

第二章 误差的基本性质与处理

任何测量总是不可避免地存在误差,为了提高测量精度,必须尽可能消除或减小误差,因此有必要对各种误差的性质、出现规律、产生原因、发现与消除或减小它们的主要方法以及测量结果的评定等方面,作进一步的分析。

第一节 随机误差

一、随机误差的产生原因

当对同一量值进行多次等精度的重复测量时,得到一系列不同的测量值(常称为测量列),每个测量值都含有误差,这些误差的出现又没有确定的规律,即前一个误差出现后,不能预定下一个误差的大小和方向,但就误差的总体而言,却具有统计规律性。

随机误差是由很多暂时未能掌握或不便掌握的微小因素所构成,主要有以下几方面:

(1) 测量装置方面的因素

零部件配合的不稳定性、零部件的变形、零件表面油膜不均匀、摩擦等。

(2) 环境方面的因素

温度的微小波动、湿度与气压的微量变化、光照强度变化、灰尘以及电磁场变化等。

(3) 人员方面的因素

瞄准、读数的不稳定等。

二、正态分布

若测量列中不包含系统误差和粗大误差,则该测量列中的随机误差一般具有以下几个特征:

- 1) 绝对值相等的正误差与负误差出现的次数相等,这称为误差的对称性。
- 2) 绝对值小的误差比绝对值大的误差出现的次数多,这称为误差的单峰性。
- 3) 在一定的测量条件下,随机误差的绝对值不会超过一定界限,这称为误差的有界性。
- 4) 随着测量次数的增加,随机误差的算术平均值趋向于零,这称为误差的抵偿性。

最后一个特征可由第一特征推导出来,因为绝对值相等的正误差和负误差之和可以互相抵消。对于有限次测量,随机误差的算术平均值是一个有限小的量,而当测量次数无限增大时,它趋向于零。

服从正态分布的随机误差均具有以上4个特征。由于多数随机误差都服从正态分布,因而正态分布在误差理论中占有十分重要的地位。

设被测量的真值为 L_0 ,一系列测得值为 l_i ,则测量列中的随机误差 δ_i 为

$$\delta_i = l_i - L_0 \quad (2-1)$$

式中, $i=1, 2, \dots, n$ 。

正态分布的分布密度 $f(\delta)$ 与分布函数 $F(\delta)$ 为

$$f(\delta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\delta^2/(2\sigma^2)} \quad (2-2)$$

$$F(\delta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\delta} e^{-\delta^2/(2\sigma^2)} d\delta \quad (2-3)$$

式中, σ 为标准差 (或称方均根误差); e 为自然对数的底, 其值为 2.7182…。它的数学期望为

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \delta f(\delta) d\delta = 0 \quad (2-4)$$

它的方差为

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \delta^2 f(\delta) d\delta \quad (2-5)$$

其平均误差为

$$\theta = \int_{-\infty}^{\infty} |\delta| f(\delta) d\delta = 0.7979\sigma \approx \frac{4}{5}\sigma \quad (2-6)$$

此外由

$$\int_{-\rho}^{\rho} f(\delta) d\delta = \frac{1}{2}$$

可解得偶然误差为

$$\rho = 0.6745\sigma \approx \frac{2}{3}\sigma \quad (2-7)$$

图 2-1 所示为正态分布曲线以及各精度参数在图中的坐标。 σ 值为曲线上拐点 A 的横坐标, θ 值为曲线右半部面积重心 B 的横坐标, ρ 值的纵坐标则平分曲线右半部面积。

三、算术平均值

对某一量进行一系列等精度测量, 由于存在随机误差, 其测得值皆不相同, 应以全部测得值的算术平均值作为最后测量结果。

(一) 算术平均值的意义

在系列测量中, 被测量的 n 个测得值的代数和除以 n 而得的值称为算术平均值。

设 l_1, l_2, \dots, l_n 为 n 次测量所得的值, 则算术平均值 \bar{x} 为

$$\bar{x} = \frac{l_1 + l_2 + \dots + l_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n l_i}{n} \quad (2-8)$$

算术平均值与被测量的真值最为接近, 由概率论的大数定律可知, 若测量次数无限增加, 则算术平均值 \bar{x} 必然趋近于真值 L_0 。

由式 (2-1) 求和得

$$\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_n = (l_1 + l_2 + \dots + l_n) - nL_0$$

$$\sum_{i=1}^n \delta_i = \sum_{i=1}^n l_i - nL_0$$

$$L_0 = \frac{\sum_{i=1}^n l_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n \delta_i}{n}$$

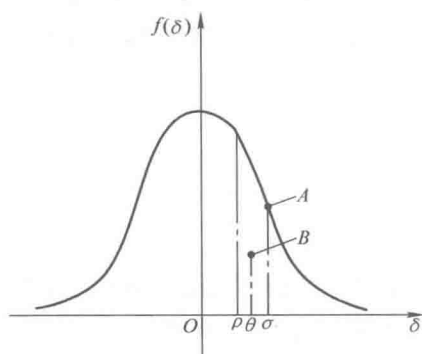


图 2-1

根据正态分布随机误差的第四特征可知：当 $n \rightarrow \infty$ 时，有 $\frac{\sum_{i=1}^n \delta_i}{n} \rightarrow 0$ ，所以

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n l_i}{n} \rightarrow L_0$$

由此可见，如果能够对某一量进行无限多次测量，就可得到不受随机误差影响的测量值，或其影响甚微，可予忽略。这就是当测量次数无限增大时，算术平均值（数学上称之为最大或然值）被认为是最接近于真值的理论依据。由于实际上都是有限次测量，人们只能把算术平均值近似地作为被测量的真值。

一般情况下，被测量的真值为未知，不可能按式（2-1）求得随机误差，这时可用算术平均值代替被测量的真值进行计算，则有

$$v_i = l_i - \bar{x} \tag{2-9}$$

式中， l_i 为第 i 个测得值， $i=1, 2, \cdots, n$ ； v_i 为 l_i 的残余误差（简称残差）。

如果测量列中的测量次数和每个测量数据的位数皆较多，直接按式（2-8）计算算术平均值，既烦琐，又容易产生错误，此时可用简便法进行计算。

任选一个接近所有测得值的数 l_0 作为参考值，计算出每个测得值 l_i 与 l_0 的差值

$$\Delta l_i = l_i - l_0 \quad i=1, 2, \cdots, n$$

因

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n l_i}{n} \quad \Delta \bar{x}_0 = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta l_i}{n}$$

则

$$\bar{x} = l_0 + \Delta \bar{x}_0 \tag{2-10}$$

式中的 $\Delta \bar{x}_0$ 为简单数值，很容易计算，因此按式（2-10）求算术平均值比较简便。

例 2-1 测量某物理量 10 次，得到结果见表 2-1，求算术平均值。

表 2-1

序 号	l_i	Δl_i	v_i
1	1879.64	-0.01	0
2	1879.69	+0.04	+0.05
3	1879.60	-0.05	-0.04
4	1879.69	+0.04	+0.05
5	1879.57	-0.08	-0.07
6	1879.62	-0.03	-0.02
7	1879.64	-0.01	0
8	1879.65	0	+0.01
9	1879.64	-0.01	0
10	1879.65	0	+0.01
$\bar{x} = 1879.65 - 0.01$ $= 1879.64$		$\Delta \bar{x}_0 = \frac{\sum_{i=1}^{10} \Delta l_i}{10} = -0.01$	$\sum_{i=1}^{10} v_i = -0.01$

任选参考值 $l_0 = 1879.65$, 计算差值 Δl_i 和 $\Delta \bar{x}_0$ 列于表中, 很容易求得算术平均值 $\bar{x} = 1879.64$ 。

(二) 算术平均值的计算校核

算术平均值及其残余误差的计算是否正确, 可用求得的残余误差代数和性质来校核。

根据式 (2-9) 求得的残余误差, 其代数和为

$$\sum_{i=1}^n v_i = \sum_{i=1}^n l_i - n\bar{x}$$

式中的算术平均值 \bar{x} 是根据式 (2-8) 计算的, 当求得的 \bar{x} 为未经凑整的准确数时, 则有

$$\sum_{i=1}^n v_i = 0 \quad (2-11)$$

残余误差代数和为零这一性质, 可用来校核算术平均值及其残余误差计算的正确性。但是按式 (2-8) 计算 \bar{x} 时, 往往会遇到小数位较多或除不尽的情况, 必须根据测量的有效数字, 按数据舍入规则, 对算术平均值 \bar{x} 进行截取与凑整, 因此实际得到的 \bar{x} 可能为经过凑整的非准确数, 存在舍入误差 Δ , 即

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n l_i}{n} + \Delta$$

而

$$\sum_{i=1}^n v_i = \sum_{i=1}^n l_i - n \left(\frac{\sum_{i=1}^n l_i}{n} + \Delta \right) = -n\Delta$$

经过分析证明, 用残余误差代数和校核算术平均值及其残余误差, 其规则为

1) 残余误差代数和应符合:

当 $\sum_{i=1}^n l_i = n\bar{x}$, 求得的 \bar{x} 为非凑整的准确数时, $\sum_{i=1}^n v_i$ 为零;

当 $\sum_{i=1}^n l_i > n\bar{x}$, 求得的 \bar{x} 为凑整的非准确数时, $\sum_{i=1}^n v_i$ 为正, 其大小为求 \bar{x} 时的余数;

当 $\sum_{i=1}^n l_i < n\bar{x}$, 求得的 \bar{x} 为凑整的非准确数时, $\sum_{i=1}^n v_i$ 为负, 其大小为求 \bar{x} 时的亏数。

2) 残余误差代数和绝对值应符合:

当 n 为偶数时, $\left| \sum_{i=1}^n v_i \right| \leq \frac{n}{2} A$;

当 n 为奇数时, $\left| \sum_{i=1}^n v_i \right| \leq \left(\frac{n}{2} - 0.5 \right) A$ 。

式中的 A 为实际求得的算术平均值 \bar{x} 末位数的一个单位。

以上两种校核规则, 可根据实际运算情况选择一种进行校核, 但大多数情况选用第二种规则可能较为方便, 它不需要知道所有测得值之和。

例 2-2 用例 2-1 数据, 对计算结果进行校核。

因 n 为偶数, $\frac{n}{2} = \frac{10}{2} = 5$, $A = 0.01$, 由表 2-1 知

$$\left| \sum_{i=1}^{10} v_i \right| = 0.01 < \frac{n}{2}A = 0.05$$

故计算结果正确。

例 2-3 测量某直径 11 次，得到结果见表 2-2，求算术平均值并进行校核。

表 2-2

序 号	l_i/mm	v_i/mm
1	2000.07	+0.003
2	2000.05	-0.017
3	2000.09	+0.023
4	2000.06	-0.007
5	2000.08	+0.013
6	2000.07	+0.003
7	2000.06	-0.007
8	2000.05	-0.017
9	2000.08	+0.013
10	2000.06	-0.007
11	2000.07	+0.003
	$\sum_{i=1}^{11} l_i = 22000.74$	$\sum_{i=1}^{11} v_i = 0.003$

算术平均值 \bar{x} 为

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{11} l_i}{11} = \frac{22000.74}{11} \text{mm} = 2000.0673 \text{mm}$$

取 $\bar{x} = 2000.067 \text{mm}$

用第一种规则校核，则有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{11} l_i &= 22000.74 \text{mm} > n\bar{x} = 11 \times 2000.067 \text{mm} = 22000.737 \text{mm} \\ \sum_{i=1}^{11} v_i &= \sum_{i=1}^{11} l_i - 11\bar{x} = 22000.74 \text{mm} - 22000.737 \text{mm} = 0.003 \text{mm} \end{aligned}$$

用第二种规则校核，则有

$$\begin{aligned} \frac{n}{2} - 0.5 &= \frac{11}{2} - 0.5 = 5, \quad A = 0.001 \text{mm} \\ \left| \sum_{i=1}^{11} v_i \right| &= 0.003 \text{mm} < \left(\frac{n}{2} - 0.5 \right) A = 0.005 \text{mm} \end{aligned}$$

故用两种规则校核皆说明计算结果正确。

四、测量的标准差

测量的标准偏差简称为标准差，也可称之为方均根误差。

(一) 测量列中单次测量的标准差

由于随机误差的存在，等精度测量列中各个测得值一般皆不相同，它们围绕着该测量列的算术平均值有一定的分散，此分散度说明了测量列中单次测得值的不可靠性，必须用一个

数值作为其不可靠性的评定标准。

符合正态分布的随机误差分布密度如式(2-2)所示。由此式可知： σ 值越小，则 e 的指数的绝对值越大，因而 $f(\delta)$ 减小得越快，即曲线变陡。而 σ 值越小，在 e 前面的系数值变大，即对应于误差为零 ($\delta=0$) 的纵坐标也大，曲线变高。反之， σ 越大， $f(\delta)$ 减小越慢，曲线平坦，同时对应于误差为零的纵坐标也小，曲线变低。图 2-2 中三个测量列所得的分布曲线不同，其标准差 σ 也不相同，且 $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$ 。

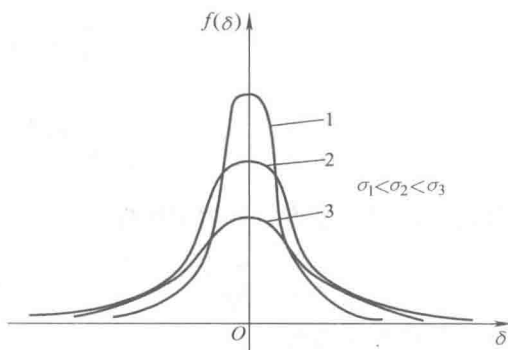


图 2-2

标准差 σ 的数值小，该测量列相应小的误差就占优势，任一单次测得值对算术平均值的分散度就小，测量的可靠性就大，即测量精度高（如图中的曲线 1）；反之，测量精度就低（如图中的曲线 3）。因此单次测量的标准差 σ 是表征同一被测量的 n 次测量的测得值分散性的参数，可作为测量列中单次测量不可靠性的评定标准。

应该指出，标准差 σ 不是测量列中任何一个具体测得值的随机误差， σ 的大小只说明，在一定条件下等精度测量列随机误差的概率分布情况。在该条件下，任一单次测得值的随机误差 δ ，一般都不等于 σ ，但却认为这一系列测量中所有测得值都属同样一个标准差 σ 的概率分布。在不同条件下，对同一被测量进行两个系列的等精度测量，其标准差 σ 也不相同。

在等精度测量列中，单次测量的标准差按下式计算：

$$\sigma = \sqrt{\frac{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \cdots + \delta_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \delta_i^2}{n}} \quad (2-12)$$

式中， n 为测量次数（应充分大）； δ_i 为测得值与被测量的真值之差。

当被测量的真值为未知时，按式 (2-12) 不能求得标准差。实际上，在有限次测量情况下，可用残余误差 v_i 代替真误差，而得到标准差的估计值。由式 (2-1) 知

$$\delta_i = l_i - L_0$$

由此可得

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= l_1 - \bar{x} + \bar{x} - L_0 \\ \delta_2 &= l_2 - \bar{x} + \bar{x} - L_0 \\ &\vdots \\ \delta_n &= l_n - \bar{x} + \bar{x} - L_0 \end{aligned} \right\} \quad (2-13)$$

式中， $(\bar{x} - L_0) = \delta_{\bar{x}}$ 称为算术平均值的误差，将它和式 (2-9) 代入式 (2-13)，则有

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= v_1 + \delta_{\bar{x}} \\ \delta_2 &= v_2 + \delta_{\bar{x}} \\ &\vdots \\ \delta_n &= v_n + \delta_{\bar{x}} \end{aligned} \right\} \quad (2-14)$$

将式 (2-14) 对应项相加得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \delta_i &= \sum_{i=1}^n v_i + n\delta_{\bar{x}} \\ \delta_{\bar{x}} &= \frac{\sum_{i=1}^n \delta_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n v_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n \delta_i}{n}\end{aligned}\quad (2-15)$$

若将式 (2-14) 平方后再相加则得

$$\sum_{i=1}^n \delta_i^2 = \sum_{i=1}^n v_i^2 + n\delta_{\bar{x}}^2 + 2\delta_{\bar{x}} \sum_{i=1}^n v_i = \sum_{i=1}^n v_i^2 + n\delta_{\bar{x}}^2 \quad (2-16)$$

将式 (2-15) 平方有

$$\delta_{\bar{x}}^2 = \left[\frac{\sum_{i=1}^n \delta_i}{n} \right]^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \delta_i^2}{n^2} + \frac{2 \sum_{1 \leq i < j}^n \delta_i \delta_j}{n^2}$$

当 n 适当大时, 可认为 $\sum_{i=1}^n \delta_i \delta_j$ 趋近于零, 并将 $\delta_{\bar{x}}^2$ 代入式 (2-16) 得

$$\sum_{i=1}^n \delta_i^2 = \sum_{i=1}^n v_i^2 + \frac{\sum_{i=1}^n \delta_i^2}{n} \quad (2-17)$$

由式 (2-12) 可知

$$\sum_{i=1}^n \delta_i^2 = n\sigma^2$$

代入式 (2-17) 得

$$\begin{aligned}n\sigma^2 &= \sum_{i=1}^n v_i^2 + \sigma^2 \\ \sigma &= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n v_i^2}{n-1}}\end{aligned}\quad (2-18)$$

式 (2-18) 称为贝塞尔 (Bessel) 公式, 根据此式可由残余误差求得单次测量的标准差的估计值^①。

评定单次测量不可靠性的参数还有或然误差 ρ 和平均误差 θ , 若用残余误差表示则为

$$\rho \approx \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n v_i^2}{n-1}} \quad (2-19)$$

$$\theta \approx \frac{4}{5} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n v_i^2}{n-1}} \quad (2-20)$$

① 根据我国有关名词的规定对一列有限次 n 个测量值, 应视为测量总体的取样, 所求得的标准差估计值用代号 s 表示, 以区别于总体标准差 σ 。由此本书各章将经常会出现同时出现 σ 和 s 两个代号, 容易混淆。为便于教学叙述, 对标准差估计值仍用 σ 表示, 但在实际测量时计算有限次测量值的标准差, 则用代号 s 表示。

(二) 测量列算术平均值的标准差

在多次测量的测量列中,是以算术平均值作为测量结果,因此必须研究算术平均值可靠性的评定标准。

如果在相同条件下对同一量值作多组重复的系列测量,每一系列测量都有一个算术平均值,由于随机误差的存在,各个测量列的算术平均值也不相同,它们围绕着被测量的真值有一定的分散。此分散说明了算术平均值的不可靠性,而算术平均值的标准差 $\sigma_{\bar{x}}$ 则是表征同一被测量的各个独立测量列算术平均值分散性的参数,可作为算术平均值可靠性的评定标准。

由式 (2-8) 已知算术平均值 \bar{x} 为

$$\bar{x} = \frac{l_1 + l_2 + \cdots + l_n}{n}$$

取方差

$$D(\bar{x}) = \frac{1}{n^2} [D(l_1) + D(l_2) + \cdots + D(l_n)]$$

因

$$D(l_1) = D(l_2) = \cdots = D(l_n) = D(l)$$

故有

$$D(\bar{x}) = \frac{1}{n^2} n D(l) = \frac{1}{n} D(l)$$

所以

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (2-21)$$

由此可知,在 n 次测量的等精度测量列中,算术平均值的标准差为单次测量标准差的 $1/\sqrt{n}$,当测量次数 n 越大时,算术平均值越接近被测量的真值,测量精度也越高。

增加测量次数,可以提高测量精度,但是由式 (2-21) 可知,测量精度与测量次数的平方根成反比,因此要显著地提高测量精度,必须付出较大的劳动。由图2-3可知, σ 一定时,当 $n > 10$ 以后, $\sigma_{\bar{x}}$ 已减少得非常缓慢。此外,由于测量次数越大时,也越难保证测量条件的恒定,从而带来新的误差,因此一般情况下取 $n \leq 10$ 较为适宜。总之,要提高测量精度,应采用适当精度的仪器,选取适当的测量次数。

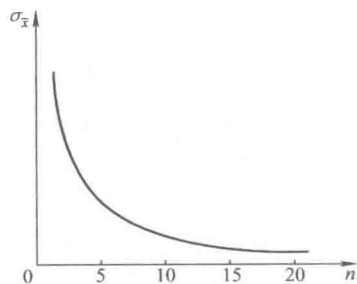


图 2-3

评定算术平均值的精度标准,也可用或然误差 R 或平均误差 T , 相应的公式为

$$R = 0.6745 \sigma_{\bar{x}} \approx \frac{2}{3} \sigma_{\bar{x}} = \frac{2}{3} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\rho}{\sqrt{n}} \quad (2-22)$$

$$T = 0.7979 \sigma_{\bar{x}} \approx \frac{4}{5} \sigma_{\bar{x}} = \frac{4}{5} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\theta}{\sqrt{n}} \quad (2-23)$$

若用残余误差 v 表示上述公式,则有

$$R = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n v_i^2}{n(n-1)}} \quad (2-24)$$

$$T = \frac{4}{5} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n v_i^2}{n(n-1)}}$$

(2-25)

例 2-4 用游标卡尺对某一尺寸测量 10 次，假定已消除系统误差和粗大误差，得到数据如下（单位为 mm）：

75.01，75.04，75.07，75.00，75.03，75.09，75.06，75.02，75.05，75.08

求算术平均值及其标准差。

现将算术平均值的计算和校核结果列于表 2-3 中，表中的算术平均值 $\bar{x} = 75.045\text{mm}$ ， $\sum_{i=1}^n v_i = 0$ 。因为 $\sum_{i=1}^{10} l_i - n\bar{x} = 750.45\text{mm} - 10 \times 75.045\text{mm} = 0$ ，与表中的 $\sum_{i=1}^{10} v_i = 0$ 结果一致，故计算正确。

表 2-3

序 号	l_i/mm	v_i/mm	v_i^2/mm^2
1	75.01	-0.035	0.001225
2	75.04	-0.005	0.000025
3	75.07	+0.025	0.000625
4	75.00	-0.045	0.002025
5	75.03	-0.015	0.000225
6	75.09	+0.045	0.002025
7	75.06	+0.015	0.000225
8	75.02	-0.025	0.000625
9	75.05	+0.005	0.000025
10	75.08	+0.035	0.001225
	$\bar{x} = 75.045\text{mm}$	$\sum_{i=1}^{10} v_i = 0$	$\sum_{i=1}^{10} v_i^2 = 0.00825\text{mm}^2$

根据上述各个误差计算公式可得

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n v_i^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{0.00825}{10-1}}\text{mm} = 0.0303\text{mm}$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0.0303}{\sqrt{10}}\text{mm} = 0.0096\text{mm}$$

$$R = 0.6745\sigma_{\bar{x}} = 0.6745 \times 0.0096\text{mm} = 0.0065\text{mm}$$

$$T = 0.7979\sigma_{\bar{x}} = 0.7979 \times 0.0096\text{mm} = 0.0076\text{mm}$$

（三）标准差的其他算法

除了贝塞尔公式外，计算标准差还有别捷尔斯法、极差法及最大误差法等。

1. 别捷尔斯法（Peters）

由贝塞尔公式（2-18）得

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n v_i^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \delta_i^2}{n}}$$

$$\sum_{i=1}^n \delta_i^2 = \frac{n}{n-1} \sum_{i=1}^n v_i^2$$

此式近似为

$$\sum_{i=1}^n |\delta_i| \approx \sum_{i=1}^n |v_i| \sqrt{\frac{n}{n-1}}$$

则平均误差为

$$\theta = \frac{\sum_{i=1}^n |\delta_i|}{n} = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \sum_{i=1}^n |v_i|$$

由式 (2-6) 得

$$\sigma = \frac{1}{0.7979} \theta = 1.253\theta$$

故有

$$\sigma = 1.253 \times \frac{\sum_{i=1}^n |v_i|}{\sqrt{n(n-1)}} \quad (2-26)$$

此式称为别捷尔斯公式, 它可由残余误差 v 的绝对值之和求出单次测量的标准差 σ , 而算术平均值的标准差 $\sigma_{\bar{x}}$ 为

$$\sigma_{\bar{x}} = 1.253 \times \frac{\sum_{i=1}^n |v_i|}{n\sqrt{n-1}} \quad (2-27)$$

例 2-5 仍用例 2-4 的测量数据, 别捷尔斯法求得的标准差为

$$\sigma = 1.253 \times \frac{0.250}{\sqrt{10(10-1)}} \text{ mm} = 0.0330 \text{ mm}$$

$$\sigma_{\bar{x}} = 1.253 \times \frac{0.250}{10\sqrt{10-1}} \text{ mm} = 0.0104 \text{ mm}$$

2. 极差法

用贝塞尔公式和别捷尔斯公式计算标准差均需先求算术平均值, 再求残余误差, 然后进行其他运算, 计算过程比较复杂。当要求简便迅速算出标准差时, 可用极差法。

若等精度多次测量测得值 x_1, x_2, \dots, x_n 服从正态分布, 在其中选取最大值 x_{\max} 与最小值 x_{\min} , 则两者之差称为极差, 即

$$\omega_n = x_{\max} - x_{\min} \quad (2-28)$$

根据极差的分布函数, 可求出极差的数学期望为

$$E(\omega_n) = d_n \sigma \quad (2-29)$$

因

$$E\left(\frac{\omega_n}{d_n}\right) = \sigma$$

故可得 σ 的无偏估计值, 若仍以 σ 表示, 则有

$$\sigma = \frac{\omega_n}{d_n} \quad (2-30)$$

式中, d_n 的数值见表 2-4。

表 2-4

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
d_n	1.13	1.69	2.06	2.33	2.53	2.70	2.85	2.97	3.08	3.17	3.26	3.34	3.41	3.47	3.53	3.59	3.64	3.69	3.74

极差法可简单迅速算出标准差，并具有一定精度，一般在 $n < 10$ 时均可采用。

例 2-6 仍用例 2-4 的测量数据，用极差法求得的标准差为

$$\begin{aligned}\omega_n &= l_{\max} - l_{\min} = 75.09\text{mm} - 75.00\text{mm} = 0.09\text{mm} \\ d_{10} &= 3.08 \\ \sigma &= \frac{\omega_n}{d_{10}} = \frac{0.09}{3.08}\text{mm} = 0.0292\text{mm}\end{aligned}$$

3. 最大误差法

在有些情况下，人们可以知道被测量的真值或满足规定精确度的用来代替真值使用的量值（称为实际值或约定真值），因而能够算出随机误差 δ_i ，取其中绝对值最大的一个值 $|\delta_i|_{\max}$ ，当各个独立测量值服从正态分布时，则可求得关系式

$$\sigma = \frac{|\delta_i|_{\max}}{K_n} \tag{2-31}$$

一般情况下，被测量的真值为未知，不能按式（2-31）求标准差，应按最大残余误差 $|v_i|_{\max}$ 进行计算，其关系式为

$$\sigma = \frac{|v_i|_{\max}}{K'_n} \tag{2-32}$$

式（2-31）和式（2-32）中两系数 K_n 、 K'_n 的倒数见表 2-5。

表 2-5

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$1/K_n$	1.25	0.88	0.75	0.68	0.64	0.61	0.58	0.56	0.55	0.53	0.52	0.51	0.50	0.50	0.49
n	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$1/K_n$	0.48	0.48	0.47	0.47	0.46	0.46	0.45	0.45	0.45	0.44	0.44	0.44	0.44	0.43	0.43
n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	25	30		
$1/K_n'$	1.77	1.02	0.83	0.74	0.68	0.64	0.61	0.59	0.57	0.51	0.48	0.46	0.44		

最大误差法简单、迅速、方便，容易掌握，因而有广泛用途。当 $n < 10$ 时，最大误差法具有一定的精度。

例 2-7 仍用例 2-4 的测量数据，按最大误差法求标准差，则有

$$\begin{aligned}|v_i|_{\max} &= 0.045\text{mm} \\ \frac{1}{K'_{10}} &= 0.57\end{aligned}$$

故标准差为

$$\sigma = \frac{|v_i|_{\max}}{K'_{10}} = 0.57 \times 0.045\text{mm} = 0.0256\text{mm}$$

例 2-8 某激光管发出的激光波长经检定 $\lambda = 0.63299130\mu\text{m}$ ，由于某些原因未对此检

定波长作误差分析,但后来又用更精确的方法测得激光波长 $\lambda = 0.63299144 \mu\text{m}$, 试求原检定波长的标准差。

因后测得的波长是用更精确的方法,故可认为其测得值为实际波长(或约定真值),则原检定波长的随机误差 δ 为

$$\delta = 0.63299130 \mu\text{m} - 0.63299144 \mu\text{m} = -14 \times 10^{-8} \mu\text{m}$$

$$\frac{1}{K_1} = 1.25$$

故标准差为

$$\sigma = \frac{|\delta|}{K_1} = 1.25 \times 14 \times 10^{-8} \mu\text{m} = 1.75 \times 10^{-7} \mu\text{m}$$

在代价较高的实验中(如破坏性实验),往往只进行一次实验,此时贝塞尔公式成为 $\frac{0}{0}$ 形式而无法计算标准差。在这种情况下,又特别需要尽可能精确地估算其精度,因而最大误差法就显得特别有用。

以上介绍的几种标准差算法,简便易行,且具有一定的精度,但其可靠性均较贝塞尔公式要低,因此对重要的测量或几种方法计算的结果出现矛盾时,仍应以贝塞尔公式为准。

五、测量的极限误差

测量的极限误差是极端误差,测量结果(单次测量或测量列的算术平均值)的误差不超过该极端误差的概率为 P ,并使差值 $(1-P)$ 可予忽略。

(一) 单次测量的极限误差

测量列的测量次数足够多且单次测量误差为正态分布时,根据概率论知识,可求得单次测量的极限误差。

由概率积分可知,随机误差正态分布曲线下的全部面积相当于全部误差出现的概率,即

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\delta^2/(2\sigma^2)} d\delta = 1$$

而随机误差在 $-\delta$ 至 $+\delta$ 范围内的概率为

$$P(\pm\delta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\delta}^{+\delta} e^{-\delta^2/(2\sigma^2)} d\delta = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{\delta} e^{-\delta^2/(2\sigma^2)} d\delta \quad (2-33)$$

引入新的变量 t

$$t = \frac{\delta}{\sigma}, \quad \delta = t\sigma$$

经变换,式(2-33)成为 $P(\pm\delta) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-t^2/2} dt = 2\Phi(t)$

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-t^2/2} dt \quad (2-34)$$

此函数 $\Phi(t)$ 称为概率积分,不同 t 的 $\Phi(t)$ 值可由附录表 1 查出。

若某随机误差在 $\pm t\sigma$ 范围内出现的概率为 $2\Phi(t)$, 则超出的概率为

$$\alpha = 1 - 2\Phi(t)$$

表 2-6 给出了几个典型的 t 值及其相应的超出或不超出 $|\delta|$ 的概率(见图 2-4)。