)+\delta_{\lim}D\\ &=(1300-7.4)\text{mm}\pm 1.3\text{mm}=1292.6\text{mm}\pm 1.3\text{mm}\end{aligned}$$

例 3-4 在例 3-2 中，若各个电阻测量存在随机误差，且相互独立，并已知其大小为 $\sigma_{R1}=0.4\Omega$，$\sigma_{R2}=0.2\Omega$，$\sigma_{R3}=0.4\Omega$，求 R_x 的标准差。

根据式（3-14），R_x 测量值的随机误差标准差为

$$\begin{aligned}\sigma_{Rx} &= \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial R_1}\right)^2\sigma_{R1}^2+\left(\frac{\partial f}{\partial R_2}\right)^2\sigma_{R2}^2+\left(\frac{\partial f}{\partial R_3}\right)^2\sigma_{R3}^2}\\ &= \sqrt{0.5^2\times 0.4^2+(-1)^2\times 0.2^2+2^2\times 0.4^2}\Omega\approx 0.82\Omega\end{aligned}$$

根据例 3-2 和已求得 σ_{Rx} 的数据，被测电阻 R_x 的最后测量结果为

$$R_x=(R_0-\Delta R_x)\pm 3\sigma_{Rx}=(50-0.4)\Omega\pm 3\times 0.82\Omega\approx 49.6\Omega\pm 2.5\Omega$$

三、误差间的相关关系和相关系数

在函数误差及其他误差的合成计算时，各误差间的相关性对计算结果有直接影响。例如式（3-13）中的相关项反映了各随机误差相互间的线性关联对函数总误差的影响大小。当相关系数 $\rho_{ij}=0$ 时，则式（3-13）简化为式（3-15）的常用函数随机误差传递公式。但若 $\rho_{ij}=1$，则式（3-13）又可简化为

$$\sigma_y=\sqrt{a_1^2\sigma_{x1}^2+a_2^2\sigma_{x2}^2+\cdots+a_n^2\sigma_{xn}^2+2\sum_{1\leqslant i<j}^{n}a_ia_j\sigma_{xi}\sigma_{xj}}=a_1\sigma_{x1}+a_2\sigma_{x2}+\cdots+a_n\sigma_{xn} \tag{3-23}$$

式（3-23）表明，当 $\rho_{ij}=1$ 时，函数随机误差则具有线性的传递关系。

以上分析结果充分说明，误差间的相关性与误差合成有密切关系。虽然通常所遇到的测量实践多属误差间线性无关或近似线性无关，但线性相关的也常见。当各误差间相关或相关性不能忽略时，必须先求出各个误差间的相关系数，然后才能进行误差合成计算。因此，正确处理误差间的相关问题，有其重要意义。

（一）误差间的线性相关关系

误差间的线性相关关系是指它们具有线性依赖关系，这种依赖关系有强有弱。联系最强时，在平均意义上，一个误差的取值完全决定了另一个误差的取值，此时两误差间具有确定的线性函数关系。当两误差间的线性依赖关系最弱时，一个误差的取值与另一个误差的取值无关，这是互不相关的情况。

一般两误差间的关系是处于上述两种极端情况之间，既有联系而又不具有确定性关系。此时，线性依赖关系是指在平均意义上的线性关系，即一个误差值随另一个误差值的变化具有线性关系的倾向，但两者取值又不服从确定的线性关系，而具有一定的随机性。

（二）相关系数

两误差间有线性关系时，其相关性强弱由相关系数来反映，在误差合成时应求得相关系数，并计算出相关项大小。

若两误差 ξ 与 η 之间的相关系数为 ρ，根据式（3-13）中的相关系数定义，则有

$$\rho = \frac{K_{\xi\eta}}{\sigma_\xi \sigma_\eta} \tag{3-24}$$

式中，$K_{\xi\eta}$ 为误差 ξ 与 η 之间的协方差；σ_ξ、σ_η 为分别为误差 ξ 与 η 的标准差。

根据概率论可知，相关系数的取值范围是

$$-1 \leqslant \rho \leqslant +1$$

当 $0 < \rho < 1$ 时，两误差 ξ 与 η 正相关，即一误差增大时，另一误差的取值平均地增大；

当 $-1 < \rho < 0$ 时，两误差 ξ 与 η 负相关，即一误差增大时，另一误差的取值平均地减小；

当 $\rho = +1$ 时，称为完全正相关；$\rho = -1$ 时，称为完全负相关。此时两误差 ξ 与 η 之间存在着确定的线性函数关系；

当 $\rho = 0$ 时，两误差间无线性关系或称不相关，即一误差增大时，另一误差取值可能增大，也可能减小。

由上面讨论可知，相关系数确实可表示两个误差 ξ 与 η 之间线性相关的密切程度，ρ 越接近 0，ξ 与 η 之间的线性相关程度越小；反之，$|\rho|$ 取值越大、越接近 1，ξ 与 η 之间的线性相关程度越为密切。值得注意的是，相关系数只表示两误差的线性关系的密切程度，当 ρ 很小甚至等于 0 时，两误差间不存在线性关系，但并不表示它们之间不存在其他的函数关系。

确定两误差间的相关系数是比较困难的，通常可采用以下几种方法：

1. 直接判断法

通过两误差之间关系的分析，直接确定相关系数 ρ。如两误差不可能有联系或联系微弱时，则确定 $\rho = 0$；如一个误差增大，另一个误差成比例地增大，则确定 $\rho = 1$。

2. 试验观察和简略计算法

在某些情况下可直接测量两误差的多组对应值（ξ_i，η_i），用观察或简略计算法求得相关系数。

（1）观察法

用多组测量的对应值（ξ_i，η_i）作图，将它与图 3-3 的标准图形相比，看它与哪一图形

相近，从而确定相关系数的近似值。

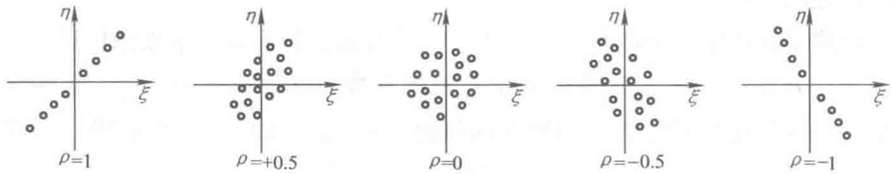

图 3-3

（2）简单计算法

将多组测量的对应值（ξ_i，η_i）在平面坐标上作图（见图3-4），然后作平行于纵轴的直线A将点阵左右均分，再作平行于横轴的直线B将点阵上下均分，并尽量使A、B线上无点，于是将点阵分为4部分，设各部分的点数分别为n_1、n_2、n_3、n_4，则可以证明相关系数为

$$\rho \approx -\cos\left[\frac{n_1+n_3}{\sum n}\pi\right] \tag{3-25}$$

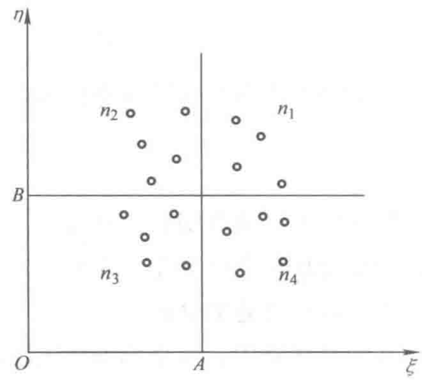

图 3-4

式中，$\sum n = n_1+n_2+n_3+n_4$。

（3）直接计算法

根据多组测量的对应值（ξ_i，η_i），按相关系数的定义直接计算得

$$\rho = \frac{\sum(\xi_i-\bar{\xi})(\eta_i-\bar{\eta})}{\sqrt{\sum(\xi_i-\bar{\xi})^2\sum(\eta_i-\bar{\eta})^2}} \tag{3-26}$$

式中，$\bar{\xi}$、$\bar{\eta}$分别为ξ_i、η_i的均值。

3. 理论计算法

有些误差间的相关系数，可根据概率论和最小二乘法直接求出。

如果求得两个误差ξ与η间为线性相关，即$\xi = a\eta + b$，则相关系数为

$$\rho = \begin{cases} +1, & a > 0 \\ -1, & a < 0 \end{cases} \tag{3-27}$$

以上讨论了误差之间相关系数的各种求法，根据具体情况可采用不同的方法。一般先在理论上探求，若达不到目的，对于数值小或一般性的误差间的相关系数则可用直观判断法；对于数值大或重要的误差间的相关系数宜采用多组成对观测，并分别情况采用不同的计算方法。

第二节　随机误差的合成

随机误差具有随机性，其取值是不可预知的，并用测量的标准差或极限误差来表征其取值的分散程度。随机误差的合成是采用方和根的方法，同时还要考虑到各个误差传递系数和