

相近,从而确定相关系数的近似值。

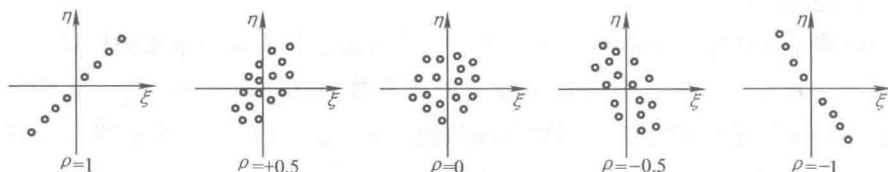


图 3-3

(2) 简单算法

将多组测量的对应值 (ξ_i, η_i) 在平面坐标上作图 (见图 3-4), 然后作平行于纵轴的直线 A 将点阵左右均分, 再作平行于横轴的直线 B 将点阵上下均分, 并尽量使 A 、 B 线上无点, 于是将点阵分为 4 部分, 设各部分的点数分别为 n_1 、 n_2 、 n_3 、 n_4 , 则可以证明相关系数为

$$\rho \approx -\cos \left[\frac{n_1 + n_3}{\sum n} \pi \right] \quad (3-25)$$

式中, $\sum n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$ 。

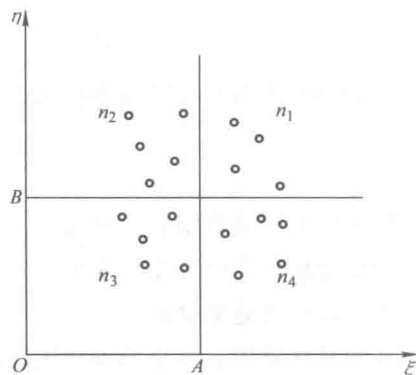


图 3-4

(3) 直接算法

根据多组测量的对应值 (ξ_i, η_i) , 按相关系数的定义直接计算得

$$\rho = \frac{\sum (\xi_i - \bar{\xi}) (\eta_i - \bar{\eta})}{\sqrt{\sum (\xi_i - \bar{\xi})^2 \sum (\eta_i - \bar{\eta})^2}} \quad (3-26)$$

式中, $\bar{\xi}$ 、 $\bar{\eta}$ 分别为 ξ_i 、 η_i 的均值。

3. 理论算法

有些误差间的相关系数, 可根据概率论和最小二乘法直接求出。

如果求得两个误差 ξ 与 η 间为线性相关, 即 $\xi = a\eta + b$, 则相关系数为

$$\rho = \begin{cases} +1, & a > 0 \\ -1, & a < 0 \end{cases} \quad (3-27)$$

以上讨论了误差之间相关系数的各种求法, 根据具体情况可采用不同的方法。一般先在理论上探求, 若达不到目的, 对于数值小或一般性的误差间的相关系数则可用直观判断法; 对于数值大或重要的误差间的相关系数宜采用多组成对观测, 并分别情况采用不同的计算方法。

第二节 随机误差的合成

随机误差具有随机性, 其取值是不可预知的, 并用测量的标准差或极限误差来表征其取值的分散程度。随机误差的合成是采用方和根的方法, 同时还要考虑到各个误差传递系数和

误差间的相关性影响。

一、标准差的合成

全面分析测量过程中影响测量结果的各个误差因素，若有 q 个单项随机误差，它们的标准差分别为 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_q$ ，其相应的误差传递系数为 a_1, a_2, \dots, a_q 。这些误差传递系数是由测量的具体情况来确定的，例如对间接测量可按式 (3-13) 来求得，对直接测量则根据各个误差因素对测量结果的影响情况来确定。

根据方和根的运算方法，各个标准差合成后的总标准差为

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^q (a_i \sigma_i)^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j}^q \rho_{ij} a_i a_j \sigma_i \sigma_j} \quad (3-28)$$

一般情况下各个误差互不相关，相关系数 $\rho_{ij} = 0$ ，则有

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^q (a_i \sigma_i)^2} \quad (3-29)$$

用标准差合成有明显的优点，不仅简单方便，而且无论各单项随机误差的概率分布如何，只要给出各个标准差，均可按式 (3-28) 或式 (3-29) 计算总的标准差。

二、极限误差的合成

在测量实践中，各个单项随机误差和测量结果的总误差也常以极限误差的形式来表示，因此极限误差的合成也较常见。

用极限误差来表示随机误差，有明确的概率意义。极限误差合成时，各单项极限误差应取同一置信概率。若已知各单项极限误差为^① $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_q$ ，且置信概率相同，则按方和根法合成的总极限误差为

$$\delta = \pm \sqrt{\sum_{i=1}^q (a_i \delta_i)^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j}^q \rho_{ij} a_i a_j \delta_i \delta_j} \quad (3-30)$$

式中， a_i 为各极限误差传递系数； ρ_{ij} 为任意两误差间的相关系数。

一般情况下，已知的各单项极限误差的置信概率可能不相同，不能按式 (3-30) 进行极限误差合成。应根据各单项误差的分布情况，引入置信系数，先将误差转换为标准差，再按极限误差合成。

对单项极限误差为

$$\delta_i = \pm t_i \sigma_i \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (3-31)$$

式中， σ_i 为各单项随机误差的标准差； t_i 为各单项极限误差的置信系数。

对总的极限误差为

$$\delta = \pm t \sigma \quad (3-32)$$

式中， σ 为合成后的总标准差； t 为合成后总极限误差的置信系数。

将式 (3-28) 代入式 (3-32) 得

$$\delta = \pm t \sqrt{\sum_{i=1}^q (a_i \sigma_i)^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j}^q \rho_{ij} a_i a_j \sigma_i \sigma_j} \quad (3-33)$$

① 为简单起见，本章后面均用符号 δ 表示极限误差 δ_{lim} 。

根据式 (3-31), 则可得一般的极限误差合成公式为

$$\delta = \pm t \sqrt{\sum_{i=1}^q \left(\frac{a_i \delta_i}{t_i} \right)^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j}^q \rho_{ij} a_i a_j \frac{\delta_i}{t_i} \frac{\delta_j}{t_j}} \quad (3-34)$$

根据已知的各单项极限误差和所选取的各个置信系数, 即可按式 (3-34) 进行极限误差的合成。但必须注意, 式 (3-34) 中的各个置信系数, 不仅与置信概率有关, 而且与随机误差的分布有关。也就是说, 对于相同分布的误差, 选定相同的置信概率, 其相应的各个置信系数相同; 对于不同分布的误差, 即使选定相同的置信概率, 其相应的各个置信系数也不相同。由此可知, 式 (3-34) 中的置信系数 t_1, t_2, \dots, t_q , 一般来说并不相同。对合成后的总误差的置信系数 t , 当各单项误差的数目 q 较多时, 合成的总误差接近于正态分布, 因此可按正态分布来确定 t 值。

当各个单项随机误差均服从正态分布时, 式 (3-34) 中的各个置信系数完全相同, 即 $t_1 = t_2 = \dots = t_q = t$, 则式 (3-34) 可简化为

$$\delta = \pm \sqrt{\sum_{i=1}^q (a_i \delta_i)^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j}^q \rho_{ij} a_i a_j \delta_i \delta_j} \quad (3-35)$$

一般情况下, $\rho_{ij} = 0$, 则式 (3-35) 成为

$$\delta = \pm \sqrt{\sum_{i=1}^q (a_i \delta_i)^2} \quad (3-36)$$

式 (3-36) 具有十分简单的形式, 由于各单项误差大多服从正态分布或假设近似服从正态分布, 而且它们之间常是线性无关或近似线性无关, 因此式 (3-36) 是较为广泛使用的极限误差合成公式。

第三节 系统误差的合成

系统误差的大小是评定测量准确度高低的标志, 系统误差越大, 准确度越低; 反之, 准确度越高。

系统误差具有确定的变化规律, 不论其变化规律如何, 根据对系统误差的掌握程度, 可分为已定系统误差和未定系统误差。由于这两种系统误差的特征不同, 其合成方法也不相同。

一、已定系统误差的合成

已定系统误差是指误差大小和方向均已确切掌握了系统误差。在测量过程中, 若有 r 个单项已定系统误差, 其误差值分别为 $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_r$, 相应的误差传递系数为 a_1, a_2, \dots, a_r , 则按代数和法进行合成, 求得总的已定系统误差为

$$\Delta = \sum_{i=1}^r a_i \Delta_i \quad (3-37)$$

在实际测量中, 有不少已定系统误差在测量过程中均已消除, 由于某些原因未予消除的已定系统误差也只是有限的少数几项, 它们按代数和法合成后, 还可以从测量结果中修正, 故最后的测量结果中一般不再包含有已定系统误差。

二、未定系统误差的合成

未定系统误差在测量实践中较为常见,对于某些影响较小的已定系统误差,为简化计算,也可不对其进行误差修正,而将其作未定系统误差处理,因此未定系统误差的处理是测量结果处理的重要内容之一。

(一) 未定系统误差的特征及其评定

未定系统误差是指误差大小和方向未能确切掌握,或不必化费过多精力去掌握,而只能或只需估计出其不致超过某一极限范围 $\pm e_i$ 的系统误差。也就是说,在一定条件下客观存在的某一系统误差,一定是落在所估计的误差区间 $(-e_i, e_i)$ 内的一个取值。当测量条件改变时,该系统误差又是误差区间 $(-e_i, e_i)$ 内的另一个取值。而当测量条件在某一范围内多次改变时,未定系统误差也随之改变,其相应的取值在误差区间 $(-e_i, e_i)$ 内服从某一概率分布。对于某一单项未定系统误差,其概率分布取决于该误差源变化时所引起的系统误差变化规律。理论上此概率分布是可知的,但实际上常常较难求。目前对未定系统误差的概率分布,均是根据测量实际情况的分析与判断来确定的,并采用两种假设:一种是按正态分布处理;另一种是按均匀分布处理。但这两种假设,在理论上与实践上往往缺乏根据,因此对未定系统误差的概率分布尚属有待于作进一步研究的问题。对于某一单项未定系统误差的极限范围,是根据该误差源具体情况的分析与判断而作出估计的,其估计结果是否符合实际,往往取决于对误差源具体情况掌握程度以及测量人员的经验和判断能力。但对某些未定系统误差的极限范围是较容易确定的,例如在检定工作中,所使用的标准计量器具误差,它对检定结果的影响属未定系统误差,而此误差值一般是已知的。

未定系统误差在测量条件不变时有一恒定值,多次重复测量时其值固定不变,因而不具有抵偿性,利用多次重复测量取算术平均值的办法不能减小它对测量结果的影响,这是它与随机误差的重要差别。但是当测量条件改变时,由于未定系统误差的取值在某一极限范围内具有随机性,并且服从一定的概率分布,这些特征均与随机误差相同,因而评定它对测量结果的影响也应与随机误差相同,即采用标准差或极限误差来表征未定系统误差取值的分散程度。

现以质量的标准器具——砝码为例来说明未定系统误差特征及其评定。

在质量计量中,砝码的质量误差将直接带入测量结果。为了减小这项误差的影响,应对砝码质量进行检定,以便给出修正值。由于不可避免地存在砝码质量的检定误差,经修正后的砝码质量误差虽已大为减小,但仍有一定误差(即检定误差)影响质量的计量结果。对某一个砝码,一经检定完成,其修正值即已确定不变,由检定方法引入的误差也就被确定下来了,其值为检定方法极限误差范围内的一个随机取值。使用这一个砝码进行多次重复测量时,由检定方法引入的误差则为恒定值而不具有抵偿性。但这一误差的具体数值又未掌握,而只知其极限范围,因此属未定系统误差。对于同一质量的多个不同的砝码,相应的各个修正值的误差为某一极限范围内的随机取值,其分布规律直接反映了检定方法误差的分布。或者反之,检定方法误差的分布也就反映了各个砝码修正值的误差分布规律。若检定方法误差服从正态分布,则砝码修正值的误差也应服从正态分布,而且两者具有同样的标准差 u_i 。若

用极限误差来评定砵码修正值的误差, 则有[⊙] $e_i = \pm t_i u_i$ 。

从上述实例分析可以看出, 这种未定系统误差是较为普遍的。一般来说, 对一批量具、仪器和设备等在加工、装调或检定中, 随机因素带来的误差具有随机性。但对某一具体的量具、仪器和设备, 随机因素带来的误差却具有确定性, 实际误差为一恒定值。若尚未掌握这种误差的具体数值, 则这种误差属未定系统误差。

(二) 未定系统误差的合成

若测量过程中存在若干项未定系统误差, 应正确地将这些未定系统误差进行合成, 以求得最后结果。

由于未定系统误差的取值具有随机性, 并且服从一定的概率分布, 因而若干项未定系统误差综合作用时, 它们之间就具有一定的抵偿作用。这种抵偿作用与随机误差的抵偿作用相似, 因而未定系统误差的合成, 完全可以采用随机误差的合成公式, 这就给测量结果的处理带来很大方便。对于某一项误差, 当难以严格区分为随机误差或未定系统误差时, 因不论作哪一种误差处理, 最后总误差的合成结果均相同, 故可将该项误差任作一种误差来处理。

1. 标准差的合成

若测量过程中有 s 个单项未定系统误差, 它们的标准差分别为 u_1, u_2, \dots, u_s , 其相应的误差传递系数为 a_1, a_2, \dots, a_s , 则合成后未定系统误差的总标准差为

$$u = \sqrt{\sum_{i=1}^s (a_i u_i)^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j} \rho_{ij} a_i a_j u_i u_j} \quad (3-38)$$

当 $\rho_{ij}=0$ 时, 则有

$$u = \sqrt{\sum_{i=1}^s (a_i u_i)^2} \quad (3-39)$$

2. 极限误差的合成

因为各个单项未定系统误差的极限误差为

$$e_i = \pm t_i u_i \quad i = 1, 2, \dots, s \quad (3-40)$$

总的未定系统误差的极限误差为

$$e = \pm t u \quad (3-41)$$

则可得

$$e = \pm t \sqrt{\sum_{i=1}^s (a_i u_i)^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j} \rho_{ij} a_i a_j u_i u_j} \quad (3-42)$$

或

$$e = \pm t \sqrt{\sum_{i=1}^s \left(\frac{a_i e_i}{t_i} \right)^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j} \rho_{ij} a_i a_j \frac{e_i}{t_i} \frac{e_j}{t_j}} \quad (3-43)$$

当各个单项未定系统误差均服从正态分布, 且 $\rho_{ij}=0$ 时, 则式 (3-43) 可简化为

$$e = \pm \sqrt{\sum_{i=1}^s (a_i e_i)^2} \quad (3-44)$$

⊙ 为了与随机误差的极限误差符号相区别, 未定系统误差的极限误差用符号 e 表示, 而其标准差则用符号 u 表示; 式中右下角符 i 表示第 i 项未定系统误差。

第四节 系统误差与随机误差的合成

以上分别讨论了各种相同性质的误差合成问题,当测量过程中存在各种不同性质的多项系统误差与随机误差,应将其进行综合,以求得最后测量结果的总误差,并常用极限误差来表示,但有时也用标准差来表示。

一、按极限误差合成

若测量过程中有 r 个单项已定系统误差, s 个单项未定系统误差, q 个单项随机误差,它们的误差值或极限误差分别为

$$\begin{aligned}\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_r \\ e_1, e_2, \dots, e_s \\ \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_q\end{aligned}$$

为计算方便,设各个误差传递系数均为 1,则测量结果总的极限误差为

$$\Delta_{\text{总}} = \sum_{i=1}^r \Delta_i \pm t \sqrt{\sum_{i=1}^s \left(\frac{e_i}{t_i}\right)^2 + \sum_{i=1}^q \left(\frac{\delta_i}{t_i}\right)^2} + R \quad (3-45)$$

式中, R 为各个误差间协方差之和。

当各个误差均服从正态分布,且各个误差间互不相关时,则式 (3-45) 可简化为

$$\Delta_{\text{总}} = \sum_{i=1}^r \Delta_i \pm \sqrt{\sum_{i=1}^s e_i^2 + \sum_{i=1}^q \delta_i^2} \quad (3-46)$$

一般情况下,已定系统误差经修正后,测量结果总的极限误差就是总的未定系统误差与总的随机误差的方均根,即

$$\Delta_{\text{总}} = \pm \sqrt{\sum_{i=1}^s e_i^2 + \sum_{i=1}^q \delta_i^2} \quad (3-47)$$

由式 (3-46) 和式 (3-47) 可以看出,当多项未定系统误差和随机误差合成时,对某一项误差不论作哪一种误差处理,其最后合成结果均相同。但必须注意,对于单次测量,可直接按式 (3-47) 求得最后结果的总误差,但对多次重复测量,由于随机误差具有抵偿性,而系统误差则固定不变,因此总误差合成公式中的随机误差项应除以重复测量次数 n ,即测量结果平均值的总极限误差公式为

$$\Delta_{\text{总}} = \pm \sqrt{\sum_{i=1}^s e_i^2 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^q \delta_i^2} \quad (3-48)$$

由式 (3-48) 可知,在单次测量的总误差合成中,不需严格区分各个单项误差为未定系统误差或随机误差,而在多次重复测量的总误差合成中,则必须严格区分各个单项误差的性质。

二、按标准差合成

若用标准差来表示系统误差与随机误差的合成公式,则只需考虑未定系统误差与随机误差的合成问题。

若测量过程中有 s 个单项未定系统误差, q 个单项随机误差,它们的标准差分别为

$$u_1, u_2, \dots, u_s$$

$$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_q$$

为计算方便, 设各个误差传递系数均为 1, 则测量结果总的标准差为

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^s u_i^2 + \sum_{i=1}^q \sigma_i^2 + R} \quad (3-49)$$

式中, R 为各个误差间协方差之和。

当各个误差间互不相关时, 则式 (3-49) 可简化为

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^s u_i^2 + \sum_{i=1}^q \sigma_i^2} \quad (3-50)$$

与极限误差合成的理由相同, 对单次测量, 可直接按上式求得最后结果的总标准差, 但对 n 次重复测量, 测量结果平均值的总标准差公式则为

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^s u_i^2 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^q \sigma_i^2} \quad (3-51)$$

例 3-5 在万能工具显微镜上用影像法测量某一平面工件的长度共两次, 测得结果分别为 $l_1 = 50.026\text{mm}$, $l_2 = 50.025\text{mm}$, 已知工件的高度 $H = 80\text{mm}$, 求测量结果及其极限误差。

两次测量结果的平均值为

$$L_0 = \frac{1}{2}(l_1 + l_2) = \frac{1}{2}(50.026 + 50.025)\text{mm} = 50.0255\text{mm}$$

根据万工显光学刻线尺的刻度误差表, 查得在 50mm 位置的误差修正值 $\Delta = -0.0008\text{mm}$, 此项误差为已定系统误差, 应予修正, 则测量结果为

$$L = L_0 + \Delta = 50.0255\text{mm} - 0.0008\text{mm} = 50.0247\text{mm}$$

在万工显上用影像法测量平面工件尺寸, 由有关资料可查得, 其主要误差分析计算结果如下:

1. 随机误差

该项误差由读数误差和工件瞄准误差所引起, 其极限误差分别为①读数误差 $\delta_1 = \pm 0.8\mu\text{m}$; ②瞄准误差 $\delta_2 = \pm 1\mu\text{m}$ 。

2. 未定系统误差

该项误差由阿贝误差等所引起, 其极限误差分别为

1) 阿贝误差

$$e_1 = \pm \frac{HL}{4000} = \pm \frac{80 \times 50}{4000}\mu\text{m} = \pm 1\mu\text{m}$$

2) 光学刻尺刻度误差

$$e_2 = \pm \left(1 + \frac{L}{200}\right)\mu\text{m} = \pm \left(1 + \frac{50}{200}\right)\mu\text{m} = \pm 1.25\mu\text{m}$$

3) 温度误差

$$e_3 = \pm \frac{7L}{1000} = \pm \frac{7 \times 50}{1000}\mu\text{m} = \pm 0.35\mu\text{m}$$

4) 光学刻尺的检定误差

$$e_4 = \pm 0.5\mu\text{m}$$

上列各误差式中, L 为被测长度, H 为被测工件的测量面高出标准刻线尺刻线面的距

离，两者单位均为 mm，而求得的误差单位为 μm。

这 4 项误差在测量中都不具有抵偿性，也不随测量次数的增加而减小，故都属系统误差。但它们给出的数值只是一个范围，而不是确定的数值，因此它们又应属未定系统误差。

以上各项误差汇总如下表所示。

序号	误差因素	极限误差/μm		备 注
		随机误差	未定系统误差	
1	阿贝误差	—	±1	—
2	光学刻尺刻度误差	—	±1.25	加修正值时不计入总误差
3	温度误差	—	±0.35	—
4	读数误差	±0.8	—	—
5	瞄准误差	±1	—	—
6	光学刻尺检定误差	—	±0.5	不加修正值时不计入总误差

设各误差都服从正态分布且互不相关，则测量结果（两次测量的平均值）的极限误差为当未修正刻尺刻度误差时的极限误差

$$\delta = \pm \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \delta_i^2 + \sum_{j=1}^3 e_j^2} = \pm \sqrt{\frac{1}{2} (1^2 + 0.8^2) + (1^2 + 1.25^2 + 0.35^2)} \mu\text{m}$$
$$= \pm 1.87 \mu\text{m} \approx \pm 1.9 \mu\text{m}$$

因此测量结果应表示为

$$L_0 = (50.0255 \pm 0.0019) \text{ mm}$$

当已修正刻尺刻度误差时的极限误差

$$\delta = \pm \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \delta_i^2 + \sum_{j=1}^3 e_j^2} = \pm \sqrt{\frac{1}{2} (1^2 + 0.8^2) + (1^2 + 0.35^2 + 0.5^2)} \mu\text{m}$$
$$= \pm 1.48 \mu\text{m} \approx \pm 1.5 \mu\text{m}$$

则测量结果应表示为

$$L = (50.0247 \pm 0.0015) \text{ mm}$$

例 3-6 用 TC328B 型天平，配用三等标准砝码称一不锈钢球质量，一次称量得钢球质量 $M = 14.0040\text{g}$ ，求测量结果的标准差。

根据 TC328B 型天平的称量方法，其测量结果的主要误差分析计算结果如下：

1. 随机误差

天平示值变动性所引起的误差为随机误差。用多次重复称量同一球的质量，得天平的标准差为

$$\sigma_1 = 0.05\text{mg}$$

2. 未定系统误差

标准砝码误差和天平示值误差，在给定条件下为确定值，但又不知道具体误差数值，而只知道误差范围（或标准差），故这两项误差均属未定系统误差。

(1) 砝码误差

天平称量时所用的标准砝码有三个，即 10g 的一个，2g 的两个，它们的标准差分别为

$$u_{11} = 0.4\text{mg}$$

$$u_{12} = 0.2 \text{ mg}$$

故三个砝码组合使用时, 质量的标准差为

$$u_1 = \sqrt{u_{11}^2 + 2u_{12}^2} = \sqrt{0.4^2 + 2 \times 0.2^2} \text{ mg} \approx 0.5 \text{ mg}$$

(2) 天平示值误差

天平示值为 $100 \times 0.1 \text{ mg}$ 时, 最大误差为 $\pm 2 \times 0.1 \text{ mg}$, 称该球质量时, 示值为 $40 \times 0.1 \text{ mg}$, 且对应 3 倍标准差, 故该项标准差为

$$u_2 = 2 \times 0.1 \times \frac{40}{100} \times \frac{1}{3} \text{ mg} \approx 0.03 \text{ mg}$$

以上三项误差互不相关, 而且显然可知各个误差传递系数均为 1, 因此误差合成后可得到测量结果的总标准差为

$$\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{0.05^2 + 0.5^2 + 0.03^2} \text{ mg} \approx 0.5 \text{ mg}$$

则最后测量结果应表示为 (1 倍标准差)

$$M = 14.0040 \text{ g} \pm 0.0005 \text{ g}$$

第五节 误差分配

前面已述, 任何测量过程皆包含有多项误差, 而测量结果的总误差则由各单项误差的综合影响所确定。现在要研究一个新的课题, 即给定测量结果总误差的允差, 要求确定各个单项误差。在进行测量工作前, 应根据给定测量总误差的允差来选择测量方案, 合理进行误差分配, 确定各单项误差, 以保证测量精度。例如前述的弓高弦长法测量大直径 D , 若已给定直径测量的允许极限误差 δ_D , 要求确定弓高 h 和弦长 s 的测量极限误差 δ_h 及 δ_s 应为多少, 这就是误差分配问题。

误差分配应考虑测量过程中所有误差组成项的分配问题。为便于说明误差分配原理, 这里只研究间接测量的函数误差分配, 但其基本原理也适用于一般测量的误差分配。

对于函数的已定系统误差, 可用修正方法来消除, 不必考虑各个测量值已定系统误差的影响, 而只需研究随机误差和未定系统误差的分配问题。根据式 (3-47) 和式 (3-50), 这两种误差在误差合成时可同等看待, 因此在误差分配时也可同等看待, 其误差分配方法完全相同。

现设各误差因素皆为随机误差, 且互不相关, 由式 (3-14) 可得

$$\begin{aligned} \sigma_y &= \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_2^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \sigma_n^2} = \sqrt{a_1^2 \sigma_1^2 + a_2^2 \sigma_2^2 + \cdots + a_n^2 \sigma_n^2} \\ &= \sqrt{D_1^2 + D_2^2 + \cdots + D_n^2} \end{aligned} \quad (3-52)$$

式中, D_i 为函数的部分误差, $D_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \sigma_i = a_i \sigma_i$ 。

若已给定 σ_y , 需确定 D_i 或相应的 σ_i , 使满足

$$\sigma_y \geq \sqrt{D_1^2 + D_2^2 + \cdots + D_n^2} \quad (3-53)$$

显然, 式中 D_i 可以是任意值, 为不确定解, 因此一般需按下列步骤求解。

一、按等作用原则分配误差

等作用原则认为各个部分误差对函数误差的影响相等, 即