对称法是消除线性系统误差的有效方法，见图 2-19。随着时间的变化，被测量作线性增加，若选定某时刻为中点，则对称此点的系统误差算术平均值皆相等。即

$$\frac{\Delta l_1+\Delta l_5}{2}=\frac{\Delta l_2+\Delta l_4}{2}=\Delta l_3$$

利用这一特点，可将测量对称安排，取各对称点两次读数的算术平均值作为测得值，即可消除线性系统误差。

例如检定量块平面平行性时（见图 2-20），先以标准量块 A 的中心 0 点对零，然后按图中所示被检量块 B 上的顺序逐点检定，再按相反顺序进行检定，取正反两次读数的平均值作为各点的测得值，就可消除因温度变化而产生的线性系统误差。

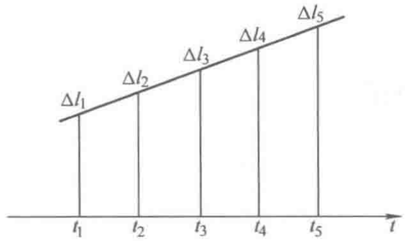

图 2-19

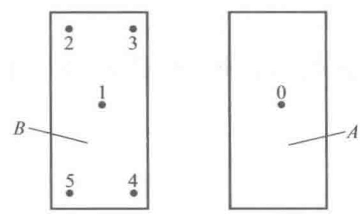

图 2-20

对称法可以有效地消除随时间变化而产生的线性系统误差。很多误差都随时间变化，而在短时间内均可认为是线性规律。有时，按复杂规律变化的误差，也可近似地作为线性误差处理，因此，在一切有条件的场合，均宜采用对称法消除系统误差。

（五）周期性系统误差消除法——半周期法

对周期性误差，可以相隔半个周期进行两次测量，取两次读数平均值，即可有效地消除周期性系统误差。

周期性系统误差一般可表示为

$$\Delta l=a\sin\varphi$$

设 $\varphi=\varphi_1$ 时，误差为

$$\Delta l_1=a\sin\varphi_1$$

当 $\varphi_2=\varphi_1+\pi$ 时，即相差半周期的误差为

$$\Delta l_2=a\sin(\varphi_1+\pi)=-a\sin\varphi_1=-\Delta l_1$$

取两次读数平均值则有

$$\frac{\Delta l_1+\Delta l_2}{2}=\frac{\Delta l_1-\Delta l_2}{2}=0$$

由此可知半周期法能消除周期性误差。

例如仪器度盘安装偏心，测微表指针回转中心与刻度盘中心有偏心等引起的周期性误差，皆可用半周期法予以消除。

第三节　粗 大 误 差

粗大误差的数值比较大，它会对测量结果产生明显的歪曲，一旦发现含有粗大误差的测量值，应将其从测量结果中剔除。

一、粗大误差的产生原因

产生粗大误差的原因是多方面的，大致可归纳为以下两方面。

1. 测量人员的主观原因

由于测量者工作责任感不强，工作过于疲劳或者缺乏经验操作不当，或在测量时不小心、不耐心、不仔细等，从而造成了错误的读数或错误的记录，这是产生粗大误差的主要原因。

2. 客观外界条件的原因

由于测量条件意外地改变（如机械冲击、外界振动等），从而引起仪器示值或被测对象位置的改变而产生粗大误差。

二、防止与消除粗大误差的方法

对粗大误差，除了设法从测量结果中发现和鉴别而加以剔除外，更重要的是要加强测量者的工作责任心和以严格的科学态度对待测量工作；此外，还要保证测量条件的稳定，或者应避免在外界条件发生激烈变化时进行测量。若能达到以上要求，一般情况下是可以防止粗大误差产生的。

在某些情况下，为了及时发现与防止测得值中含有粗大误差，可采用不等精度测量和互相之间进行校核的方法。例如，对某一被测值，可由两位测量者进行测量、读数和记录；或者用两种不同仪器、或两种不同方法进行测量（如测量薄壁圆筒内径，可通过直接测量内径或测量外径和壁厚，再经过计算求得内径，两者作互相校验）。

三、判别粗大误差的准则

在判别某个测得值是否含有粗大误差时，要特别慎重，应作充分的分析和研究，并根据判别准则予以确定。通常用来判别粗大误差的准则有

（一）3σ 准则（莱以特准则）

3σ 准则是最常用也是最简单的判别粗大误差的准则，它是以测量次数充分大为前提，但通常测量次数皆较少，因此 3σ 准则只是一个近似的准则。

对于某一测量列，若各测得值只含有随机误差，则根据随机误差的正态分布规律，其残余误差落在 $\pm 3\sigma$ 以外的概率约为 0.3%，即在 370 次测量中只有一次其残余误差 $|v_i| > 3\sigma$。如果在测量列中，发现有大于 3σ 的残余误差的测得值，即

$$|v_i| > 3\sigma \tag{2-90}$$

则可以认为它含有粗大误差，应予剔除。

例 2-20 对某量进行 15 次等精度测量，测得值如表 2-11 所列，设这些测得值已消除了系统误差，试判别该测量列中是否含有粗大误差的测得值。

表 2-11

序号	l	v	v^2	v'	v'^2
1	20.42	+0.016	0.000256	+0.009	0.000081
2	20.43	+0.026	0.000676	+0.019	0.000361
3	20.40	−0.004	0.000016	−0.011	0.000121
4	20.43	+0.026	0.000676	+0.019	0.000361
5	20.42	+0.016	0.000256	+0.009	0.000081

（续）

序　号	l	v	v^2	v'	v'^2
6	20.43	+0.026	0.000676	+0.019	0.000361
7	20.39	−0.014	0.000196	−0.021	0.000441
8	20.30	−0.104	0.010816	—	—
9	20.40	−0.004	0.000016	−0.011	0.000121
10	20.43	+0.026	0.000676	+0.019	0.000361
11	20.42	+0.016	0.000256	+0.009	0.000081
12	20.41	+0.006	0.000036	−0.001	0.000001
13	20.39	−0.014	0.000196	−0.021	0.000441
14	20.39	−0.014	0.000196	−0.021	0.000441
15	20.40	−0.004	0.000016	−0.011	0.000121
	$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{15} l_i}{n}=20.404$	$\sum_{i=1}^{15} v_i=0$	$\sum_{i=1}^{15} v_i^2=0.0150$		$\sum_{i=1}^{15} v_i'^2=0.00337$

由表 2-11 可得

$$\bar{x}=20.404$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{0.0150}{14}}=0.033$$

$$3\sigma=3\times0.033=0.099$$

根据 3σ 准则，第八（即表 2-11 中序号 8）测得值的残余误差

$$|v_8|=0.104>0.099$$

即它含有粗大误差，故将此测得值剔除。再根据表 2-11 中剩下的 14 个测得值重新计算，得

$$\bar{x}'=20.411$$

$$\sigma'=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i'^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{0.00337}{13}}=0.016$$

$$3\sigma'=3\times0.016=0.048$$

由表 2-11 知，表中剩下的 14 个测得值的残余误差均满足

$$|v_i'|<3\sigma'$$

故可认为这些测得值不再含有粗大误差。

（二）罗曼诺夫斯基准则

当测量次数较少时，按 t 分布的实际误差分布范围来判别粗大误差较为合理。罗曼诺夫斯基准则又称 t 检验准则，其特点是首先剔除一个可疑的测得值，然后按 t 分布检验被剔除的测量值是否含有粗大误差。

设对某量作多次等精度独立测量，得

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$$

若认为测量值 x_j 为可疑数据，将其剔除后计算平均值为（计算时不包括 x_j）

$$\bar{x}=\frac{1}{n-1}\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}x_i$$

并求得测量列的标准差（计算时不包括 $v_j=x_j-\bar{x}$）

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}v_i^2}{n-2}}$$

根据测量次数 n 和选取的显著度 α，即可由表 2-12 查得 t 分布的检验系数 $K(n，\alpha)$。若

$$|x_j-\bar{x}|>K\sigma \tag{2-91}$$

则认为测量值 x_j 含有粗大误差，剔除 x_j 是正确的，否则认为 x_j 不含有粗大误差，应予保留。

表 2-12

n \ K \ α	0.05	0.01	n \ K \ α	0.05	0.01	n \ K \ α	0.05	0.01
4	4.97	11.46	13	2.29	3.23	22	2.14	2.91
5	3.56	6.53	14	2.26	3.17	23	2.13	2.90
6	3.04	5.04	15	2.24	3.12	24	2.12	2.88
7	2.78	4.36	16	2.22	3.08	25	2.11	2.86
8	2.62	3.96	17	2.20	3.04	26	2.10	2.85
9	2.51	3.71	18	2.18	3.01	27	2.10	2.84
10	2.43	3.54	19	2.17	3.00	28	2.09	2.83
11	2.37	3.41	20	2.16	2.95	29	2.09	2.82
12	2.33	3.31	21	2.15	2.93	30	2.08	2.81

例 2-21 试判别例 2-20 中是否含有粗大误差。

首先怀疑第八测得值含有粗大误差，将其剔除。然后根据表 2-11 中剩下的 14 个测量值计算平均值和标准差，得

$$\bar{x}=20.411$$
$$\sigma=0.016$$

选取显著度 $\alpha=0.05$，已知 $n=15$，查表 2-12 得

$$K(15，0.05)=2.24$$

则

$$K\sigma=2.24\times0.016=0.036$$

因

$$|x_8-\bar{x}|=|20.30-20.411|=0.111>0.036$$

故第八测量值含有粗大误差，应予剔除。

然后对表 2-11 中剩下的 14 个测得值进行判别，可知这些测得值不再含有粗大误差。

（三）格罗布斯准则

设对某量作多次等精度独立测量，得

$$x_1，x_2，\cdots，x_n$$

当 x_i 服从正态分布时，计算是

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x$$

$$v_i = x_i - \bar{x}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum v^2}{n-1}}$$

为了检验 $x_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 中是否存在粗大误差，将 x_i 按大小顺序排列成顺序统计量 $x_{(i)}$，而

$$x_{(1)} \leqslant x_{(2)} \leqslant \cdots \leqslant x_{(n)}$$

格罗布斯导出了 $g_{(n)} = \frac{x_{(n)} - \bar{x}}{\sigma}$ 及 $g_{(1)} = \frac{\bar{x} - x_{(1)}}{\sigma}$ 的分布，取定显著度 α（一般为 0.05 或 0.01），可得如表 2-13 所列的临界值 $g_0(n,\alpha)$，而

$$P\left(\frac{x_{(n)} - \bar{x}}{\sigma} \geqslant g_0(n, \alpha)\right) = \alpha$$

及

$$P\left(\frac{\bar{x} - x_{(1)}}{\sigma} \geqslant g_0(n, \alpha)\right) = \alpha$$

表 2-13

n	α 0.05	α 0.01	n	α 0.05	α 0.01
	$g_0(n,\alpha)$			$g_0(n,\alpha)$	
3	1.15	1.16	17	2.48	2.78
4	1.46	1.49	18	2.50	2.82
5	1.67	1.75	19	2.53	2.85
6	1.82	1.94	20	2.56	2.88
7	1.94	2.10	21	2.58	2.91
8	2.03	2.22	22	2.60	2.94
9	2.11	2.32	23	2.62	2.96
10	2.18	2.41	24	2.64	2.99
11	2.23	2.48	25	2.66	3.01
12	2.28	2.55	30	2.74	3.10
13	2.33	2.61	35	2.81	3.18
14	2.37	2.66	40	2.87	3.24
15	2.41	2.70	50	2.96	3.34
16	2.44	2.75	100	3.17	3.59

若认为 $x_{(1)}$ 可疑，则有

$$g_{(1)} = \frac{\bar{x} - x_{(1)}}{\sigma}$$

若认为 $x_{(n)}$ 可疑，则有

$$g_{(n)} = \frac{x_{(n)} - \bar{x}}{\sigma}$$

当

$$g_{(i)} \geqslant g_0\ (n,\ \alpha) \tag{2-92}$$

即判别该测得值含有粗大误差，应予剔除。

例 2-22 用例 2-20 测得值，试判别该测量列中的测得值是否含有粗大误差。

由表 2-11 计算得

$$\bar{x} = 20.404$$

$$\sigma = 0.033$$

按测得值的大小，顺序排列得

$$x_{(1)} = 20.30,\ x_{(15)} = 20.43$$

今有两测得值 $x_{(1)}$、$x_{(15)}$ 可怀疑，但由于

$$\bar{x} - x_{(1)} = 20.404 - 20.30 = 0.104$$

$$x_{(15)} - \bar{x} = 20.43 - 20.404 = 0.026$$

故应先怀疑 $x_{(1)}$ 是否含有粗大误差

计算 $$g_{(1)} = \frac{20.404 - 20.30}{0.033} = 3.15$$

查表 2-13 得 $$g_0(15,\ 0.05) = 2.41$$

则 $$g_{(1)} = 3.15 > g_0(15,\ 0.05) = 2.41$$

故表 2-11 中第八个测得值 x_8 含有粗大误差，应予剔除。

对表 2-11 中剩下 14 个数据，再重复上述步骤，判别 $x_{(15)}$ 是否含有粗大误差。

计算 $$\bar{x}' = 20.411 \quad \sigma' = 0.016$$

$$g_{(15)} = \frac{20.43 - 20.411}{0.016} = 1.18$$

查表 2-13 得 $$g_0\ (14,\ 0.05)\ = 2.37$$

$$g_{(15)} = 1.18 < g_0\ (14,\ 0.05)\ = 2.37$$

故可判别 $x_{(15)}$ 不包含粗大误差，而各 $g_{(i)}$ 皆小于 1.18，故可认为其余测得值也不含粗大误差。

（四）狄克松准则

前面三种粗大误差判别准则均需先求出标准差 σ，在实际工作中比较麻烦，而狄克松准则避免了这一缺点。它是用极差比的方法，得到简化而严密的结果。

狄克松研究了 x_1，x_2，…，x_n 的顺序统计量 $x_{(i)}$ 的分布，当 x_i 服从正态分布时，得到 $x_{(n)}$ 的统计量

$$\left.\begin{aligned}
r_{10} &= \frac{x_{(n)} - x_{(n-1)}}{x_{(n)} - x_{(1)}} \\
r_{11} &= \frac{x_{(n)} - x_{(n-1)}}{x_{(n)} - x_{(2)}} \\
r_{21} &= \frac{x_{(n)} - x_{(n-2)}}{x_{(n)} - x_{(2)}} \\
r_{22} &= \frac{x_{(n)} - x_{(n-2)}}{x_{(n)} - x_{(3)}}
\end{aligned}\right\} \tag{2-93}$$

的分布，选定显著度 α，得到各统计量的临界值 $r_0(n,\alpha)$（见表 2-14），当测量的统计值 r_{ij} 大于临界值，则认为 $x_{(n)}$ 含有粗大误差。

表 2-14

统计量	n	α		统计量	n	α	
		0.01	0.05			0.01	0.05
		$r_0(n,\alpha)$				$r_0(n,\alpha)$	
$r_{10}=\dfrac{x_{(n)}-x_{(n-1)}}{x_{(n)}-x_{(1)}}$ $\left(r_{10}=\dfrac{x_{(1)}-x_{(2)}}{x_{(1)}-x_{(n)}}\right)$	3	0.988	0.341	$r_{22}=\dfrac{x_{(n)}-x_{(n-2)}}{x_{(n)}-x_{(3)}}$ $\left(r_{22}=\dfrac{x_{(n)}-x_{(3)}}{x_{(1)}-x_{(n-2)}}\right)$	15	0.616	0.525
	4	0.889	0.765		16	0.595	0.507
	5	0.780	0.642		17	0.577	0.490
	6	0.698	0.560		18	0.561	0.475
	7	0.637	0.507		19	0.547	0.462
$r_{11}=\dfrac{x_{(n)}-x_{(n-1)}}{x_{(n)}-x_{(2)}}$ $\left(r_{11}=\dfrac{x_{(1)}-x_{(2)}}{x_{(1)}-x_{(n-1)}}\right)$	8	0.683	0.554		20	0.535	0.450
	9	0.635	0.512		21	0.524	0.440
	10	0.597	0.477		22	0.514	0.430
$r_{21}=\dfrac{x_{(n)}-x_{(n-2)}}{x_{(n)}-x_{(2)}}$ $\left(r_{21}=\dfrac{x_{(n)}-x_{(3)}}{x_{(1)}-x_{(n-1)}}\right)$	11	0.679	0.576		23	0.505	0.421
	12	0.642	0.546		24	0.497	0.413
	13	0.615	0.521		25	0.489	0.406
	14	0.641	0.546				

对最小值 $x_{(1)}$ 用同样的临界值进行检验，即有

$$\left.\begin{aligned} r_{10}&=\frac{x_{(1)}-x_{(2)}}{x_{(1)}-x_{(n)}}\\ r_{11}&=\frac{x_{(1)}-x_{(2)}}{x_{(1)}-x_{(n-1)}}\\ r_{21}&=\frac{x_{(1)}-x_{(3)}}{x_{(1)}-x_{(n-1)}}\\ r_{22}&=\frac{x_{(1)}-x_{(3)}}{x_{(1)}-x_{(n-2)}}\end{aligned}\right\} \tag{2-94}$$

为了剔除粗大误差，狄克松认为

$n\leqslant7$ 时，使用 r_{10} 效果好；

$8\leqslant n\leqslant10$ 时，使用 r_{11} 效果好；

$11\leqslant n\leqslant13$ 时，使用 r_{21} 效果好；

$n\geqslant14$ 时，使用 r_{22} 效果好。

例 2-23 同例 2-20 测量数据，将 x_i 排成如下表顺序量。

首先判断最大值 $x_{(15)}$。

因 $n=15$，故按式（2-93）计算统计量 r_{22}

x_i	顺序号 $x_{(i)}$	顺序号 $x'_{(i)}$	x_i	顺序号 $x_{(i)}$	顺序号 $x'_{(i)}$
20.30	1	—	20.42	9	8
20.39	2	1	20.42	10	9
20.39	3	2	20.42	11	10
20.39	4	3	20.43	12	11
20.40	5	4	20.43	13	12
20.40	6	5	20.43	14	13
20.40	7	6	20.43	15	14
20.41	8	7			

$$r_{22}=\frac{x_{(15)}-x_{(13)}}{x_{(15)}-x_{(3)}}=\frac{20.43-20.43}{20.43-20.39}=0$$

查表2-14得
$$r_0(15,\ 0.05)=0.525$$
则
$$r_{22}<r_0=0.525$$
故 $x_{(15)}$ 不含有粗大误差。

再判别最小值 $x_{(1)}$。

按式（2-94）计算统计量 r_{22}

$$r_{22}=\frac{x_{(1)}-x_{(3)}}{x_{(1)}-x_{(13)}}=\frac{20.30-20.39}{20.30-20.43}=0.692$$

因
$$r_{22}>r_0=0.525$$
故 $x_{(1)}$ 含有粗大误差，应予剔除。剩下 14 个数据，再重复上述步骤。对 $x'_{(14)}$，因 $n=14$，按式（2-94）计算 r_{22}

$$r_{22}=\frac{x'_{(14)}-x'_{(12)}}{x'_{(14)}-x'_{(3)}}=\frac{20.43-20.43}{20.43-20.39}=0$$

查表2-14得
$$r_0(14,\ 0.05)=0.546$$
则
$$r_{22}<r_0=0.546$$
故 $x'_{(14)}$ 不含有粗大误差。

对 $x'_{(1)}$，按式（2-94）计算 r_{22}

$$r_{22}=\frac{x'_{(1)}-x'_{(3)}}{x'_{(1)}-x'_{(12)}}=\frac{20.39-20.39}{20.39-20.43}=0$$

显然 $r_{22}<r_0$，故 $x_{(1)}$ 不含有粗大误差。

上面介绍4种粗大误差的判别准则，其中 3σ 准则适用测量次数较多的测量列，一般情况的测量次数皆较少，因而这种判别准则的可靠性不高，但它使用简便，不需查表，故在要求不高时经常应用。对测量次数较少而要求较高的测量列，应采用罗曼诺夫斯基准则、格罗布斯准则或狄克松准则等，其中以格罗布斯准则的可靠性最高，通常测量次数 $n=20\sim100$，其判别效果较好。当测量次数很小时，可采用罗曼诺夫斯基准则。若需要从测量列中迅速判别含有粗大误差的测得值，则可采用狄克松准则。

必须指出，按上述准则若判别出测量列中有两个以上测得值含有粗大误差，此时只能首先剔除含有最大误差的测得值，然后重新计算测量列的算术平均值及其标准差，再对余下的测得值进行判别，依此程序逐步剔除，直至所有测得值皆不含粗大误差时为止。

第四节 测量结果的数据处理实例

对某量进行等精度或不等精度直接测量，为了得到合理的测量结果，应按前述误差理论对各种误差进行分析处理，现以实例分别说明等精度直接测量和不等精度直接测量的测量结果数据处理方法与步骤。

一、等精度直接测量列测量结果的数据处理实例

例 2-24 对某一轴径等精度测量 9 次，得到下表数据，求测量结果。

序 号	l_i/mm	v_i/mm	v_i^2/mm^2
1	24.774	−0.001	0.000001
2	24.778	+0.003	0.000009
3	24.771	−0.004	0.000016
4	24.780	+0.005	0.000025
5	24.772	−0.003	0.000009
6	24.777	+0.002	0.000004
7	24.773	−0.002	0.000004
8	24.775	0	0
9	24.774	−0.001	0.000001
	$\sum_{i=1}^{9} l_i = 222.974\text{mm}$ $\bar{x} = 24.775\text{mm}$	$\sum_{i=1}^{9} v_i = -0.001\text{mm}$	$\sum_{i=1}^{9} v_i^2 = 0.000069\text{mm}^2$

假定该测量列不存在固定的系统误差，则可按下列步骤求测量结果。

1. 求算术平均值

根据式（2-8）求得测量列的算术平均值 $\bar{x}$ 为

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} l_i}{n} = \frac{222.974}{9}\text{mm} = 24.7749\text{mm} \approx 24.775\text{mm}$$

2. 求残余误差

根据式（2-9）求各测得值的残余误差 $v_i = l_i - \bar{x}$，并列入表中。

3. 校核算术平均值及其残余误差

根据残余误差代数和校核规则，现用规则 2 进行校核，因

$$A = 0.001\text{mm}, \quad n = 9$$

由上表知

$$\left|\sum_{i=1}^{9} v_i\right| = 0.001\text{mm} < \left(\frac{n}{2} - 0.5\right)A = 4 \times 0.001\text{mm} = 0.004\text{mm}$$

故以上计算正确。若发现计算有误，应重新进行上述计算和校核。

4. 判断系统误差

根据残余误差观察法，由上表可以看出误差符号大体上正负相同，且无显著变化规律，因此可判断该测量列无变化的系统误差存在。

若按残余误差校核法，因 $n=9$，则

$$K=\frac{n+1}{2}=5$$

$$\Delta=\sum_{i=1}^{5}v_i-\sum_{i=6}^{9}v_i=[0-(-0.001)]\mathrm{mm}=0.001\mathrm{mm}$$

因差值 Δ 较小，故也可判断该测量列无系统误差存在。

5. 求测量列单次测量的标准差

根据贝塞尔公式（2-8）或别捷尔斯公式（2-26），求得测量列单次测量的标准差 σ 为

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}v_i^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{0.000069}{8}\mathrm{mm}^2}=0.0029\mathrm{mm}$$

$$\sigma'=1.253\frac{\sum_{i=1}^{n}|v_i|}{\sqrt{n(n-1)}}=1.253\times\frac{0.021}{\sqrt{9\times8}}\ \mathrm{mm}=0.0031\mathrm{mm}$$

用两种方法计算的标准差比值为

$$\frac{\sigma'}{\sigma}=\frac{0.0031}{0.0029}=1.069=1+u$$

$$u=0.069$$

因
$$|u|=0.069<\frac{2}{\sqrt{n-1}}=\frac{2}{\sqrt{8}}\approx0.707$$

故同样可判断该测量列无系统误差存在。

6. 判别粗大误差

根据 3σ 判别准则的适用特点，本实例测量轴径的次数较少，因而不采用 3σ 准则来判别粗大误差。

若按格罗布斯判别准则，将测得值按大小顺序排列后有

$$x_{(1)}=24.771\mathrm{mm}\qquad x_{(9)}=24.780\mathrm{mm}$$

$$\bar{x}-x_{(1)}=24.775\mathrm{mm}-24.771\mathrm{mm}=0.004\mathrm{mm}$$

$$x_{(9)}-\bar{x}=24.780\mathrm{mm}-24.775\mathrm{mm}=0.005\mathrm{mm}$$

首先判别 $x_{(9)}$ 是否含有粗大误差：

$$g_{(9)}=\frac{24.780-24.775}{0.0029}=1.72$$

查表 2-13 得
$$g_0(9,0.05)=2.11$$

因
$$g_{(9)}=1.70<g_0=2.11,\ 且\ g_{(1)}<g_{(9)}$$

故可判别测量列不存在粗大误差。

若发现测量列存在粗大误差，应将含有粗大误差的测得值剔除，然后再按上述步骤重新计算，直至所有测得值皆不包含粗大误差时为止。

7. 求算术平均值的标准差

根据式（2-21）计算 $\sigma_{\bar{x}}$ 得

$$\sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{0.0029}{\sqrt{9}}\mathrm{mm}\approx0.001\mathrm{mm}$$

8. 求算术平均值的极限误差

因为测量列的测量次数较少，算术平均值的极限误差按 t 分布计算。

已知 $\nu=n-1=8$，取 $\alpha=0.05$，查附表3得

$$t_a=2.31$$

根据式（2-39）求得算术平均值的极限误差 $\delta_{\lim}\bar{x}$ 为

$$\delta_{\lim}\bar{x}=\pm t_a\sigma_{\bar{x}}=\pm 2.31\times 0.001\text{mm}=\pm 0.0023\text{mm}$$

9. 写出最后测量结果

最后测量结果通常用算术平均值及其极限误差来表示，即

$$L=\bar{x}+\delta_{\lim}\bar{x}=(24.775\pm 0.0023)\text{mm}$$

二、不等精度直接测量列测量结果的数据处理实例

例 2-25 对某一角度进行6组不等精度测量，各组的单次测量均为等精度测量，其测量结果如下：

测6次得 $\alpha_1=75°18'06''$，　测30次得 $\alpha_2=75°18'10''$

测24次得 $\alpha_3=75°18'08''$，　测12次得 $\alpha_4=75°18'16''$

测12次得 $\alpha_5=75°18'13''$，　测36次得 $\alpha_6=75°18'09''$

求最后测量结果。

假定各组测量结果不存在系统误差和粗大误差，则可按下列步骤求最后测量结果。

1. 求加权算术平均值

首先根据测量次数确定各组的权，因为各单次测量为等精度测量，则有

$$p_1:p_2:p_3:p_4:p_5:p_6=1:5:4:2:2:6$$

取

$$p_1=1,\ p_2=5,\ p_3=4,\ p_4=2,\ p_5=2,\ p_6=6$$

$$\sum_{i=1}^{6}p_i=20$$

再根据式（2-46）求加权算术平均值 $\bar{\alpha}$，选取参考值 $\alpha_0=75°18'06''$，则可得

$$\bar{\alpha}=\alpha_0+\frac{\sum_{i=1}^{6}p_i(\alpha_i-\alpha_0)}{\sum_{i=1}^{6}p_i}=75°18'06''+\frac{1\times 0''+5\times 4''+4\times 2''+2\times 10''+2\times 7''+6\times 3''}{20}$$

$$=75°18'06''+4''=75°18'10''$$

2. 求残余误差并进行校核

由公式 $v_i=\alpha_i-\bar{\alpha}$ 得

$$v_1=-4'',\ v_2=0,\quad v_3=-2''$$

$$v_4=6'',\quad v_5=3'',\quad v_6=-1''$$

用加权残余误差代数和等于零来校核加权算术平均值及其残余误差的计算是否正确，即

$$\sum_{i=1}^{m}p_iv_i=0$$

因

$$\sum_{i=1}^{6}p_iv_i=-4''-8''+12''+6''-6''=0$$

故计算正确。

3. 求加权算术平均值的标准差

根据式（2-51）求得加权算术平均值的标准差 $\sigma_{\bar{x}}$ 为

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m} p_i v_i^2}{(m-1)\sum_{i=1}^{m} p_i}}$$

$$= \sqrt{\frac{1\times(4'')^2 + 5\times 0'' + 4\times(2'')^2 + 2\times(6'')^2 + 2\times(3'')^2 + 6\times(1'')^2}{(6-1)\times 20}}$$

$$= \sqrt{\frac{128('')^2}{5\times 20}} = 1.1''$$

4. 求加权算术平均值的极限误差

因为该角度进行 6 组测量共有 120 个直接测得值，可认为该测量列服从正态分布，取置信系数 $t=3$，则最后结果的极限误差为

$$\delta_{\lim}\bar{x} = \pm 3\sigma_{\bar{x}} = \pm 3\times 1.1'' = \pm 3.3''$$

5. 写出最后测量结果

$$\alpha = \bar{\alpha} + \delta_{\lim}\bar{x} = 75°18'10'' \pm 3.3''$$

例 2-26 电子电量 e 与质量 m 比值 e/m 的两次观测结果为 $x_1 \pm \sigma_1 = 1.75080 \pm 0.00042$ 和 $x_2 \pm \sigma_2 = 1.75059 \pm 0.00036$（单位：$10^{11}$ C/kg）。两次观测结果不存在系统误差和粗大误差，求最后的测量结果。

因不存在系统误差和粗大误差，则可按下列步骤求最后测量结果。

1. 求加权算术平均值

首先根据两次测量的标准差求各次测量的权，有

$$p_1 : p_2 = \frac{1}{\sigma_1^2} : \frac{1}{\sigma_2^2} = \frac{1}{0.00042^2} : \frac{1}{0.00036^2} = 36 : 49$$

取

$$p_1 = 36,\quad p_2 = 49$$

再根据式（2-44）求加权算术平均值 $\bar{x}$，则可得

$$\bar{x} = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2}{p_1 + p_2} = \frac{1.75080\times 36 + 1.75059\times 49}{36+49}\times 10^{11}\,\mathrm{C/kg} = 1.75068\times 10^{11}\,\mathrm{C/kg}$$

2. 求残余误差并进行校核

由公式 $v_i = x_i - \bar{x}$ 得

$$v_1 = 0.00012\times 10^{11}\,\mathrm{C/kg},\quad v_2 = -0.00009\times 10^{11}\,\mathrm{C/kg}$$

用加权残余误差代数和等于求加权 $\bar{x}$ 时的余数来检验，即

$$\sum_{i=1}^{2} p_i v_i = 36\times 0.00012\,\mathrm{C/kg} + 49\times(-0.00009)\,\mathrm{C/kg} = -0.00009\,\mathrm{C/kg}$$

$$\begin{aligned} & x_1 p_1 + x_2 p_2 - (p_1 + p_2)\bar{x} \\ &= (1.75080\times 36 + 1.75059\times 49)\,\mathrm{C/kg} - (36+49)\times 1.75068\,\mathrm{C/kg} \\ &= -0.00009\,\mathrm{C/kg} \end{aligned}$$

3. 求加权算术平均值的标准差

根据式（2-49）求得加权算术平均值 $\bar{x}$ 的标准差 $\sigma_{\bar{x}}$ 为

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma_{x_i}\sqrt{\frac{p_i}{\sum_{i=1}^{2} p_i}} = \sigma_{x1}\sqrt{\frac{p_1}{p_1 + p_2}}$$

$$= 0.00042\sqrt{\frac{36}{36+49}} \times 10^{11}\mathrm{C/kg}$$

$$= 0.00027 \times 10^{11}\mathrm{C/kg}$$

4. 求加权算术平均值 $\bar{x}$ 的极限误差

若取置信系数 $t=3$，则最后的极限误差为

$$\delta_{\lim}\bar{x} = \pm 3\sigma_{\bar{x}} = \pm 0.00081 \times 10^{11}\mathrm{C/kg}$$

5. 写出最后测量结果

$$x = \bar{x} + \delta_{\lim}\bar{x} = (1.75068 \times 10^{11} \pm 0.00081 \times 10^{11})\mathrm{C/kg}$$

习　　题

2-1　试述标准差 σ、平均误差 θ 和或然误差 ρ 的几何意义。

2-2　试述单次测量的标准差 σ 和算术平均值的标准差 $\sigma_{\bar{x}}$，两者物理意义及实际用途有何不同？

2-3　试分别求出服从正态分布、反正弦分布、均匀分布误差落在 $[-\sqrt{2}\sigma, +\sqrt{2}\sigma]$ 中的概率。

2-4　测量某物体重量共 8 次，测得数据（单位为 g）为 236.45，236.37，236.51，236.34，236.39，236.48，236.47，236.40。试求算术平均值及其标准差。

2-5　用别捷尔斯法、极差法和最大误差法计算习题 2-4 的标准差，并比较之。

2-6　测量某电路电流共 5 次，测得数据（单位为 mA）为 168.41，168.54，168.59，168.40，168.50。试求算术平均值及其标准差、或然误差和平均误差。

2-7　在立式测长仪上测量某校对量具，重复测量 5 次，测得数据（单位为 mm）为 20.0015，20.0016，20.0018，20.0015，20.0011。若测量值服从正态分布，试以 99% 的置信概率确定测量结果。

2-8　对某工件进行 5 次测量，在排除系统误差的条件下，求得标准差 $\sigma = 0.005\mathrm{mm}$，若要求测量结果的置信概率 P 为 95%，试求其置信限。

2-9　用某仪器测量工件尺寸，在排除系统误差的条件下，其标准差 $\sigma = 0.004\mathrm{mm}$，若要求测量结果的置信限为 $\pm 0.005\mathrm{mm}$，当置信概率为 99% 时，试求必要的测量次数。

2-10　用某仪器测量工件尺寸，已知该仪器的标准差 $\sigma = 0.001\mathrm{mm}$，若要求测量的允许极限误差为 $\pm 0.0015\mathrm{mm}$，而置信概率 P 为 0.95 时，至少应测量多少次？

2-11　已知某仪器测量的标准差为 0.5μm。①若在该仪器上，对某一轴径测量一次，测得值为 26.2025mm，试写出测量结果；②若重复测量 10 次，测得值（单位为 mm）为 26.2025，26.2028，26.2028，26.2025，26.2026，26.2022，26.2023，26.2025，26.2026，26.2022，试写出测量结果；③若手头无该仪器测量的标准差值的资料，试由②中 10 次重复测量的测量值，写出上述①、②的测量结果。

2-12　某时某地由气压表得到的读数（单位为 Pa）为 102523.85，102391.30，102257.97，102124.65，101991.33，101858.01，101724.69，101591.36，其权各为 1，3，5，7，8，6，4，2，试求加权算术平均值及其标准差。

2-13　测量某角度共两次，测得值为 $\alpha_1 = 24°13'36''$，$\alpha_2 = 24°13'24''$，其标准差分别为 $\sigma_1 = 3.1''$，$\sigma_2 = 13.8''$，试求加权算术平均值及其标准差。

2-14　甲、乙两测试者用正弦尺对一锥体的锥角 α 各重复测量 5 次，测得值如下：

$\alpha_{甲}$：7°2′20″，7°3′0″，7°2′35″，7°2′20″，7°2′15″；

$\alpha_{乙}$：7°2′25″，7°2′25″，7°2′20″，7°2′50″，7°2′45″；

试求其测量结果。

2-15　试证明 n 个相等精度测得值的平均值的权为 n 乘以任一个测量值的权。

2-16　对某重力加速度作两组测量，第一组测量具有平均值为 9.811m/s^2、其标准差为 0.014m/s^2。第二组测量具有平均值为 9.802m/s^2，其标准差为 0.022m/s^2。假设这两组测量属于同一正态总体。试求此两组测量的平均值和标准差。

2-17　对某量进行 10 次测量，测得数据为 14.7，15.0，15.2，14.8，15.5，14.6，14.9，14.8，15.1，15.0，试判断该测量列中是否存在系统误差。

2-18　对一线圈电感测量 10 次，前 4 次是和一个标准线圈比较得到的，后 6 次是和另一个标准线圈比较得到的，测得结果如下（单位为 mH）：

50.82，50.83，50.87，50.89；

50.78，50.78，50.75，50.85，50.82，50.81。

试判断前 4 次与后 6 次测量中是否存在系统误差。

2-19　等精度测得某一电压 10 次，测得结果（单位为 V）为 25.94，25.97，25.98，26.01，26.04，26.02，26.04，25.98，25.96，26.07。测量完毕后，发现测量装置有接触松动现象，为判明是否因接触不良而引入系统误差，将接触改善后，又重新作了 10 次等精度测量，测得结果（单位为 V）为 25.93，25.94，25.98，26.02，26.01，25.90，25.93，26.04，25.94，26.02。试用 t 检验法（取 $\alpha=0.05$）判断两组测量值之间是否有系统误差。

2-20　对某量进行 12 次测量，测得数据为 20.06，20.07，20.06，20.08，20.10，20.12，20.11，20.14，20.18，20.18，20.21，20.19，试用两种方法判断该测量列中是否存在系统误差。

2-21　对某量进行两组测量，测得数据如下：

x_i	0.62	0.86	1.13	1.13	1.16	1.18	1.20	1.21	1.22	1.26	1.30	1.34	1.39	1.41	1.57
y_i	0.99	1.12	1.21	1.25	1.31	1.31	1.38	1.41	1.48	1.50	1.59	1.60	1.60	1.84	1.95

试用秩和检验法判断两组测量值之间是否有系统误差。

2-22　对某量进行 15 次测量，测得数据为 28.53，28.52，28.50，29.52，28.53，28.53，28.50，28.49，28.49，28.51，28.53，28.52，28.49，28.40，28.50，若这些测得值已消除系统误差，试用莱以特准则、格罗布斯准则和狄克松准则分别判别该测量列中是否含有粗大误差的测量值。

2-23　对某一个电阻进行 200 次测量，测得结果列表如下：

测得电阻值 R/Ω	1220	1219	1218	1217	1216	1215	1214	1213	1212	1211	1210
该电阻值出现次数	1	3	8	21	43	54	40	19	9	1	1

① 绘出测量结果的统计直方图，由此可得到什么结论？

② 求测量结果并写出表达式。

③ 写出测量误差概率分布密度函数式。

2-24　用秒表测量榴弹引信的自毁时间，进行两组测试以求得自毁时间，第一组测量次数 $n_1=6$，第二组测量次数 $n_2=8$。已知每一次测量的标准差均为 σ_0，求每一组测量的权为多少？

2-25　测量雨滴中带有电荷 x 的概率分布密度函数为（式中 C 为常数）$f(x)=\frac{C}{2}e^{-C|x|}$，求其标准差？

2-26　对某被测量 x 进行间接测量得：$2x=1.44$，$3x=2.18$，$4x=2.90$，其权分别为 5∶1∶1，试求 x 的测量结果及其标准差。

2-27　测量地磁水平强度 H_r 由下式计算：

$$H_r=\frac{k}{T\sqrt{\sin\nu}}$$

式中，T 为磁振动周期；ν 为磁倾角；k 为常数，$k=3$。

今测得 T、ν 值及其极限误差为 $T=(3.500\pm0.001)\mathrm{s}$，$\nu=25°0'\pm1'$，求 H_r 的极限误差为多少？

2-28　测量圆盘的直径 $D=(72.003\pm0.052)\mathrm{mm}$，按公式计算圆盘面积 $S=\pi D^2/4$，由于选取 π 的有效数字位数不同，将对面积 S 计算带来系统误差，为保证 S 的计算精度与直径测量精度相同，试确定 π 的有效数字位数。