第一章　绪　　论

第一节　研究误差的意义

人类为了认识自然与遵循其发展规律用于自然，需要不断地对自然界的各种现象进行测量和研究。由于实验方法和实验设备的不完善，周围环境的影响，以及受人们认识能力所限等，测量和实验所得数据和被测量的真值之间，不可避免地存在着差异，这在数值上即表现为误差。随着科学技术的日益发展和人们认识水平的不断提高，虽可将误差控制得越来越小，但终究不能完全消除它。误差存在的必然性和普遍性，已为大量实践所证明。为了充分认识并进而减小或消除误差，必须对测量过程和科学实验中始终存在着的误差进行研究。

研究误差的意义为

1）正确认识误差的性质，分析误差产生的原因，以消除或减小误差。

2）正确处理测量和实验数据，合理计算所得结果，以便在一定条件下得到更接近于真值的数据。

3）正确组织实验过程，合理设计仪器或选用仪器和测量方法，以便在最经济条件下，得到理想的结果。

第二节　误差的基本概念

一、误差的定义及表示法

所谓误差就是测得值与被测量的真值之间的差，可用下式表示：

$$误差=测得值-真值 \tag{1-1}$$

例如在长度计量测试中，测量某一尺寸的误差公式具体形式为

$$误差=测得尺寸-真实尺寸 \tag{1-2}$$

测量误差可用绝对误差表示，也可用相对误差表示。

（一）绝对误差

某量值的测得值和真值之差为绝对误差，通常简称为误差，即

$$绝对误差=测得值-真值 \tag{1-3}$$

由式（1-3）可知，绝对误差可能是正值或负值。

所谓真值是指在观测一个量时，该量本身所具有的真实大小。量的真值是一个理想的概念，一般是不知道的。但在某些特定情况下，真值又是可知的。例如：三角形三个内角之和为180°；一个整圆周角为360°；按定义规定的国际千克基准的值可认为真值是1kg等。为了使用上的需要，在实际测量中，常用被测的量的实际值来代替真值，而实际值的定义是满

足规定精确度的用来代替真值使用的量值。例如在检定工作中，把高一等级精度的标准所测得的量值称为实际值。如用二等标准活塞压力计测量某压力，测得值为 9000. 2N/cm^2，若该压力用高一等级的精确方法测得值为 9000. 5N/cm^2，则后者可视为实际值，此时二等标准活塞压力计的测量误差为 -0. 3N/cm^2。

在实际工作中，经常使用修正值。为消除系统误差而用代数法加到测量结果上的值称为修正值。将测得值加上修正值后可得近似的真值，即

$$\text{真值} \approx \text{测得值} + \text{修正值} \tag{1-4}$$

由此得

$$\text{修正值} = \text{真值} - \text{测得值} \tag{1-5}$$

修正值与误差值的大小相等而符号相反，测得值加修正值后可以消除该误差的影响。但必须注意，一般情况下难以得到真值，因为修正值本身也有误差，修正后只能得到较测得值更为准确的结果。

（二）相对误差

绝对误差与被测量的真值之比值称为相对误差。因测得值与真值接近，故也可近似用绝对误差与测得值之比值作为相对误差，即

$$\text{相对误差} = \frac{\text{绝对误差}}{\text{真值}} \approx \frac{\text{绝对误差}}{\text{测得值}} \tag{1-6}$$

由于绝对误差可能为正值或负值，因此相对误差也可能为正值或负值。

相对误差是无名数，通常以百分数（%）来表示。例如用水银温度计测得某一温度为 20. 3℃，该温度用高一等级的温度计测得值为 20. 2℃，因后者精度高，故可认为 20. 2℃ 接近真实温度，而水银温度计测量的绝对误差为 0. 1℃，其相对误差为

$$\frac{0.1}{20.2} \approx \frac{0.1}{20.3} \approx 0.5\%$$

对于相同的被测量，绝对误差可以评定其测量精度的高低，但对于不同的被测量以及不同的物理量，绝对误差就难以评定其测量精度的高低，而采用相对误差来评定较为确切。

例如用两种方法来测量 $L_1 = 100\text{mm}$ 的尺寸，其测量误差分别为 $\delta_1 = \pm 10\mu\text{m}$，$\delta_2 = \pm 8\mu\text{m}$，根据绝对误差大小，可知后者的测量精度高。但若用第三种方法测量 $L_2 = 80\text{mm}$ 的尺寸，其测量误差为 $\delta_3 = \pm 7\mu\text{m}$，此时用绝对误差就难以评定它与前两种方法精度的高低，必须采用相对误差来评定。

第一种方法的相对误差为

$$\frac{\delta_1}{L_1} = \pm \frac{10\mu\text{m}}{100\text{mm}} = \pm \frac{10}{100000} = \pm 0.01\%$$

第二种方法的相对误差为

$$\frac{\delta_2}{L_1} = \pm \frac{8\mu\text{m}}{100\text{mm}} = \pm \frac{8}{100000} = \pm 0.008\%$$

第三种方法的相对误差为

$$\frac{\delta_3}{L_2} = \pm \frac{7\mu\text{m}}{80\text{mm}} = \pm \frac{7}{80000} \approx \pm 0.009\%$$

由此可知，第一种方法精度最低，第二种方法精度最高。

（三）引用误差

所谓引用误差指的是一种简化和实用方便的仪器仪表示值的相对误差，它是以仪器仪表某一刻度点的示值误差为分子，以测量范围上限值或全量程为分母，所得的比值称为引用误差，即

$$引用误差=\frac{示值误差}{测量范围上限} \tag{1-7}$$

例如测量范围上限为19600N的工作测力计（拉力表），在标定示值为14700N处的实际作用力为14778.4N，则此测力计在该刻度点的引用误差为

$$\frac{14700N-14778.4N}{19600N}=\frac{-78.4}{19600}=-0.4\%$$

在仪器全量程范围内有多个刻度点，每个刻度都有相应的引用误差，其中绝对值最大的引用误差称为仪器的最大引用误差。

例 某台标称示值范围为0～150V的电压表（即满量程为150V），在示值为100V处，用标准电压表检定得到的电压表实际示值为99.4V，求使用该电压表在测得示值为100V时的绝对误差、相对误差和引用误差？

由式（1-3）、式（1-6）和式（1-7），可得该电压表在100V处的

$$绝对误差=100V-99.4V=0.6V$$

$$相对误差=\frac{0.6V}{99.4V}\times100\%\approx\frac{0.6V}{100V}\times100\%=0.6\%$$

$$引用误差=\frac{100V-99.4V}{150V}\times100\%=0.4\%$$

二、误差来源

在测量过程中，误差产生的原因可归纳为以下几个方面：

（一）测量装置误差

1. 标准量具误差

以固定形式复现标准量值的器具，如氪86灯管、标准量块、标准线纹尺、标准电池、标准电阻、标准砝码等，它们本身体现的量值，不可避免地都含有误差。

2. 仪器误差

凡用来直接或间接将被测量和已知量进行比较的器具设备，称为仪器或仪表，如阿贝比较仪、天平等比较仪器，压力表、温度计等指示仪表，它们本身都具有误差。

3. 附件误差

仪器的附件及附属工具，如测长仪的标准环规，千分尺的调整量棒等的误差，也会引起测量误差。

（二）环境误差

由于各种环境因素与规定的标准状态不一致而引起的测量装置和被测量本身的变化所造成的误差，如温度、湿度、气压（引起空气各部分的扰动）、振动（外界条件及测量人员引起的振动）、照明（引起视差）、重力加速度、电磁场等所引起的误差。通常仪器仪表在规

定的正常工作条件所具有的误差称为基本误差，而超出此条件时所增加的误差称为附加误差。

（三）方法误差

由于测量方法不完善所引起的误差，如采用近似的测量方法而造成的误差。例如用钢卷尺测量大轴的圆周长 s，再通过计算求出大轴的直径 $d=s/\pi$，因近似数 π 取值的不同，将会引起误差。

（四）人员误差

由于测量者受分辨能力的限制，因工作疲劳引起的视觉器官的生理变化，固有习惯引起的读数误差，以及精神上的因素产生的一时疏忽等所引起的误差。

总之，在计算测量结果的精度时，对上述 4 个方面的误差来源，必须进行全面的分析，力求不遗漏、不重复，特别要注意对误差影响较大的那些因素。

三、误差分类

按照误差的特点与性质，误差可分为系统误差、随机误差和粗大误差三类。

（一）系统误差

在同一条件下，多次测量同一量值时，绝对值和符号保持不变，或在条件改变时，按一定规律变化的误差称为系统误差。例如标准量值的不准确、仪器刻度的不准确而引起的误差。

系统误差又可按下列方法分类：

1. 按对误差掌握的程度分

已定系统误差，是指误差绝对值和符号已经确定的系统误差。

未定系统误差，是指误差绝对值和符号未能确定的系统误差，但通常可估计出误差范围。

2. 按误差出现规律分

不变系统误差，是指误差绝对值和符号固定的系统误差。

变化系统误差，是指误差绝对值和符号变化的系统误差。按其变化规律，又可分为线性系统误差、周期性系统误差和复杂规律系统误差等。

（二）随机误差

在同一测量条件下，多次测量同一量值时，绝对值和符号以不可预定方式变化的误差称为随机误差。例如仪器仪表中传动部件的间隙和摩擦、连接件的弹性变形等引起的示值不稳定。

（三）粗大误差

超出在规定条件下预期的误差称为粗大误差，或称“寄生误差”。此误差值较大，明显歪曲测量结果，如测量时对错了标志、读错或记错了数、使用有缺陷的仪器以及在测量时因操作不细心而引起的过失性误差等。

上面虽将误差分为三类，但必须注意各类误差之间在一定条件下可以相互转化。对某项具体误差，在此条件下为系统误差，而在另一条件下可为随机误差，反之亦然。如按一定基本尺寸制造的量块，存在着制造误差，对某一块量块的制造误差是确定数值，可认为是系统误差，但对一批量块而言，制造误差是变化的，又成为随机误差。在使用某一量块时，没有

检定出该量块的尺寸偏差，而按基本尺寸使用，则制造误差属随机误差；若检定出量块的尺寸偏差，按实际尺寸使用，则制造误差属系统误差。掌握误差转化的特点，可将系统误差转化为随机误差，用数据统计处理方法减小误差的影响；或将随机误差转化为系统误差，用修正方法减小其影响。

总之，系统误差和随机误差之间并不存在绝对的界限。随着对误差性质认识的深化和测试技术的发展，有可能把过去作为随机误差的某些误差分离出来作为系统误差处理，或把某些系统误差当作随机误差来处理。

第三节 精 度

反映测量结果与真值接近程度的量，通常称为精度⊖，它与误差的大小相对应，因此可用误差大小来表示精度的高低，误差小则精度高，误差大则精度低。

精度可分为

1）准确度：它反映测量结果中系统误差的影响程度。

2）精密度：它反映测量结果中随机误差的影响程度。

3）精确度：它反映测量结果中系统误差和随机误差综合的影响程度，其定量特征可用测量的不确定度（或极限误差）来表示。

精度在数量上有时可用相对误差来表示，如相对误差为 0.01%，可笼统说其精度为 10^{-4}，若纯属随机误差引起，则说其精密度为 10^{-4}，若是由系统误差与随机误差共同引起，则说其精确度为 10^{-4}。

对于具体的测量，精密度高的准确度不一定高，准确度高的精密度也不一定高，但精确度高，则精密度与准确度都高。

如图 1-1 所示的打靶结果，子弹落在靶心周围有三种情况，图 1-1a 的系统误差小而随机误差大，即准确度高而精密度低；图 1-1b 的系统误差大而随机误差小，即准确度低而精密度高；图 1-1c 的系统误差与随机误差都小，即精确度高，我们希望得到精确度高的结果。

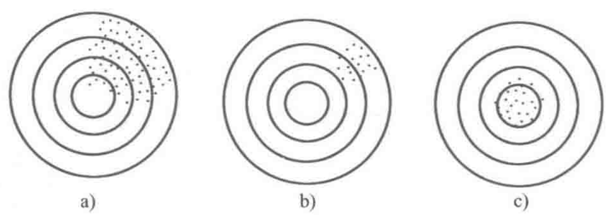

图 1-1

误差来源、分类和精度评定的系统图见图 1-2。

⊖ 本书应用广泛，为科研与工程技术众多领域学者所使用，有关误差的某些名词术语及定义与有的行业技术规范会存在一定差别，考虑到在相关行业技术规范中亦已明确指出，其规范只对其本身具有一定约束力，而对行业其他方面和相关科技领域中的使用也是推荐性的，同时又充分考虑到我国其他众多工程科技领域使用名词术语的传统习惯现状，故本版教材对名词术语暂不全面修改，仍保留广泛使用的“精度”一词及其内涵等。在教学时，若涉及某个具体行业领域有不同的相关名词术语及定义，可作适当补充说明。

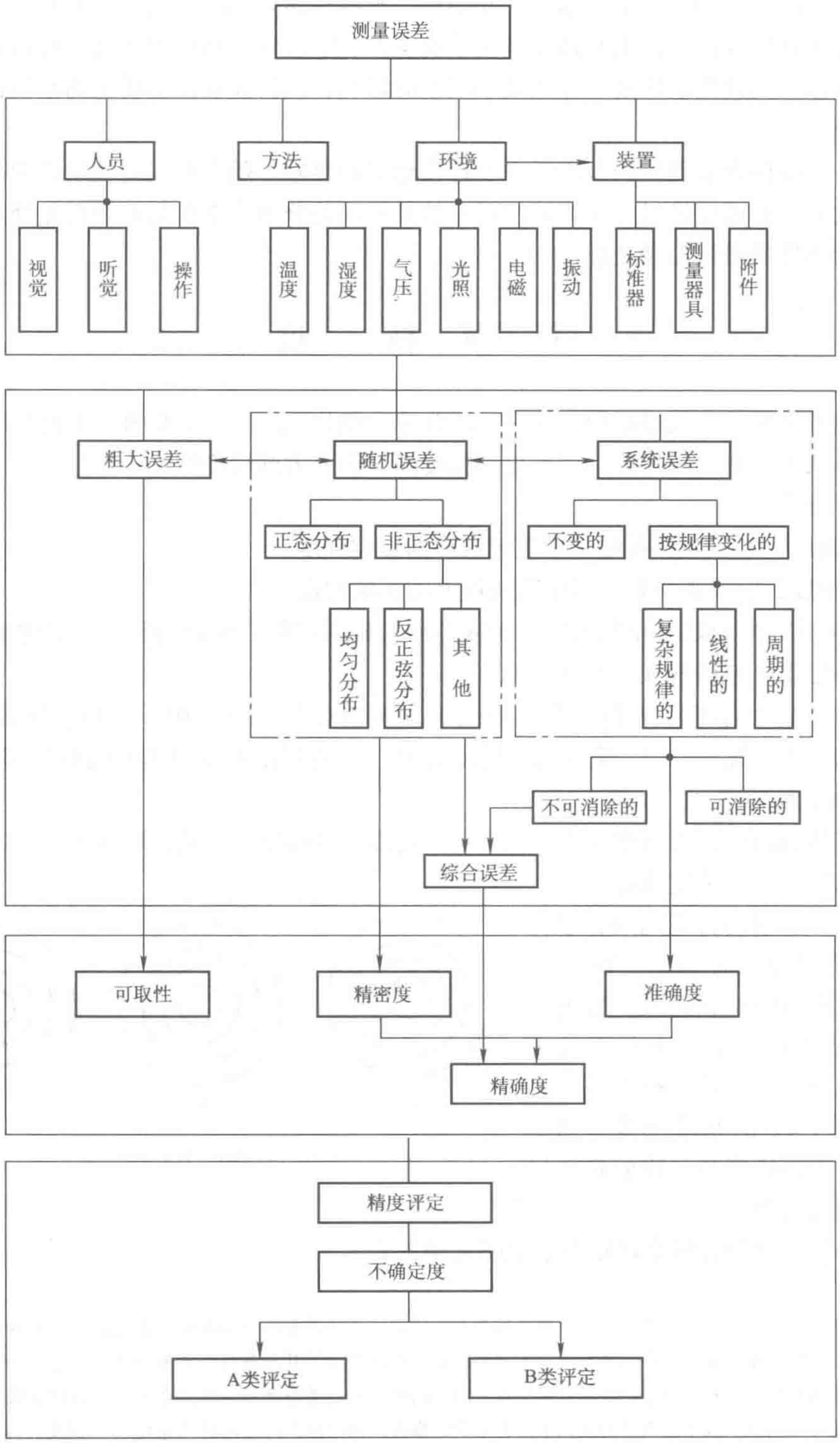
测量误差
人员
方法
环境
装置
视觉
听觉
操作
温度
湿度
气压
光照
电磁
振动
标准器
测量器具
附件
粗大误差
随机误差
系统误差
正态分布
非正态分布
不变的
按规律变化的
均匀分布
反正弦分布
其他
复杂规律的
线性的
周期的
不可消除的
可消除的
综合误差
可取性
精密度
准确度
精确度
精度评定
不确定度
A类评定
B类评定

图 1-2

第四节　有效数字与数据运算

在测量结果和数据运算中，确定用几位数字来表示测量或数据运算的结果，是一个十分重要的问题。测量结果既然包含有误差，说明它是一个近似数，其精度有一定限度，在记录测量结果的数据位数或进行数据运算时的取值多少时，皆应以测量所能达到的精度为依据。如果认为，不论测量结果的精度如何，在一个数值中小数点后面的位数越多，这个数值就越精确；或者在数据运算中，保留的位数越多，精度就越高，这种认识都是片面的。若将不必要的数字写出来，既费时间，又无意义。一方面是因为小数点的位置决定不了精度，它仅与所采用的单位有关，如35.6mm 和0.0356m 的精度完全相同，而小数点位置则不同。另一方面，测量结果的精度与所用测量方法及仪器有关，在记录或数据运算时，所取的数据位数，其精度不能超过测量所能达到的精度；反之，若低于测量精度，也是不正确的，因为它将损失精度。此外，在求解方程组时，若系数为近似值，其取值多少对方程组的解有很大影响。例如，下面的方程组（a）和（b）及其对应解为

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x - 1.0001y = 0 \end{cases} \quad \text{对应解为} \begin{cases} x = 10001 \\ y = 10000 \end{cases} \tag{a}$$

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x - 0.9999y = 0 \end{cases} \quad \text{对应解为} \begin{cases} x = -9999 \\ y = -10000 \end{cases} \tag{b}$$

两个方程组仅有一个系数相差万分之二，但所得结果差异极大，由此也可看出研究有效数字和数据运算规则的重要性。

一、有效数字

含有误差的任何近似数，如果其绝对误差界是最末位数的半个单位，那么从这个近似数左方起的第一个非零的数字，称为第一位有效数字。从第一位有效数字起到最末一位数字止的所有数字，不论是零或非零的数字，都叫有效数字。若具有 n 个有效数字，就说是 n 位有效位数。例如取 $\pi = 3.14$，第一位有效数字为 3，共有 3 位有效位数；又如 0.0027，第一位有效数字为 2，共有两位有效位数；而 0.00270，则为 3 位有效位数。

若近似数的右边带有若干个零的数字，通常把这个近似数写成 $a \times 10^n$ 形式，而 $1 \leqslant a < 10$。利用这种写法，可从 a 含有几个有效数字来确定近似数的有效位数。如 2.400×10^3 表示 4 位有效位数；2.40×10^3 和 2.4×10^3，分别表示 3 位和两位有效位数。

在测量结果中，最末一位有效数字取到哪一位，是由测量精度来决定的，即最末一位有效数字应与测量精度是同一量级的。例如用千分尺测量时，其测量精度只能达到 0.01mm，若测出长度 $l = 20.531$mm，显然小数点后第二位数字已不可靠，而第三位数字更不可靠，此时只应保留小数点后第二位数字，即写成 $l = 20.53$mm，为 4 位有效位数。由此可知，测量结果应保留的位数原则是：其最末一位数字是不可靠的，而倒数第二位数字应是可靠的。测量误差一般取 1～2 位有效数字，因此上述用千分尺测量结果可表示为 $l = (20.53 \pm 0.01)$mm。

在进行比较重要的测量时，测量结果和测量误差可比上述原则再多取一位数字作为参考，如测量结果可表示为 15.214 ± 0.042。因此，凡遇有这种形式表示的测量结果，其可靠数字为倒数第三位数字，不可靠数字为倒数第二位数字，而最后一位数字则为参考数字。

二、数字舍入规则

对于位数很多的近似数，当有效位数确定后，其后面多余的数字应予舍去，而保留的有效数字最末一位数字应按下面的舍入规则进行凑整：

1）若舍去部分的数值，大于保留部分的末位的半个单位，则末位加1。

2）若舍去部分的数值，小于保留部分的末位的半个单位，则末位不变。

3）若舍去部分的数值，等于保留部分的末位的半个单位，则末位凑成偶数，即当末位为偶数时则末位不变，当末位为奇数时则末位加1。

例如，按上述舍入规则，将下面各个数据保留4位有效数字进行凑整：

原有数据	舍入后数据
3.14159	3.142
2.71729	2.717
4.51050	4.510
3.21550	3.216
6.378501	6.379
7.691499	7.691
5.43460	5.435

由于数字舍入而引起的误差称为舍入误差，按上述规则进行数字舍入，其舍入误差皆不超过保留数字最末位的半个单位。必须指出，这种舍入规则的第三条明确规定，被舍去的数字不是见5就入，从而使舍入误差成为随机误差，在大量运算时，其舍入误差的均值趋于零。这就避免了过去所采用的四舍五入规则时，由于舍入误差的累积而产生系统误差。

三、数据运算规则

在近似数运算中，为了保证最后结果有尽可能高的精度，所有参与运算的数据，在有效数字后可多保留一位数字作为参考数字，或称为安全数字。

1）在近似数加减运算时，各运算数据以小数位数最少的数据位数为准，其余各数据可多取一位小数，但最后结果应与小数位数最少的数据小数位相同。

例如，求 $2643.0+987.7+4.187+0.2354=?$

$$2643.0+987.7+4.187+0.2354\approx 2643.0+987.7+4.19+0.24$$
$$=3635.13\approx 3635.1$$

2）在近似数乘除运算时，各运算数据以有效位数最少的数据位数为准，其余各数据要比有效位数最少的数据位数多取一位数字，而最后结果应与有效位数最少的数据位数相同。

例如，求 $15.13\times 4.12=?$

$$15.13\times 4.12=62.3356\approx 62.3$$

3）在近似数平方或开方运算时，平方相当于乘法运算，开方是平方的逆运算，故可按乘除运算处理。

4）在对数运算时，n 位有效数字的数据应该用 n 位对数表，或用（$n+1$）位对数表，以免损失精度。

5）三角函数运算中，所取函数值的位数应随角度误差的减小而增多，其对应关系如下表所示。

角度误差（″）	10	1	0.1	0.01
函数值位数	5	6	7	8

以上所述的运算规则，都是一些常见的最简单情况，但实际问题的数据运算皆较复杂，往往一个问题要包括几种不同的简单运算，对中间的运算结果所保留的数据位数可比简单运算结果多取一位数字。

习　题

1-1　研究误差的意义是什么？简述误差理论的主要内容。

1-2　试述测量误差的定义及分类，不同种类误差的特点是什么？

1-3　试述误差的绝对值与绝对误差有何异同，并举例说明。

1-4　什么叫测量误差？什么叫修正值？含有误差的测得值经修正后，能否获得被测量的真值？

1-5　测得某三角块的三个角度之和为 180°00′02″，试求测量的绝对误差和相对误差。

1-6　在万能测长仪上，测量某一被测件的长度为 50mm，已知其最大绝对误差为 1μm，试问该被测件的真实长度为多少？

1-7　用二等标准活塞压力计测量某压力得 100.2Pa，该压力用更准确的办法测得为 100.5Pa，问二等标准活塞压力计测量值的误差为多少？

1-8　在测量某一长度时，读数值为 2.31m，其最大绝对误差为 20μm，试求其最大相对误差。

1-9　使用凯特摆时，g 由公式 $g = 4\pi^2(h_1 + h_2)/T^2$ 给定。今测出长度 $(h_1 + h_2)$ 为 (1.04230 ± 0.00005)m，振动时间 T 为 (2.0480 ± 0.0005)s。试求 g 及其最大相对误差。如果 $(h_1 + h_2)$ 测出为 (1.04220 ± 0.0005)m，为了使 g 的误差能小于 0.001m/s^2，T 的测量必须精确到多少？

1-10　检定 2.5 级（即引用误差为 2.5%）的全量程为 100V 的电压表，发现 50V 刻度点的示值误差 2V 为最大误差，问该电压表是否合格？

1-11　为什么在使用微安表等各种电表时，总希望指针在全量程的 2/3 范围内使用？

1-12　用两种方法分别测量 $L_1 = 50$mm，$L_2 = 80$mm。测得值各为 50.004mm、80.006mm。试评定两种方法测量精度的高低。

1-13　多级弹道火箭的射程为 10000km 时，其射击偏离预定点不超过 0.1km；在射击场中，优秀射手能在距离 50m 远处准确地射中直径为 2cm 的靶心，试评述哪一个射击精度高。

1-14　若用两种测量方法测量某零件的长度 $L_1 = 110$mm，其测量误差分别为 ±11μm 和 ±9μm；而用第三种测量方法测量另一零件的长度 $L_2 = 150$mm，其测量误差为 ±12μm，试比较三种测量方法精度的高低。

1-15　某量值 y 由被测量 x 表示为 $y = 4x - \dfrac{2}{x}$，若 x 的相对误差为 1% 时，求 y 的相对误差为多少？

1-16　如何根据测量误差的特点来减小或消除测量误差？

1-17　什么是有效数字及数字舍入有哪些规则？

1-18　根据数据运算规则，分别计算下式结果：

（1）$3151.0 + 65.8 + 7.326 + 0.4162 + 152.28 = ?$

（2）$28.13 \times 0.037 \times 1.473 = ?$

1-19　在测量实践中有效数字的作用以及它与测量精度的关系如何？试举例说明。