定波长作误差分析，但后来又用更精确的方法测得激光波长 $\lambda=0.63299144\mu m$，试求原检定波长的标准差。

因后测得的波长是用更精确的方法，故可认为其测得值为实际波长（或约定真值），则原检定波长的随机误差 δ 为

$$\delta=0.63299130\mu m-0.63299144\mu m=-14\times10^{-8}\mu m$$

$$\frac{1}{K_1}=1.25$$

故标准差为

$$\sigma=\frac{|\delta|}{K_1}=1.25\times14\times10^{-8}\mu m=1.75\times10^{-7}\mu m$$

在代价较高的实验中（如破坏性实验），往往只进行一次实验，此时贝塞尔公式成为 $\frac{0}{0}$ 形式而无法计算标准差。在这种情况下，又特别需要尽可能精确地估算其精度，因而最大误差法就显得特别有用。

以上介绍的几种标准差计算法，简便易行，且具有一定的精度，但其可靠性均较贝塞尔公式要低，因此对重要的测量或几种方法计算的结果出现矛盾时，仍应以贝塞尔公式为准。

五、测量的极限误差

测量的极限误差是极端误差，测量结果（单次测量或测量列的算术平均值）的误差不超过该极端误差的概率为 P，并使差值（$1-P$）可予忽略。

（一）单次测量的极限误差

测量列的测量次数足够多且单次测量误差为正态分布时，根据概率论知识，可求得单次测量的极限误差。

由概率积分可知，随机误差正态分布曲线下的全部面积相当于全部误差出现的概率，即

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\delta^2/(2\sigma^2)}d\delta=1$$

而随机误差在 $-\delta$ 至 $+\delta$ 范围内的概率为

$$P(\pm\delta)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\delta}^{+\delta}e^{-\delta^2/(2\sigma^2)}d\delta=\frac{2}{\sigma\ \sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\delta}e^{-\delta^2/(2\sigma^2)}d\delta \tag{2-33}$$

引入新的变量 t

$$t=\frac{\delta}{\sigma},\ \delta=t\sigma$$

经变换，式(2-33)成为

$$P(\pm\delta)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{t}e^{-t^2/2}dt=2\Phi(t)$$

$$\Phi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{t}e^{-t^2/2}dt \tag{2-34}$$

此函数 $\Phi(t)$ 称为概率积分，不同 t 的 $\Phi(t)$ 值可由附录表 1 查出。

若某随机误差在 $\pm t\sigma$ 范围内出现的概率为 $2\Phi(t)$，则超出的概率为

$$\alpha=1-2\Phi(t)$$

表 2-6 给出了几个典型的 t 值及其相应的超出或不超出 $|\delta|$ 的概率（见图 2-4）。

表 2-6

t	$\lvert\delta\rvert = t\sigma$	不超出$\lvert\delta\rvert$的概率 $2\Phi(t)$	超出$\lvert\delta\rvert$的概率 $1-2\Phi(t)$	测量次数 n	超出$\lvert\delta\rvert$的测量次数
0.67	0.67σ	0.4972	0.5028	2	1
1	1σ	0.6826	0.3174	3	1
2	2σ	0.9544	0.0456	22	1
3	3σ	0.9973	0.0027	370	1
4	4σ	0.9999	0.0001	15626	1

由表 2-6 可见，随着 t 的增大，超出$\lvert\delta\rvert$的概率减小得很快。当 $t=2$，即 $\lvert\delta\rvert=2\sigma$ 时，在 22 次测量中只有 1 次的误差绝对值超出 2σ 范围；而当 $t=3$，即 $\lvert\delta\rvert=3\sigma$ 时，在 370 次测量中只有一次误差绝对值超出 3σ 范围。由于在一般测量中，测量次数很少超过几十次，因此可以认为绝对值大于 3σ 的误差是不可能出现的，通常把这个误差称为单次测量的极限误差 $\delta_{\lim}x$，即

$$\delta_{\lim}x = \pm 3\sigma \tag{2-35}$$

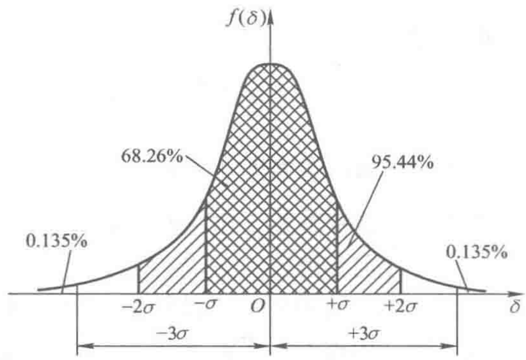

图 2-4

当 $t=3$ 时，对应的概率 $P=99.73\%$。

在实际测量中，有时也可取其他 t 值来表示单次测量的极限误差。如取 $t=2.58$，$P=99\%$；$t=2$，$P=95.44\%$；$t=1.96$，$P=95\%$ 等。因此一般情况下，测量列单次测量的极限误差可用下式表示：

$$\delta_{\lim}x = \pm t\sigma \tag{2-36}$$

若已知测量的标准差 σ，选定置信系数 t，则可由式（2-36）求得单次测量的极限误差。

（二）算术平均值的极限误差

测量列的算术平均值与被测量的真值之差称为算术平均值误差 $\delta_{\bar{x}}$，即

$$\delta_{\bar{x}} = \bar{x} - L_0$$

当多个测量列的算术平均值误差 $\delta_{\bar{x}i}$（$i=1，2，\cdots，N$）为正态分布时，根据概率论知识，同样可得测量列算术平均值的极限误差表达式为

$$\delta_{\lim}\bar{x} = \pm t\sigma_{\bar{x}} \tag{2-37}$$

式中，t 为置信系数；$\sigma_{\bar{x}}$为算术平均值的标准差。

通常取 $t=3$，则

$$\delta_{\lim}\bar{x} = \pm 3\sigma_{\bar{x}} \tag{2-38}$$

实际测量中，有时也可取其他 t 值来表示算术平均值的极限误差。但当测量列的测量次数较少时，应按“学生氏”分布（“Student” distribution）或称 t 分布来计算测量列算术平均值的极限误差，即

$$\delta_{\lim}\bar{x} = \pm t_a\sigma_{\bar{x}} \tag{2-39}$$

式中的 t_a 为置信系数，它由给定的置信概率 $P=1-\alpha$ 和自由度 $\nu=n-1$ 来确定，具体数值见附录表 3；α 为超出极限误差的概率（称显著度或显著水平），通常取 $\alpha=0.01$ 或 0.02，0.05；n 为测量次数；$\sigma_{\bar{x}}$为 n 次测量的算术平均值标准差。

对于同一个测量列，按正态分布和 t 分布分别计算时，即使置信概率的取值相同，但由于置信系数不相同，因而求得的算术平均值极限误差也不相同。

例 2-9 对某量进行 6 次测量，测得数据如下：

802.40，802.50，802.38，802.48，802.42，802.46
求算术平均值及其极限误差。

算术平均值
$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n} l_i}{6}=\frac{\sum_{i=1}^{6} l_i}{6}=802.44$$

标准差
$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{6} v_i^2}{6-1}}=0.047$$

$$\sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{0.047}{\sqrt{6}}=0.019$$

因测量次数较少，应按 t 分布计算算术平均值的极限误差。

已知 $\nu=n-1=5$

取 $\alpha=0.01$

则由附表 3 查得 $t_a=4.03$

故算术平均值的极限误差为

$$\delta_{\lim}\bar{x}=\pm t_a\sigma_{\bar{x}}=\pm 4.03\times 0.019=\pm 0.076$$

若按正态分布计算，取 $\alpha=0.01$，相应的置信概率 $P=1-\alpha=0.99$，由附表 1 查得 $t=2.60$，则得算术平均值的极限误差为

$$\delta_{\lim}\bar{x}=\pm t\sigma_{\bar{x}}=\pm 2.60\times 0.019=\pm 0.049$$

由此可见，当测量次数较少时，按两种分布计算的结果有明显差别。

六、不等精度测量

前面讲述的内容皆是等精度测量的问题，在一般测量实践中基本上都属这种类型。但为了得到更精确的测量结果，如在科学研究或高精度测量中，往往在不同的测量条件下，用不同的仪器、不同的测量方法、不同的测量次数以及不同的测量者进行测量与对比，这种测量称为不等精度测量。

在一般测量工作中，常遇到的不等精度测量有两种情况：

第一种情况，用不同测量次数进行对比测量。例如用同一台仪器测量某一参数，先后用 n_1 次和 n_2 次进行测量，分别求得算术平均值 $\bar{x}_1$ 和 $\bar{x}_2$。因为 $n_1\neq n_2$，显然 $\bar{x}_1$ 与 $\bar{x}_2$ 的精度不一样，如何求得最后的测量结果及其精度？

第二种情况，用不同精度的仪器进行对比测量。例如对于高精度或重要的测量任务，往往要用不同精度的仪器进行互比核对测量，显然所得到的结果不会相同，如何求得最后的测量结果及其精度？

对于不等精度测量，计算最后测量结果及其精度（如标准差），不能套用前面等精度测量的计算公式，需推导出新的计算公式。

（一）权的概念

在等精度测量中，各个测得值可认为同样可靠，并取所有测得值的算术平均值作为最后测量结果。在不等精度测量中，各个测量结果的可靠程度不一样，因而不能简单地取各测量结果的算术平均值作为最后测量结果，应让可靠程度大的测量结果在最后结果中占的比重大一些，可靠程度小的占比重小一些。各测量结果的可靠程度可用一数值来表示，这个数值即称为该测量结果的“权”，记为 p。因此测量结果的权可理解为，当它与另一些测量结果比

802.40，802.50，802.38，802.48，802.42，802.46

求算术平均值及其极限误差。

算术平均值 $$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}l_i}{6}=\frac{\sum_{i=1}^{6}l_i}{6}=802.44$$

标准差 $$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}v_i^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{6}v_i^2}{6-1}}=0.047$$

$$\sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{0.047}{\sqrt{6}}=0.019$$

因测量次数较少，应按 t 分布计算算术平均值的极限误差。

已知 $\nu=n-1=5$

取 $\alpha=0.01$

则由附表 3 查得 $t_a=4.03$

故算术平均值的极限误差为

$$\delta_{\lim}\bar{x}=\pm t_a\sigma_{\bar{x}}=\pm 4.03\times 0.019=\pm 0.076$$

若按正态分布计算，取 $\alpha=0.01$，相应的置信概率 $P=1-\alpha=0.99$，由附表 1 查得 $t=2.60$，则得算术平均值的极限误差为

$$\delta_{\lim}\bar{x}=\pm t\sigma_{\bar{x}}=\pm 2.60\times 0.019=\pm 0.049$$

由此可见，当测量次数较少时，按两种分布计算的结果有明显差别。

六、不等精度测量

前面讲述的内容皆是等精度测量的问题，在一般测量实践中基本上都属这种类型。但为了得到更精确的测量结果，如在科学研究或高精度测量中，往往在不同的测量条件下，用不同的仪器、不同的测量方法、不同的测量次数以及不同的测量者进行测量与对比，这种测量称为不等精度测量。

在一般测量工作中，常遇到的不等精度测量有两种情况：

第一种情况，用不同测量次数进行对比测量。例如用同一台仪器测量某一参数，先后用 n_1 次和 n_2 次进行测量，分别求得算术平均值 $\bar{x}_1$ 和 $\bar{x}_2$。因为 $n_1\neq n_2$，显然 $\bar{x}_1$ 与 $\bar{x}_2$ 的精度不一样，如何求得最后的测量结果及其精度？

第二种情况，用不同精度的仪器进行对比测量。例如对于高精度或重要的测量任务，往往要用不同精度的仪器进行互比核对测量，显然所得到的结果不会相同，如何求得最后的测量结果及其精度？

对于不等精度测量，计算最后测量结果及其精度（如标准差），不能套用前面等精度测量的计算公式，需推导出新的计算公式。

（一）权的概念

在等精度测量中，各个测得值可认为同样可靠，并取所有测得值的算术平均值作为最后测量结果。在不等精度测量中，各个测量结果的可靠程度不一样，因而不能简单地取各测量结果的算术平均值作为最后测量结果，应让可靠程度大的测量结果在最后结果中占的比重大一些，可靠程度小的占比重小一些。各测量结果的可靠程度可用一数值来表示，这个数值即称为该测量结果的“权”，记为 p。因此测量结果的权可理解为，当它与另一些测量结果比

较时，对该测量结果所给予的信赖程度。

（二）权的确定方法

既然测量结果的权说明了测量的可靠程度，因此可根据这一原则来确定权的大小。例如可按测量条件的优劣、测量仪器和测量方法所能达到的精度高低、重复测量次数的多少以及测量者水平高低等来确定权的大小，也即测量方法越完善，测量精度越高，所得测量结果的权也应越大。在相同条件下，由不同水平的测量者用同一种测量方法和仪器对同一被测量进行测量，显然对于经验丰富的测量者所测得的结果应给予较大的权。

最简单的方法是按测量的次数来确定权，即测量条件和测量者水平皆相同，则重复测量次数越多，其可靠程度也越大，因此完全可由测量的次数来确定权的大小，即 $p_i = n_i$。

假定同一个被测量有 m 组不等精度的测量结果，这 m 组测量结果是从单次测量精度相同而测量次数不同的一系列测量值求得的算术平均值。因为单次测量精度皆相同，其标准差均为 σ，则各组算术平均值的标准差为

$$\sigma_{\bar{x}i} = \frac{\sigma}{\sqrt{n_i}} \qquad i = 1,\ 2,\ \cdots,\ m \tag{2-40}$$

由此可得

$$n_1\sigma_{\bar{x}1}^2 = n_2\sigma_{\bar{x}2}^2 = \cdots = n_m\sigma_{\bar{x}m}^2 = \sigma^2$$

因为 $p_i = n_i$，故上式又可写成

$$p_1\sigma_{\bar{x}1}^2 = p_2\sigma_{\bar{x}2}^2 = \cdots = p_m\sigma_{\bar{x}m}^2 = \sigma^2 \tag{2-41}$$

或表示为

$$p_1 : p_2 : \cdots : p_m = \frac{1}{\sigma_{\bar{x}1}^2} : \frac{1}{\sigma_{\bar{x}2}^2} : \cdots : \frac{1}{\sigma_{\bar{x}m}^2} \tag{2-42}$$

由此可得出结论：每组测量结果的权与其相应的标准差平方成反比，若已知各组算术平均值的标准差，则可按式（2-42）确定相应权的大小。测量结果的权的数值只表示各组间的相对可靠程度，它是一个无量纲的数，允许各组的权数乘以相同的系数，使其以相同倍数增大或减小，而各组间的比例关系保持不变，但通常皆将各组的权数予以约简，使其中最小的权数为不可再约简的整数，以便用简单的数值来表示各组的权。

例 2-10 对一级钢卷尺的长度进行了三组不等精度测量，其结果为

$$\bar{x}_1 = 2000.45\text{mm},\ \sigma_{\bar{x}1} = 0.05\text{mm}$$
$$\bar{x}_2 = 2000.15\text{mm},\ \sigma_{\bar{x}2} = 0.20\text{mm}$$
$$\bar{x}_3 = 2000.60\text{mm},\ \sigma_{\bar{x}3} = 0.10\text{mm}$$

求各测量结果的权。

由式（2-42）得

$$p_1 : p_2 : p_3 = \frac{1}{\sigma_{\bar{x}1}^2} : \frac{1}{\sigma_{\bar{x}2}^2} : \frac{1}{\sigma_{\bar{x}3}^2} = \frac{1}{(0.05)^2} : \frac{1}{(0.20)^2} : \frac{1}{(0.10)^2} = 16 : 1 : 4$$

因此各组的权可取为

$$p_1 = 16,\ p_2 = 1,\ p_3 = 4$$

（三）加权算术平均值

若对同一被测量进行 m 组不等精度测量，得到 m 个测量结果 $\bar{x}_1$，$\bar{x}_2$，$\cdots$，$\bar{x}_m$，设相应的测量次数为 n_1，n_2，$\cdots$，n_m，即

$$\bar{x}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} l_1^i}{n_1}, \quad \bar{x}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_2} l_2^i}{n_2}, \quad \cdots, \quad \bar{x}_m = \frac{\sum_{i=1}^{n_m} l_m^i}{n_m} \tag{2-43}$$

根据等精度测量算术平均值原理，全部测量的算术平均值 $\bar{x}$ 应为

$$\bar{x} = \left[\sum_{i=1}^{n_1} l_1^i + \sum_{i=1}^{n_2} l_2^i + \cdots + \sum_{i=1}^{n_m} l_m^i \right] \Big/ \sum_{i=1}^{m} n_i$$

将式（2-43）代入上式得

$$\bar{x} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2 + \cdots + n_m\bar{x}_m}{n_1 + n_2 + \cdots + n_m} = \frac{p_1\bar{x}_1 + p_2\bar{x}_2 + \cdots + p_m\bar{x}_m}{p_1 + p_2 + \cdots + p_m}$$

或简写成

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{m} p_i\bar{x}_i}{\sum_{i=1}^{m} p_i} \tag{2-44}$$

当各组的权相等，即 $p_1 = p_2 = \cdots = p_m = p$ 时，加权算术平均值可简化为

$$\bar{x} = \frac{p\sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i}{mp} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i}{m} \tag{2-45}$$

由式（2-45）求得的结果即为等精度的算术平均值，由此可知等精度测量是不等精度测量的特殊情况。

为简化计算，加权算术平均值可用下式表示：

$$\bar{x} = x_0 + \frac{\sum_{i=1}^{m} p_i(\bar{x}_i - x_0)}{\sum_{i=1}^{m} p_i} \tag{2-46}$$

式中的 x_0 为接近 $\bar{x}_i$ 的任选参考值。

例 2-11 工作基准米尺在连续三天内与国家基准器比较，得到工作基准米尺的平均长度为 999.9425mm（三次测量的）、999.9416mm（两次测量的）、999.9419mm（五次测量的），每单次测量均为等精度测量，求最后测量结果。

按测量次数来确定权：$p_1 = 3$，$p_2 = 2$，$p_3 = 5$。选取 $x_0 = 999.94\text{mm}$，则有

$$\bar{x} = 999.94\text{mm} + \frac{3 \times 0.0025 + 2 \times 0.0016 + 5 \times 0.0019}{3 + 2 + 5}\text{mm} = 999.9420\text{mm}$$

例 2-12 用 A、B 两种仪器对 5V 稳压芯片的输出电压进行两次测量，测量结果分别为 5.005V（标准差为 0.006V）、5.002V（标准差为 0.008V），求该输出电压的最佳估计值。

用两种仪器进行的两次测量构成了不等精度测量列，两次测量分别测得稳压芯片的输出电压为

$$U_A = 5.005\text{V}, \quad \sigma_A = 0.006\text{V}; \quad U_B = 5.002\text{V}, \quad \sigma_B = 0.008\text{V}。$$

按测量结果的标准差来确定两个测量值的权，得

$$p_A : p_B = \frac{1}{\sigma_A^2} : \frac{1}{\sigma_B^2} = \frac{1}{6^2} : \frac{1}{8^2} = 16 : 9$$

由此取两个测量值的权 $p_A = 16$，$p_B = 9$，则输出电压的最佳估计值 $\overline{U}$ 为

$$\overline{U}=\frac{U_A p_A+U_B p_B}{p_A+p_B}=\frac{5.005\times16+5.002\times9}{16+9}\mathrm{V}=5.004\mathrm{V}$$

（四）单位权概念

由式（2-41）知

$$p_i\sigma_{\bar{x}}^2=\sigma^2 \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$$

此式又可表示为

$$p_i\sigma_{\bar{x}i}^2=p\sigma^2\ （当\ p=1\ 时） \tag{2-47}$$

式中的 σ 为等精度单次测得值的标准差。由此可认为，具有同一方差 σ^2 的等精度单次测得值的权数为 1。若已知方差 σ^2，只要确定各组的权 p_i，就可按式（2-47）分别求得各组的方差 $\sigma_{\bar{x}i}^2$。由于测得值的方差 σ^2 的权数为 1 在此有特殊用途，故特称等于 1 的权为单位权，而 σ^2 为具有单位权的测得值方差，σ 为具有单位权的测得值标准差。

在不等精度测量中，各个测量结果的精度不等，权数也不相同，不能应用等精度测量的计算公式。有时为了计算需要，可将不等精度测量列转化为等精度测量列，这样就可用等精度测量的计算公式来处理不等精度测量结果。所采用的方法是使权数不同的不等精度测量列转化为具有单位权的等精度测量列，即所谓的单位权化。

单位权化的实质是使任何一个量值乘以自身权数的平方根，得到新的量值权数为 1。若将不等精度测量的各组测量结果 $\bar{x}_i$ 皆乘以自身权数的平方根 $\sqrt{p_i}$，此时得到的新值 z 的权数就为 1。证明如下：

设

$$z=\sqrt{p_i}\bar{x}_i \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$$

取方差

$$D(z)=p_iD(\bar{x}_i)$$

$$\sigma_z{}^2=p_i\sigma_{\bar{x}i}^2$$

前面已知各组测量结果的权数与相应的方差成反比，若用权数来表示上式中的方差，则有

$$\frac{1}{p_z}=p_i\frac{1}{p_i}=1$$

故得

$$p_z=1$$

由此可知，单位权化以后得到的新值 z 的权数 p_z 为 1。用这种方法可将不等精度的各组测量结果皆进行单位权化，使该测量列转化为等精度测量列。

（五）加权算术平均值的标准差

对同一被测量进行 m 组不等精度测量，得到 m 个测量结果 $\bar{x}_1$，$\bar{x}_2$，$\cdots$，$\bar{x}_m$，若已知单位权测得值的标准差 σ，则由式（2-40）知

$$\sigma_{\bar{x}_i}=\frac{\sigma}{\sqrt{n_i}} \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$$

而全部（$m\times n$ 个）测得值的算术平均值 $\bar{x}$ 的标准差为

$$\sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n_1+n_2+\cdots+n_m}}=\frac{\sigma}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m}n_i}}$$

比较上面两式得

$$\sigma_{\bar{x}}=\sigma_{\bar{x}_i}\sqrt{\frac{n_i}{\sum_{i=1}^{m}n_i}} \tag{2-48}$$

因为

$$p_i=n_i,\ \sum_{i=1}^{m}p_i=\sum_{i=1}^{m}n_i$$

代入式（2-48）得

$$\sigma_{\bar{x}}=\sigma_{\bar{x}_i}\sqrt{\frac{p_i}{\sum_{i=1}^{m}p_i}}=\frac{\sigma}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m}p_i}} \tag{2-49}$$

由式（2-49）可知，当各组测量的总权数 $\sum_{i=1}^{m}p_i$ 为已知时，可由任一组的标准差 $\sigma_{\bar{x}_i}$ 和相应的权 p_i，或者由单位权的标准差 σ 求得加权算术平均值的标准差 $\sigma_{\bar{x}}$。

当各组测量结果的标准差为未知时，则不能直接应用式（2-49），而必须由各测量结果的残余误差来计算加权算术平均值的标准差。

已知各组测量结果的残余误差为

$$v_{\bar{x}_i}=\bar{x}_i-\bar{x}$$

将各组 $\bar{x}_i$ 单位权化，则有

$$\sqrt{p_i}v_{\bar{x}_i}=\sqrt{p_i}\bar{x}_i-\sqrt{p_i}\bar{x}$$

因为上式中各组新值$\sqrt{p_i}\bar{x}_i$ 已为等精度测量列的测量结果，相应的$\sqrt{p_i}v_{\bar{x}_i}$也成为等精度测量列的残余误差，则可用$\sqrt{p_i}v_{\bar{x}_i}$代替 v_i 代入等精度测量的公式（2-18），得到

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m}p_i v_{\bar{x}_i}^2}{m-1}} \tag{2-50}$$

再将式（2-50）代入式（2-49）得

$$\sigma_{\bar{x}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m}p_i v_{\bar{x}_i}^2}{(m-1)\sum_{i=1}^{m}p_i}} \tag{2-51}$$

用式（2-51）可由各组测量结果的残余误差求得加权算术平均值的标准差，但必须指出，只有当组数 m 足够多时，才能得到较为精确的 $\sigma_{\bar{x}}$ 值，一般情况下的组数较少，只能得到近似的估计值。

例 2-13 求例 2-11 的加权算术平均值的标准差。

由加权算术平均值 $\bar{x}=999.9420\text{mm}$，可得各组测量结果的残余误差为

$$v_{\bar{x}_1}=+0.5\mu\text{m},\ v_{\bar{x}_2}=-0.4\mu\text{m},\ v_{\bar{x}_3}=-0.1\mu\text{m}$$

已知 $m=3,\ p_1=3,\ p_2=2,\ p_3=5$

代入式（2-51）得

$$\sigma_{\bar{x}}=\sqrt{\frac{3\times0.5^2+2\times(-0.4)^2+5\times(-0.1)^2}{(3-1)\times(3+2+5)}}\mu\text{m}=\sqrt{\frac{1.12}{20}}\mu\text{m}$$
$$=0.24\mu\text{m}\approx0.0002\text{mm}$$

例 2-14 求例 2-12 的加权算术平均值的标准差。

按照例 2-12 中两个测量值选取的权 $p_A=16$ 和 $p_B=9$，以及测量结果 5.005V 的标准差 $\sigma_A=0.006\text{V}$，将其代入式（2-49），可得加权算术平均值 $\overline{V}$ 的标准差为

$$\sigma_{\bar{V}} = \sigma_{A}\sqrt{\frac{p_A}{\sum_{i=1}^{2}p_i}} = 0.006\sqrt{\frac{16}{16+9}}\mathrm{V} = 0.0048\mathrm{V} \approx 0.005\mathrm{V}$$

七、随机误差的其他分布

正态分布是随机误差最普遍的一种分布规律，但不是唯一的分布规律。随着误差理论研究与应用的深入发展，发现有不少随机误差不符合正态分布，而是非正态分布，其实际分布规律可能是较为复杂的，现将其中几种常见的非正态分布及本书用到的几种统计量随机变量分布规律作简要介绍。

（一）均匀分布

在测量实践中，均匀分布是经常遇到的一种分布，其主要特点是，误差有一确定的范围，在此范围内，误差出现的概率各处相等，故又称为矩形分布或等概率分布。例如仪器度盘刻度误差所引起的误差；仪器传动机构的空程误差；大地测量中基线尺受滑轮摩擦力影响的长度误差；数字式仪器在 ±1 单位以内不能分辨的误差；数据计算中的舍入误差等，均为均匀分布误差。

例如，任何一页 7 位对数表，取出一个对数，将它舍入到第五位，则得到两位数字的舍入误差。对 100 个对数进行舍入，将所得舍入误差按区间分布，得表 2-7。表中误差以对数第七位为单位，并将误差分为 4 组，每组 25 个误差。

表 2-7

分类 \ 误差个数 \ 分组	按对数表舍入误差大小				
	1 ~ 25	26 ~ 50	51 ~ 75	76 ~ 100	总　和
按符号分					
零误差	0	0	0	1	1
正误差	14	12	12	12	50
负误差	11	13	13	12	49
共　计	25	25	25	25	100
按绝对值分					
由 0 ~ 10	5	9	9	5	28
由 11 ~ 20	3	5	2	5	15
由 21 ~ 30	9	3	3	2	17
由 31 ~ 40	4	3	6	6	19
由 41 ~ 50	4	5	5	7	21
共　计	25	25	25	25	100
误差平均值	+2.8	+3.0	−2.8	−2.4	+0.14

由表 2-7 可见，数值大的误差和数值小的误差出现的次数接近相等，正误差和负误差出现的次数也接近相等。如果试验次数很大，就会发现大误差和小误差以及正误差和负误差出现的概率相等，故舍入误差服从均匀分布。

由表中还可看出，舍入误差具有抵偿的规律，即误差的算术平均值随着试验次数的增大而趋于零。