误差理论与数据处理

习 题 集

误差理论与数据处理教学小组

目　录

第一章　绪　论

例　题

例 1　在万能测长仪上，测量某一被测件的长度为 50mm，已知其最大绝对误差为 1μm，试问该被测件的真实长度为多少？

解：$L = 50mm$　$\delta = 0.001mm$　故　$L_0 = L \pm \delta = 50.000 \pm 0.001mm$

例 2　用两种方法测量长度为 50mm 的被测件，分别测得 50.005mm；50.003mm。试评定两种方法测量精度的高低。

解：因对相同的被测量，可用绝对误差的大小来评定其两种测量方法之精度高低。绝对误差小者，其测量精度高。

第一种方法的绝对误差为：$\delta_1 = (50.005 - 50.000)mm = 0.005mm$

第二种方法的绝对误差为：$\delta_1 = (50.003 - 50.000)mm = 0.003mm$

∵　$\delta_2 < \delta_1$　故第二种方法的测量精度高。

例 3　若某一量值 Q 用乘积 ab 表示，而 a 与 b 是各自具有相对误差 f_a 和 f_b 的被测量，试求量值 Q 的相对误差。

解：∵　$相对误差 = \dfrac{绝对误差}{真\quad值} = \dfrac{测得值 - 真值}{真\quad值}$

∴　$a = a_0(1 + f_a)$　　$b = b_0(1 + f_b)$

式中 a_0、b_0 分别为 a、b 的真值。

则　$Q = ab = a_0(1 + f_a) \times b_0(1 + f_b) \approx a_0 b_0 (1 + f_a + f_b)$

因此，Q 的相对误差约为 $f_a + f_b$。

例 4　若某一测量值 Q 用 a 与 b 的商 a/b 表示，而 a 与 b 是各自具有相对误差 f_a 和 f_b 的被测量，试求量值 Q 的相对误差。

解：∵　$a = a_0(1 + f_a)$　　$b = b_0(1 + f_b)$

则
$$Q = \frac{a}{b} = \frac{a_0(1 + f_a)}{b_0(1 + f_b)} \approx \frac{a_0}{b_0}(1 + f_a + f_b)$$

因此，Q 的相对误差约为 $f_a + f_b$。

例 5　通过电阻 R 的电流 I 产生热量（单位 J）　$Q = I^2 Rt$　式中的 t 为通过电流的持续时间，已知 I 与 R 测量的相对误差为 1%，t 测量的相对误差为 5%，试求 Q 的相对误差。

解： $Q = I^2 Rt$，$\delta_Q = 2IRt\delta_I + I^2 t\delta_R + I^2 R\delta_t$，

$$\frac{\delta_Q}{Q} = 2\frac{\delta_I}{I} + \frac{\delta_R}{R} + \frac{\delta_t}{t} = 2\times1\% + 1\% + 5\% = 8\%$$

习　题

1-1　研究误差的意义是什么？误差理论研究的主要内容是什么？

1-2　什么叫测量误差？什么叫修正值？含有误差的某一测得值经过修正后，能否得到被测量的真值？为什么？

1-3　误差的绝对值与绝对误差是否相同？为什么？

1-4　测得某三角块的三个角度之和为 180°00′02″，试求测量的绝对误差和相对误差。

1-5　用量角器测得某角度样板的面角为 35°18′25″±10″，试求其相对误差。

1-6　用二等标准活塞压力计测量某压力得 100.2*Pa*，该压力用更准确的办法测得为 100.5*Pa*，问二等标准活塞压力计测量值的误差为多少？

1-7　在测量某一长度时，读数值为 2.31*m*，其最大绝对误差为 20*μm*，试求其最大相对误差。

1-8　测量某一矩形的两边长，其相对误差分别为 3%和 4%，试求矩形面积的相对误差为多少？

1-9　在满足欧姆定律的电路中，电流 I 由关系式 $I = E/R$ 来计算，其中 E 是电路的电动势，R 是电阻。试求由 E 和 R 的相对误差 f_E 和 f_R 引起的电流 I 的相对误差。

1-10　已知某电子管灯丝的电阻为 21*Ω*，电子管灯丝上的电压为 6.3*V*，若已知电阻绝对误差为±0.01*Ω*，电压绝对误差为±0.001*V*，试求流过电子管灯丝的电流及其绝对误差。

1-11　若 $y = x^2/\left(1+x^2\right)$，当（1）$x = 3,\ \delta_x = 0.1$；（2）$x = 2,\ \delta_x = 0.05$ 时，求 δ_y / y。

1-12　某量值 y 按被测量 x 表示为 $y = 4x - 2/x$，若 x 的相对误差为 1%时，y 的相对误差为多少？

1-13　由单摆公式 $g = 4\pi^2 l/T$ 计算 g 值，若 $l = l_0\left(1+f_l\right)$，$T = T_0(1+f_T)$，其中 f_l，f_T 分别为 l 和 T 的相对误差，试求 g 值的相对误差。

1-14　用一旋转粘度计测量某液体的动力粘度 η，所用圆柱的半径各为 a 和 b，今用力矩 M 转动圆柱，则有 $\eta = \dfrac{M}{4\pi\omega}\left(\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{b^2}\right)$，其中 ω 为转动角速度。若已知 $a = 0.04m$，$b = 0.05m$，两者最大测量误差为 0.0001*m*，且 M/ω 的误差可忽略不计。试求 η 的相对误差。

1-15　若 $y = \sin\left(2\omega t + a\right)$，当（1）$t = \pi/2\omega$，（2）$t = \pi/\omega$ 时，已知 t 的相对误差为 1%，试求 y 的相对误差，并求 y 的相对误差为最小时的 t 值。

1-16　若 $i = k\cdot tg\theta$，已知 θ 的测量误差为 δ，求当 i 的误差为最小及 i 的相对误差为最小时的 θ 值各为多少？

1-17　使用 *Kater*（凯特）摆时，g 由公式 $g = 4\pi^2\left(h_1 + h_2\right)/T^2$ 给定。今测出长度（*h*1+*h*2）为 1.04230±0. 00005*m*，振动时间 T 为 2. 0480±0. 0005*s*。试求 g 及其最大相对误差。如果（*h*1+*h*2）测出为 1. 04220±0.　00005*m*，为了使 g 的误差能小于 0. 001m/s^2，T 的测量必须

精确到多少？

1-18　在某种状态下，简支梁的弯曲公式为 $f = PL^3/48EI$。若弯曲量 f 的相对误差为±0.1%，梁的跨度 L 的相对误差为±0.05%，惯性矩 I 的相对误差为±0.1%时，试求弹性模量 E 的相对误差？

1-19　按焦耳定律测定电阻 R 在 t 时间内通过电流 I 时所发出的热量 $Q = I^2Rt$，今测得 $I = (4.0 \pm 0.1)A,\ R = (40.0 \pm 0.1)\Omega,\ t = (10.00 \pm 0.01)s$，试求热量 Q 的测量误差。

1-20　检定 2.5 级（即引用误差为 2.5%）的全量程为 100V 的电压表，发现 50V 刻度点的示值误差 2V 为最大误差，问该电压表是否合格？

1-21　检定一只 3mA，2.5 级电流表的全量程（满刻度）误差，现有（1）10mA，0.5 级；（2）10mA，0.2 级；（3）15mA，0.2 级；（4）5mA，0.5 级标准电流表各一只，试问应选哪一只比较合理？为什么？

1-22　为什么在使用微安表等各种电表时，总希望指针在全量程的 2/3 范围内使用？

1-23　用两种方法测量 $L_1 = 50mm;\ L_2 = 80mm$。分别测得 50.004mm；80.006mm。试评定两种方法测量精度的高低。

1-24　多级弹道火箭的射程为 10000km 时，其射击偏离预定点不超过 0.1km；优秀射手能在距离 50m 远处准确地射中直径为 2cm 的靶心，试评述哪一个射击精度高？

1-25　若用两种测量方法测量某零件的长度 $L_1 = 110mm$，其测量误差分别为±11μm 和±9μm；而用第三种测量方法测量另一零件的长度 $L2 = 150mm$，其测量误差为±12μm，试比较三种测量方法精度的高低。

1-26　氢原子的质量等于 $(1.673 \pm 0.001) \times 10^{-27} kg$，而电子的质量等于 $(9.11 \pm 0.01) \times 10^{-31} kg$，试问这两个测量值哪一个更精确些？

1-27　用毫米钢尺测量某一被测件的长度为 80mm，其绝对误差为 0.5mm；又用一量角器测量另一被测件的角度为 90°，其绝对误差为 30′，试比较二者测量精度的高低。

1-28　通过将液体注入 U 形管来求液体密度为 ρ 的表面张力 γ，U 形管两端的半径分别为 r_1 和 r_2。两端高度差经测得为 h，γ 由公式 $\gamma(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}) = \frac{1}{2} g\rho h$ 计算。若 $h = 1.06cm$，$r_1 = 0.07cm,\ r_2 = 0.14cm$，而它们的测量误差都不大于 0.005$cm$ 时，试估计 γ 的相对误差。

1-29　若用测量范围为 0～25mm 的级千分尺（示值误差为±8μm）来测量某轴轴径，读数为 12.472mm，试写出测量结果。

1-30　什么叫系统误差？什么叫随机误差？试比较它们的异同点。

1-31　如何根据系统误差与随机误差相互转化的特性来减小测量结果的误差，并举例说明之。

1-32　若某一被测件和标准器进行比对的结果为 $D = 20.008mm$，现要求测量的准确度、精密度及精确度均高，下述哪一种方法测量结果符合要求？

（1）$D = 20.012 \pm 0.004mm$；（2）$D = 20.015 \pm 0.003mm$；

（3）$D = 20.015 \pm 0.002mm$；（4）$D = 20.005 \pm 0.002mm$。

第二章　误差的基本性质与处理

例　题

例 1　测量小轴直径共 10 次，得到一系列等精度测得值如下（单位 *mm*）：25.0360，25.0365，25.0362，25.0364，25.0367，25.0363，25.0366，25.0363，25.0366，25.0364。若已排除了系统误差的影响和剔除了粗大误差，试求其算术平均值及标准差，并写出测量结果。

解：　列表计算如下：

序号	D_i/mm	$V_i/\mu m$	$V_i^2/\mu m$
1	25.0360	-0.4	0.16
2	25.0365	+0.1	0.01
3	05.0362	-0.2	0.04
4	25.0364	0	0
5	25.0367	+0.3	0.09
6	25.0363	-0.1	0.01
7	25.0366	+0.2	0.04
8	25.0363	-0.1	0.01
9	25.0366	+0.2	0.04
10	25.0364	0	0
n=10	$\sum d_i = 250.364mm$	$\sum v_i = 0$	$\sum {v_i}^2 = 0.40\mu m^2$

算术平均值：

$$\overline{d} = \frac{\sum d_i}{n} = \frac{250.364}{10} mm = 25.0364mm$$

标准差，按贝塞尔公式：

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum \upsilon_i^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{0.4}{10-1}} \mu m \approx 0.21\mu m$$

算术平均值的标准差：

$$\sigma_{\overline{d}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \approx 0.07\mu m$$

测量结果为 $d = \overline{d} \pm 3\sigma_{\overline{d}} = 25.0364 \pm 0.0002mm$

例 2　对某一 1 等米尺，在 $20^\circ C$ 的条件下，进行不等精度测量，获得以下三组测量结果：

$$\overline{L}_1 = 1000.0045mm, \sigma_{\overline{L}_1} = 0.5\mu m$$

$$\overline{L}_2 = 1000.0055mm, \sigma_{\overline{L}_2} = 1.0\mu m$$

$$\overline{L}_3 = 1000.0015mm, \sigma_{\overline{L}_3} = 0.2\mu m$$

试求其最终测量结果。

解：已知各组标准差，即可确定各组的权：

$$
\begin{aligned}
& p_1 : p_2 : p_3 \\
& = \frac{1}{\sigma_{\bar{L}_1}^2} : \frac{1}{\sigma_{\bar{L}_2}^2} : \frac{1}{\sigma_{\bar{L}_3}^2} \\
& = \frac{1}{(0.5)^2} : \frac{1}{(1.0)^2} : \frac{1}{(0.2)^2} \\
& = 4:1:25
\end{aligned}
$$

加权算术平均值为

$$q_{(1)} = \frac{\overline{x}' - x_{(1)}}{\sigma'} = \frac{10.0005 - 10.0003}{0.00012} \approx 1.67$$

$$
\begin{aligned}
& \bar{L} = \left(1000.0015 + \frac{4 \times 0.0030 + 1 \times 0.0040}{4+1+25}\right) mm \\
& = 1000.0020 mm
\end{aligned}
$$

各组相应的残余误差为

$$
\begin{aligned}
& \upsilon_1 = \bar{L}_1 - \bar{L} = (1000.0045 - 1000.0020) mm \\
& = +0.0025 mm
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \upsilon_2 = \bar{L}_2 - \bar{L} = (1000.0055 - 1000.0020) mm \\
& = +0.0035 mm
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \upsilon_3 = \bar{L}_3 - \bar{L} = (1000.0015 - 1000.0020) mm \\
& = -0.0005 mm
\end{aligned}
$$

加权算术平均值的标准差为

$$
\begin{aligned}
& \sigma_{\bar{L}} = \sqrt{\frac{\sum p_i \upsilon^2}{(m-1)\sum p_i}} \\
& = \sqrt{\frac{4 \times (25)^2 + 1 \times (35)^2 + 25 \times (-5)^2}{(3-1)(4+1+25)}} \\
& = \sqrt{\frac{4350}{60}} = 0.0009 mm
\end{aligned}
$$

最终测量结果为

$$L_0 = \bar{L} \pm 3\sigma_{\bar{L}} = 1000.0020 \pm 0.0027 mm$$

例 3 对某一角度值，分两个测回进行测量，其权等于测量次数，测得值如下，

第一测回		第二测回	
α_i	p_i	α_i	p_i
34°56′	7	34°55′ 40″	3
		34°55′ 30″	2
		34°55′ 20″	1
34°54′	1	34°55′ 0″	1

		34º55′ 70″	1
		34º55′ 10″	1
34º55′	2	34º55′ 50″	1

试求该角度的最可信赖值及其标准差？

解：第一测回的加权平均值及标准差

$$\bar{\alpha}_1 = 34^\circ 54' + \frac{2' \times 7 + 1' \times 2}{7+1+2} = 34^\circ 55' 36''$$

$$\upsilon_1 = 24'', \upsilon_2 = -96'', \upsilon_3 = -36''$$

$$\sum p_i \upsilon_i^2 = 7 \times (24'')^2 + 1 \times (-96'')^2 + 2 \times (-36'')^2$$
$$= 15840 \times ('')^2$$

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{\sum p_i \upsilon_i^2}{m-1}} = \sqrt{\frac{15840}{3-1}}('') = 88.99''$$

$$\sigma_{\bar{\alpha}_1} = \frac{\alpha_1}{\sqrt{\sum p_i}} = 28.14''$$

第二测回的加权平均值及标准差

$$\bar{\alpha}_2 = 34^\circ 54' + \frac{40'' \times 3 + 30'' \times 2 + 20'' \times 1 + 70'' \times 1 + 10'' \times 1 + 50'' \times 1}{3+2+1+1+1+1+1}$$
$$= 34^\circ 55' 33''$$

$$\upsilon_1 = 7'', \upsilon_2 = -3'', \upsilon_3 = -13'', \upsilon_4 = -33'',$$
$$\upsilon_5 = -37'', \upsilon_6 = -23'', \upsilon_7 = -17''$$

$$\sigma_2 = \sqrt{\frac{\sum p_i \upsilon_i^2}{m-1}} = \sqrt{\frac{3610}{7-1}}('')^2 = 24.53''$$

$$\sigma_{\bar{\alpha}_2} = \frac{\alpha_2}{\sqrt{\sum p_i}} = 7.76''$$

两个测回的权比

$$p_1 : p_2 = \frac{1}{\sigma_{\bar{\alpha}_1}^2} : \frac{1}{\sigma_{\bar{\alpha}_2}^2} = \frac{1}{(28.14'')^2} : \frac{1}{(7.76'')^2} = 19 : 250$$

最可信赖值

$$\bar{\alpha} = 34^\circ 55'' + \frac{36'' \times 19 + 33'' \times 250}{19+250} = 34^\circ 55' 33.2''$$

$$\sigma_{\bar{\alpha}} = \sigma_{\bar{\alpha}_1} \sqrt{\frac{p_1}{p_1 + p_2}} = 28.14'' \sqrt{\frac{19}{269}} = 7.5''$$

或 $$\sigma_{\bar{\alpha}} = \sigma_{\bar{\alpha}_2}\sqrt{\frac{p_1}{p_1+p_2}} = 7.76''\sqrt{\frac{250}{269}} = 7.5''$$

例 4　在万能测长仪上测量某校对量具。重复测量 8 次，测得值（单位 mm）为 150.0015，150.0017，150.0016，150.0014，150.0013，150.0015，150.0016，150.0014。试分别以 99.73% 和 95%的概率确定测量结果

解：列表计算如下：

	x_i / mm	$\bar{x} / mm$	$\upsilon_i / \mu m$	$\upsilon_i^2 / \mu m^2$
1	150.0015	150.0015	0	0
2	150.0017		+0.2	0.04
3	150.0016		+0.1	0.01
4	150.0014		-0.2	0.04
5	150.0013		-0.1	0.01
6	150.0015		0	0
7	150.0016		+0.1	0.01
8	150.0014		-0.1	0.01
Σ	1200.0120mm		0	0.12 μm^2

$$\bar{x} = \sum_1^n x_i / n = 1200.0120/8 = 150.0015mm$$

$$\sigma = \sqrt{\sum_1^n \upsilon_i^2 / (n-1)} = \sqrt{\frac{0.12}{8-1}}\mu m \approx 0.13\mu m$$

因测量次数 n 较小，应按 t 分布。

置信概率为 99.73%时，　　$\alpha_1=0.0027$，$\nu_1=7$

置信概率为 95%时，　　$\alpha_2=0.05$，$\nu_2=7$

查 t 分布表得　　$t_{\alpha 1} = 4.53, t_{\alpha 2} = 2.36$

则算术平均值的极限误差为

$$\delta_{\lim \bar{x}_1} = t_{\alpha 1}\sigma/\sqrt{n} = \frac{4.53\times 0.13}{\sqrt{8}}\mu m \approx 0.21\mu m$$

$$\delta_{\lim \bar{x}_2} = t_{\alpha 2}\sigma/\sqrt{n} = \frac{2.36\times 0.13}{\sqrt{8}}\mu m \approx 0.11\mu m$$

最后测量结果为

$$\bar{x}_1 = 150.0015 \pm 0.0002mm$$
$$\bar{x}_2 = 150.0015 \pm 0.0001mm$$

例 5　在立式光学比较仪上鉴定 L_0=10mm 的量块。所用基准量块 4 等，其中心长度的实际偏差-0.1μm，检定的极限误差 $\delta_{\lim 1}$=±0.2μm。测量时恒温条件为 t=20±2°C。10 次重复测得值（单位μm）为+0.5，+0.7，+0.4，+0.5，+0.3，+0.6，+0.5，+0.6，+1.0，+0.4。试求此测量方法的极限误差，并写出最后结果。

序号	$\frac{x_i}{\mu m}$	$\frac{\upsilon_i}{\mu m}$	$\frac{\upsilon_i^2}{\mu m^2}$	$\frac{\upsilon_i'}{\mu m}$	$\frac{\upsilon_i'^2}{\mu m^2}$
1	+0.5	-0.05	0.0025	0	0
2	+0.7	+0.15	0.0225	+0.2	0.04
3	+0.4	-0.15	0.0225	-0.1	0.01
4	+0.5	-0.05	0.0025	0	0
5	+0.3	-0.25	0.0625	-0.2	0.04
6	+0.6	+0.05	0.0025	+0.1	0.01
7	+0.5	-0.05	0.0025	0	0
8	+0.6	+0.05	0.0025	+0.1	0.01
9	+1.0	+0.45	0.2025	—	—
10	+0.4	-0.15	0.0225	-0.1	0.01
n=10	$\sum x_i = 5.5\mu m$	$\sum \upsilon_i = 0$	$\sum \upsilon_i^2 = 0.345\mu m^2$	$\sum \upsilon_i' = 0$	$\sum \upsilon_i'^2 = 0.12\mu m^2$

解：按测量顺序，用表格记下测得数据。

（1） 求算术平均值

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \left(10 + \frac{0.0055}{10}\right)mm = 10.00055mm$$

（2） 求各测得值的残余误差

$$\upsilon_i = x_i - \bar{x}(\text{数据见上表})$$

（3） 求标准差

$$\sigma_{10} = \sqrt{\frac{\sum \upsilon_i^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{0.345}{10-1}}\mu m = \sqrt{\frac{0.345}{9}}\mu m \approx 0.2\mu m$$

（4） 判断有无粗大误差

1）按罗曼诺夫斯基准则，首先怀疑第 9 各测得值含有粗大误差，将其剔除，根据剩下的 9 个测得值计算算术平均值及标准差，得

$$\bar{x}_9 = 10.0005mm$$
$$\sigma_9 = 0.12\mu m$$

选取显著度 α =0.05，已知 n=10 查表得

$$k(10, 0.05) = 2.43$$

则 $$k\sigma_9 = 2.43 \times 0.00012 = 0.00029$$

因 $$|x_9 - \bar{x}| = |10.001 - 10.0005| = 0.0005 > 0.00029$$

故第 9 个测得值含有粗大误差，应予剔除。

剩下 9 个测得值，再重上述步骤，由判别可知不再含有粗大误差。

2） 按格罗布斯准则，按测得值的大小，顺序排列得

$$x_{(1)}=10.0003, x_{(2)}=10.0004, \cdots, x_{(9)}=10.0007, x_{(10)}=10.001$$

今有两测得值 $x_{(1)}, x_{(10)}$ 可怀疑，但由于

$$\bar{x}-x_{(1)}=10.00055-10.0003=0.00025$$
$$x_{(10)}-\bar{x}=10.001-10.00055=0.00045$$

故应先怀疑 $x_{(10)}$ 是否含有粗大误差

$$q_{(10)}=\frac{x_{(10)}-\bar{x}}{\sigma}=\frac{10.001-10.00055}{0.0002}=2.25$$

查表得 $$q_0(10,0.05)=2.18$$

则 $$q_{(10)}=2.25>q_0(10,0.05)=2.18$$

故表中第 9 个测得值含有粗大误差，应予剔除。

剩下 9 个测得值，再重复上述步骤，判别 $x_{(1)}$ 是否含有粗大误差。

$$\bar{x}'=10.0005$$
$$\sigma'=0.12$$

$$q_{(1)}=\frac{\bar{x}'-x_{(1)}}{\sigma'}=\frac{10.0005-10.0003}{0.00012}\approx 1.67$$

查表得 $$q_0(9,0.05)=2.11$$

$$q_{(1)}=1.67<q_0(9,0.05)=2.11$$

故可判别 $\gamma_{11}=0.5>\gamma_0(10,0.05)=0.477$ 不含有粗大误差，而各 $q_{(i)}$ 皆小于 2.11，故可认为其余测得值也不含有粗大误差。

3） 按狄克松准则，将测得值从小到大顺序排列得

$$x_{(1)}=10.0003, x_{(2)}=10.0004, \cdots, x_{(9)}=10.0007, x_{(10)}=10.001$$

首先判别最大值 $x_{(10)}$，因 n=10，故计算统计量 γ_{11}

$$\gamma_{11}=\frac{x_{(n)}-x_{(n-1)}}{x_{(n)}-x_{(2)}}=\frac{10.001-10.0007}{10.001-10.0004}=0.5$$

查表得 $$\gamma_0(10,0.05)=0.477$$

则 $$\gamma_{11}=0.5>\gamma_0(10,0.05)=0.477$$

故表中第 9 个测得值含有粗大误差，应予剔除。

再判别最小值$x_{(1)}$，计算统计量 γ_{11}

$$\gamma_{11}=\frac{x_{(1)}-x_{(2)}}{x_{(1)}-x_{(n-1)}}=\frac{10.0003-10.0004}{10.0003-10.0007}=0.25$$

则 $$\gamma_{11}=0.25<\gamma_0(10,0.05)=0.477$$

故表中第 5 个测得值不含有粗大误差。

剔除测得值 10.001 后，再检查其余测得值，此时 n=9，检查结果不含有粗大误差。

根据以上三个粗大误差判断准则，均判断第 9 个测得值含有粗大误差，故应将第 9 个测得值予以剔除。

（5）分析有无不变系统误差

发现和消除不变系统误差的基本措施可用实验对比法，若不能从误差源上及在测量过程中消除不变系统误差，应确定修正值，对算术平均值进行修正。本例除所用的 10mm 四等量块有一修正值- 0.1 μm 外，别无其他显著的不变系统误差。

（6）检查有无变化的系统误差

用残余误差校核法进行检查

$$\sum_{i=1}^{k}\upsilon_i=0+0.2+(-0.1)+0+(-0.2)=-0.1$$

$$\sum_{i=k+1}^{n}\upsilon_j=+0.1+0+0.1+(-0.1)=+0.1$$

$$\Delta=\sum_{i=1}^{k}\upsilon_i+\sum_{i=k+1}^{n}\upsilon_j=-0.1+0.1=0$$

因为代数和值Δ为零，故测量列中无变化系统误差。

（7）计算算术平均值的极限误差$\delta_{\lim 2}$

$$\sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma_\theta}{\sqrt{n}}=\frac{0.12}{\sqrt{9}}\mu m=0.04\mu m$$

因 n 较少，按 t 分布确定$\delta_{\lim 2}$ ，取显著度α=0.0027，自由度γ=n-1=9-1=8 ，查 t 分布表得：

$$t_\alpha=4.28$$

则 $$\delta_{\lim 2}=\pm t_\alpha\sigma_{\bar{x}}=\pm 4.28\times 0.04\mu m=0.17\mu m$$

（8）确定此测量方法总的极限误差$\delta_{\lim}$

除了算术平均值的极限误差$\delta_{\lim 2}$和 4 等基准量块的检定的极限误差$\delta_{\lim 1}$外，作为随

机量的温度误差，在有限次重复测量的短时间内不能充分反映在测量结果里，故计算时要另作考虑。但由于被检量块与基准量块材料基本相同，其线膨胀系数相差甚微，同时被检量块基本尺寸较小，故其温度误差的影响可与忽略不计。

则总的极限误差 $\delta_{\lim}$ 为

$$\delta_{\lim} = \pm\sqrt{\delta_{\lim1}^2 + \delta_{\lim2}^2} = \pm\sqrt{0.2^2 + 0.17^2}\,\mu m \approx \pm 0.3\mu m$$

（9）最后测量结果

$$\begin{aligned}\bar{x} + \Delta \pm \delta_{\lim} &= 10.0005mm + (-0.0001)mm \pm 0.0003mm \\ &= 10.0004 \pm 0.0003\ mm\end{aligned}$$

习　题

2-1　试述服从正态分布的随机误差的特性。

2-2　试述标准差 σ、平均误差 θ 和或然误差 ρ 的几何意义。

2-3　什么叫真误差？什么叫残余误差？

2-4　什么叫母体均值？什么叫子样均值？

2-5　什么叫方差？为什么算术平均值也有标准差？

2-6　什么叫不等精度测量？如何处理其测量结果？

2-7　设误差服从正态分布，那么误差落在[-2σ , $+2\sigma$]中的概率如何？若服从均匀分布，则概率又如何？

2-8　试分别求出服从正态分布、反正弦分布、均匀分布误差落在[$-\sqrt{2}\sigma$, $+\sqrt{2}\sigma$]中的概率。

2-9　测量某物体重量共 8 次，测得数据（单位 g）为 236.45，236.37，236.51，236.34，236.39，236.48，236.47，236.40。试求算术平均值及其标准差？

2-10　用别捷尔斯法，极差法和最大误差法计算习题 2-9 的标准差，并比较之。

2-11　测量某电路电流共 5 次，测得数据(单位 mA)为 168.41，168.54，168.59，168.40，168.50。试求算术平均值及其标准差、或然误差和平均误差？

2-12　测定雨滴中带有电荷的概率分布密度函数为（式中 x 表示雨滴数）

$$f(x) = \frac{c}{2}e^{-c|x|}$$

试求其标准差？

2-13　试证明公式 $\sigma_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$，并论述它的实际意义及其应用。

2-14　在立式测长仪上测量某校对量具，重复测量 5 次，测得数据（单位 mm）为 20.0015，20.0016，20.0018，20.0015，20.0011。试以 99%的置信概率确定测量结果。

2-15　对某工件进行 5 次测量，在排除系统误差的条件下，求得标准差 σ = 0.005 mm，若要求测量结果的置信概率为 95%，试求其置信限？

2-16　用某仪器测量工件尺寸，在排除系统误差的条件下，其标准差 σ = 0.004 mm，

若要求测量结果的置信限不大于±0.005mm，当置信概率为99%时，试求必要的测量次数？

2-17　用某仪器测量工件尺寸，已知该仪器的标准差σ=0.001mm ，若要求测量的允许极限误差不超过±0.0015mm ，而置信概率P为 0.95 时，应测量多少次？

2-18　若某量具的系统误差已排除，其测量的标准差为 5μm ，而被测轴径的公差为 15μm，试问应用该种量具进行测量是否合适，是否可采取其它技术措施？并写出相应的测量结果。

2-19　已知某仪器测量的标准差为 0.5μm。①若在该仪器上，对某一轴径测量一次，测得值为 26.2025mm ，试写出测量结果。②若重复测量 10 次，测得值（单位 mm）为 26.2025，26.2028，26.2028，26.2025，26.2026，26.2022，26.2023，26.2025，26.2026，26.2022，试写出测量结果。③若手头无改仪器测量的标准差值得资料，试由②问中 10 次重复测量的测量值，写出上述①、②问的测量结果。

2-20　测定溴的原子量共 10 次，测定结果如下：79.2863,79.3055,79.3064 ，79.3197,79.3114,79.3150,79.3063,79.3141,79.2915,79.3108,试求测量结果及其平均误差。

2-21　测定水的气化热共20次，测定结果（单位 J）为 542.98, 542.91, 542.03 , 542.68, 542.32, 543.08, 541.23, 542.12, 540.64, 541.82, 541.48, 540.96, 542.37, 541.66, 542.15, 541.73, 541.36, 541.79, 541.34, 541.84。试求最可信赖值、平均误差和或然误差，并写出测定结果。

2-22　应用基本尺寸为 30mm 的 3 等量块 ， 检定立式测长仪的示值稳定性。在一次调整下作了9次重复测量，测得数据（单位mm）为30.0011, 30.0008, 30.0006, 30.0008, 30.0013, 30.0008, 30.0006, 30.0004, 30.0008。若测量值服从正态分布，试确定该仪器的示值稳定性。

2-23　某时某地由气压表得到的读数（单位 Pa）为 102523.85，102391.30，102257.97，102124.65，101991.33，101858.01，101724.69，101591.36，其权各为 1，3，5，7，8，6，4，2，试求加权算术平均值及其标准差？

2-24　测量某角度共两次，测得值为α_1=24° 13′ 36″，α_2=24° 13′ 24″，其标准差分别为σ_1=3.1″，σ_2=13.8″，试求加权算术平均值及其标准差？

2-25　在三台测角仪器上测量某角度时，若已知它们的标准差分别为σ_1 = 0.04′，σ_2 =0.06′，σ_3 =0.03′，试确定三台仪器上所得测量值相应的权。

2-26　用同一台仪器对同一距离进行两组测量，测得距离分别为 227.8±0.1m 和 228.3±0.1m，两者总平均值为 228.05±0.14m，试求此测量结果与两组测得值的权之比。

2-27　甲、乙两测试者用正弦尺对一锥体的锥角α各重复测量 5 次，测得值如下：

$\alpha_{甲}$：7° 2′ 20″，7° 3′ 0″，7° 2′ 35″，7° 2′ 20″，7° 2′ 15″

$\alpha_{乙}$：7° 2′ 25″，7° 2′ 25″，7° 2′ 20″，7° 2′ 50″，7° 2′ 45″

试求其测量结果。

2-28　对某被测量x进行间接测量得$2x$=43.24，$3x$=64.80，其权分别为 9，4，试求x的测量结果及其标准差？

2-29　对某被测量z进行间接测量得$2z$=1.44，$3z$=2.18，$4z$=2.90，其权分别为 5，1，

1，试求z的测量结果及其标准差？

2-30　试证明n个相等精度测得值的平均值的权为n乘以任一个测得值的权。

2-31　重力加速度的20次测量具有平均值为9.811m/s^2，标准差为0.014m/s^2。另外30次测量具有平均值为9.802m/s^2，标准差为0.022m/s^2。假设这两组测量属于同一正态总体。试求此50次测量的平均值和标准差。

2-32　200人的平均身高为1.705±0.006m，而另一组300人的平均身高为1.752±0.005m。试求这500人的平均身高及其标准差？

2-33　某量的10个测得值的平均值为9.52，标准差为0.08；同一量的20个测得值的平均值为9.49，标准差为0.05。当权为①正比于测得值个数及②反比于标准差的平方时，试求30个测得值的平均值及其标准差？

2-34　测定某玻璃棱镜的折射系数，测得数据为1.53，1.57，1.54，1.54，1.50，1.51，1.55，1.54，1.56，1.53。若测得数据的权①为等权的及②权为1，2，3，3，1，1，3，3，2，1时，试求算术平均值及其标准差。

2-35　对某量进行10次测量，测得数据为14.7，15.0, 15.2, 14.8, 15.5, 14.6, 14.9, 14.8, 15.1, 15.0,试判断该测量列中是否存在系统误差？

2-36　对一线圈电感测量10次，前4次是和一个标准线圈比较得到的，后6次是和另一个标准线圈比较得到的，测得结果如下（单位mH）：

50.82, 50.83, 50.87, 50.89;

50.78，50.78，50.75，50.85，50.82，50.81。

试判断前4次与后6次测量是否存在系统误差？

2-37　等精度测量某一电压10次，测得结果（单位V）为25.94，25.97，25.98，26.03，26.04，26.02，26.04，25.98，25.96，26.07。测量完毕后，发现测量装置有接触松动现象，为判断是否因接触不良而引入系统误差，将接触改善后，又重新做了10次等精度测量，测得结果（单位V）为25.93，25.94，26.02，25.98，26.01，25.90，25.93，26.04，25.94，26.02。试用t检验法（α=0.05）判断两组测量值之间是否有系统误差？

2-38　对某量进行12次测量，测得数据为20.06，20.07，20.06，20.08，20.10，20.12，20.11，20.14，20.18，20.18，20.21，20.19，试用两种方法判断该测量列中是否存在系统误差？

2-39　对某量进行两组测量，测得数据如下：

x_i：14.6　15.1　15.4　14.7　15.2　14.8

y_i：14.7　14.8　15.0　14.9　15.3　15.2

试用各种方法判断两种间有无系统误差？

2-40　某量进行两组测量，测得数据如下

x_i	0.62	0.86	1.13	1.13	1.16	1.18	1.20	1.21	1.22	1.26	1.30	1.34	1.39	1.41	1.57
y_i	0.99	1.12	1.21	1.25	1.31	1.31	1.38	1.41	1.48	1.50	1.59	1.60	1.60	1.84	1.95

试用秩和检验法判断两组测量值之间是否有系统误差？

2-41　为检定某杠杆千分表的示值误差，采用实验统计法，对20mm的量块作20次重复测量，测得数据如下（单位mm）：

20.002, 20.001, 20.000, 20.001, 20.000, 19.998, 19.998,20.001, 19.998, 19.999, 20.002, 20.000, 20.000, 20.003,20.000, 20.002, 19.994, 19.998, 20.002, 19.998。试判断并剔除粗大误差及确定千分尺示值误差。

2-42 对某量进行 15 次测量测得数据为 28.53, 28.52, 28.50, 28.52, 28.53, 28.53, 28.50, 28.49, 28.49, 28.51, 28.53, 28.52, 28.49, 28.40, 28.50, 若这些测得值已经消除系统误差，试用莱以特准则、格罗布斯准则和狄克松准则分别判别该测量列中是否含有粗大误差的测量值？

2-43 对某一个电阻进行 200 次测量，测得结果列表如下：

测得电阻（R/Ω）	1220	1219	1218	1217	1216	1215	1214	1213	1212	1211	1210
该电阻值出现次数	1	3	8	21	43	54	40	19	9	1	1

⑴绘出测量结果的统计直方图，由次可得到什么结论？

⑵求测量结果并写出表达式。

⑶写出测量误差概率分布密度函数式。

2-44 在立式测长仪上，对某尺寸 L 作 100 次重复测量，测得其对基准尺寸的偏差 $\Delta L\,i$，经整理后如下表所列：

$\Delta L\,i$/μm	-1.5	-1	-0.5	0	+0.5	+1	+1.5	+2	+2.5
n/次	1	2	8	14	49	15	9	1	1

⑴试写出测量结果

⑵试确定对基准尺寸的偏差值在±0.75μm 范围内的概率。

2-45 用三种方法测量某一锥体角度α，测得数据分别为

$$\alpha_1=43°\ 55'\ 12'' \qquad \sigma_1=5''$$
$$\alpha_2=43°\ 55'\ 02'' \qquad \sigma_2=10''$$
$$\alpha_3=43°\ 55'\ 08'' \qquad \sigma_3=6''$$

试求出测量结果及标准差，并写出最终结果表达式。

2-46 在卧式光学比较仪上，用 4 等量块检定 100 ㎜的千分尺校对杆，共测 10 次。4 等量块中心长度的实际偏差为+0.2μm，检定的极限误差 δ_{1im}=±0.6μm。测量时恒温条件为 t=20±3℃。测量结果（单位㎜）为 100.0036, 100.0031, 100.0038, 100.0040, 100.0034, 1000.0026, 100.0035, 100.0041, 100.0037, 100.0032。试求次测量方法的极限误差，并写出最后结果。

第三章　误差的合成与分配

例　题

例 1　相对测量时需要用 54.255 mm 的量块组成标准件，量块组由四量块研合而成，它们的基本尺寸如下：

$$\ell_1=40\ \mathrm{mm} \qquad \ell_2=12\ \mathrm{mm}$$

$$\ell_3=1.25\ \mathrm{mm} \qquad \ell_4=1.005\ \mathrm{mm}$$

经测量，它们的尺寸偏差及其测量极限误差分别为

$$\Delta\ell_1=-0.7\ \mu\mathrm{m} \qquad \delta_{11ml1}=\pm 0.35\mu\mathrm{m}$$

$$\Delta\ell_2=+0.5\ \mu\mathrm{m} \qquad \delta_{11ml2}=\pm 0.25\mu\mathrm{m}$$

$$\Delta\ell_3=-0.3\ \mu\mathrm{m} \qquad \delta_{11ml3}=\pm 0.20\mu\mathrm{m}$$

$$\Delta\ell_4=+0.1\ \mu\mathrm{m} \qquad \delta_{11ml4}=\pm 0.20\mu\mathrm{m}$$

试求量块组按基本尺寸使用时的修正值及给出相对测量带来的测量误差？

解：量块组尺寸的系统误差为

$$\Delta\ell=(\ell_1+\ell_2+\ell_3+\ell_4)-[(\ell_1+\Delta\ell_1)+(\ell_2+\Delta\ell_2)+(\ell_3+\Delta\ell_3)+$$

$$+(\ell_4+\ \Delta\ell_4)]$$

$$=+0.4\ \mu\mathrm{m}$$

故量块组按基本尺寸使用时的修正值为-0.4μm。

$$\delta_{1iml}=\pm\sqrt{\delta^2{}_{1iml1}+\delta^2{}_{1iml2}+\delta^2{}_{1iml3}+\delta^2{}_{1iml4}}$$

$$=\pm\sqrt{0.35^2+0.25^2+0.20^2+0.20^2}\ \ \mu\mathrm{m}$$

$$=\pm 0.51\mu\mathrm{m}$$

故量块组给相对测量带来的测量误差不会超过±0.51μm。

例 2　望远镜的放大率 D= f_1/f_2，已测得物镜主焦距 $f_1\pm\sigma_1$=（19.8±0.2）cm,目镜的主焦距 $f_2\pm\sigma_2$=（0.800±0.005）cm,求放大率的标准差？

解：由误差传递公式

$$\sigma^2{}_D=(\frac{\partial D}{\partial f_1})^2\sigma_1^2+(\frac{\partial D}{\partial f_2})^2\sigma_2^2+2(\frac{\partial D}{\partial f_1})(\frac{\partial D}{\partial f_2})\rho_{f_1f_2}\sigma_1\sigma_2$$

因 f_1、f_2 的测量值的随机误差是相互独立的，所以相关系数 $\rho_{f_1f_2}$=0

$$\sigma^2{}_D=(\frac{\partial D}{\partial f_1})^2\sigma_1^2+(\frac{\partial D}{\partial f_2})^2\sigma_2^2$$

$$=(\frac{1}{f_2})^2\sigma_1^2+(\frac{f_1}{f_2^2})^2\sigma_2^2$$

$$=(\frac{1}{0.8})^2(0.2)^2\text{cm}^2+(\frac{19.8}{0.8^2})^2(0.005)^2\text{cm}^2$$

$$=0.086\,\text{cm}^2$$

$$\sigma_D=0.294\text{cm}$$

$$D=f_1/f_2=\frac{19.8}{0.8}=24.75$$

测量结果为 $\mathrm{D_0}=\mathrm{D}+\sigma_{\mathrm{D}}=24.75\pm0.29$

例 3 应用交流电桥同时测量线路电容 R 和电容 C，由下式计算阻抗 Z，

$$Z=\sqrt{R^2+(\frac{1}{fc})^2}$$

若重复测量 15 次，可得如下所列数据。频率 $f=10^6\,Hz$，试求阻抗 Z。

解：电阻的算术平均值：$\bar{R}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}R_i=\frac{1}{15}\times31963.0\Omega=2130.87\Omega$

电阻偏差：$\Delta R_i=R_i-\bar{R}$

电容算术平均值：

$$\bar{C}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}C_i=\frac{1}{15}\times10284.4\,pF$$

$$=685.63\,pF=685.63\times10^{-12}\,F$$

电容偏差：$\Delta C_i=C_i-\bar{C}$

电阻测量的标准差：

$$\sigma_R=\sqrt{\frac{\sum\Delta R_i^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{36.01}{15-1}}\Omega=1.6\Omega$$

电容测量的标准差：

$$\sigma_D=\sqrt{\frac{\sum\Delta C_i^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{50.64}{15-1}}pF\ =1.9\,pF=1.9\times10^{-12}\,F$$

i	R/Ω	C_i/pF	$\Delta R_i/\Omega$	$\Delta C_i/pF$	$\Delta R_i^2/\Omega^2$	$\Delta C_i^2/pF^2$	$\Delta R_i \Delta C_i/s$
1	2129.6	689.0	−1.27	+3.37	1.61	11.36	−4.28
2	2130.9	687.0	+0.03	+1.37	0	1.88	+0.04
3	2131.8	687.0	+0.93	+1.37	0.86	1.88	+1.27
4	2128.2	687.0	−2.76	+2.37	7.13	4.71	−5.79
5	2133.0	683.0	+2.13	−2.63	4.54	6.92	−5.60
6	2131.1	684.0	+0.23	−1.63	0.05	2.66	−0.37
7	2132.7	686.4	+1.83	+0.77	3.35	0.59	+1.41
8	2127.5	687.3	−3.37	+1.67	11.36	2.79	−5.63
9	2130.8	686.3	−0.07	+0.67	0	0.45	−0.05
10	2129.7	685.6	−1.17	−0.03	1.37	0	+0.04
11	2130.0	683.6	−0.87	−2.03	0.76	4.12	+1.77
12	2131.5	684.6	+0.63	−1.03	0.40	1.06	−0.65
13	2131.8	682.3	+0.93	−3.33	0.86	11.09	−3.10
14	2131.9	685.9	+1.03	+0.27	1.06	0.07	+0.28
15	2132.5	684.6	+1.63	−1.03	2.66	1.06	−1.68
$\sum$	31963.0	10284.4	-	-	36.01	50.64	−22.34

阻抗算术平均值：

$$\bar{Z}=\sqrt{\bar{R}^2+(\frac{1}{f\bar{c}})^2}$$

$$=\sqrt{(2130.87)^2+(\frac{1}{10^6\times685.63\times10^{-12}})^2}\Omega$$

$$=\sqrt{4540607+2127259}\Omega$$

$$=\sqrt{6667866}\Omega\approx2582.22\Omega$$

传递系数：

$$K_R=\frac{\partial Z}{\partial R}=\frac{\bar{R}}{\bar{Z}}=\frac{2130.87}{2582.22}=0.825$$

$$K_C=\frac{\partial Z}{\partial\bar{C}}=-\frac{1}{\bar{z}f^2\bar{C}^3}$$

$$=-\frac{1}{2582.22\times(10^6)^2\times(685.63\times10^{-12})^3}$$

相关系数：

$$\rho_{RC}=\frac{\sum(R_i-\bar{R})(C_i-\bar{C})}{\sqrt{\sum(R_i-\bar{R})^2\sum(C_i-\bar{C})^2}}$$

$$=\frac{\sum \Delta R_i \Delta C_i}{\sqrt{\sum \Delta R_i^{\ 2} \Delta C_i^{\ 2}}}=\frac{-22.34}{\sqrt{36.01\times 50.64}}$$

$$\approx -0.52$$

阻抗测量的标准差：

$$\sigma_Z=\sqrt{K_R^2\sigma_R^2+K_C^2\sigma_C^2+2K_RK_C\rho_{RC}\sigma_R\sigma_C}$$

$$=\sqrt{(0.825)^2\times(1.6)^2+(-1.20\times10^{12})^2(1.9\times10^{-12})^2+2\times0.825\times(-1.20\times10^{12})\times(-0.52)\times1.6\times(1.9\times10^{-12})}\Omega$$

$$=\sqrt{1.74+5.20+3.13}\Omega=\sqrt{10.07}\Omega\approx 3.2\Omega$$

若已知阻抗 Z 的误差接近于正态分布，且置信系数取 t=3 时，则

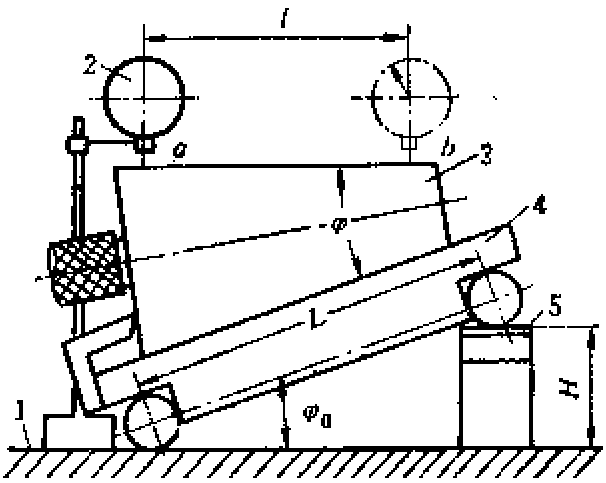
$$\Delta\lim_Z=\pm t\sigma_Z$$

$$=\pm3\times3.2\Omega=9.6\Omega$$

$$\Delta\lim_{\bar{Z}}=\pm\frac{t\sigma_Z}{\sqrt{n}}=\pm\frac{9.6}{\sqrt{15}}\Omega\approx\pm2.5\Omega$$

则测量结果： $$Z_0=\bar{Z}\pm\Delta\lim_{\bar{Z}}=(2582.2\pm2.5)\Omega$$

例 4 分析用正弦间接测量锥度量规的锥角 φ_0 的误差，并对测量结果进行处理（见图 3-1）。已知：被测件为 M_3 莫氏锥度量规，其锥角的公称值为 φ_0=2° 52′ 32″；正弦尺两圆柱中心距 L=$[100+(-0.005)\pm0.002]$mm；量块为 5 等；千分尺的刻度值为 1μm，示值稳定性为 ±0.5 μ m；平板为 1 级。



1—平板　2—千分表　3—被测锥度量规　4—正弦尺　5－量块组

图 3－1

解：⑴ 列出间接测量的函数式

$$\sin\varphi_0 = \frac{H}{L}$$

被测锥角对标准角度 φ_0 的偏差 $\Delta\varphi$ 与给定距离 l 及圆锥母线在该长度上两点高度差 $\Delta = a - b$ 之间的关系为

$$\Delta\varphi = \frac{a-b}{l} = 2.06\times10^5\frac{\Delta}{l}\,('')$$

而被测圆锥角即为

$$\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi$$

⑵ 列出有关尺寸的直接测量或检定结果正弦的尺两圆柱中心距

$$L=[100+(-0.005)\pm0.002]\text{mm}$$

$$=99.995\pm0.002\ \text{mm}$$

量块的组合尺寸

$$H = L\sin\varphi_0 = 100\text{mm}\sin 2°\ 52'\ 32''$$

$$=100\times0.0501668\text{mm}\approx5.017\ \text{mm}$$

选用三块 5 等量块组合尺寸，基本尺寸、实际偏差（按量块检定书查得）及检定误差（查有关量块的检定资料）如下：

$$H_1 = [(3-0.0004)\pm0.0005]\text{mm}$$

$$H_2 = [(1.01-0.0002)\pm0.0005]\text{mm}$$

$$H_3 = [(1.007-0.0002)\pm0.0005]\text{mm}$$

因此，该量块组修正后的尺寸有极限误差为

$$H = 5.0166\pm\sqrt{3\times(0.0005)^2}\,\text{mm}$$

$$=5.0166\pm0.0009\text{mm}$$

用钢尺直接在被测锥度量规饿表面划上记号 a、b，量取 $l = 50\text{mm}$，其定位误差估计为 $\pm0.3\text{mm}$，则

$$l = 50.0\pm0.3\,\text{mm}$$

用千分表 5 次重复测量 a、b 两点的读数 a_i 与 b_i，得二点对平板的高度差 Δ_i，列于下表所示（单位 μm）。

测量顺序	a_i	b_i	$\Delta_i = a_i - b_i$	$\left(\Delta_i-\overline{\Delta}\right)^2$
1	0	-2.5	+2.5	0.25
2	0	-3.0	+3.0	0
3	-0.5	-3.5	+3.0	0
4	-0.5	-4.0	+3.5	0.25
5	0	-3.0	+3.0	0
$\sum$	—	—	+15	0.50

高度差的平均值及其极限误差

$$\bar{\Delta}=\frac{\sum\Delta_i}{n}=\frac{+15}{5}=+3.0\ \ \mu m$$

$$\sigma_{\Delta}=\sqrt{\frac{\sum\left(\Delta_i-\bar{\Delta}\right)^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{0.50}{5-1}}\ \mu m=0.35\ \mu m$$

$$\Delta_{\lim\bar{\Delta}}=\pm\frac{3\sigma_{\Delta}}{\sqrt{n}}=\pm\frac{3\times0.35}{\sqrt{5}}\ \mu m\approx\pm0.47\ \ \mu m$$

因此高度差的测量结果为

$$\Delta=\bar{\Delta}\pm\bar{\Delta}_{\lim\bar{\Delta}}=3.00\pm0.47\ \ \mu m$$

在不垫量块的条件下，直接将正弦尺的两圆柱置于平板上，检验正弦尺工作面对平板的平行度。用千分表 3 次重复测量，结果是垫量块的一端平均高出 1μm，其极限误差可按千分表的示值稳定性±0.5μm 的$1/\sqrt{n}$倍估算（n＝3）。这相当于所垫量块有一附加高度偏差，即

$$\Delta H=1\pm\frac{0.5}{\sqrt{3}}\ \mu m\approx1.00\pm0.29\ \mu m$$

（3）计算被测锥角的实际值

计算按系统误差修正后标准角度的实际值。H＝（5.0166+0.001）mm＝5.0176mm，L＝[100+(-0.005)]mm＝99.995mm，所以

$$\sin\varphi_0'=\frac{H}{L}=\frac{5.0176}{99.995}\approx0.050179$$

$$\varphi_0'=2^{\circ}52'34.5''$$

按测得的高度差平均值$\bar{\Delta}$＝+0.003mm 来计算实际锥角对上述标准角度的偏差

$$\Delta\varphi=2.06\times10^5\times\frac{\bar{\Delta}}{l}('')=2.06\times10^5\frac{(+0.003)}{50}('')\approx12.4''$$

因此，该锥度量规的锥角的实际值为

$$\varphi=\varphi_0'+\Delta\varphi$$

$$=2^{\circ}52'34.5''+12.4''\approx2^{\circ}52'47''$$

（4）计算所测实际锥角的极限误差

估算标准角度$\varphi_{实}$的极限误差

因为 $$\sin\varphi_0=\frac{H}{L}$$

$$\Delta\varphi_0=\frac{1}{\cos\varphi_0}\left(\frac{1}{L}\Delta H-\frac{H}{L^2}\Delta L\right)$$

$$=K_H\Delta H+K_L\Delta L$$

其中误差传递系数 K_H 和 K_L 分别为

$$K_H = \frac{1}{\cos\varphi_0} \times \frac{1}{L} = \frac{1}{\cos 2^\circ 52' 34.5''} \times \frac{1}{99.995}\ \text{mm}^{-1}$$

$$= \frac{1}{0.99874} \times \frac{1}{99.995}\ \ \text{mm}^{-1} \approx 0.010\ \text{mm}^{-1}$$

$$K_L = -\frac{1}{\cos\varphi_0} \times \frac{H}{L^2} = -\frac{1}{\cos\varphi_0} \times \frac{\sin\varphi_0}{L}$$

$$= -tg\varphi_0 \times \frac{1}{L} = -tg 2^\circ 52' 34.5'' \times \frac{1}{99.995}\ \ \text{mm}^{-1}$$

$$= -0.05024 \times \frac{1}{99.995}\ \ \text{mm}^{-1}\ \approx \text{-}0.0005\ \text{mm}^{-1}$$

比较 K_H 与 K_L 两个误差传递系数，由于 K_L 比 K_H 小得多，而 ΔL 与 ΔH 相差较小，故可略去正弦尺中心距误差的影响，仅考虑高度误差 ΔH 的影响。

高度 H 的极限误差 $\Delta_{\lim H}$，应由所垫量块组尺寸的测量误差±0.9μm 与正弦尺工作面对平板平行度的测量误差±0.29μm 随机合成，即

$$\Delta_{\lim H} = \pm\sqrt{0.9^2 + 0.29^2}\ \mu\text{m}\ \approx \pm 1\mu\text{m}$$

由此引起基准角度的误差为

$$\delta_{\lim 1} = \pm K_H \Delta_{\lim H} = \pm 0.01 \times 0.001\, rad$$

$$\approx \pm 2.06 \times 10^5 \times 0.00001\, ('') \approx\ \pm 2''$$

估算锥角偏差 $\Delta\varphi$ 的极限误差 $\delta_{\lim 2}$：

因为
$$\Delta\varphi = 2.06 \times 10^5 \frac{\overline{\Delta}}{l}$$

$$\Delta_{\Delta\varphi} = 2.06 \times 10^5 \left(\frac{1}{l}\Delta_{\overline{\Delta}} - \frac{\overline{\Delta}}{l^2}\Delta_l \right)('')$$

$$= 2.06 \times 10^5 \left(K_{\overline{\Delta}}\Delta_{\overline{\Delta}} + K_l \Delta_l \right)('')$$

式中
$$K_{\overline{\Delta}} = \frac{1}{l} = \frac{1}{50mm} = 0.02\ \text{mm}^{-1}$$

$$K_l = -\frac{\overline{\Delta}}{l^2} = -\frac{0.003}{50^2}\ \ \text{mm}^{-1} \approx \text{-}0.00001\ \text{mm}^{-1}$$

比较这两个误差传递系数可知，K_l 远小于 $K_{\overline{\Delta}}$，因此，给定长度 l 的测量误差的影响可以略去，仅考虑高度 $\overline{\Delta}$ 的极限误差的影响。由此得锥角偏差的极限误差为

$$\delta_{\lim 2} = \pm 2.06 \times 105 \times 0.02 \times 0.00047\,('') \approx \ \pm 2''$$

实际锥角测量的极限误差$\delta_{\lim 1}$，由标准角度的极限误差$\delta_{\lim 1}$与锥角的极限误差$\delta_{\lim 2}$随机合成，即

$$\delta \lim = \pm\sqrt{\delta_{\lim 1}^2 + \delta_{\lim 2}^2}$$

$$= \pm\sqrt{2^2 + 2^2}\,('') \approx \pm 3''$$

这样，锥角的间接测量结果为

$$\varphi = \varphi_0 \pm \delta_{\lim} = 2^\circ 52' 47'' \pm 3''$$

习　题

3-1　为求长方体体积V，直接测量其各边长a、b、c，测量结果分别为a＝161.6mm，b＝44.5mm，c＝11.2mm，已知测量的系统误差分别为Δa＝1.2mm，Δb＝-0.8mm，Δc＝0.5mm，试求立方体的体积？

3-2　若题3-1中的测量极限误差分别为$\delta a = \pm 0.8$mm，$\delta b = \pm 0.5$mm，$\delta c = \pm 0.5$mm，计算所得体积的极限误差？

3-3　立方体的边长为a，测量时的标准差为σ，试求体积的标准差？

3-4　长方体的边长分别为a_1、a_2、a_3，测量时①标准差均为σ；②标准差各为σ_1、σ_2、σ_3。试求体积的标准差？

3-5　测量某电路的电流I＝22.5mA，电压U＝12.6V，测量的标准差分别为σ_I＝0.5mA，σ_U＝0.1V，求所耗功率$P = UI$及其标准差σ_P？

3-6　已知矩形的边长为a和b，且边长的标准差相同，试求矩形对角线的标准差？

3-7　用误差传递公式证明加权平均值的标准差公式：

$$\sigma_{误} = \sigma_i\sqrt{\frac{p_i}{\sum p_i}}$$

3-8　一直线上有A、B、C、D四点，C点为A、B间的中点。由直接测量OA和OB的长度，然后算出OC的长度。已知OA和OB两测量值的标准差各为σ_1和σ_2，O为该直线的端点，试求OC的标准差。

3-9　某圆球的半径为r，若测得r＝3.132±0.005cm，其标准差为σ＝0.002cm，试求圆球最大截面的圆周和面积及圆球体积的极限误差和标准差？

3-10　已知三角形ABC的两个角A和C的标准差为σ_A、σ_C及B角的对边b的标准差为σ_b，试求A角的对边a的标准差？

3-11　由式$S = \dfrac{1}{2}ab\sin a$计算三角形的面积，式中a、b是三角形α角的两邻边。经测得a＝20.3±0.1cm，b＝10.5±0.2cm，α＝40°36′±24′，试求面积S的极限误差？

3-12 已知 $x\pm\sigma_x=2.0\pm0.1$，$y\pm\sigma_y=3.0\pm0.2$，相关系数 $\rho_{xy}=0$，试求 $\varphi=x^3\sqrt{y}$ 的值及其标准差？

3-13 已知 x 与 y 的相关系数 $\rho_{xy}=-1$，试求 $u=x^2+ay$ 的方差 σ_u^2？

3-14 在工具显微镜上，用灵敏杠杆（光学接触器）按图 3-2 所示方法测量孔径，测得尺寸 $L=29.9995\pm0.0015$mm，$C=15.0005\pm0.0015$mm。已知测头直径 $d=2.9266\pm0.0005$mm，试求被测孔径 D 及其精度？

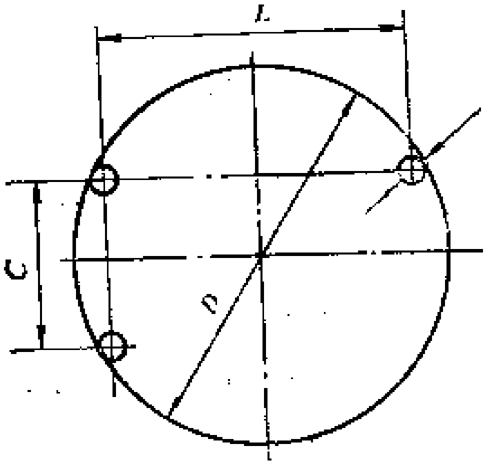


图 3－2

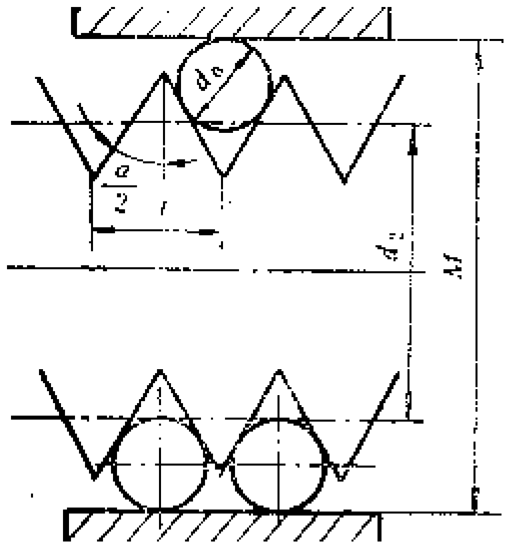


图 3－3

3-15 用三针测量外螺纹中径 d_2，如图 3-3 所示，其关系式为 $d_2=M-d_0\left(1+\dfrac{1}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}\right)+\dfrac{t}{2}ctg\dfrac{\alpha}{2}$。试分析最佳测量方案。

3-16 通过电流表的电流 I 与指针偏转角 φ 服从下列关系：$I=Ctg\varphi$。式中 C 为决定于仪表结构的常数，$C=5.031\times10^{-7}$A，两次测得 $\varphi_1=6°17'\pm1'$；$\varphi_2=43°32'\pm1'$。试求两种情况下的 I_1、I_2 及其极限误差，并分析最佳测量方案。

3-17 题 3-16 中，若测得 $C+\sigma_C=$（124.18±0.03）A，$\varphi+\sigma_\varphi=19°41'30''\pm40''$，试求电流 I 的标准差？

3-18 如图 3-4 所示，用双球法测量孔的直径 D，其钢球直径分别为 d_1、d_2，测出距离分别为 H_1、H_2，试求被测孔径 D 与各直接测量量的函数关系 $D=f\left(d_1,d_2,H_1,H_2\right)$ 及其误差传递系数。

3-19 若已知习题 3-18 中

$d_1=45.00$mm	$\Delta d_1=0.002$mm	$\sigma_{d1}=0.001$mm
$d_2=15.00$mm	$\Delta d_2=-0.003$mm	$\sigma_{d2}=0.001$mm
$H_1=29.921$mm	$\Delta H_1=0.005$mm	$\sigma_{H1}=0.003$mm
$H_2=20.961$mm	$\Delta H_2=0.004$mm	$\sigma_{H2}=0.002$mm

试求被测孔径 D 及其测量精度。

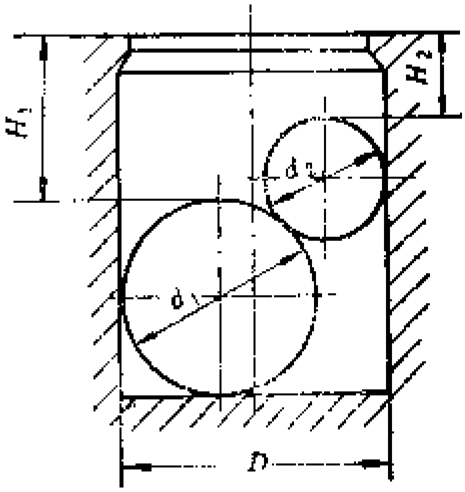


图 3－4

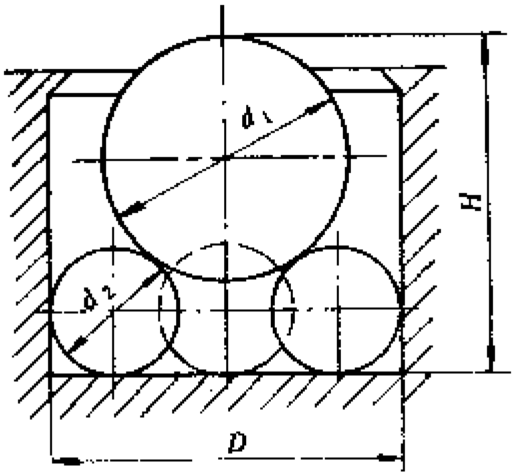


图 3－5

3-20 如图 3-5 所示，用四球法测量孔的直径 D，其中一个钢球直径为 d_1，三个钢球直径为 d_2，测出距离为 H，试求被测孔径 D 与各直径测量量的函数关系 $D = f\left(d_1, d_2, H\right)$ 及其误差传递系数。

3-21 若已知题 3-20 中：

d_1 ＝40.00mm	Δd_1 ＝0.002mm	σ_{d1} ＝0.001mm
d_2 ＝20.00mm	Δd_2 ＝-0.002mm	σ_{d2} ＝0.001mm
H ＝34.985mm	ΔH ＝0.005mm	σ_H ＝0.003mm

试求被测孔径 D 及其测量精度。

3-22 如图 3-6 所示，在平板上用两个相同直径 d 的钢球测量外圆弧半径 R，测得直接测量量为 M，若已知：

d ＝20.00mm	Δd ＝0.002mm	σ_d ＝0.001mm
M ＝99.998mm	ΔM ＝-0.004mm	σ_M ＝0.003mm

试求被测外圆弧半径及其测量精度。

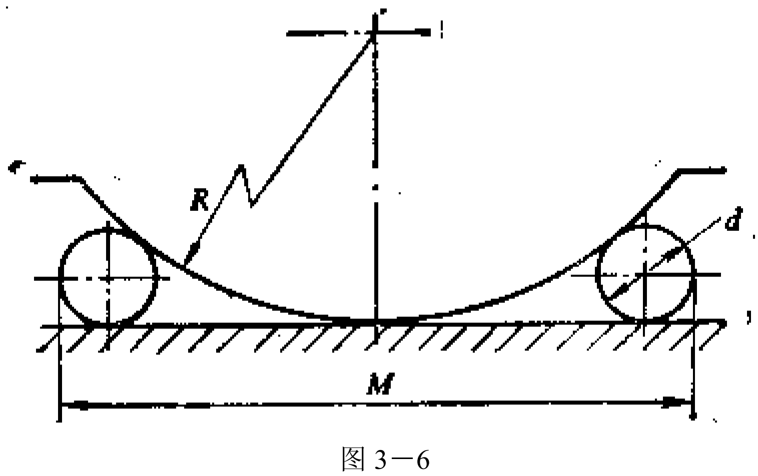


图 3－6

3-23 如图 3-7 所示，在平板上用三个相同直径 d 的钢球测量内圆弧半径 R，测得直接

测量量为H，若已知：

$d=50.00\text{mm}$　　$\Delta d=0.002\text{mm}$　　$\sigma_d=0.001\text{mm}$

$H=60.002\text{mm}$　　$\Delta H=0.002\text{mm}$　　$\sigma_H=0.001\text{mm}$

试求被测内圆弧半径及其测量精度。

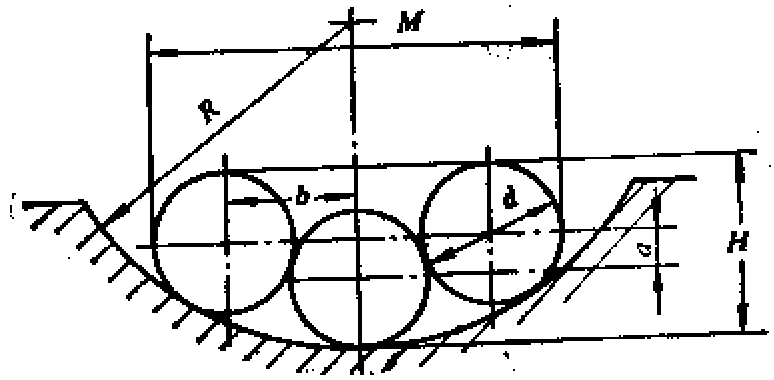
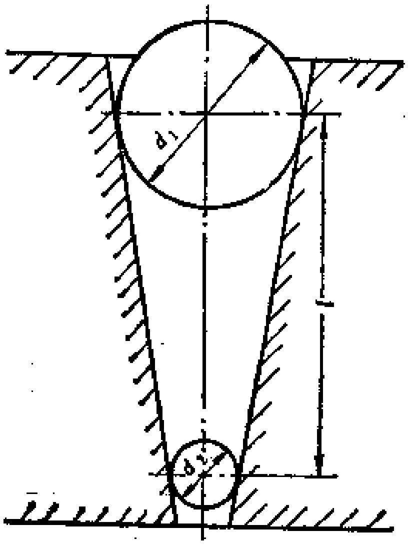


图 3－7

3-24 用间接测量法求角度α，如图 3-8 所示，测得尺寸$l=50.000\text{mm}$，$d_1=25.151\text{mm}$，$d_2=10.183\text{m}$，相应的测量极限误差分别为$\delta_l=\pm0.005\text{mm}$，$\delta_{d1}=\pm0.010\text{mm}$，$\delta_{d2}=\pm 0.010\text{mm}$。求角度测量结果及其极限误差？



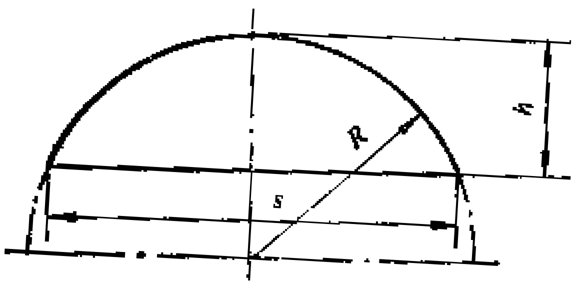


图 3－8　　　　图 3－9

3-25 若题图 3-8 中角度α的测量误差要求不大于±20″，试恰当地的确定d_1、d_2及l的测量允许误差？

3-26 试分析题 3-18 中的最佳测量方案。

3-27 有m个三角形，在相同条件下，分别独立测量角度A_i、B_i、C_i，$i=1，2，\cdots，m$，当m很大时，试证明任一测量角的方差为$\sigma^2=\dfrac{1}{3m}\sum_{i=1}^{m}\left(A_i+B_i+C_i-180^\circ\right)$

3-28 圆柱体按公式$V=\pi r^2 h$求出体积，要使体积的相对误差等于 1%，若已知r约为

2cm，h 约为 20cm。试问 r 和 h 测量时误差应为多少？

3-29 测量某电路电阻 R 两端的电压降 U，可由公式 $I = U/R$ 算出电路电流 I。若电压降约为 16V，电阻约为 4Ω，要使电流的极限误差为 0.04A，试决定电阻 R 和电压降 U 的测量误差不能大于多少？

3-30 假定从支点到重心的长度为 L 的单摆振动周期为 T，重力加速度可由公式 $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ 中给出。若要求测量 g 的相对标准差 $\sigma_g/g \leq 0.1\%$，试问按等作用原则分配误差时，测量 L 和 T 的相对标准差应是多少？

3-31 如图 3-9 所示，用弓高弦长法测量一圆弧样板半径 R，其参数关系式 $R = \dfrac{s^2}{8h} + \dfrac{h}{2}$。若 s =50mm，h =5mm，系统误差和极限误差分别为：Δs =+0.1mm，Δh =-0.01mm，$\delta_{\lim s}$ =±0.001mm，$\delta_{\lim h}$ =±0.0006mm，试求该圆弧样板半径 R 的实际尺寸及测量极限误差。

3-32 用一对直径相等的标准圆棒和两块尺寸相等的量块，通过测量尺寸 M_1 和 M_2（见图 3-10），间接测量得锥体锥度

$$K = 2tg\alpha = \frac{M_1 - M_2}{L}$$

若 M_1 =31.480±0.004 mm

M_2 =25.600±0.004 mm

L =22.500±0.002 mm

试求测量结果并分析最佳测量方案？

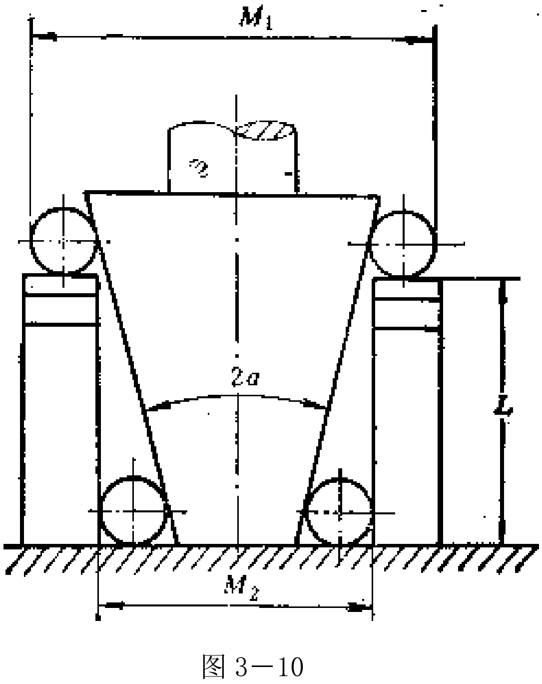


图 3－10

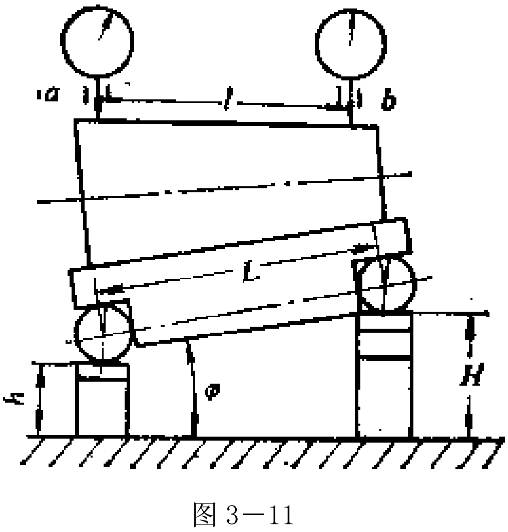


图 3－11

3-33 如图 3-11 所示，用正弦尺测量角度 φ，$\sin\varphi = (H-h)/L$

（1）已知测微计在 a、b 处的读数值 n_a =1μm，n_b =0，检定长度 L =100mm，若不考虑测量误差，试求锥体锥角。

（2）已知各已知值及系统误差为

$$L=100\text{mm},\qquad \Delta L=+5\mu\text{m}$$
$$H=50\text{mm},\qquad \Delta H=+2\mu\text{m}$$
$$h=20\text{mm},\qquad \Delta h=-1\mu\text{m}$$

试求测微计在 a 、b 两处的读数值相等时角度 φ 的实际值。

（3）若各值的极限误差为

$$\delta_{\lim L}=\pm 0.001\ \text{mm}$$
$$\delta_{\lim H}=\pm 0.001\ \text{mm}$$
$$\delta_{\lim h}=\pm 0.0007\ \text{mm}$$

当测微计在 a 、b 两处的读数值相等时，试求角度 φ 的测量极限误差及最后测量结果。

（4）试分析最佳测量方案。

3-34 用正弦尺检定锥角 φ 为 30°的锥度量规（见图 3-12），已知正弦尺两滚柱中心距 L ＝100mm，其极限误差 $\delta_{\lim L}=\pm 3\mu\text{m}$，刻度值为 2μm 的测微计的示值极限误差 $\delta_{\lim 计}=\pm 1\mu\text{m}$，5 等量块 $h=50\text{mm}$，其检定极限误差 $\delta_{\lim h}=\pm 0.7\mu\text{m}$，正弦尺工作面与两滚柱公切面平行性误差 $\delta_{\lim 平}=\pm 2\mu\text{m}$，检定长度 $l=100\text{mm}$，试计算测量方法的极限误差。

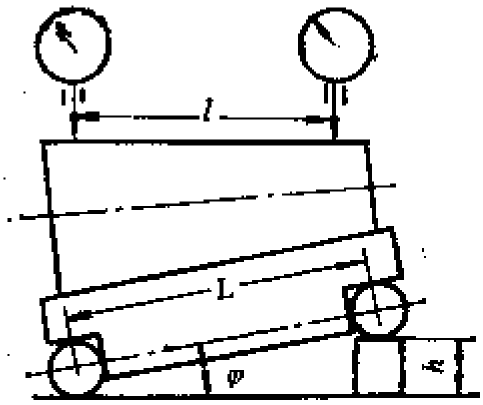


图 3－12

3-35 对某量测量的随机误差与未定系统误差的标准差分别为 $\sigma_r=0.36\text{g}$，$u_s=0.14\text{g}$，求三次测量结果的算式平均值的极限误差？若要使所得结果的极限误差不超过±0.60g，应测量多少次？

3-36 已知立式光学比较仪的光学刻度尺的刻度误差为±0.05μm；光学系统及传动机构调整误差为±0.03μm；用量块调整示值时引入的系统误差为±0.1μm；对刻度线瞄准和估读误差为±0.06μm.。试求立式光学比较仪总的系统误差。

3-37 光学法测量大尺寸是利用现有的标准线纹尺，由一列瞄准器将其衔接到所需要的尺寸。例如，为了测量 10m 长的尺寸，用 1m 线纹尺做标准尺，按次序调整各瞄准器的位置，如图 3-13 所示。

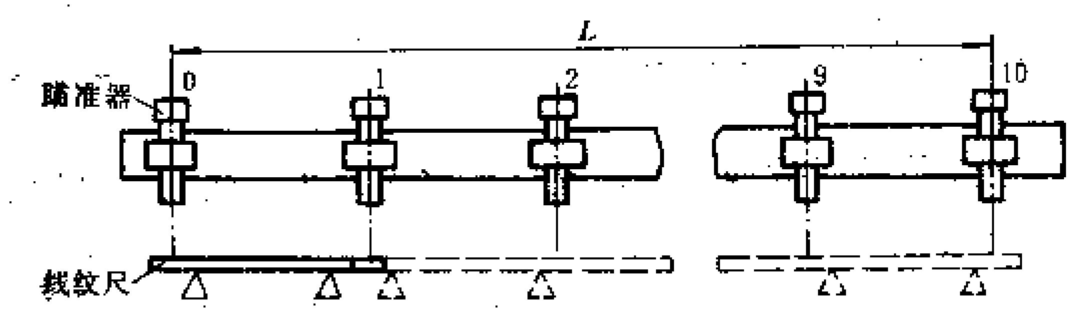


图 3－13

首先使 0 号瞄准器的双刻线套中线纹尺的 0 刻线，然后微调 1 号瞄准器的位置，使其双刻线套中线纹尺的 1m 刻线，这两个瞄准器轴线名义间距即为 1m。再移动线纹尺，是 0 刻线被 1 号瞄准器的双刻线套中，然后微调 2 号瞄准器的位置，使其双刻线套中 1m 刻线。… …依次进行下去，直到调好 10 号瞄准器的位置。于是 0 号瞄准器轴线与 10 号瞄准器轴线的名义间距 l ＝10×1m＝10m。

现已知瞄准器的双刻线瞄准误差为±1μm，线纹尺检定结果为 999.994mm±1.1μm，其它误差均忽略不计。问在上述获得 l 的操作中的几项误差各是何种误差？并写出 0 号瞄准器与 10 号瞄准器轴线间距 L 的正确表达式。

3-38 某压力计各误差因素的极限误差如下表所示：

序 号	误 差 因 素	极限误差/ mPa	
		随机误差	未定系统误差
1	有效面积	13.8	13.0
2	专用砝码及活塞杆质量	—	4.0
3	使用时温度变化	4.8	—
4	结构系统安装误差	—	0.1
5	加速度误差	—	0.5
6	有效面积变形	3.0	—

若各误差传递系数均为 1，置信系数均为 2，试求压力计的极限误差？

3-39 对某一质量重复四次的测量结果分别为 x_1 ＝428.6g，x_2 ＝429.2g，x_3 ＝426.5g，x_4 ＝430.8g。已知测量的已定系统误差 Δx ＝-2.6g，测量的各极限误差分量及其相应的传递系数分别如下表所示。若各误差均服从正态分布，试求该质量的最可信赖值及其极限误差？

序 号	极限误差/g		误差传递系数
	随机误差	未定系统误差	
1	2.1	—	1
2	—	1.5	1
3	—	1.0	1
4	—	0.5	1

5	4.5	—	1
6	—	2.2	1.4
7	1.0	—	2.2
8	—	1.8	1

3-40 在万能工具显微镜上用影像法测量平面工件的尺寸，已知工件长L＝50mm，高H＝80mm，根据仪器的工作原理和结构可知，主要有以下误差：

（1）阿贝误差＝$\pm\dfrac{HL/mm^2}{4000}$ μm；

（2）光学刻度尺的刻度误差＝$\pm\left(1+\dfrac{L/mm}{200}\right)$ μm；

（3）光学刻度尺的检定误差＝±0.5μm；

（4）温度误差＝$\pm\dfrac{7L/mm}{1000}$ μm；

（5）读数装置误差＝±0.8μm；

（6）工件瞄准误差＝±1μm。

试用误差合成的方法计算其测量结果的综合极限误差值。

第四章　测量不确定度

例　题

评定与表示测量不确定度的步骤可归纳为

1）分析测量不确定度的来源，列出对测量结果影响显著的不确定度分量。
2）评定标注不确定度分量，并给出其数值 u_i 和自由度 ν_i 。
3）分析所有不确定度分量的相关性，确定各相关系数 ρ_{ij} 。
4）求测量结果的合成标准不确定度，则将合成标准不确定度 u_c 及自由度 ν .
5）若需要给出展伸不确定度，则将合成标准不确定度 u_c 乘以包含因子 k，得展伸不确定度 U=k u_c 。
6）给出不确定度的最后报告，以规定的方式报告被测量的估计值 y 及合成标准不确定度 u_c 或展伸不确定度 U，并说明获得它们的细节。

根据以上测量不确定度计算步骤，下面通过实例说明不确定度评定方法的应用。

例 1　体积测量的不确定度计算

1．测量方法

直接测量圆柱体的直径 D 和高度 h ，由函数关系式计算出圆柱体的体积

$$V=\frac{\pi D^2}{4}h$$

由分度值为 0.01mm 的测微仪重复 6 次测量直径 D 和高度 h，测得数据如下：

D_i /mm	10.075	10.085	10.095	10.060	10.085	10.080
h_i /mm	10.105	10.115	10.115	10.110	10.110	10.115

计算直径 D 和高度 h 的测量平均值得：D＝10.080mm，h＝10.110mm，则体积 V 的测量结果的估计值为

$$V=\frac{\pi D^2}{4}h=806.8\ mm^3$$

2．不确定度评定

分析测量方法可知，对体积 V 的测量不确定度影响显著的因素主要有：直径和高度的测量重复性引起的不确定度 u_1 、u_2 ；测微仪示值误差引起的不确定度 u_3 。分析这些不确定度特点可知，不确定度 u_1 、u_2 应采用 A 类评定方法，而不确定度 u_3 应采用 B 类评定方法。

下面分别计算各主要因素引起的不确定度分量。

（1）　直径 D 的测量重复性引起的标注不确定度分量 u_1 ：　由直径 D 的 6 次测量值求得平均值的标准差 σ_D ＝0.0048mm，则直径 D 的测量标准不确定度 $u_D=\sigma_D$ ＝0.0048mm。

又因 $\frac{\partial V}{\partial D}=\frac{\pi D}{2}h$，故直径 D 测量重复性引起的不确定度分量为

$$u_1=\left|\frac{\partial V}{\partial D}\right|u_D=0.77\,mm^3$$

其自由度 ν_1 ＝6－1＝5。

（2）　高度 h 的测量重复性引起的标注不确定度分量 u_2 ：　由高度 h 的 6 次测量值

求得平均值的标准差σ_h＝0.0026mm，则高度 h 的测量标准不确定度$u_h = \sigma_h$＝0.0026mm。

又因$\partial V / \partial h = \pi D^2/4$，故高度 h 测量重复性引起的不确定度分量为

$$u_2 = \left|\frac{\partial V}{\partial h}\right| u_h = 0.21\,mm^3$$

其自由度v_2＝6－1＝5。

（3） 测微仪的示值误差引起的标准不确定度分量u_3由仪器说明书获得测微仪的示值误差范围±0.01mm，取均匀分布，按式（4－3）计算得测微仪示值标准不确定度$u_{仪}$＝$\frac{0.01\text{mm}}{\sqrt{3}}$＝0.0058mm，由此引起的直径和高度测量的标准不确定度分量分别为

$$u_{3D} = \left|\frac{\partial V}{\partial D}\right| u_{仪}, \qquad u_{3h} = \left|\frac{\partial V}{\partial h}\right| u_{仪}$$

则测微仪的示值引起的体积测量不确定度分量为

$$u_3 = \sqrt{(u_{3D})^2 + (u_{3h})^2} = \sqrt{(\frac{\partial V}{\partial D})^2 + (\frac{\partial V}{\partial h})^2}\ u_{仪} = \sqrt{(\frac{\pi D}{2}h)^2 + (\frac{\pi D^2}{4})^2}\ u_{仪} = 1.04\,mm^3$$

取相对标注差$\frac{\sigma_{u_3}}{u_3}$＝35%，对应的自由度$v_3 = \frac{1}{2\times(0.35)^2}$＝4。

3．不确定度合成

因不确定度分量u_1、u_2、u_3相互独立，即ρ_{ij}＝0，按式（4－11）得体积测量的合成标准不确定度

$$\mathrm{u_c} = \sqrt{\mathrm{u}_1^2 + \mathrm{u}_2^2 + \mathrm{u}_3^2} = \sqrt{(0.77)^2 + (0.21)^2 + (1.04)^2}\ mm^3 = 1.3\,mm^3$$

按式（4－16）计算其自由度得

$$\nu = \frac{u_c^4}{\sum_{i=1}^{3}\frac{u_i^4}{v_i}} = \frac{(1.3)^4}{\frac{(0.77)^4}{5} + \frac{(0.21)^4}{5} + \frac{(1.04)^4}{5}} = 7.86，取\ \nu = 8。$$

4．展伸不确定度

取置信概率 P＝0.95，自由度 v＝8，查 t 分布表得$t_{0.95}$（8）＝2.31，即包含因子 k＝2.31。于是，体积测量的展伸不确定度为

$$\mathrm{U} = \mathrm{k}\,u_c = 2.31 \times 1.3\,mm^3 = 3.0\,mm^3$$

5．不确定度报告

1） 用合成标准不确定度评定体积测量的不确定度，则测量结果为

$$V=806.8\,mm^3，\ u_c=1.3\,mm^3，\ v=7.86。$$

2） 用展伸不确定度评定体积测量不确定度，则测量结果为

$$V=(806.8\ \pm 3.0)\ \ mm^3，P=0.95，v=8。$$

其中±符号后的数值是展伸不确定度 $U-k\,u_c=3.0\,mm^3$，是由合成标准不确定度 $u_c=$ $1.3\,mm^3$ 及包含因子 k＝2.31 确定的。

习　题

4－1　某圆球的半径为 r，若重复 10 次测量得 r±σ_r＝（3.132±0.005）cm，试求该圆球最大截面的圆周和面积及圆球体积的测量不确定度（置信概率 P＝99％）。

4－2　望远镜的放大率 D＝f_1/f_2，已测得物镜主焦距 $f_1\pm\sigma_1$＝（19.80±0.10）cm，目镜的主焦距 $f_2\pm\sigma_2$＝（0.800±0.005）cm，求放大率测量中，由 f_1、f_2 引起的不确定度分量和放大率 D 的标准不确定度。

4－3　测量某电路电阻 R 两端的电压 U，由公式 I＝U/R 算出电路电流 I。若测得 U±σ_U=(16.50±0.05)V、R±σ_R＝（4.26±0.02）Ω、相关系数 ρ_{UR}=－0.36，试求电流 I 的标准不确定度。

4－4　某校准书说明，标称值 10Ω 的标准电阻器的电阻 R 在 20$^\circ C$ 时为 10.000742Ω±129$\mu\Omega$（P＝99％），求该电阻器的标准不确定度，并说明属于哪一类评定的不确定度。

4－5　在光学计上用 52.5mm 的量块组作为标准件测量圆柱体直径，量块组由三块量块研合而成，其尺寸分别是：l_1＝40mm，l_2＝10mm，l_3＝2.5mm，量块按“级”使用，经查手册得其研合误差分别不超过±0.45μm、±0.30μm、±0.25μm（取置信概率 P＝99.73％的正态分布），求该量块组引起的测量不确定度。

4－6　某数字电压表的说明书指出，该表在校准后的两年内，其 2V 量程的测量误差不超过±（14×10^{-6}×读数+1×10^{-6}×量程）V，相对标注差为 20％，若按均匀分布，求 1V 测量时电压表的标注不确定度。设在该表校准一年后，对标称值为 1V 的电压进行 16 次重复测量，得观测值的平均值为 0.92857V，并由此算得单次测量的标准差为 0.000036V，若以平均值作为测量的估计值，试分析影响测量结果不确定度的主要来源，分别求出不确定度分量，说明评定方法的类别，求测量结果的合成标准不确定度及其自由度。

第五章　线性参数的最小二乘法

例　题

例1　已知某一铜棒的电阻－温度的函数关系为 $R = a + bt$，通过试验，得到在七种不同温度 t 下的电阻值如下：

序号	1	2	3	4	5	6	7
$t/^{\circ}C$	19.1	25.0	30.1	36.0	40.0	45.1	50.0
R/Ω	76.30	77.80	79.75	80.80	82.35	83.90	85.10

试求公式中的 a（单位Ω）和 b（单位$\Omega/^{\circ}C$）。

解：测量数值方程为

$$a + 19.1b = 76.30 \qquad a + 40.0b = 82.35$$
$$a + 25.0b = 77.80 \qquad a + 45.1b = 83.90$$
$$a + 30.1b = 79.75 \qquad a + 50.0b = 85.10$$
$$a + 36.0b = 80.80$$

建立正规方程

$$[1\times1]=1\times1+1\times1+\cdots\cdots+1\times1=7$$

$$[1\times t_i]=1\times t_1+1\times t_2+\cdots\cdots+1\times t_7=245.3$$

$$[t_i\times t_i]=t_1\times t_1+t_2\times t_2+\cdots\cdots+t_7\times t_7=9325.83$$

$$[1\times R_i]=1\times R_1+1\times R_2+\cdots\cdots+1\times R_7=566.0$$

$$[t_i\times R_i]=t_1\times R_1+t_2\times R_2+\cdots\cdots+t_7\times R_7=20044.5$$

则正规方程为

$$7a + 245.3b = 566.0$$
$$245.3a + 9325.8b = 20044.5$$

解正规方程得

$$a=70.76\Omega$$

$$b=0.288\Omega/^{\circ}C$$

因此，铜棒的电阻－温度数值关系为

$$R = 70.76 + 0.288t$$

例 2　试由下列测量方程组，求 x、y、z 的最可信赖值及其权。

$$x=0 \qquad \text{权} \quad P_1=85$$

$$y=0 \qquad P_2=108$$

$$z=0 \qquad P_3=49$$

$$x-y=0.92 \qquad P_4=165$$

$z-y=1.35 \qquad P_5=78$

$z-x=1.00 \qquad P_6=60$

解：求正规方程组各系数，如下表所示。

i	a_1	a_2	a_3	t_i	p_i	$p_i a_1^2$	$p_i a_1 a_2$
1	1	0	0	0	85	85	0
2	0	1	0	0	108	0	0
3	0	0	1	0	49	0	0
4	1	－1	0	0.92	165	165	－165
5	0	－1	1	1.35	78	0	0
6	－1	0	1	1.00	60	60	0
Σ						310	－165
i	$p_i a_1 a_3$	$p_i a_1 l_i$	$p_i a_2^2$	$p_i a_2 a_3$	$p_i a_2 l_i$	$p_i a_3^2$	$p_i a_3 l_i$
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	108	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	49	0
4	0	151.8	165	0	－151.8	0	0
5	0	0	78	－78	－105.3	78	105.3
6	－60	－60	0	0	0	60	60
Σ	－60	91.8	351	－78	－257.1	187	165.3

从而得正规方程组为

$$310z-165y-60z=91.8$$
$$-165x+351y-78z=-257.1$$
$$-60x-78y+187z=165.3$$

$$D=\begin{vmatrix} 310 & -165 & -60 \\ -165 & 351 & -78 \\ -60 & -78 & 187 \end{vmatrix}=10562355$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 91.8 & -165 & -60 \\ -257.1 & 351 & -78 \\ 165.3 & -78 & 187 \end{vmatrix}=1939545.9$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 310 & 91.8 & -60 \\ -165 & -257.1 & -78 \\ -60 & 165.3 & 187 \end{vmatrix}=-5082990$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 310 & -165 & 91.8 \\ -165 & 351 & -257.1 \\ -60 & -78 & 165.3 \end{vmatrix}=7838806.5$$

最可信赖值：

$$\mathrm{x}=\frac{D_1}{D}=\frac{1939545.9}{10562355}\approx 0.184$$
$$\mathrm{y}=\frac{D_2}{D}=\frac{-5082990}{10562355}\approx -0.481$$
$$\mathrm{z}=\frac{D_3}{D}=\frac{7838806.5}{10562355}\approx 0.742$$

令正规方程组中

$$\Sigma\ \mathrm{p_i}\ \mathrm{a_1}\ l_i=1$$

$$P_Z=\frac{1}{Z}=129.5$$

例 3 交流电路的电抗数值方程为 $X=\omega L-\frac{1}{\omega C}$ 在角频率

$\omega_1=5Hz$ 时，测得 X 为 $X_1=0.8\Omega$

$\omega_2=2Hz$ 时，测得 X 为 $X_2=0.2\Omega$

$\omega_3=1Hz$ 时，测得 X 为 $X_3=-0.3\Omega$

试求（1）L,C 及其方差；

（2）$\omega=3Hz$ 时（$\sigma_\omega=0.1Hz$）电抗值及其方差。

解： （1）根据题意列出测量方程如下：

$$X_1=5L-\frac{1}{5C}=0.8\Omega$$
$$X_2=2L-\frac{1}{2C}=0.2\Omega$$
$$X_3=L-\frac{1}{C}=-0.3\Omega$$

根据测量方程列出误差方程组：

$$0.8\Omega-(5L-\frac{1}{5C})=v_1$$
$$0.2\Omega-(2L-\frac{1}{2C})=v_2$$
$$-0.3\Omega-(L-\frac{1}{C})=v_3$$

列出矩阵如下：

$$B=\begin{bmatrix}0.8\\0.2\\-0.3\end{bmatrix}\qquad A=\begin{bmatrix}5 & -\frac{1}{5}\\ 2 & -\frac{1}{2}\\ 1 & -1\end{bmatrix}\qquad y=\begin{bmatrix}L\\ \frac{1}{C}\end{bmatrix}\qquad v=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}$$

根据最小二乘原理，测量方程的矩阵解为：

$$y=\left[A^{T}A\right]^{-1}A^{T}B$$

$$A^{T}A=\begin{bmatrix}5 & 2 & 1\\ -0.2 & -0.5 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & -0.2\\ 2 & -0.5\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}30 & -3\\ -3 & 1.29\end{bmatrix}$$

$$\left|A^{T}A\right|=\begin{bmatrix}30 & -3\\ -3 & 1.29\end{bmatrix}=29.7$$

$$\left[A^{T}A\right]^{-1}=\frac{1}{\left|A^{T}A\right|}\begin{bmatrix}1.29 & 3\\ 3 & 30\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.0434 & 0.101\\ 0.101 & 1.01\end{bmatrix}$$

$$A^{T}B=\begin{bmatrix}5 & 2 & 1\\ -0.2 & -0.5 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.8\\ 0.2\\ -0.3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4.1\\ 0.04\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}L\\ \frac{1}{C}\end{bmatrix}=\left[A^{T}A\right]^{-1}A^{T}B=\begin{bmatrix}0.0434 & 0.101\\ 0.101 & 1.01\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4.1\\ 0.04\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.182\\ 0.455\end{bmatrix}$$

则 $L=0.182$， $\frac{1}{C}=0.455$， $C=2.2$

$$v=B-Ay$$

$$=\begin{bmatrix}0.8\\ 0.2\\ -0.3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}5 & -0.2\\ 2 & -0.5\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.182\\ 0.455\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0.8\\ 0.2\\ -0.3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0.819\\ 0.137\\ -0.273\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.019\\ 0.063\\ -0.027\end{bmatrix}$$

$$\sum V^{2}=V^{T}V=\begin{bmatrix}-0.019 & 0.063 & -0.027\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-0.019\\ 0.063\\ -0.028\end{bmatrix}$$

=0. 0051

$$\sigma^{2}=\frac{\sum V^{2}}{n-t}=\frac{0.0051}{3-2}=0.0051$$

$$\sigma^{2}=0.071$$

$$d_{11}=0.0434$$

$$d_{12}=0.101$$

$$d_{22}=1.01$$

$$\sigma_L^2=d_{11}\sigma^2=0.0434\times0.0051\approx0.0002$$

$$\sigma_{\frac{1}{C}}^2=d_{22}\sigma^2=1.01\times0.0051\approx0.0052$$

令 $C=\dfrac{1}{z}$，

$$\sigma_C^2=\left(\frac{\partial\frac{1}{z}}{\partial z}\right)^2\sigma_z^2=\left(\frac{1}{z}\right)^4\sigma_z^2=C\sigma_{\frac{1}{C}}^2$$

$$=(2.2)^4\times0.0052=0.122$$

（2）当 $\omega=3$ （$\sigma_\omega=0.1$）时，电抗数值

$$x=\omega L-\frac{1}{\omega C}=3\times0.182-\frac{1}{3}\times0.455=0.394$$

$$\sigma_x^2=\left(\frac{\partial x}{\partial\omega}\right)^2\sigma_L^2+\left(\frac{\partial x}{\partial\frac{1}{C}}\right)^2\sigma_{\frac{1}{C}}^2+2\rho_{L\cdot\frac{1}{C}}\frac{\partial x}{\partial L}\frac{\partial x}{\partial\frac{1}{C}}\sigma_L\sigma_{\frac{1}{C}}+\left(\frac{\partial x}{\partial\omega}\right)^2\sigma_\omega^2$$

$$=\omega^2\sigma_L^2+\frac{1}{\omega^2}\sigma_{\frac{1}{C}}^2+2\frac{d_{12}}{\sqrt{d_{11}d_{22}}}(\omega)\left(-\frac{1}{\omega}\right)\sigma_L\sigma_{\frac{1}{C}}+\left(L+\frac{1}{\omega^2C}\right)^2\sigma_\omega^2$$

$$=3^2\times0.0002+\frac{1}{9}\times0.0052-2\frac{0.101}{\sqrt{0.0434\times1.01}}\sqrt{0.0002}\times\sqrt{0.0052}$$

$$+\left(0.182+\frac{1}{9\times2.2}\right)^2\times0.1^2=0.0019$$

例 4　今有两个电容器，分别测量其电容量，然后又将其串联和并联测量，得到如下结果（单位 μF）：

$$C_1=0.2071$$

$$C_2=0.2056$$

$$C_1+C_2=0.4111$$

$$\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}=0.1035$$

试求电容量的最可信赖值及其精度。

解：上述最后一个测量方程是非线性的，因为要化为线性的函数。为此将上述测量方程式表示为下面的函数形式：

$$f_1(C_1,C_2)=C_1$$

$$f_2(C_1,C_2)=C_2$$

$$f_3(C_1,C_2)=C_1+C_2$$

$$f_4(C_1,C_2)=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}$$

为了将 f_4 化为线性函数关系，令 C_1 的近似值 $x_0=0.2070$，C_2 的近似值 $y_0=0.2060$，并令 x,y 为修正值。

按台劳级数将函数在 x_0、 y_0 处展开，取一次项，则有

$$f_i(C_1,C_2)=f_i(x_0,y_0)+\left(\frac{\partial f_i}{\partial C_1}\right)x+\left(\frac{\partial f_i}{\partial C_2}\right)y$$

令 $\quad l_i=f_i(C_1,C_2)-f_i(x_0,y_0)$

$$\frac{\partial f_1}{\partial C_1}=1 \qquad \frac{\partial f_1}{\partial C_2}=0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial C_1}=0 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial C_2}=1$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial C_1}=1 \qquad \frac{\partial f_3}{\partial C_2}=1$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial C_1}=\frac{C_2^2}{(C_1+C_2)^2}=\frac{(0.2060)^2}{(0.2070+0.2060)^2}=0.249$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial C_2}=\frac{C_1^2}{(C_1+C_2)^2}=\frac{(0.2070)^2}{(0.2070+0.2060)^2}=0.251$$

$$l_1=0.2071-0.2070=0.0001$$

$$l_2=0.2056-0.2060=-0.0004$$

$$l_3 = 0.4111 - (0.2070 + 0.2060) = -0.0019$$

$$l_4 = 0.1035 - \left(\frac{0.2070 \times 0.2060}{0.2070 + 0.2060} \right) = 0.00025$$

代入得
$$x = 0.0001$$
$$y = -0.0004$$

$$x + y = -0.0019$$

$$0.249x + 0.251y = 0.00025$$

建立正规方程：

$$[a_i a_i] = 1 \times 1 + 1 \times 1 + 0.249 \times 0.249 = 2.062$$

$$[a_i l_i] = 1 \times 0.0001 + 1 \times (-0.0019) + 0.249 \times 0.00025 = -0.00174$$

$$[a_i b_i] = 1 \times 1 + 1 \times 1 + 0.249 \times 0.251 = 1.0625$$

$$[b_i b_i] = 1 \times 1 + 1 \times 1 + 0.251 \times 0.251 = 2.063$$

$$[b_i l_i] = 1 \times (-0.0004) + 1 \times (-0.0019) + 0.251 \times 0.00025 = -0.00224$$

得正规方程组为

$$2.062x + 1.0625y = -0.00174$$

$$1.0625x + 2.063y = -0.00224$$

$$D = \begin{vmatrix} 2.062 & 1.0625 \\ 1.0625 & 2.063 \end{vmatrix} = 3.125$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} -0.00174 & 1.0625 \\ -0.00224 & 2.063 \end{vmatrix} = -0.0012$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2.062 & -0.00174 \\ 1.0625 & -0.00224 \end{vmatrix} = -0.0028$$

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{-0.0012}{3.125} \approx -0.0004$$

$$y = \frac{D_2}{D} = \frac{-0.0028}{3.125} \approx -0.0009$$

则

$$C_1 = x_0 + x = 0.2070 - 0.0004 = 0.2066$$

$$C_2 = y_0 + y = 0.2060 - 0.0009 = 0.2051$$

$$p_{C1} = \frac{D}{[b_i b_i]} = \frac{3.125}{2.063} = 1.51$$

$$p_{C2} = \frac{D}{[a_i a_i]} = \frac{3.125}{2.062} = 1.52$$

$$v_1 = 0.2071 - 0.2066 = 0.0005$$

$$v_2 = 0.2056 - 0.2051 = 0.0005$$

$$v_3 = 0.411 - (0.2066 + 0.2051) = -0.0007$$

$$v_4 = 0.1035 - \frac{0.2066 \times 0.2051}{0.2066 + 0.2051} = -0.0006$$

$$\sum v_i^2 = 1.35 \times 10^{-6}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum v_i^2}{n-t}} = \sqrt{\frac{1.35 \times 10^{-6}}{4-2}} = 0.0008$$

$$\sigma_{C1} = \frac{\sigma}{\sqrt{p_{C1}}} = \frac{0.0008}{\sqrt{1.51}} \approx 0.0007$$

$$\sigma_{C2} = \frac{\sigma}{\sqrt{p_{C2}}} = \frac{0.0008}{\sqrt{1.52}} \approx 0.0007$$

则

$$C_1 = 0.2066 \pm 0.0007$$

$$C_2 = 0.2051 \pm 0.0007$$

习　题

5-1　已知测量方程如下：

$$x_1 = 16.6$$

$$x_2 = 4.2$$

$$x_1 + x_2 = 21.1$$

$$x_1 + 2x_2 = 24.4$$

试列出正规方程并给出 x_1, x_2 的最小二乘估计。

5-2　给出由正规方程

$$3x_1 + 3x_2 = 62.6$$

$$3x_1 + 6x_2 = 75.1$$

所确定的最小二乘估计的精确估计。

5-3　已知误差方程如下

$$v_1 = 10.013 - x_1$$

$$v_2 = 10.010 - x_2$$

$$v_3 = 10.002 - x_3$$

$$v_4 = 0.004 - (x_1 - x_2)$$

$$v_5 = 0.008 - (x_1 - x_3)$$

$$v_6 = 0.006 - (x_2 - x_3)$$

试给出 x_1, x_2, x_3 的最小二乘估计及其相应的精度。

5-4　由测量方程

$$3x + y = 2.9$$
$$x - 2y = 0.9$$
$$2x - 3y = 1.9$$

试求 x, y 的最小二乘估计及其相应的精度。

5-5　由下列测量方程

$$2x + y = 5.1$$
$$x - y = 1.1$$
$$4x - y = 7.4$$

试求 x, y 的最可信赖值及其精度。

5-6　硝酸钠在 100 份水内的溶解度与温度的关系，根据季特的测定为

温度/^{0}C	0	4	10	15	21	29	36	51	68
溶解度/g	66.7	71.0	76.3	80.6	85.7	92.9	99.4	113.5	125.1

门捷列夫认为，上述关系可用直线 67.5+0.87t 表示（式中 t 为温度）。试用最小二乘法来验证。

5-7　测力计与测温时温度 t 的对应值独立测得

t/0C	15	18	21	24	27	30
P/N	43.61	43.63	43.61	43.68	43.74	43.78

设 t 无误差，F 随 t 的变化成线性关系

$$F = K_0 + Kt$$

试给出线性方程中系数 K_0 和 K 的最小二乘估计及其精度估计。

5-8　对未知量 x, y, z 组合测量的结果如下：

$$x=0$$
$$y=0$$
$$z=0$$
$$x-y=0.92$$
$$z-y=1.35$$
$$z-x=1.00$$

试求 x,y,z 的最可信赖值及其标准差。

5-9　研究铂-铱米尺基准器得膨胀系数时得出，在不同温度下该米尺基准器的长度修正值可用下述公式表示：

$t/^0C$	17.250	0.551	5.363	10.459	14.277
L/U_M	150.28	5.70	47.61	91.49	124.25
$t/^0C$	17.806	22.103	24.533	28.986	34.417
L/U_M	154.87	192.64	214.57	252.09	209.84

$$x+yt+zt^2=L$$

式中，x 表示在 0^0C 时米尺基准器的修正值（单位 um）：y 和 z 为温度系数；t 为温度；L 为温度 t 时的修正值。经研究得，在不同温度下米尺基准器长度的修正值如下表所示，试求 x,y,z 的最可信赖值。

5-10　由等精度测量方程

$$x+37y+1369z=36.3$$
$$x+32y+1024z=41.4$$
$$x+27y+729z=47.5$$
$$x+22y+484z=54.7$$
$$x+17y+289z=63.2$$
$$x+12y+144z=72.9$$
$$x+7y+49z=83.7$$

试用矩阵求解 x,y,z 的最小二乘估计及其精度。

5-11　测得一直线上四段长度 AB,BC,CD,DE 分别为 24.1cm.35.8cm,30.3cm,33.8cm,而测得 AD 段长度为 90.0cm 和 DE 段长度为 100.0cm,试求 AB,BC,CD,DE 的最可信赖值。

5-12　测得由坐标点（1，0），（3，1）和（-1,2）到某点的距离数值分别为 3.1，2.2 和 3.2，试求该店坐标位置的最小二乘估计及其精度。

5-13　由等精度测量方程

$$x+y+z=4.01$$
$$2x-y+z=1.04$$
$$x+3y-2z=5.02$$
$$3x+y=4.97$$

试求 x,y,z 的最小二乘估计及其精度。

5-14　测得二电容的电容值 C_1=2.105uF,C_2=1.008uF 及二电容得并联电容值 C_1+C_2=3.121uF,试求二电容的电容 C_1 和 C_2 的最小二乘估计及其标准差。

5-15　由下列不等精度的测量方程组

$x_1=0$　　　权：P_1=8

$x_2=0$　　　P_2=10

$$x_1+2x_2=0.25 \qquad P_3=1$$

$$x_1-3x_2=-0.92 \qquad P_4=5$$

试求 x_1,x_2 得最小二乘估计及其标准差。

5-16　由下列不等精度的测量方程组

$$x-3y=-5.6 \qquad 权：\ P_1=1$$
$$4x+y=8.1 \qquad P_2=2$$
$$2x-y=0.5 \qquad P_3=3$$

试求 x,y 的最小二乘估计及其标准差。

5-17　试用矩阵由下列不等精度的测量方程组

$$2x+y=5.1 \qquad 权：\ P_1=1$$
$$x-y=1.1 \qquad P_2=2$$
$$4x-y=7.2 \qquad P_3=2$$

5-18　已知下列不等精度的测量方程组

$$x+y=37.0 \qquad 权：\ P_1=5$$
$$2x+y=61.9 \qquad P_2=5$$
$$3x+y=86.7 \qquad P_3=4$$
$$x+2y=49.2 \qquad P_4=4$$
$$x+3y=60.6 \qquad P_5=3$$
$$2x+3y=86.7 \qquad P_6=2$$
$$x+2y=98.4 \qquad P_7=3$$

试用矩阵求解 x,y 的最可信赖值及其标准差。

5-19　某数 N 是时间 S 得函数，其关系式为

$$N=x_1+x_2S+x_3S^2$$

若测定是在异权情况下进行的，测定得 N 与 S 的值如下：

S_i/S	1.5	1.1	0.7	0.3	−0.1	−0.5	−1.0	−1.5	−2.0
N_i	6.20	3.45	2.00	1.80	2.40	4.55	8.85	15.70	24.40
P_i	0.707	1	1	1	1	1	1	0.707	0.500

试求 x_1,x_2,x_3 的最可信赖值。

5-20　已知测量方程

$$x_1=l_1$$

$$x_2=l_2$$

$$x_1+x_2=l_3$$

$$2x_1+x_2=l_4$$

$$x_1+5x_2=l_5$$

测得数据及其相应的标准差为

$$l_1 = 1.632 \qquad \sigma_1 = 0.002$$

$$l_2 = 0.510 \qquad \sigma_2 = 0.002$$

$$l_3 = 2.145 \qquad \sigma_3 = 0.003$$

$$l_4 = 3.771 \qquad \sigma_4 = 0.003$$

$$l_5 = 4.187 \qquad \sigma_5 = 0.003$$

试求待求量 x_1, x_2 的最小二乘估计及其相应的精度。

5-21　试由测量方程

$$x_1^2 = 1.25$$

$$x_1 x_2 = 2.14$$

$$2x_2 = 3.86$$

$$x_1 + x_2 = 3.12$$

求待测量 x_1, x_2 及其相应的精度估计。

5-22　有三块三等量块，设其数值为 X,Y,Z,现用技术干设法将他们和已知尺寸数值为 L0 的二等量块进行比较测量，比较方式有以下三种：

（1）　每块三等量块各与二等量块比较两次。

（2）　第一块三等量块与二等量块比较两次，第二块三等量块与第一块比较两次，第三块三等量块与第二块比较两次。

（3）　每块三等量块各与二等量块比较一次，然后它们相互按不同的组合比较一次。

上述三种比较方式所得到测量数值方程式如下：试问哪一种比较方式能够得到最好测量结果（提示：可以比较不同比较方式下未知数的权）？

（1）	（2）	（3）
$X-L_0=L_1$	$X-L_0=L_1$	$X-L_0=L_1$
$X-L_0=L_2$	$X-L_0=L_2$	$Y-L_0=L_2$
$Y-L_0=L_3$	$Y-X=L_3$	$Z-L_0=L_3$
$Y-L_0=L_4$	$Y-X=L_4$	$Y-X=L_4$
$X-L_0=L_5$	$Z-Y=L_5$	$Z-X=L_5$
$Z-L_0=L_6$	$Z-Y=L_6$	$Z-Y=L_6$

5-23　今有四只大型直角尺进行全组合互验，如图 4-1 所示。两被检直接 I 和 II 安置的检验平板上，将测微表座紧贴在直角尺 I 得长边工作面上，测微表的测量头与直角尺 II 接触并垂直于尺 II 得长边工作面，自上而下移动测微表，取其最大与最小值之差记为 A，则 A 为尺 I 和 II 得垂直误差$\triangle_1$和$\triangle_2$之代数和，所得结果如下：

$$\triangle_1+\triangle_2=A$$
$$\triangle_1+\triangle_3=B$$
$$\triangle_1+\triangle_4=C$$
$$\triangle_2+\triangle_3=D$$
$$\triangle_2+\triangle_4=E$$
$$\triangle_3+\triangle_4=F$$

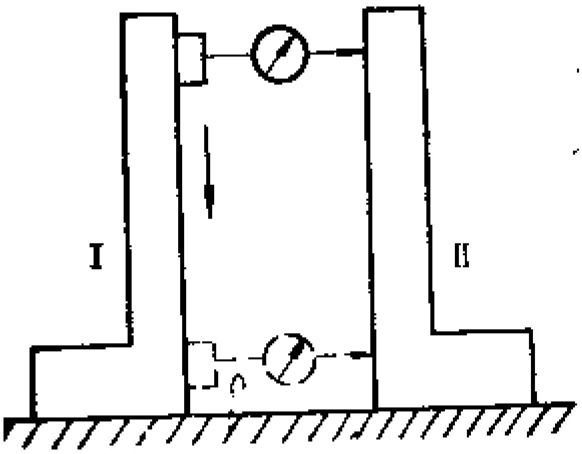


图 5－1

试求各尺的垂直度误差及其标准差。

第六章　回归分析

例　题

例 1　某含锡合金的熔点温度与含锡量有关，实验获得如下数据：

含锡量 $\omega_{Sn}\times 100$	20.3	28.1	35.5	42.0	50.7
熔点温度/℃	416	386	368	337	305
含锡量 $\omega_{Sn}\times 100$	58.6	65.9	74.9	80.3	86.4
熔点温度/℃	282	258	224	201	183

设锡含量的数据无误差，求：①熔点温度与含锡量之间的关系。②预测含锡量为 60%时，合金的熔点温度（置信概率 95%）。③如果要求熔点温度在 310～325℃之间，合金的含锡量应控制在什么范围内（置信概率 95%）？

解：用 x,y 分别表示含锡量的百分数和熔点温度。

（1）按实验数据在图 6-1 所示坐标系中描出散点。

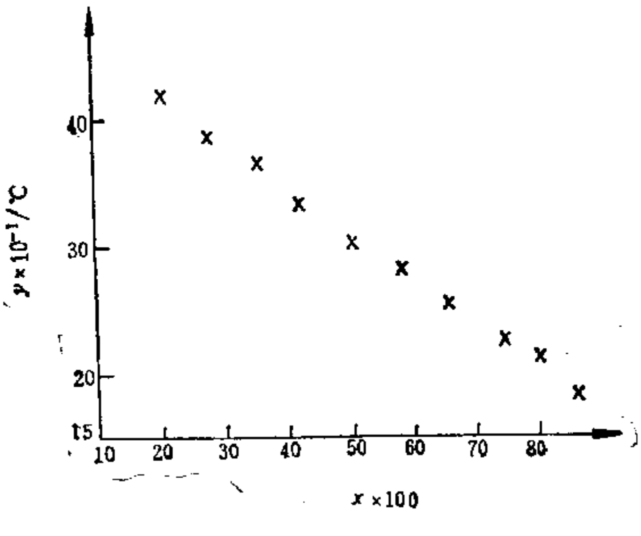


图 6-1

由图 6-1 可见，在实验区间内 y 与 x 的关系近似为线性关系，故设 y 对 x 的回归方程为

$$\hat{y}=b_0+bx$$

计算系数 b_0、b，列表如下：

序　号	x	y/℃	x^2	$y^2/(℃)^2$	Xy/℃
1	0.203	416	0.041209	173056	84.448
2	0.281	386	0.078961	148996	108.466

3	0.355	368	0.126025	135424	130.640
4	0.420	337	0.176400	113569	141.540
5	0.507	305	0.257049	93025	154.635
6	0.586	282	0.343396	79254	165.252
7	0.659	258	0.434281	66564	170.022
8	0.749	224	0.561001	50176	167.776
9	0.803	201	0.644809	40401	161.403
10	0.864	183	0.746496	33489	158.112
Σ	5.427	2960	3.409627	934224	1442.294

$$\sum_{t=1}^{N} x_t = 5.427 \qquad \sum_{t=1}^{N} y_t = 2960°C \qquad \text{N=10}$$

$$\bar{x} = 0.5427 \qquad \bar{y} = 296.0 \quad °C$$

$$\sum_{t=1}^{N} x_t^2 = 3.409627 \qquad \sum_{t=1}^{N} y_t^2 = 934224 \quad (°C)^2$$

$$\frac{1}{N}\left(\sum_{t=1}^{N} x_t\right)^2 = 2.94523$$

$$l_{yy} = \sum_{t=1}^{N} y_t^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_{t=1}^{N} y_t\right)^2 = 58064 \quad (°C)^2$$

$$l_{xx} = \sum_{t=1}^{N} x_t^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_{t=1}^{N} x_t\right)^2 = 0.4644$$

$$l_{yy} = \sum_{t=1}^{N} y_t^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_{t=1}^{N} y_t\right)^2 = 58064 \quad (°C)^2$$

$$\sum_{t=1}^{N} x_t y_t = 1442.294 \quad °C$$

$$\frac{1}{N}\left(\sum_{t=1}^{N} x_t\right)\left(\sum_{t=1}^{N} y_t\right) = 1606.392 \quad °C$$

$$l_{xy} = \sum_{t=1}^{N} x_t y_t - \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} x_t\right)\left(\sum_{i=1}^{N} y_t\right) = -164.098 \quad °C$$

$$b = \frac{l_{xy}}{l_{xx}} = -353.4 \quad °C$$

$$b_0 = \overline{y} - b\overline{x} = 487.8 \quad °C$$

$$\hat{y} = 487.8°C - (353.4°C)x$$

检验回归方程的显著性，列表如下：

来　源	平 方 和	自 由 度	方　差	F	显 著 性
回 归	$U = bl_{xy}$ =57992.23	$\upsilon_U = 1$	U/υ_U =57992.23	F=$\dfrac{U/\upsilon_U}{Q/\upsilon_Q}$ =6465.13	查表得 $F_{0.01}$（υ_U，υ_Q）=$F_{0.01}$（1，8）=11.26＜F 故，高度显著
残 余	$Q = l_{yy} - bl_{xy}$ $= 71.77$	υ_Q=N－2 $= 8$	$Q/\upsilon_Q = 8.97$		
总 计	$S = l_{yy}$ $= 58604$	$\upsilon_S = N - 1$			

（2）残余标准差

$$\sigma = \sqrt{Q/\upsilon_Q} = \sqrt{8.97}°C = 2.99 \quad °C$$

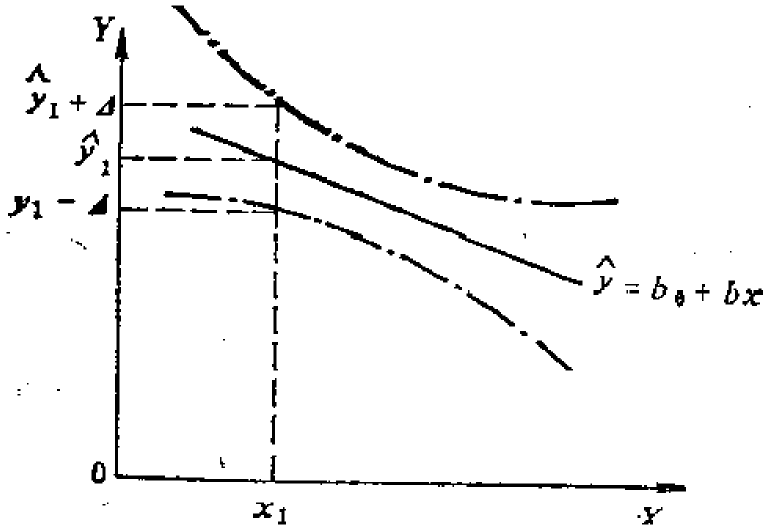


图 6-2

由概率论知 $(y - \hat{y})\Big/\sigma\sqrt{1 + \dfrac{1}{N} + \dfrac{(x - \overline{x})^2}{l_{xx}}}$ 服从 $t(N-2)$ 分布，故 y 的 $(1-\alpha)$ 置信区间为

$$\left(\hat{y} \pm t_{\alpha}(N-2)\sigma\sqrt{1+\frac{1}{N}+\frac{(x-\bar{x})^2}{l_{xx}}}\right) x \times 100$$

利用回归方程进行预测的方法见图 6-2。

当含锡量为 $\omega_{Sn} = 60\%$ 时，令 $x_1 = 0.6$，则

$$\hat{y}_1 = b_0 + bx_1 = (487.8 - 353.4 \times 0.6)°C \approx 276 \quad °C$$

y_1 的 95%置信区间为

$$\left(y_1 \pm t_{1-0.05}(N-2)\sigma\sqrt{1+\frac{1}{N}+\frac{(x-\bar{x})^2}{l_{xx}}}\right)$$

$$= \left(y_1 \pm t_{0.05}(8)\sigma\sqrt{1+\frac{1}{N}+\frac{(x-\bar{x})^2}{l_{xx}}}\right)$$

$$= \left(276 \pm 2.31 \times 2.99 \times \sqrt{1+\frac{1}{10}+\frac{(0.6-0.5427)^2}{0.4644}}\right)°C$$

$$= (276 \pm 7.26)°C \approx (283.269) \quad °C$$

即合金的熔点温度将以 95%的概率落在 269～283 $°C$ 之间。

（3） 利用回归方程进行控制的方法，见图 6-3。

由题意知

$$\begin{cases} y_2' = 310°C \\ y_3' = 325°C \end{cases}$$

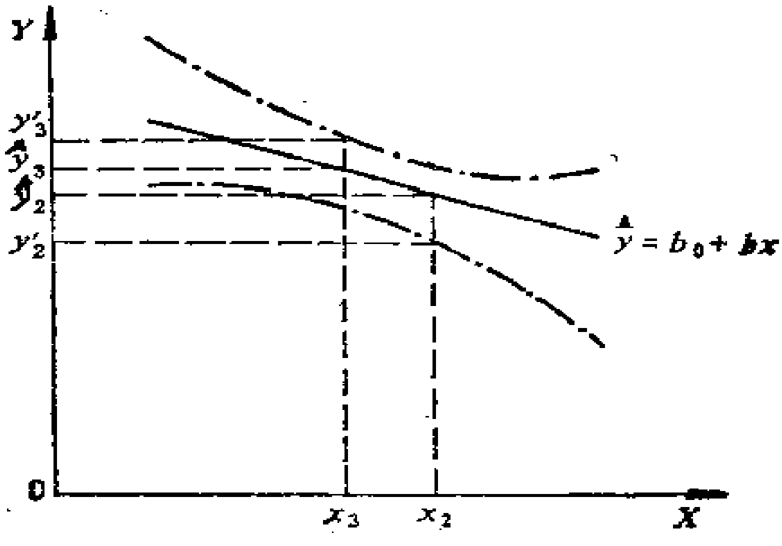


图 6-3

由图 6-3 得

$$\begin{cases} \hat{y}_2 \pm t_\alpha(N-1)\sigma\sqrt{1+\frac{1}{N}+\frac{(x-\bar{x})^2}{l_{xx}}} = y_2' \\ \hat{y}_3 \pm t_\alpha(N-1)\sigma\sqrt{1+\frac{1}{N}+\frac{(x-\bar{x})^2}{l_{xx}}} = y_3' \end{cases}$$

即

$$b_0+bx_2+t_\alpha(N-1)\sigma\sqrt{1+\frac{1}{N}+\frac{(x_2-\bar{x})^2}{l_{xx}}}=y'_2$$

$$b_0+bx_3+t_\alpha(N-1)\sigma\sqrt{1+\frac{1}{N}+\frac{(x_3-\bar{x})^2}{l_{xx}}}=y'_3$$

代入数字得

$$\left[487.8-353.4x_2+2.31\times2.99\times\sqrt{1+\frac{1}{N}+\frac{(x_2-0.5427)^2}{0.4644}}\right]=310℃$$

$$\left[487.8-353.4x_3+2.31\times2.99\times\sqrt{1+\frac{1}{N}+\frac{(x_3-0.5427)^2}{0.4644}}\right]=325℃$$

解上面两方程得

$$\begin{cases} x_2 = 50.3\% \\ x_3 = 46.1\% \end{cases}$$

即当合金的含锡量 ω_S 控制在 46.1%～50. 3%范围内时，它的熔点温度将以不小于 95%的概率落在 310～325℃之间。

例 2　电阻应变片的输入为应变量 ε，输出为电阻 R 。R 与 ε 之间的关系用下式定标：

$$R = K\varepsilon + R_0$$

式中，K 为电阻应变片的灵敏系数，R_0 为自由状态下的电阻。对某电阻应变片在 14 个点上进行 6 次重复测试，获得以下数据。若 ε 的测试误差可以忽略，求该电阻应变片的定标关系式以及非线性误差与重复误差。

测试点 t	应变量 ε /mm	电阻 R_{it} / Ω 测试次数					
		1	2	3	4	5	6
1	0.0060	134.42	134.68	134.77	134.60	134.58	134.78
2	0.0084	137.66	137.74	137.72	137.41	137.56	137.55
3	0.0096	137.99	138.20	138.24	138.42	138.47	138.30
4	0.0108	141.13	141.10	141.30	141.47	141.48	140.97
5	0.0120	138.70	138.65	138.54	138.50	138.41	138.86
6	0.0132	143.90	143.94	143.25	143.16	144.35	144.67
7	0.0144	148.64	148.34	148.38	147.40	147.44	146.84
8	0.0156	150.37	150.20	150.78	150.64	150.78	150.11
9	0.0168	147.44	150.23	150.83	147.03	147.26	150.20
10	0.0192	160.25	160.04	161.87	161.87	162.32	161.87
11	0.0216	164.88	164.60	164.77	164.90	165.23	165.62
12	0.0240	181.30	180.22	180.04	182.10	182.80	182.54
13	0.0252	181.44	181.06	180.91	181.47	180.34	179.84
14	0.0276	197.21	197.00	198.04	198.85	198.43	198.47

解 ：由题意知 R——ε 定标关系式为线性方程，故用一元线性回归分析求解。利用各测试点处电阻的平均值 $\overline{R_t}$ 计算系数 K 、 R_0 ，列表如下：

$$N = 14$$

$$\sum_{t=1}^{N} \varepsilon_t = 0.2244 \ \text{mm}$$

$$\bar{\varepsilon} = 0.01603 \ \text{mm}$$

$$\sum_{t=1}^{N} \varepsilon_t^2 = 0.004175 \ \text{mm}^2$$

$$\frac{1}{N}\left(\sum_{t=1}^{N} \varepsilon_t\right)^2 = 0.003597 \quad \text{mm}^2$$

$$l_{\varepsilon\varepsilon}=\sum_{t=1}^{N}\varepsilon_t^2-\frac{1}{N}\left(\sum_{t=1}^{N}\varepsilon_t\right)^2$$ =0.0005782 mm²

t	ε_t/mm	$\overline{R}_t/\Omega$	ε^2/mm^2	$\overline{R}_t^2/\Omega^2$	$\varepsilon_t\overline{R}_t/(mm\cdot\Omega)$
1	0.0060	134.64	0.000036	18127.93	0.80784
2	0.0084	137.61	0.000071	18936.51	1.15592
3	0.0096	138.27	0.000092	19118.59	1.32739
4	0.0108	141.24	0.000117	19948.74	1.52539
5	0.0120	138.61	0.000144	19212.73	1.66332
6	0.0132	143.88	0.000174	20701.45	1.89922
7	0.0144	147.84	0.000207	21856.67	2.12890
8	0.0156	150.48	0.000243	22644.23	2.34749
9	0.0168	148.83	0.000282	22150.37	2.50034
10	0.0192	161.37	0.000369	26040.28	3.09830
11	0.0216	165.00	0.000467	27225.00	3.56400
12	0.0240	181.50	0.000576	32942.25	4.35600
13	0.0252	180.84	0.000635	32703.11	4.55717
14	0.0276	198.00	0.000762	39204.00	5.46480
Σ	0.2244	2168.1	0.004175	340811.86	36.39608

$$m=6$$

$$\sum_{t=1}^{N}\overline{R_t}$$ =2168.1 Ω

$$\overline{R}=154.86$$ Ω

$$l_{RR}=\sum_{t=1}^{N}\overline{R}_t^2-\frac{1}{N}\left(\sum_{t=1}^{N}\overline{R_t}\right)^2$$

=5050.60 Ω

$$\sum_{t=1}^{N}\varepsilon_t\overline{R_t}=36.3961$$ mm • Ω

$$\frac{1}{N}\left(\sum_{t=1}^{N}\varepsilon_t\right)\left(\sum_{t=1}^{N}\overline{R_t}\right)=34.7515 \quad \text{mm}\cdot\Omega$$

$$l_{\varepsilon R}=\sum_{t=1}^{N}\varepsilon_t\overline{R_t}-\frac{1}{N}\left(\sum_{t=1}^{N}\varepsilon_t\right)\left(\sum_{t=1}^{N}\overline{R_t}\right)=1.6446 \quad \text{mm}\cdot\Omega$$

$$K=\frac{l_{\varepsilon R}}{l_{\varepsilon\varepsilon}}=2844.34 \quad \Omega/\text{mm}$$

$$R_0=\overline{R}-K\overline{\varepsilon}=109.27 \quad \Omega$$

故该应变片的 $R—\varepsilon$ 定标关系式为

$$R=(2844.34\,\Omega/\text{mm})\,\varepsilon+109.27 \quad \Omega$$

检验回归方程的显著性，列表如下：

$\left(R_{it}-\overline{R_t}\right)/\Omega$						
t	i					
	1	2	3	4	5	6
1	−0.22	0.04	0.13	−0.04	−0.06	0.14
2	0.05	0.13	0.11	−0.20	−0.05	−0.06
3	−0.28	−0.07	−0.03	0.15	0.20	0.03
4	−0.11	−0.14	0.06	0.23	0.24	−0.27
5	0.09	0.04	−0.07	−0.11	−0.20	0.25
6	0.02	0.06	−0.63	−0.72	0.47	0.79
7	0.80	0.50	0.54	−0.44	−0.40	−1.00
8	−0.11	−0.28	0.30	0.16	0.30	−0.37
9	−1.39	1.40	2.00	−1.80	−1.57	1.37
10	−1.12	−1.33	0.50	0.50	0.95	0.50
11	−0.12	−0.40	−0.23	−0.10	0.23	0.62
12	−0.20	−1.28	−1.46	0.60	1.30	1.04
13	0.60	0.22	0.07	0.63	−0.50	−1.00
14	−0.79	−1.00	0.04	0.85	0.43	0.47

$$U=mKl_{\varepsilon R}=28066.8 \quad \Omega^2 \quad , \ v_U=1$$

$$Q_L=ml_{RR}-U=2236.8 \quad \Omega^2 \ , \ v_{QL}=N-2=12$$

Q_E 的计算需要先求出各个测试值的 $(R_{it}-\overline{R}_t)$

$$Q_E = \sum_{t=1}^{N}\sum_{i=1}^{m}(R_{it} - \overline{R}_t)^2 = 37.9774 \quad \Omega^2$$

$$v_{QE} = N(m-1) = 70$$

来 源	平方和 $/\Omega^2$	自由度	方差 $/\Omega^2$	F
回 归	28066.8	1	28066.8	1011
失 拟	2236.8	12	186.4	2.48
误 差	37.9774	70	0.5425	
总 计	30341.6	83		

$$F_1= \frac{Q_L/v_{QL}}{Q_E/v_{QE}} =344>F_{0.01}(12，70)\approx2.48$$

$$F_2=\frac{U/v_U}{(Q_L+Q_E)/(v_{QL}+v_{QE})}=1012>F_{0.01}(1，82)\approx7$$

$$F_2=\frac{U/v_U}{Q_E/v_{QE}}=51733>F_{0.01}(1，70)\approx7$$

F_1 检验高度显著，说明相对于试验误差而言，失拟误差较大。其原因在于应变片的电阻与应变量之间严格说来是曲线关系，而通常用线性方程为应变片定标只是一种实用上的近似方法。其次，试验过程中其他影响电阻的因素（如环境温度）的变化也是引起失拟误差的可能原因。

两种 F_2 检验均高度显著，说明采用线性方程为应变片定标的近似方法是可取的。

测试范围内的非线性误差 $\Delta_{非线性}$ 为 $\left(\overline{R}_t - \hat{R}_t\right)$ 中绝对值最大者。现列表计算，如下表。由表知，非线性误差为

$$\Delta_{非线性}=10.23 \ \Omega$$

它与自由状态下电阻的比值为

$$\delta_{非线性}=\Delta_{非线性}/R_0=9.3\%$$

重复误差的标准差为

$$\sigma_{重复}=\sqrt{Q_E/v_{QE}}=0.74 \ \Omega$$

t	$\overline{R}_t/\Omega$	$\hat{R}_t/\Omega$	$\left(\overline{R}_t-\hat{R}_t\right)/\Omega$
1	134.64	126.34	8.30
2	137.61	133.16	4.45
3	138.27	136.58	1.69
4	141.24	139.99	1.25
5	138.61	143.40	- 4.79
6	143.88	146.82	- 2.94
7	147.84	150.23	- 2.39
8	150.48	153.64	- 3.16
9	148.83	157.05	- 8.22
10	161.37	163.88	- 2.51
11	165.00	170.71	- 5.71
12	181.50	177.53	3.97
13	180.84	180.95	- 0.11
14	198.00	187.77	10.23

例 3 在制订公差标准时，必须掌握加工的极限误差随被加工件尺寸变化的规律。例如，对用普通车床切削外圆进行了大量实验，得到加工极限误差Δ与被加工件直径 D 的统计资料如下：

D/mm	5	10	50	100	150	200	250	300	350	400
Δ/μm	8	11	19	23	27	29	32	33	35	37

求Δ与 D 之间关系的经验公式。

解：按统计资料的数据作散点图 6 – 4，可以看出Δ与 D 之间成曲线关系。将散点图与典型曲线比较，可选配：①双曲线$\frac{1}{\Delta}=a+\frac{b}{D}(b>0)$；②幂函数曲线$\Delta=aD^b\,(0<b<1)$；③对数曲线$\Delta=a+b\log D(b>0)$。现分别计算如下：

（1）双曲线：

在方程

$$\frac{1}{\Delta}=a+\frac{b}{D}$$

中，令$y=\frac{1}{\Delta}$，$x=\frac{1}{D}$，得

$$y=a+bx$$

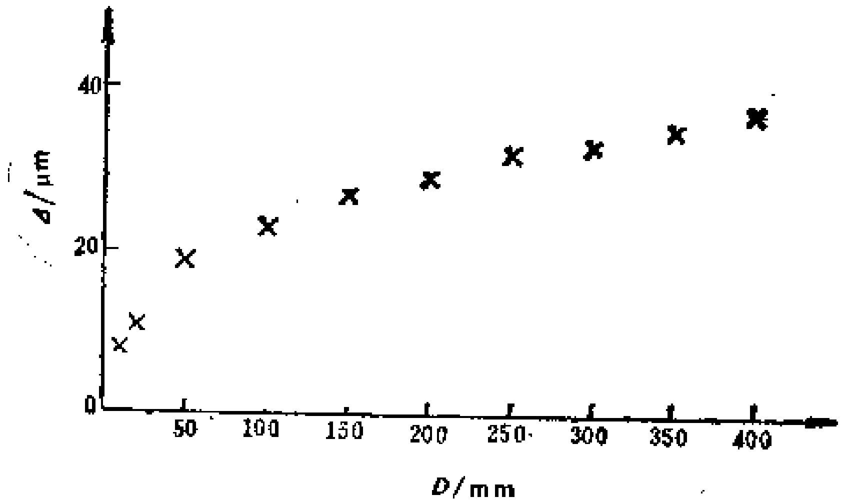


图 6-4

对此方程用线性回归方程求解，列表如下：

t	D_t/mm	$\Delta_t/\mu m$	x_t/mm^{-1}	$y_t/\mu m^{-1}$	x_t^2/mm^{-2}	$x_t y_t/(mm\bullet\mu m)^{-2}$
1	5	8	0.20000	0.12500	0.0400000	0.0250000
2	10	11	0.10000	0.09091	0.0100000	0.0090910
3	50	19	0.02000	0.05263	0.0004000	0.0010530
4	100	23	0.01000	0.04348	0.0001000	0.0004348
5	150	27	0.00667	0.03704	0.0000444	0.0002471
6	200	29	0.00500	0.03448	0.0000250	0.0001724
7	250	32	0.00400	0.03125	0.0000160	0.0001250
8	300	33	0.00333	0.03030	0.0000110	0.0001009
9	350	35	0.00286	0.02857	0.0000082	0.0000817
10	400	37	0.00250	0.02703	0.0000063	0.0000676
Σ	—	254	0.35436	0.50069	0.0506109	0.0363735

$$N = 10,\quad \sum_{t=1}^{N} \Delta_t = 254 \quad \mu m$$

$$\overline{\Delta} = \frac{1}{N}\left(\sum_{t=1}^{N} \Delta_t\right) = 25.4 \quad \mu m$$

$$\sum_{t=1}^{N} x_t = 0.35436 \quad mm^{-1}$$

$$\sum_{t=1}^{N} y_t = 0.50069 \quad \mu m^{-1}$$

$$\bar{x} = 0.03544 \quad mm^{-1}$$

$$\bar{y} = 0.05007 \quad \mu m^{-1}$$

$$\sum_{t=1}^{N} x_t^2 = 0.0506109 \quad mm^{-2}$$

$$\frac{1}{N}\left(\sum_{t=1}^{N} x_t\right)^2 = 0.0125571 \quad mm^{-2}$$

$$l_{xx} = 0.038054 \quad mm^{-2}$$

$$\sum_{t=1}^{N} x_t y_t = 0.0363735 \quad (mm \bullet \mu m)^{-1}$$

$$\frac{1}{N}\left(\sum_{t=1}^{N} x_t\right)\left(\sum_{t=1}^{N} y_t\right) = 0.017742 \quad (mm \bullet \mu m)^{-1}$$

$$l_{xy} = 0.01863 \quad (mm \bullet \mu m)^{-1}$$

$$b = l_{xy} / l_{xx} = 0.4896 \quad mm / \mu m$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x} = 0.0327 \quad \mu m^{-1}$$

$$\hat{y} = 0.0327 \mu m^{-1} + \left(0.4896 mm \bullet \mu m^{-1}\right) x$$

即

$$\frac{1}{\hat{\Delta}} = 0.327 \mu m^{-1} + \left(0.4896 mm \bullet \mu m^{-1}\right) / D$$

或

$$\hat{\Delta} = \frac{D}{0.327 \mu m^{-1} + 0.4896 mm \bullet \mu m^{-1}} \quad \mu m$$

计算残余平方和 Q、残余标准差 σ 和相关指数 R^2，列表如下：

t	$\Delta t / \mu m$	$\Delta t^2 / \mu m^2$	$\hat{\Delta} / \mu m$	$(\Delta t - \hat{\Delta}) / \mu m$	$(\Delta t - \hat{\Delta})^2 / \mu m^2$
1	8	64	7.656	0.344	0.1183
2	11	121	12.246	-1.246	1.5525
3	19	361	23.534	-4.534	20.5572
4	23	529	26.599	-3.599	12.9528
5	27	729	27.806	-0.806	0.6496
6	29	841	28.451	0.549	0.3014

7	32	1024	28.853	3.147	9.9036
8	33	1089	29.127	3.873	15.0001
9	35	1225	29.326	5.674	32.1943
10	37	1369	29.478	7.522	56.5805
$\sum$	—	7352	—	—	149.81

$$\sum_{t=1}^{N}(\Delta t-\bar{\Delta})^2=\sum_{t=1}^{N}\Delta t^2-\frac{1}{N}(\sum_{t=1}^{N}\Delta t)^2=900.4\mu m^2$$

$$Q=\sum_{t=1}^{N}(\Delta t-\hat{\Delta})^2=149.81\mu m^2$$

$$\sigma=\sqrt{Q/(N-2)}=4.3\ \mu m^2$$

$$R^2=1-\frac{Q}{\sum_{t=1}^{N}(\Delta t-\bar{\Delta})^2}=0.8336$$

(2) 幂函数曲线

对方程$\Delta=aD^6$两边取对数得

$$\log\Delta=\log a+b\log D$$

令 y= $\log\Delta$，x=$\log a$+bX，对此方程用线性回归方法求解，列表如下：

t	D_t/mm	$\Delta t/\mu m$	x_t/mm	$y_t/\mu m$	x_t^2/mm^2	$x_ty_t/(mm.\mu m)$
1	5	8	0.69897	0.90309	0.48856	0.63123
2	10	11	1	1.40139	1	1.04139
3	50	19	1.69897	1.27875	2.8865	2.17256
4	100	23	2	1.36173	4	2.72346
5	150	27	2.17609	1.43136	4.73537	3.11478
6	200	29	2.30103	1.4624	5.29474	3.36502
7	250	32	2.39794	1.50515	5.75012	3.60926
8	300	33	2.47712	1.51851	6.13613	3.76154
9	350	35	2.54407	1.54407	6.47228	3.92821
10	400	37	2.60206	1.5682	6.77072	4.08055
Σ			19.89625	13.97465	43.53442	28.42800

$$\sum_{t=1}^{N} x_t = 19.89625\ \text{mm},\quad \overline{x} = 1.98962\ \text{mm},\quad \overline{y} = 1.39746\ \mu m$$

$$\sum_{t=1}^{N} x_t^2 = 43.53442\ \text{mm}^2,\quad \sum_{t=1}^{N} y_t = 13.97465\ \mu m,\quad \sum_{t=1}^{N} x_t y_t = 28.42800\ mm.\mu m$$

$$\frac{1}{N}\left(\sum_{t=1}^{N} x_t\right)^2 = 39.58608\ \text{mm}^2$$

$$l_{xx} = 3.94834\ \text{mm}^2$$

$$\frac{1}{N}\left(\sum_{t=1}^{N} x_t\right)\left(\sum_{t=1}^{N} y_t\right) = 27.80431\ \text{mm.}\mu m$$

$$l_{xy} = 0.62369\ \text{mm.}\mu m$$

$$b = \frac{l_{xy}}{l_{xx}} = 0.15796\ \mu m.\text{mm}^{-1}$$

对数方程式为： $\log a = \overline{y} - b\overline{x} = 1.08318$

$$\hat{y} = 1.08318 + 0.15796x$$

即 $\log\hat{\Delta} = 1.08318 + 0.15796\log D$

或 $\hat{\Delta} = 1.08318 D^{0.15796}$

计算 Q，σ，R^2，列表如下：

t	$\Delta t/\mu m$	$\hat{\Delta} t/\mu m$	$(\Delta t-\hat{\Delta})/\mu m$	$(\Delta t-\hat{\Delta})^2/\mu m^2$
1	8	15.61673	-7.61673	58.01458
2	11	17.42368	-6.42363	42.26366
3	19	22.46725	-3.46725	12.02182
4	23	25.06686	-2.06636	4.27181
5	27	26.72514	0.27436	0.07555
6	29	27.96727	1.03273	1.06653
7	32	28.97076	3.02924	9.17629
8	33	29.81742	3.13253	10.12882
9	35	30.55202	4.44798	19.73453
10	37	31.20326	5.79674	32.60219
Σ	——	——	——	190.40588

$$Q = \sum_{t=1}^{N}(\Delta t - \hat{\Delta} t)^2 = 190.40588\ \mu m^2$$

$$\sigma=\sqrt{Q/(N-2)}=4.8786\ \mu m$$

$$R^2=1-\frac{Q}{\sum_{t=1}^{N}(\Delta t-\bar{\Delta}t)^2}=0.7885$$

(3) 对数曲线

在方程 Δ=a+blogD 中，令 y=Δ， x=logD,得

y=a+bx

对此方程用线形回归方法求解，列表如下：

t	Dt/mm	$\Delta t/\mu m$	x_t/mm	$y_t/\mu m$	x_t^2/mm^2	$x_ty_t/(mm\mu m)$
1	5	8	0.69897	8	0.48856	5.59176
2	10	11	1.00000	11	1.00000	11.00000
3	50	19	1.69897	19	2.88650	32.28043
4	100	23	2.00000	23	4.00000	46.00000
5	150	27	2.17609	27	4.73537	58.75443
6	200	29	2.30103	29	5.29474	66.72987
7	250	32	2.39794	32	5.75012	76.73408
8	300	33	2.47712	33	6.13613	81.74496
9	350	35	2.54407	35	6.47228	89.04245
10	400	37	2.60206	37	6.77072	96.27622
Σ			19.89625	254	43.53442	564.1542

$\sum_{t=1}^{N}x_t$=19.89625 mm，$\bar{x}$=1.98962 mm，$\sum_{t=1}^{N}x_t^2$=43.53442 mm^2

$\sum_{t=1}^{N}y_t$=254 μm，$\bar{y}$=25.4 μm，$\sum_{t=1}^{N}x_ty_t$=564.1542 $mm.\mu m$

$$\frac{1}{N}(\sum_{t=1}^{N}x_t)^2=39.58608\ mm^2$$

$$\frac{1}{N}(\sum_{t=1}^{N}x_t)(\sum_{t=1}^{N}y_t)=505.3648\ mm.\mu m$$

$$l_{xx}=3.94834\ mm^2$$

$$l_{xy}=58.7894\ mm.\mu m$$

$$b = l_{xy}/l_{xx} = 14.8896 \ \mu m.mm^{-1}$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x} = -4.22465 \ \mu m$$

$$\hat{y} = -4.22465\,\mu m + (14.8896 \ \mu m.mm^{-1})$$

即数值方程式为 $\hat{\Delta}$ = -4.22465+14.8896logD。

计算 Q，σ 和 R^2，列表如下：

t	$\Delta t/\mu m$	$\hat{\Delta} t/\mu m$	$(\Delta t - \hat{\Delta})/\mu m$	$(\Delta t - \hat{\Delta})^2/\mu m^2$
1	8	6.1827	1.8173	3.3026
2	11	10.6650	0.3350	0.1122
3	19	21.0723	-2.0723	4.2944
4	23	25.5546	-2.5546	6.5260
5	27	28.1765	-1.1765	1.3842
6	29	30.0368	-1.0368	1.0750
7	32	31.4797	0.5203	0.2707
8	33	32.6587	0.3413	0.1165
9	35	33.6555	1.3445	1.8077
10	37	34.5190	2.4810	6.1554
Σ	—	—	—	25.0447

$$Q = \sum_{t=1}^{N} (\Delta t - \hat{\Delta} t)^2 = 25.0447 \ \mu m^2$$

$$\sigma = \sqrt{Q/(N-2)} = 1.7693 \ \mu m$$

$$R^2 = 1 - \frac{Q}{\sum_{t=1}^{N} (\Delta t - \bar{\Delta})^2} = 0.9722$$

比较三种曲线回归方程的拟合效果，以对数曲线为最佳。故取

$$\Delta = -4.22465 + 14.8896 \log D$$

作为 Δ 与 D 之间关系的经验公式。

例 4　某地区降雪量数值 y 可能与三个气象因素 x_1、x_2、x_3 有关。气象台统计了该地区 18 年的气象资料如下。根据经验推测，y 与 x_1、x_2、x_3 之间有线性关系。试确定它们之间的回归方程，并讨论 x_1、x_2、x_3 对 y 影响的大小。

年　份	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_1	164.3	71.3	58.9	105.4	74.4	201.5	136.4	96.1	89.9
x_2	0.56	0.56	4.34	0.84	6.58	2.38	13.16	14.14	16.24
x_3	268.6	277.1	62.9	266.9	100.3	209.1	78.2	198.9	294.1
y	83.2	78	92.3	79.3	70.2	100.1	105.3	120.9	120.9
年　份	10	11	12	13	14	15	16	17	18
x_1	179.8	114.7	142.6	155	136.4	173.6	111.6	179.6	158.1
x_2	17.64	15.28	23.34	23.34	30.24	32.34	2.66	37.52	41.86
x_3	190.4	188.7	193.8	227.8	124.1	285.6	243.1	343.4	210.8
y	66.3	98.8	124.8	100.1	120.9	123.5	70.2	218.4	128.7

解：选用以下数学模型作多元线性回归分析：

$$\hat{y}=\mu_0+b_1(x_1-\bar{x}_1)+b_2(x_2-\bar{x}_2)+b_3(x_3-\bar{x}_3)$$

计算数据列表如下

t	x_1	x_2	x_3	y	x_1^2	x_2^2	x_3^2	y^2
1	164.3	0.56	268.6	83.2	26994.49	0.3136	72145.96	6922.24
2	71.3	0.56	277.1	78	5083.69	0.3136	76784.41	6084
3	58.9	4.34	62.9	92.3	3469.21	18.8356	3956.41	8519.29
4	105.4	0.84	266.9	79.3	11109.16	0.7056	71235.61	6288.49
5	74.4	6.58	100.3	70.2	5535.36	43.2964	10060.09	4928.04
6	201.5	2.38	209.1	100.1	40602.25	5.6644	43722.81	10020.01
7	136.4	13.16	78.2	105.3	18604.96	173.1856	6115.24	11088.09
8	96.1	14.14	198.9	120.9	9235.21	199.9396	39561.21	14616.81
9	89.9	16.24	294.1	120.9	8082.01	263.7376	86494.81	14616.81
10	179.8	17.64	190.4	66.3	32328.04	311.1696	36252.16	4395.69
11	114.7	15.28	188.7	98.8	13156.09	233.4784	35607.69	9761.44
12	142.6	23.34	193.8	124.8	20334.76	544.7556	37558.44	15575.04
13	155	23.34	227.8	100.1	24025	544.7556	51892.84	10020.01
14	136.4	30.24	124.1	120.9	18604.96	914.4576	15400.81	14616.81
15	173.6	32.34	285.6	123.5	30136.96	1045.876	81567.36	15252.25
16	111.6	2.66	243.1	70.2	12454.56	7.0756	59097.61	4928.04
17	179.6	37.52	343.4	218.4	32256.16	1407.75	117923.6	47698.56
18	158.1	41.86	210.8	128.7	24995.61	1752.26	44436.64	16563.69
$\sum$	2349.6	283.02	3763.8	1901.9	337008.48	7467.57	889813.66	221895.31

x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	x_1y	x_2y	x_3y
92.01	44130.98	150.42	13669.76	46.59	22347.52
39.93	19757.23	155.18	5561.40	43.68	21613.80
255.63	3704.81	272.99	5436.47	400.58	5805.67
88.54	28131.26	224.20	8358.22	66.61	21165.17
489.55	7462.32	659.97	5222.88	461.92	7041.06
479.57	42133.65	497.66	20170.15	238.24	20930.91
1795.02	10666.48	1029.11	14362.92	1385.75	8234.46
1358.85	19114.29	2812.45	11618.49	1709.53	24047.01
1459.98	26439.59	4776.18	10868.91	1963.42	35556.69
3171.67	34233.92	3358.66	11920.74	1169.52	12623.52
1752.62	21643.89	2883.34	11332.36	1509.66	18643.56
3328.28	27635.88	4523.29	17796.48	2912.83	24186.24
3617.70	35309.00	5316.85	15515.50	2336.33	22802.78
4124.74	16927.24	3752.78	16490.76	3656.02	15003.69
5614.22	49580.16	9236.30	21439.60	3993.99	35271.60
296.86	27129.96	646.65	7834.32	186.73	17065.62
6738.59	61674.64	12884.37	39224.64	8194.37	74998.56
6618.07	33327.48	8824.09	20347.47	5387.38	27129.96
41321.83	509002.78	62004.49	257171.07	35661.16	414467.82

$$N = 18, M = 3$$

$$\sum_{t=1}^{N} x_{t1} = 2349.6$$

$$\sum_{t=1}^{N} x_{t2} = 283.02$$

$$\sum_{t=1}^{N} x_{t3} = 3763.8$$

$$\bar{x}_1 = 130.533$$

$$\bar{x}_2 = 15.7233$$

$$\bar{x}_3 = 209.1$$

$$\sum_{t=1}^{N} x_{t1}^2 = 337008.48$$

$$\sum_{t=1}^{N} x_{t2}^2 = 7467.57$$

$$\sum_{t=1}^{N} x_{t3}^2 = 889813.66$$

$$\sum_{t=1}^{N} y_t = 1901.9$$

$$\overline{y} = 105.661$$

$$\sum_{t=1}^{N} x_{t1}x_{t2} = 41321.83$$

$$\sum_{t=1}^{N} x_{t1}y_t = 257171.07$$

$$\sum_{t=1}^{N} x_{t1}x_{t3} = 509002.78$$

$$\sum_{t=1}^{N} x_{t2}y_t = 35661.16$$

$$\sum_{t=1}^{N} y_t^2 = 221895.31$$

$$\sum_{t=1}^{N} x_{t1}x_{t3} = 62004.49$$

$$\sum_{t=1}^{N} x_{t3}y_t = 414467.82$$

$$l_{11} = \sum_{t=1}^{N} x_{t1}^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_{t=1}^{N} x_{t1}\right)^2 = 30307.36$$

$$l_{12} = \sum_{t=1}^{N} x_{t1}x_{t2} - \frac{1}{N}\left(\sum_{t=1}^{N} x_{t1}\right)\left(\sum_{t=1}^{N} x_{t2}\right)$$
$$= 4378.29$$

$$l_{13} = \sum_{t=1}^{N} x_{t1}x_{t3} - \frac{1}{N}\left(\sum_{t=1}^{N} x_{t1}\right)\left(\sum_{t=1}^{N} x_{t3}\right)$$
$$= 17701.42$$

$$l_{22}=\sum_{t=1}^{N}x_{t2}^{2}-\frac{1}{N}\left(\sum_{t=1}^{N}x_{t2}\right)^{2}=3017.55$$

$$l_{23}=\sum_{t=1}^{N}x_{t2}x_{t3}-\frac{1}{N}\left(\sum_{t=1}^{N}x_{t2}\right)\left(\sum_{t=1}^{N}x_{t3}\right)$$
$$=2825.01$$

$$l_{33}=\sum_{t=1}^{N}x_{t3}^{2}-\frac{1}{N}\left(\sum_{t=1}^{N}x_{t3}\right)^{2}=102803.08$$

$$l_{1y}=\sum_{t=1}^{N}x_{t1}y_{t}-\frac{1}{N}\left(\sum_{t=1}^{N}x_{t1}\right)\left(\sum_{t=1}^{N}y_{t}\right)=8909.72$$

$$l_{2y}=\sum_{t=1}^{N}x_{t2}y_{t}-\frac{1}{N}\left(\sum_{t=1}^{N}x_{t2}\right)\left(\sum_{t=1}^{N}y_{t}\right)$$
$$=5756.95$$

$$l_{3y}=\sum_{t=1}^{N}x_{t3}y_{t}-\frac{1}{N}\left(\sum_{t=1}^{N}x_{t3}\right)\left(\sum_{t=1}^{N}y_{t}\right)$$
$$=16780.53$$

$$l_{yy}=\sum_{t=1}^{N}y_{t}^{2}-\frac{1}{N}\left(\sum_{t=1}^{N}y_{t}\right)^{2}=20938.44$$

$$L=\begin{bmatrix}30307.36 & 4378.29 & 17701.42\\ 4378.29 & 3017.55 & 2825.01\\ 17701.42 & 2825.01 & 102803.08\end{bmatrix}$$

$$|L|=6.68157\times10^{12}$$

$$L^{-1}=\frac{1}{|L|}=\begin{bmatrix}3.02232753\times10^{8} & -4.00095009\times10^{8} & -4.1046207\times10^{7}\\ -4.00095009\times10^{8} & 2.802349685\times10^{9} & -8.116645\times10^{6}\\ -4.1046207\times10^{7} & -8.116645\times10^{6} & 7.2284551\times10^{7}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4.52338\times10^{-5} & -5.98804\times10^{-5} & -6.143198\times10^{-6}\\ -5.98804\times10^{-5} & 4.19415\times10^{-4} & -1.214781\times10^{-6}\\ -6.143198\times10^{-6} & 1.214781\times10^{-6} & 1.08185\times10^{-5}\end{bmatrix}$$

$$b=L^{-1}\begin{bmatrix}l_{1y}\\ l_{2y}\\ l_{3y}\end{bmatrix}=L^{-1}\begin{bmatrix}8909.72\\ 5756.95\\ 16780.53\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.045\\ 1.861\\ 0.134\end{bmatrix}$$

即 $$b_1=-0.045,\quad b_2=1.861,\quad b_3=0.134$$

$\mu_0 = \overline{y} = 105.661$

$\hat{y} = 105.661 - 0.045(x_1 - 130.533) + 1.861(x_2 - 15.7233) + 0.134(x_3 - 209.1)$

$= 52.949 - 0.045x_1 + 1.861x_2 + 0.134x_3$

检验回归方程的显著性，列表如下:

来源	平方和	自由度	方差	F
回归 残余	$U = \sum_{j=1}^{M} b_j l_{iy}$ $= 12561.3$ $Q = l_{yy} - U$ $= 8377.1$	$\gamma_U = M = 3$ $\gamma_Q = N - M - 1$ $= 14$	$U / M = 4187.1$ $\sigma^2 = \frac{Q}{N - M - 1}$ $= 598.4$	$\frac{U/\gamma_U}{Q/\gamma_Q} = 6.997$
总计	$S = 20938.4$	$\gamma_s = 17$		

查表得 $F_{0.01}(3,14) = 5.56$

$F > F_{0.01}(3,14) = 5.56$，所以回归方程高度显著。

x_1、x_2、x_3 对 y 的影响可用偏回归平方和与残余平方和进行 F 检验判定。

$$P_1 = \frac{b_1^2}{c_{11}} = \frac{(-0.045)^2}{4.52338 \times 10^{-5}} = 44.7674 \qquad \gamma_{P1} = 1$$

$$P_2 = \frac{b_2^2}{c_{22}} = \frac{1.861^2}{4.19415 \times 10^{-4}} = 8257.5039 \qquad \gamma_{P2} = 1$$

$$P_3 = \frac{b_3^2}{c_{33}} = \frac{0.134^2}{1.08185 \times 10^{-5}} = 1659.7495 \qquad \gamma_{P3} = 1$$

$$F_1 = \frac{P_1 / \gamma_{P1}}{Q / \gamma_Q} = 0.075$$

$$F_2 = \frac{P_2 / \gamma_{P2}}{Q / \gamma_Q} = 13.80$$

$$F_3 = \frac{P_3/\gamma_{P3}}{Q/\gamma_Q} = 2.77$$

查表得 $F_{0.01}(1,14) = 8.81, F_{0.1}(1,14) = 3.10$

$F_2 > F_{0.01}(1,14), F_1 < F_{0.1}(1,14), F_3 < F_{0.1}(1,14)$，说明 x_2 是影响 y 的主要因素，而 x_1、x_3 的影响均不显著，且 x_1 的偏回归平方和又最小。故可剔除 x_1，重新建立 y 对 x_2、x_3 回归方程：

$$\hat{y} = \mu_0 + b_2^{'}(x_2 - \overline{x}_2) + b_3^{'}(x_3 - \overline{x}_3)$$

此时 $N = 18, M' = 2$。

$$b_2^{'} = b_2 - \frac{c_{12}}{c_{11}} b_1$$

$$= 1.861 - \frac{-5.98804\times10^{-5}}{4.52338\times10^{-5}}(-0.045)$$

$$= 1.801$$

$$b_3^{'} = b_3 - \frac{c_{13}}{c_{11}} b_1$$

$$= 0.134 - \frac{-6.143198\times10^{-6}}{4.52338\times10^{-5}}(-0.045)$$

$$= 0.128$$

$$\hat{y} = 105.661 + 1.801(x_2 - 15.7233) + 0.128(x_3 - 209.1)$$

$$= 50.578 + 1.801x_2 + 0.128x_3$$

检验显著性：

$$U' = b_2^{'} l_{2y} + b_3^{'} l_{3y} = 1.801\times5756.95 + 0.128\times16780.53$$

$$= 12516.2$$

$$\gamma_U^{'} = M' = 2$$

$$S' = l_{yy} = 20938.44$$

$$Q' = S' - U' = 8422.24, \gamma_Q^{'} = N - M - 1 = 15$$

$$F' = \frac{U'/\gamma_U^{'}}{Q'/\gamma_Q^{'}} = \frac{12516.2/2}{8422.24/15} = 11.15$$

查表得$F_{0.01}(2,15)=6.36$。$F'>F_{0.01}(2,15)$，回归方程高度显著。

讨论x_2、x_3对 y 的影响：

$$L'=\begin{bmatrix}3017.55 & 2825.01\\ 2825.01 & 102803.08\end{bmatrix}$$

$$(L')^{-1}=\frac{1}{3.02232753\times10^{-8}}\begin{bmatrix}102803.08 & -2825.01\\ -2825.01 & 3017.55\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3.40145\times10^{-4} & 9.34713\times10^{-6}\\ -9.34713\times10^{-6} & 9.98419\times10^{-6}\end{bmatrix}$$

$$P_2^{'}=\frac{b_2^{'}}{c_{22}^{'}}=\frac{1.801^2}{3.40145\times10^4}=9535.94 \qquad \gamma_{P_2}^{'}=1$$

$$P_3^{'}=\frac{b_3^{'}}{c_{33}^{'}}=\frac{0.128^2}{9.98419\times10^{-6}}=1654.48 \qquad \gamma_{P_3}^{'}=1$$

$$F_2^{'}=\frac{P_2^{'}/\gamma_{P_2}^{'}}{Q^{'}/\gamma_Q^{'}}=\frac{9535.94/1}{8422.24/15}=16.98$$

$$F_3^{'}=\frac{P_3^{'}/\gamma_{P_3}^{'}}{Q^{'}/\gamma_Q^{'}}=\frac{1645.48/1}{8422.24/15}=2.93$$

查表得$F_{0.01}(1,15)=8.68, F_{0.1}(1,15)=3.07$。$F_2^{'}>F_{0.01}(1,15), F_3^{'}<F_{0.1}(1,15)$，故进一步剔除$x_3$，建立 y 对$x_2$的回归方程，此时已为一元线性回归方程。

$$\hat{y}=\mu_0+b_2^{"}(x_2-\overline{x}_2)$$

利用以上获得的数据，求解如下：

$$b_2^{"}=\frac{l_{2y}}{l_{22}}=\frac{5756.95}{3017.55}=1.91$$

$$\hat{y}=105.661+1.91(x_2-15.7233)$$

$$=75.63+1.91x_2$$

$$U^{"}=b_2^{"}l_{2y}=1.91\times5756.95=10995.77, \gamma_{U^{"}}=1$$

$$S=l_{yy}=20938.44$$

$$Q^{"}=S-U^{"}=9942.67, \gamma_{Q^{"}}=N-2=16$$

$$F^{"}=\frac{U^{"}/\gamma_{U^{"}}}{Q^{"}/\gamma_{Q^{"}}}=\frac{10995.77/1}{9942.67/16}=17.69$$

查表得$F_{0.01}(1,16)=8.53$，$F^{"}>F_{0.01}(1,16)$，故回归方程高度显著。

习　题

6-1　根据以下数据，拟合 y 与 x 之间的线性关系（设 x 无误差）。

x	10	20	30	40	50	60
y	70	94	125	142	169	198

6-2　材料的剪切强度与材料承受的正应力有关，对某种材料试验的数据如下：

正 应 力 x/Pa	26.8	25.4	28.9	23.6	27.7	23.9
剪切强度 y/Pa	26.5	27.3	24.2	27.1	23.6	25.9
正 应 力 x/Pa	24.7	28.1	26.9	27.4	22.6	25.6
剪切强度 y/Pa	26.3	22.5	21.7	21.4	25.8	24.9

假设正应力的数值是精确的，求①剪切强度与正应力之间的线性回归方程。②当正应力为 24.5Pa 时，剪切强度的估计值是多少？

6-3　下表给出在不同质量下弹簧长度的观测值（设质量的观测值无误差）：

质量/g	5	10	15	20	25	30
长度/cm	7.25	8.12	8.95	9.90	10.9	11.8

①作散点图，观察质量与长度之间是否呈线性关系。②求弹簧的刚性系数和自由状态下的长度。

6-4　某制糖工艺过程的产糖率与过程温度有以下试验数据（已经过折算）：

温度/℃	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
产糖率×100	8.1	7.8	8.5	9.8	9.5	8.9

温度/℃	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
产糖率×100	8.6	10.2	9.3	9.2	10.5

①求产糖率与温度之间的线性回归方程。②检验产糖率与温度之间的线性关系是否密切？

6-5　空气压缩机中，润滑油的消耗量y_t（单位 g/h）与每转滴数x_t的 8 次试验数据如下：

t	1	2	3	4	5	6	7	8
$\dfrac{x_t}{滴\cdot \mathrm{t}^{-1}}$	1.5	2	1	1.5	1	1	2	2.5
$\dfrac{y_t}{g\cdot h^{-1}}$	32.3	47.5	26.25	37.7	22	23.75	49.8	55

由经验知，其结构形式为 $y_t=\beta_0+\beta x_t+\varepsilon_t$（$t$=1,2,……8），$\varepsilon$ ～N(0, σ^2)，试用最小二乘法估计参数 β_0、β 和 ε 的方差 σ^2。

6-6　在医学检查中，用显微镜对红血细胞计数是一项耗时多又不准确的工作。但是对填充细胞体进行测量却容易得多。为了求出这两者之间可能的关系，从 20 只狗身上抽取了血样。对每份血样，测量其填充细胞体 x 及相应的红细胞数 y，得到的资料如下表所列：

填充细胞体 x/mm	45	42	56	48	42	35	58
红血细胞数 y×10^{-6}	6.35	6.30	9.52	7.50	6.99	5.90	9.49
填充细胞体 x/mm	40	39	50	53	47	46	36
红血细胞数 y×10^{-6}	6.20	6.55	8.72	8.94	7.80	7.25	5.72
填充细胞体 x/mm	55	53	42	36	37	51	
红血细胞数 y×10^{-6}	9.54	8.38	6.35	5.89	5.94	8.07	

求根据填充细胞体估计红血细胞数的公式，并给出这种估计的精度。

6-7　在一元线性回归分析中，若规定回归方程必须过坐标系的原点，试建立这一类回归问题的数学模型并推导回归方程系数的计算公式。

6-8　大豆植株的平均高度 y（单位 cm）与周龄 x 的资料如下：

x/周	1	2	3	4	5
y/cm	5	17	24	33	41

求 y 对 x 的线性回归方程（注意：回归直线必须过原点）。

6-9　在一元线性回归分析中，当观测数据的数字比较庞杂时，对数据作适当变换可以简化计算。设变换关系式为

$$x'=d_1(x-c_1)，\quad y=d_2(x-c_2)$$

求证：$\overline{x}=c_1+\dfrac{\overline{x'}}{d_1}$；　$\overline{y}=c_2+\dfrac{\overline{y'}}{d_2}$；　$l_{xx}=\dfrac{1}{d_1^2}l_{x'x'}$；　$l_{yy}=\dfrac{1}{d_2^{\,2}}l_{y'y'}$；

$l_{xy}=\dfrac{1}{d_1d_2}l_{x'y'}$。

6-10　运用题 6-9 的数据变换方法，求 y 对 x 的线性回归方程。x、y 的观测如下：

x	2244	2238	2239	2241	2246	2237	2240	2243	2242	2245
Y	560.4	559.7	559.8	560.1	559.3	559.3	559.8	560.2	560.3	560.5

6-11　电炉炼钢的钢产量与电能消耗有关。现对 24 家电炉炼钢厂作了统计，钢的年产量与耗电量的数字如下：

钢的年产量/10^4 t	1.9	2.0	2.1	2.5	2.7	2.7	3.5	3.5
耗电量/（$10^6 kW \cdot h$）	1.4	1.3	1.8	2.5	2.8	2.5	3.0	2.7
钢的年产量/10^4 t	4.0	4.0	4.5	4.6	5.0	5.2	6.0	6.3
耗电量/（$10^6 kW \cdot h$）	4.0	3.5	4.2	3.5	5.5	5.0	5.5	6.4
钢的年产量/10^4 t	6.5	7.1	8.0	8.0	8.9	9.0	9.5	10.0
耗电量/（$10^6 kW \cdot h$）	6.0	5.3	6.5	7.0	8.5	8.0	8.1	8.1

① 求 y 与 x 之间的关系。②计划兴建一座年产量为 5.5×10^4t 的电炉炼钢厂，在制定工厂的能源预算时，应如何考虑对电能的需求（置信概率 95%）？

6-12　下表数据是退火温度对黄铜延性影响的试验结果。设 x 为精确变量。

退火温度 x/℃	300	400	500	600	700	800
黄铜延性 y×100	40	50	55	60	67	70

①求 y 对 x 的线性回归方程，并检验其显著性。② 退火温度为 550℃，黄铜的延性是多少(置信概率 95%)。③ 如果要求黄铜的延性在 50%～65%之间，退火温度应控制在什么范围内（置信概率 95%）。

6-13　设矿石中镍的含量占 y%，五氧化二磷的含量占 x%，今有化验数据如下表：

x×100	4.00	3.44	3.60	1.00	2.04	4.74	0.64
y×100	0.009	0.013	0.006	0.025	0.022	0.007	0.036
x×100	1.70	2.92	4.80	3.28	4.16	3.35	2.20
y×100	0.014	0.016	0.014	0.016	0.012	0.02	0.018

① 求 y 对 x 的回归方程，并作显著性检验（α=0.05）。②今化验一个样品，在质量五氧化二磷含量为 3.28%，预测镍的含量是多少（置信概率为 95%）。

6-14　某机器的销售量 x 与该机器易损件的销售量有关。现调查 28 对数据如下：

x/台	92	54	86	54	60	82	95	64	58	64
y/件	158	130	215	106	62	188	230	154	127	163

x/台	31	148	39	76	109	85	76	40	51
y/件	62	46	95	163	272	191	140	89	146
x/台	63	42	63	76	88	96	56	69	82
y/件	137	106	125	193	209	238	122	174	168

求 y 对 x 的回归方程，并作显著性检验（α=0.05）。

6-15 在 4 种不同温度下观测某化学反应生成物含量的百分数，每种在同一温度下重复观测 3 次，数据如下：

温度 x/℃	150			200		
生成物含量的百分数 y	77.4	76.7	78.2	84.1	84.5	83.7
温度 x/℃	250			300		
生成物含量的百分数 y	88.9	89.2	89.7	94.8	94.7	95.7

求 y 对 x 的线性回归方程，并进行方差分析和显著性检验。

6-16 变量 y 与 x 相关关系的实验数据如下表所示，在同一 x 处对 y 观测了两次：

x	63.70	64.09	64.35	64.74	65.00	65.26
y_1	21.58	21.84	21.85	21.97	22.10	22.09
y_2	21.71	21.83	21.97	22.10	22.23	22.24

求 y 对 x 的线性回归方程并检验其显著性。

6-17 在重复试验的回归分析问题中，设变量 x 取 N 个试验点，每个试验点处对变量 y 重复观测 m 次。求证：用全部 mN 个数据点求出的 y 对 x 回归方程与用 y 平均值的 N 个数据点求出的回归方程相同。

问：若在 x 的各个试验点处对 y 重复观测的次数不等，用上述两种方法求出回归方程是否相同？

6-18 为了给一个测力弹簧定标，在不同质量下对弹簧的长度进行了重复测量，所得观测值如下：

质量/g		5	10	15	20	25	30
长度/cm	1	7.28	8.06	8.90	9.98	10.8	11.5
	2	7.23	8.08	8.97	9.91	10.7	11.8
	3	7.26	8.15	9.00	9.86	10.8	11.6
	4	7.25	8.15	8.94	9.84	11.5	11.9
	5	7.23	8.16	8.94	9.91	10.7	12.2

①求弹簧长度对质量的定标关系式。② 长度与质量间的线性关系是否显著？

③求弹簧的非线性误差及试验的重复误差。

6-19　按照题 6-6 的数据，用分组法求 y 对 x 的线性回归方程。

6-20　用图解法求题 6-1 的回归直线，并写出方程。

6-21　用图解法求题 6-8 的回归直线，并写出方程。

6-22　在题 6-2 中，假设剪切强度的数值是精确的，正应力的数值含随机误差，求两者之间的线性回归方程。当剪切强度为 25.78Pa 时，正应力的估计值是多少？

6-23　在题 6-2 中，假设正应力与剪切强度的数据都含有随机误差，且两者随机误差的方差比为 1，求正应力与剪切强度之间的线性回归方程。

6-24　相关变量 x、y 均含有随机误差，根据下表数据求 x、y 间的线性回归方程，已知$\sigma_x{}^2/\sigma_y{}^2=\frac{1}{2}$。

x	4.58	5.81	6.44	6.93	7.70	9.12
y	43.9	53.3	54.3	55.8	60.2	66.6

6-25　在题 6-24 中，若$\sigma_x{}^2/\sigma_y{}^2=2$，求 x、y 间的线性回归方程。

6-26　用直线检验法验证下列数据可以用曲线 $y=x/(a+bx)$表示。

x	0.52	0.41	0.33	0.29	0.25	0.22	0.20
y	132	118	105	98	89	83	77

6-27　用直线检验法验证下列数据可以用曲线 $y=ax^h$表示。

x	1.585	2.512	3.979	6.310	9.988	15.85
y	0.03162	0.02291	0.02089	0.01950	0.01862	0.01513

6-28　用直线检验法验证下列数据可以用曲线 $y=ab^x$ 表示。

x	30	35	40	45	50	55	60
y	-0.4786	-2.188	-11.22	-45.71	-208.9	-870.9	-3802

6-29　用表差法验证下列数据可以用曲线$y=a+bx+cx^2$ 表示。

x	0.20	0.50	0.70	1.20	1.60	2.10	2.50	2.80	3.32	3.70
y	4.22	4.32	4.45	5.33	6.68	8.91	11.22	13.39	16.33	21.20

6-30　化曲线回归为直线回归的方法确定题 5-26 中的参数 a 和 b。

6-31　观察氡元素的放射性，测得其在 t 时刻的放射性强度$I(t)$与初始强度I_0之比的数据如下：

t/日	1	2	3	4	5	6	7
I(t)/ I_0	0.8348	0.6935	0.5814	0.4850	0.4055	0.3382	0.2818

试确定 I（t）随时间 t 变化的规律并求半衰期。

6－32 伽利略时代的物理学家为了研究重力加速度，曾观测小球沿斜面自由滚下的运动规律。假设在倾角 10° 的斜面上观察小球自静止状态开始滚动，经过 1s、1.5s、2s、2.5s、3s、3.5s、4s，滚过的距离分别为 0.87m、1.90m、3.38m、5.42m、7.70m、10.37m、13.63m，试确定小球的运动方程并由此计算重力加速度的值。

6－33 据理论分析，筒子纱电阻 R 与回潮率 M 的数值关系是

$$10^M = aR^b$$

在 20℃条件下，对 14 号筒子纱实测结果如下：

$M\times100$	4.42	6.14	6.43	7.07	7.28	8.52	9.16
$R/10^6\Omega$	41000	1790	852	331	266	33.2	11.1

试确定参数 a、b 以获得由电阻值估计回潮率的计算公式。

6-34 气体压力与体积的关系式为 $pV^a = b$，式中，p、V 分别表示压力和体积。给出以下实验数据，用最小二乘法决定 a、b（假设压力的数据无误差）。

P	0.5	1	1.5	2	2.5	3
V	1.62	1	0.75	0.62	0.52	0.46

6-35 某公司在 15 个地区调查某种商品的销售额和各地区居民数及平均每户总收入的资料如下：

地　　区	1	2	3	4	5	6	7	8
销售额/打	162	120	223	131	67	169	81	192
居民数/10^3人	274	180	375	205	86	265	98	330
每户总收入/元	2450	3254	3802	3838	2347	3782	3008	2450

地　　区	9	10	11	12	13	14	15
销售额/打	116	55	252	232	144	103	212
居民数/10^3人	195	53	430	372	236	157	370
每户总收入/元	2137	2560	4020	4427	2660	2088	2605

找出根据人口数和每户总收入推测某地区销售额的办法。

6-36 畜牧学家试图根据猪在进入肥育期时的初始体重和肥育期内的饲料消耗量预测在肥育期结束时的最终体重。实验数据如下：

实验分组数	1	2	3	4	5
最终重量 y/kg	95	77	80	100	97
初始重量 x_1/kg	42	33	33	45	39
饲料消耗量 x_2/kg	272	226	259	292	311
实验分组数	6	7	8	9	10
最终重量 y/kg	70	50	80	92	84
初始重量 x_1/kg	36	32	41	40	38
饲料消耗量 x_2/kg	183	173	236	230	235

试确定所求的预测公式。

6-36　为了延长某种血液制品的贮存期，使用了 3 种不同的化学制剂。对 3 种制剂不同物质含量百分数的混合液进行了多组试验，结果如下：

贮存期 y/月	25.5	31.2	25.9	38.4	18.4	26.7	26.4
制剂Ⅰ物质含量百分数 x_1	1.74	6.32	6.22	10.52	1.19	1.22	4.10
制剂Ⅱ物质含量百分数 x_2	5.30	5.42	8.41	4.63	11.60	5.85	6.62
制剂Ⅲ物质含量百分数 x_3	10.80	9.40	7.20	8.50	9.40	9.90	8.00
贮存期 y/月	25.9	32.0	25.2	39.7	35.7	26.5	
制剂Ⅰ物质含量百分数 x_1	6.32	4.08	4.15	10.15	1.72	1.70	
制剂Ⅱ物质含量百分数 x_2	8.72	4.42	7.60	4.83	3.12	5.30	
制剂Ⅲ物质含量百分数 x_3	9.10	8.70	9.20	9.40	7.60	8.20	

对所给数据进行线性回归分析并讨论各种制剂对贮存期影响的大小。

6-38　用多元回归分析方法，由下表所列数据确定 y 对 x 的回归曲线：

$$\hat{y}=b_0+b_1x_1+b_2x_2$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	9.1	7.3	3.2	4.6	4.8	2.9	5.7	7.1	8.8	10.2

6-39　炼焦炉的焦化时间 y 与炉宽 x_1 及烟道管相对湿度 x_2 的数据如下：

y/min	6.40	15.05	18.75	30.25	44.85	48.94	51.55	61.50	100.44	111.42
x_1/m	1.32	2.69	3.56	4.41	5.35	6.20	7.12	8.87	9.80	10.65
x_2	1.15	3.40	4.10	8.75	14.82	15.15	15.32	18.18	35.19	40.40

求回归方程 $\hat{y}=b_0+b_1x_1+b_2x_2$，检验显著性，并讨论 x_1、x_2 对 y 的影响。

6-40　用最小二乘法对下列数据进行谐波分析，计算到 6 阶谐波含量。

x	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°
y	0	-2.1	1.4	3.3	4.0	4.7	7.4	10.0
x	120°	135°	150°	165°	180°	195°	210°	225°
y	8.5	6.6	5.6	4.8	4.2	2.3	2.4	5.0
x	240°	255°	270°	285°	300°	315°	330°	345°
y	7.8	8.5	8.9	6.9	6.4	4.8	4.5	2.6

6-41　用 12 点坐标法对下列数据进行谐波分析。

x	0°	30°	60°	90°	120°	150°
y	4.4	2.7	-3.5	-2.6	0.8	3.3
x	180°	210°	240°	270°	300°	330°
y	6.0	6.9	4.9	3.5	3.1	2.8

6-42　检验一台无心磨床加工件的圆度，在横截面圆周的 12 个等分点上进行测量，测得值列表如下。设测量的误差可以忽略，按下表数据判断该磨床加工的外圆在圆度误差上有何特征？

x	0°	30°	60°	90°	120°	150°
y/μm	4.0	-5.7	-6.4	7.1	3.2	-6.2
x	180°	210°	240°	270°	300°	330°
y/μm	-9.1	3.4	4.3	-8.4	-5.3	6.3

第七章　动态测试数据处理基本方法

例　题

例 1　以 $x(t)=A_1\sin(\omega t+\theta_1)+A_2\sin(\sqrt{2}\omega t+\theta_2)$ 为例证明准周期数据是非周期数据。

证：假设 $x(t)=A_1\sin(\omega t+\theta_1)+A_2\sin(\sqrt{2}\omega t+\theta_2)$为周期数据，设周期为$T$。由周期的定义得

$$x(t+mT)=x(t)\quad（m\text{ 为任意整数}）$$

即

$$A_1\sin[\omega(t+mT)+\theta_1]+A_2\sin[\sqrt{2}\omega(t+mT)+\theta_2]=A_1\sin(\omega t+\theta_1)+A_2\sin(\sqrt{2}\omega t+\theta_2)$$

若要上面等式在m为任意整数时均成立，必须有

$$\omega(t+mT)+\theta_1=\omega t+\theta_1+n_1\times 2\pi$$

$$\sqrt{2}\omega(t+mT)+\theta_2=\sqrt{2}\omega t+\theta_2+n_2\times 2\pi$$

式中n_1、n_2为整数，将上面两式整理得

$$\omega mT=n_1\times 2\pi$$

$$\sqrt{2}\omega mT=n_2\times 2\pi$$

两式相除得

$$1/\sqrt{2}=n_1/n_2$$

此式不成立，所以原假设错误，$x(t)=A_1\sin(\omega t+\theta_1)+A_2\sin(\sqrt{2}\omega t+\theta_2)$是非周期函数。

例 2　随机过程$x(t)$为$x(t)=A\cos(\omega_0 t+\varphi)$，式中$\omega_0$为常数，$A$和$\varphi$是两个独立的随机变量，概率密度分别为

$$f(a)=1，\ 0<a<1$$

$$f(\varphi)=1/2\pi，\ 0<\varphi<2\pi$$

求$x(t)$的均值$m_x(t)$，均方值$\psi_x^2(t)$，方差$D_x(t)$，自相关函数$K_x(t,t+\tau)$和自协方差函数$C_x(t,t+\tau)$　并判断$x(t)$是否属平稳随机过程以及是否属各态历经随机过程。

解：
$$E[A^2]=\int_{-\infty}^{+\infty}a^2f(a)da=\int_0^1 a^2\times 1\times da=\frac{a^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}$$

$$E[\cos(\omega_0 t+\varphi)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(\omega_0 t+\varphi)f(\varphi)d\varphi=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\cos(\omega_0 t+\varphi)d\varphi=\frac{1}{2\pi}[-\sin(\omega_0 t+\varphi)]_0^{2\pi}=0$$

因为 A 与 φ 相互独立，所以 A 的函数和 φ 的函数也相互独立。

$$m_x(t)=E[x(t)]=E[A\cos(\omega_0 t+\varphi)]=E[A]\times E[\cos(\omega_0 t+\varphi)]=0$$

$$\begin{aligned}
R_x(t,t+\tau)&=E[x(t)x(t+\tau)]=E[A\cos(\omega_0 t+\varphi)A\cos(\omega_0 t+\omega_0\tau+\varphi)]\\
&=E[A^2]\times E\left\{\frac{1}{2}E[\cos(2\omega_0 t+\omega_0\tau+2\varphi)+\cos\omega_0\tau]\right\}\\
&=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\{E[\cos(2\omega_0 t+\omega_0\tau+2\varphi)]+E[\cos\omega_0\tau]\}\\
&=\frac{1}{6}\cos\omega_0\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_x(t,t+\tau)&=R_x(t,t+\tau)-m_x(t)m_x(t+\tau)\\
&=R_x(t,t+\tau)=\frac{1}{6}\cos\omega_0\tau
\end{aligned}$$

在 $C_x(t,t+\tau)$ 和 $R_x(t,t+\tau)$ 中，令 $\tau=0$，分别得

$$\varphi_x^2(t)=R_x(t,t)=\frac{1}{6}$$

$$D_x(t)=C_x(t,t)=\frac{1}{6}$$

可见 $x(t)$ 的均值为常数，自相关函数仅与时间间隔 τ 有关，且均方值有限，所以 $x(t)$ 属于平稳随机过程。

$$\lim_{\tau\to\infty}R_x(t,t+\tau)=\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{6}\cos\omega_0\tau\neq m_x^2(t)=0$$

所以 $x(t)$ 不是各态历经的。

例 3　已知平稳随机过程 $x(t)$ 的自相关函数为 $K_x(\tau)=e^{-a|\tau|}+A\cos\omega_0\tau$，$a$、$A$、$\omega_0$ 均为常数，求 $x(t)$ 的谱密度函数。

解：

$$\begin{aligned}
S_x(\omega)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}K_x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{-a|\tau|}+A\cos\omega_0\tau\right)e^{-j\omega\tau}d\tau\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a|\tau|}d\tau+\frac{A}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\omega_0\tau e^{-j\omega\tau}d\tau\\
&=\frac{a}{\pi(a^2+\omega^2)}+\frac{A}{4\pi}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]
\end{aligned}$$

例 4　已知平稳随机过程 $x(t)$ 的谱密度函数为 $s(\omega)=\dfrac{\omega^2+2}{\omega^4+5\omega^2+6}$，求 $x(t)$ 的自相关函数和均方值。

解：

$$
\begin{aligned}
K_x(\tau) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega^2+2}{\omega^4+5\omega^2+6} e^{j\omega\tau} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega^2+3} e^{j\omega\tau} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\times 2\pi j \times R_x\left[\frac{1}{z^2+3} e^{jz|\tau|}, \sqrt{3} j\right] \\
&= j\frac{1}{2\sqrt{3} j} e^{j\sqrt{3} j|\tau|} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}} e^{-\sqrt{3}|\tau|}
\end{aligned}
$$

$$
\psi_x^2 = R_x(0) = \frac{1}{2\sqrt{3}}
$$

例 5　设有随机过程 $x(t)=A\cos(\omega_0 t+\varphi)$，式中 ω_0 为常数，φ 为在 $(0,2\pi)$ 上均匀分布的随机变量；A 可以为常数，也可以为与 φ 相互独立的随机变量。试求（1）按时间平均的自相关函数及按集合平均的自相关函数。(2) 要满足什么条件才能保证 $x(t)$ 具有自相关函数的各态历经性？

解：（1）按时间平均的自相关函数为

$$
\overline{K_x(t,t+\tau)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)x(t+\tau)dt - \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} A^2\cos(\omega_0 t+\varphi)\cos(\omega_0 t+\omega_0\tau+\varphi)dt
$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{T\to\infty}\frac{A^2}{2T}\int_{-T}^{T}\frac{1}{2}\left[\cos(2\omega_0 t+\omega_0\tau+2\varphi)+\cos\omega_0\tau\right]dt \\
&= \frac{A^2}{4T}\int_{-T}^{T}\cos\omega_0\tau dt \\
&= \frac{A^2}{2}\cos\omega_0\tau
\end{aligned}
$$

按集合平均的自相关函数为

$$
\begin{aligned}
&R_x(t,t+\tau)=E[x(t)x(t+\tau)] \\
&=E\left[A^2\cos(\omega_0 t+\varphi)\cos(\omega_0 t+\omega_0\tau+\varphi)\right] \\
&=E\left[A^2\right]E\left\{\frac{1}{2}\left[\cos(2\omega_0 t+\omega_0\tau+2\varphi)+\cos\omega_0\tau\right]\right\} \\
&=\frac{E\left[A^2\right]}{2}E[\cos\omega_0\tau] \\
&=\frac{E\left[A^2\right]}{2}\cos\omega_0\tau
\end{aligned}
$$

（2）若要 $$\overline{R_x(t,t+\tau)}=R_x(t,t+\tau)$$

则须 $$\frac{A^2}{2}\cos\omega_0\tau=\frac{E\left[A^2\right]}{2}\cos\omega_0\tau$$

即 $A^2=E\left[A^2\right]$，故 A 必须为常数。所以，当 A 为常数时，$x(t)$ 具有自相关函数各态历经性。

习　题

7-1　求准周期数据 $x(t)=A_1\cos\omega_0 t+A_2\cos\sqrt{5}\omega_0 t$ 的傅立叶变换。

7-2　有如图 6-1 所示的连续锯齿波信号，求其频谱，并作幅值频谱图。

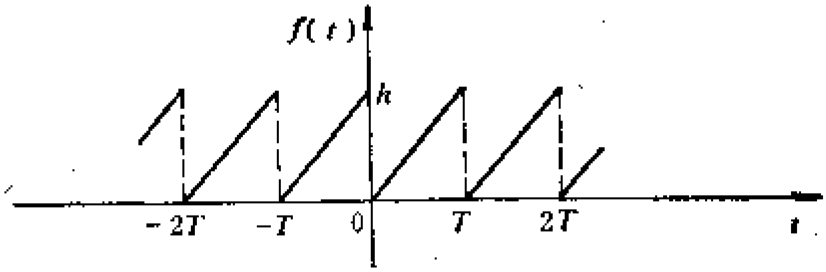


图 7－1

7-3　有如图 7-2 所示的单个锯齿波信号，求其频谱，并作幅值频谱图。

7-4　试求正态分布概率密度函数 $f(t)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$ 的频谱。

7-5　随机过程为 $x(t)=A\cos\omega_0 t+B\cos\omega_0 t$，式中 ω_0 为常数，A 和 B 是两个相互独立的服从正态分布 $N(0,\sigma)$ 的变量。求 $x(t)$ 的均值和自相关函数。

7-6　已知随机过程 $x(t)$ 的均值为 $m_x(t)$，自相关函数为 $K_x(t,t+\tau)$。求随机过程 $y(t)=x(t)+f(t)$ 的自相关函数，式中 $f(t)$ 为非随机函数。

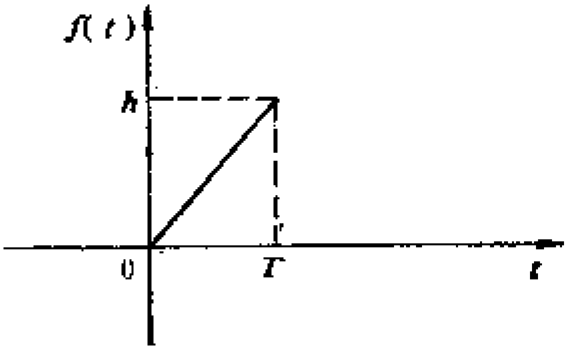


图 7－2

7-7　随机过程为 $x(t)=A\cos(\omega_0+\varphi)$，式中 A 、ω_0 为常数，φ 为区间（0，2π）上均匀的随机变量。求 $x(t)$ 的均值、方差和自相关函数。

7-8　设 $x(t)$ 是一随机相位周期过程，图 7-3 表示它的一个样本函数。周期 T 和幅值 A 都是常数，而相位 t_0 是在（0，T）上具有均匀分布的随机变量。求 $m_x(t)$ 、$\phi_x^2(t)$ 和 $D_x(t)$ 。

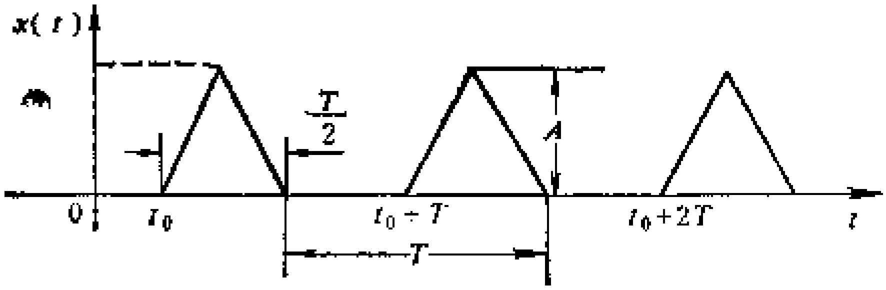


图 7－3

7-9　设有随机过程

$$x(t)=A\cos(wt+\varphi)$$

其中，A 是具有正态分布的随机变量，其概率密度是

$$f(a)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-u)^2}{2\sigma^2}}$$

φ 是在（0，2π）上具有均匀分布且与 A 相互独立的随机变量，ω是一常数。问 $x(t)$ 是否是平稳随机过程（注意利用以下结论：若 x 与 y 是两个相互独立的随机变量，$f(x)$ 、$g(y)$ 是连续函数，则 $f(x)$ 、$g(y)$ 也是相互独立的随机变量）？

7-10　设 $x(t)$ 为平稳随机过程，其自相关函数 $K_x(\tau)$ 是以 T 为周期的函数，证明对于任意的 t 恒有

$$E\{[x(t)-x(t+T)]^2\}=0$$

从而推出等式 $x(t+T)=x(t)$ 依概率 1 成立。

7-11　判断以下命题是否正确平稳随机过程的自相关函数 $K_x(t,t+\tau)$

①必须随|τ|的增大而减小
②必须随|τ|的增大而趋近一常数
③必须总是负的
④仅与 τ 有关

7-12　判断以下命题是否正确：各态历经过程的自相关函数 $K_x(t,t+\tau)$

①必须是非周期函数
②必须随|τ|的增大而趋近一常数
③必须总是非负的
④必须是偶函数

7-13　假定某平稳随机过程当 ω=0 时，其谱密度函数值为零，证明此过程的自相关函数满足 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) d\tau = 0$

7-14　设某平稳随机过程的自相关函数为

$$K(\tau)=Ae^{-\sigma|\tau|},\alpha>0$$

求；①均方值 ψ^2；②功率谱密度函数 $S(\omega)$。若该过程是各态历经过程，其均值 m 是多少？

7-15　图 7-4 中哪些曲线能够作为正确的平稳随机过程自相关函数曲线，为什么？

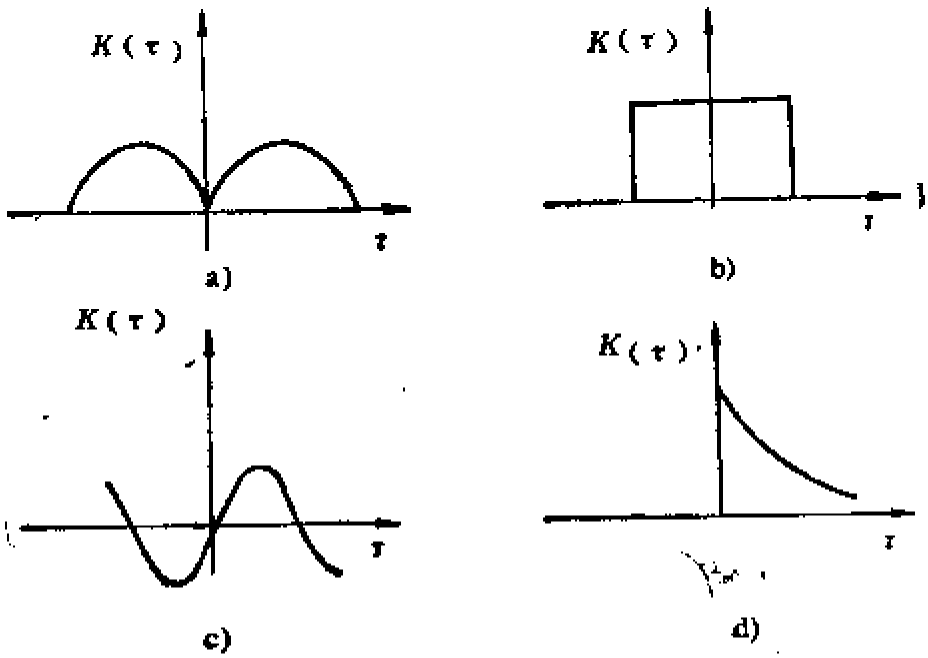


图 7—4

7-16　下面哪些函数是谱密度的正确表达式？为什么？

1） $S_1(\omega)=\dfrac{\omega^2+9}{(\omega^2+4)(\omega+1)^2}$

2） $S_2(\omega)=\dfrac{\omega^2+1}{\omega^4+5\omega^2+4}$

3） $S_3(\omega)=\dfrac{\omega^2+4}{\omega^4-4\omega^2+3}$

4） $S_4(\omega)=\dfrac{e^{-j\omega^2}}{\omega^2+2}$

5） $S_5(\omega)=\delta(\omega-\omega_0)+\dfrac{\omega^2}{\omega^4+1}$

7-17　对题 7-16 中正确的谱密度表达式计算自相关函数及均方值。

7-18　已知平稳过程 $x(t)$ 的谱密度为 $S_x(\omega)=\dfrac{\omega^2}{\omega^4+3\omega^2+2}$，求 $x(t)$ 的均方值。

7-19　已知平稳过程 $x(t)$ 的自相关函数为 $K_x(\tau)=4e^{-|\tau|}\cos\pi\tau+\cos 3\pi\tau$，求 $x(t)$ 的谱密度。

7-20　已知平稳过程 $x(t)$ 的自相关函数为

$$K_x(\tau)=\begin{cases}-\dfrac{|\tau|}{T},|\tau|<T\\ -1,\quad \text{其他}\end{cases}$$

求 $x(t)$ 的谱密度。

7-21　已知平稳过程 $x(t)$ 的谱密度为

$$K_x(\tau)=\begin{cases}8(1-\dfrac{|\omega|}{10})+6\delta(\omega-\pi)+6\delta(\omega+\pi),|\omega|\le 10\\ 0，\text{其他}\end{cases}$$

求 $x(t)$ 自相关函数及均方值。

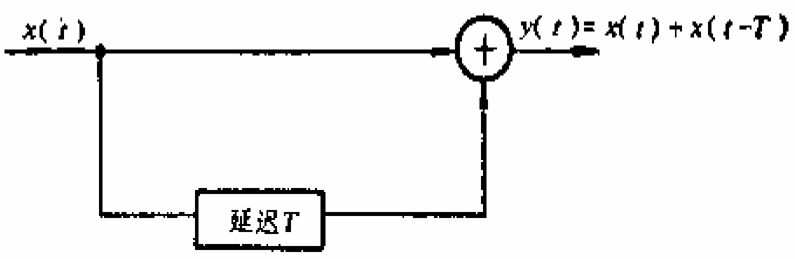


图 7－5

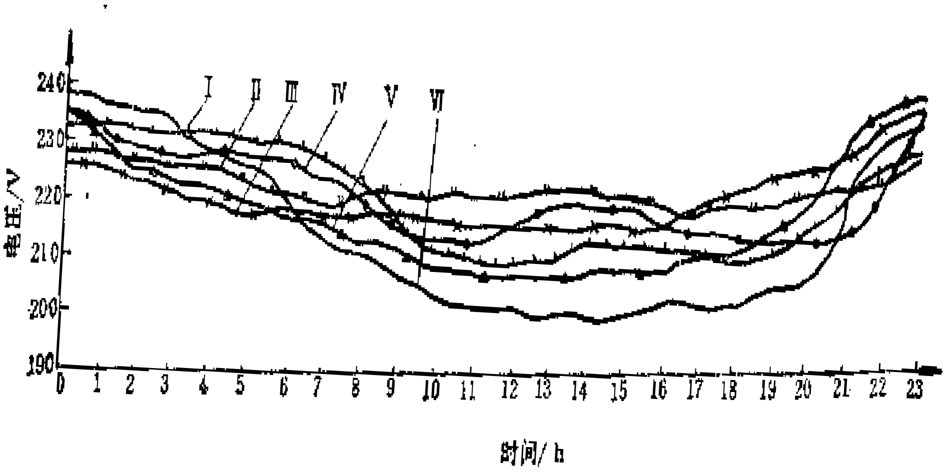


图 7－6

7-22　已知平稳过程 $x(t)$ 的谱密度为 $S_x(\omega)$，通过如图 7-5 的系统后输出 $y(t)$，证明 $y(t)$ 的谱密度为 $S_y(\omega)=2\delta_x(\omega)(1+\cos\omega T)$。

7-23　电网监测站对节点电压进行连续 6 天观测，每天仪器记录的曲线如图 7-6 所示。求此电压过程的均值、方差和自相关函数。用这些特征分析节电电压变化的统计规律。

7-24　对随机过程 $x(t)$ 进行试验，获得 6 个样本函数，曲线如图 7-7 所示。计算 $m_x(t)$，$D_x(t)$ 和 $K_x(t,t+\tau)$，并由此推测 $x(t)$ 是否是平稳过程。

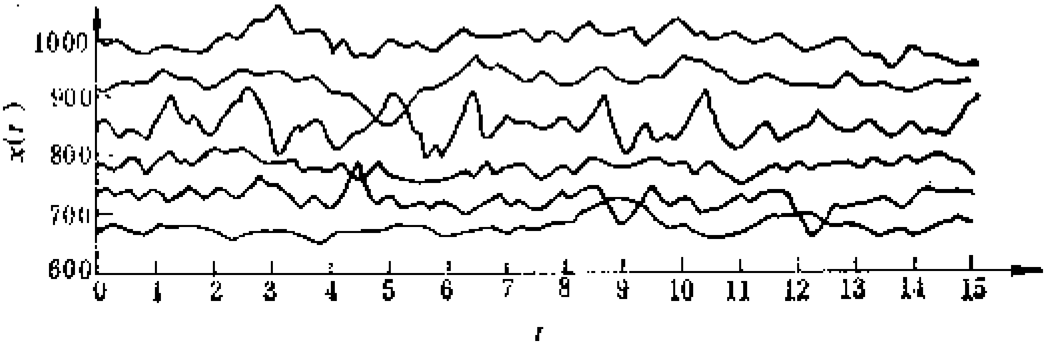
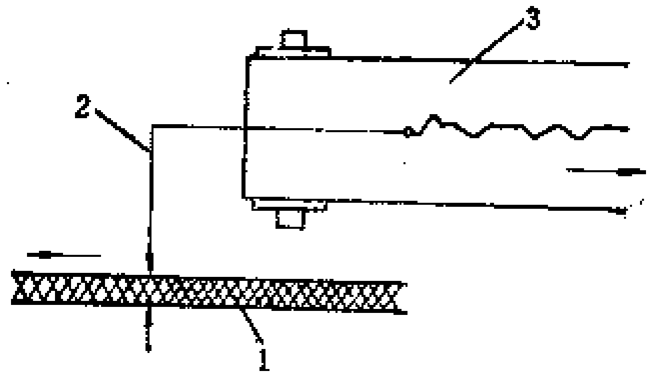


图 7－7

7-25　在橡胶厂的胶带生产流水线上，对胶带的厚度进行测量，如图 7-8 所示。假设测

得的数据为各态历经随机过程，现有记录上的一段曲线，如图 7-9 所示。试估计胶带厚度的平均值及厚度的波动。



1－胶带　2－测量装置　3－记录装置

图 7－8

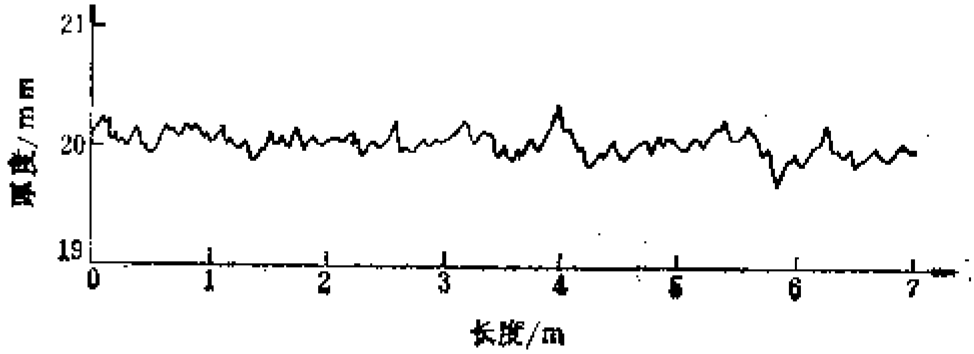


图 7－9

第八章 动态测量误差及其评定

习 题

8-1 使用表8-1中前10行数据，计算冲击加速度动态测量随机误差的总体协方差 $R_{1,5}$ 和 $R_{3,9}$，以及第1个样本的时间平均协方差 R_2 和 R_5。

8-2 设有质量-弹簧系统如图8-1a所示，现基础下方受到一个垂直向上的半正弦波加速度冲击激励，如图8-1b所示，用数字记忆示波器测得m的冲击加速度响应 $a(t)$ 数值为

时间 t/s	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005
加速度 $a(t)/m\cdot s^{-2}$	87	163	207	205	174
时间 t/s	0.006	0.007	0.008	0.009	0.010
加速度 $a(t)/m\cdot s^{-2}$	102	11	-78	-149	-197

1) 已知该质量-弹簧系统的自振频率为25Hz，通过理论指导，m的冲击加速度响应 $a(t)$ 公式为（π 为圆周率）：$a(t)=150\sin(150\pi t)-50\sin(50\pi t)+100\sin(100\pi t)$。若将此理论值取作真实值，计算该次测量的动态测量误差各瞬时值。

2) 若动态测量系统误差可忽略，求动态测量随即误差的时间均值和方差。

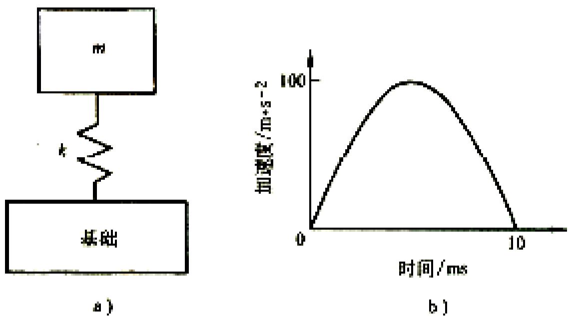


图8－1

8-3 用丝杠动态检查仪测量某单头螺旋丝杠 0～300mm 范围内的螺旋线轴向误差共6次，测得实际螺旋线与理论螺旋线在丝杠轴向的偏差 ΔP 数据如下（全部为正直）：

轴向长度 l/mm	第1次 $\Delta P_1/\mu m$	第2次 $\Delta P_2/\mu m$	第3次 $\Delta P_3/\mu m$	第4次 $\Delta P_4/\mu m$	第5次 $\Delta P_5/\mu m$	第6次 $\Delta P_6/\mu m$
30	0.20	0.12	0.06	0.18	0.04	0.02
60	0.22	0.22	0.15	0.30	0.14	0.15
90	0.26	0.28	0.24	0.39	0.31	0.34
120	0.31	0.48	0.37	0.49	0.38	0.37

150	0.48	0.51	0.47	0.60	0.44	0.53
180	0.69	0.65	0.53	0.58	0.56	0.62
210	0.79	0.68	0.73	0.66	0.65	0.67
240	0.78	0.88	0.75	0.78	0.84	0.79
270	0.90	0.95	0.98	0.86	0.85	0.86
300	0.99	1.07	1.00	1.04	0.92	1.01

1) 若测量者认为被测丝杠是高精度标准丝杠，本身的加工误差可忽略，且动态测量系统误差也可忽略，求动态测量随机误差的总体均值，总体标准差和总体极限误差各是多少?第 2 次测量时间均值和时间平均方差各是多少？

2) 在 1）的结果基础上，测量者认识到被测丝杠本身的加工误差不可忽略，但认为与轴向长度成线性关系，且动态测量系统的误差可忽略，试用线性回归的方法求偏差 ΔP 与轴向长度 l 的关系式。

3）在 2）的结果基础上，求动态测量随机误差的总体均值和总体方差。

主要参考文献

[1] 费业泰主编《误差理论与数据处理》，机械工业出版社，1987。

[2] 罗南星编著《测量误差及数据处理》，计量出版社，1984。

[3] 张叔涵编译《测量误差理论》，中国工业出版社，1966。

[4] 张启人编著《测定值计算基础》，科学出版社，1959。

[5] J.Topping’s《Errors of Observation and their Treatment》，Fourth Edition，1972。

[6] 张世英、刘智敏编著《测量实践的数据处理》，科学出版社，1977。

[7] 肖明耀编《实验误差估计与数据处理》，科学出版社，1980。

[8] 上海师范大雪概率统计组编《回归分析及其试验设计》，上海教育出版社，1984。

[9] [美]J.S 贝达特、A.G.皮尔索著，凌福根译《随机数据分析方法》，国防工业出版社，1978。

[10] 应怀樵编著《波形和频谱分析与随机数据处理》，中国铁道出版社，1984。

[11] 中国科学院数学研究所统计组编《常用数理统计方法》，科学出版社，1973。

[12] 中国科学院数学研究所数理统计组编《回归分析方法》，科学出版社，1975。

[13] H.克拉美著，魏宗舒等译《统计数学方法》，上海科技出版社，1966。

[14] 周兆麟等编《数理统计》，统计出版社，1985。

[15] 周华章编《工业技术应用数理统计学》，人民教育出版社，1964。

[16] 吴祈耀编《随机过程》，国防工业出版社，1984。

[17] 浙江大学数学系高等数学教研组编《概率论与数理统计》，人民教育出版社，1979。