第五章　线性测量的参数最小二乘法处理

最小二乘法是一种在多学科领域中获得广泛应用的数据处理方法，可用于解决参数的最可信赖值估计、组合测量的数据处理、用实验方法来拟合经验公式以及回归分析等一系列数据处理问题。由于测量数据通常由线性测量方程组或非线性测量方程组得到，因此，本章将分别讨论上述两种测量情况下参数的最小二乘法处理。按照处理的具体方法不同，可以将最小二乘法区别为代数法和矩阵法。

第一节　最小二乘法原理

为了确定 t 个不可直接测量的未知量 X_1，X_2，…，X_t 的估计量 x_1，x_2，…，x_t，可对与该 t 个未知量有函数关系的直接测量量 Y 进行 n 次测量，得测量数据 l_1，l_2，…，l_n，并设有如下函数关系：

$$\left.\begin{aligned}Y_1 &= f_1(X_1,X_2,\cdots,X_t)\\ Y_2 &= f_2(X_1,X_2,\cdots,X_t)\\ &\vdots\\ Y_n &= f_n(X_1,X_2,\cdots,X_t)\end{aligned}\right\}\tag{5-1}$$

若 $n=t$，则可由式（5-1）直接求得未知量。由于测量数据不可避免地包含着测量误差，所求得的结果 x_1，x_2，…，x_t 也必定包含一定的误差。为提高所得结果的精度，应适当增加测量次数 n，以便利用抵偿性减小随机误差的影响。因而一般取 $n>t$。但此时则不能直接由方程组（5-1）解得 x_1，x_2，…，x_t。在这种情况下，怎样由测量数据 l_1，l_2，…，l_n 获得最可信赖的结果 x_1，x_2，…，x_t？最小二乘法原理指出，最可信赖值应在使残余误差平方和为最小的条件下求得。

设直接量 Y_1，Y_2，…，Y_n 的估计量分别为 y_1，y_2，…，y_n，则有如下关系：

$$\left.\begin{aligned}y_1 &= f_1(x_1,x_2,\cdots,x_t)\\ y_2 &= f_2(x_1,x_2,\cdots,x_t)\\ &\vdots\\ y_n &= f_n(x_1,x_2,\cdots,x_t)\end{aligned}\right\}\tag{5-2}$$

而测量数据 l_1，l_2，…，l_n 的残余误差应为

$$\left.\begin{aligned}v_1 &= l_1 - y_1\\ v_2 &= l_2 - y_2\\ &\vdots\\ v_n &= l_n - y_n\end{aligned}\right\}\tag{5-3}$$

即

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= l_1 - f_1(x_1, x_2, \cdots, x_t) \\ v_2 &= l_2 - f_2(x_1, x_2, \cdots, x_t) \\ &\vdots \\ v_n &= l_n - f_n(x_1, x_2, \cdots, x_t) \end{aligned}\right\} \tag{5-4}$$

式（5-3）、式（5-4）称为误差方程式，也可称为残余误差方程式（简称残差方程式）。

若数据 l_1，l_2，…，l_n 的测量误差是无偏的（即排除了测量的系统误差），相互独立的，且服从正态分布，并设其标准差分别为 σ_1，σ_2，…，σ_n，则各测量结果 l_1，l_2，…，l_n 出现于相应真值附近 $\mathrm{d}\delta_1$，$\mathrm{d}\delta_2$，…，$\mathrm{d}\delta_n$ 区域内的概率分别为

$$P_1 = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\delta_1^2/(2\sigma_1^2)} \mathrm{d}\delta_1$$

$$P_2 = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\delta_2^2/(2\sigma_2^2)} \mathrm{d}\delta_2$$

$$\vdots$$

$$P_n = \frac{1}{\sigma_n\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\delta_n^2/(2\sigma_n^2)} \mathrm{d}\delta_n$$

由概率乘法定理可知，各测量数据同时出现在相应区域 $\mathrm{d}\delta_1$，$\mathrm{d}\delta_2$，…，$\mathrm{d}\delta_n$ 的概率应为

$$\begin{aligned} P &= P_1 P_2 \cdots P_n \\ &= \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n (\sqrt{2\pi})^n} \mathrm{e}^{-(\delta_1^2/\sigma_1^2 + \delta_2^2/\sigma_2^2 + \cdots + \delta_n^2/\sigma_n^2)/2} \mathrm{d}\delta_1 \mathrm{d}\delta_2 \cdots \mathrm{d}\delta_n \end{aligned}$$

根据最大或然原理，由于事实上测量值 l_1，l_2，…，l_n 已经出现，因而有理由认为这 n 个测量值同时出现于相应区间 $\mathrm{d}\delta_1$，$\mathrm{d}\delta_2$，…，$\mathrm{d}\delta_n$ 的概率 P 应为最大，即待求量的最可信赖值的确定，应使 l_1，l_2，…，l_n 同时出现的概率 P 为最大。由上式不难看出，要使 P 最大，应满足

$$\frac{\delta_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{\delta_2^2}{\sigma_2^2} + \cdots + \frac{\delta_n^2}{\sigma_n^2} = \text{最小}$$

当然，由此给出的结果只是估计量，它们以最大的可能性接近真值而并非真值，因此上述条件应以残余误差的形式表示，即

$$\frac{v_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{v_2^2}{\sigma_2^2} + \cdots + \frac{v_n^2}{\sigma_n^2} = \text{最小}$$

引入权的符号 p，由式（2-42）可得

$$p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \cdots + p_n v_n^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i v_i^2 = \text{最小} \tag{5-5}$$

在等精度测量中有

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \cdots = \sigma_n$$

即

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_n$$

则式（5-5）可简化为

$$v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2 = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 = \text{最小} \tag{5-6}$$

式（5-6）表明，测量结果的最可信赖值应在残余误差平方和（在不等精度测量的情形中应为加权残余误差平方和）为最小的条件下求出，这就是最小二乘法原理。

实质上，按最小二乘条件给出最终结果能充分地利用误差的抵偿作用，可以有效地减小随机误差的影响，因而所得结果具有最可信赖性。

必须指出，上述最小二乘原理是在测量误差无偏、正态分布和相互独立的条件下推导出的，但在不严格服从正态分布的情形下也常被使用。

一般情况下，最小二乘法可以用于线性测量参数的处理，也可用于非线性测量参数的处理。由于测量的实际问题中大量的是属于线性的，而非线性测量方程借助于级数展开的方法可以在某一区域近似地化成线性的形式。因此，线性测量参数的最小二乘法处理是最小二乘法理论所研究的基本内容。

线性测量的测量方程一般形式为

$$\left.\begin{aligned} Y_1 &= a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1t}X_t \\ Y_2 &= a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2t}X_t \\ &\vdots \\ Y_n &= a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + \cdots + a_{nt}X_t \end{aligned}\right\} \tag{5-7}$$

相应的估计量为

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1t}x_t \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2t}x_t \\ &\vdots \\ y_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nt}x_t \end{aligned}\right\} \tag{5-8}$$

其误差方程为

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= l_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1t}x_t) \\ v_2 &= l_2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2t}x_t) \\ &\vdots \\ v_n &= l_n - (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nt}x_t) \end{aligned}\right\} \tag{5-9}$$

线性测量参数的最小二乘法借助于矩阵这一工具进行讨论将有许多便利之处。下面给出最小二乘原理的矩阵形式。

设有列向量

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} \qquad \hat{\boldsymbol{X}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_t \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

和 $n \times t$ 阶矩阵（$n > t$）

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1t} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2t} \\ & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nt} \end{pmatrix}$$

式中各矩阵元素：

l_1，l_2，…，l_n 为 n 个直接测量结果（已获得的测量数据）；

x_1，x_2，…，x_t 为 t 个待求的被测量的估计量；

v_1，v_2，…，v_n 为 n 个直接测量结果的残余误差；

a_{11}，a_{21}，…，a_{nt}为 n 个误差方程的 $n\times t$ 个系数。

则线性测量参数的误差方程式（5-9）可表示为

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1t} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2t} \\ & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nt} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_t \end{pmatrix}$$

即

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{L}-\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}} \tag{5-10}$$

等精度测量时，残余误差平方和最小这一条件的矩阵形式为

$$(v_1 v_2 \cdots v_n)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}=\text{最小}$$

即

$$\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}=\text{最小} \tag{5-11}$$

或

$$(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}})=\text{最小} \tag{5-12}$$

而不等精度测量时，最小二乘原理的矩阵形式为

$$\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{V}=\text{最小} \tag{5-13}$$

或

$$(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}})=\text{最小} \tag{5-14}$$

式中，$\boldsymbol{P}$ 为 $n\times n$ 阶权矩阵。

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & p_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{\sigma^2}{\sigma_1^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \dfrac{\sigma^2}{\sigma_2^2} & \cdots & 0 \\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & \dfrac{\sigma^2}{\sigma_n^2} \end{pmatrix}$$

$p_1=\sigma^2/\sigma_1^2$，$p_2=\sigma^2/\sigma_2^2$，…，$p_n=\sigma^2/\sigma_n^2$ 分别为测量数据 l_1，l_2，…，l_n 的权；σ^2 为单位权

方差；σ_1^2，σ_2^2，…，σ_n^2 分别为测量数据 l_1，l_2，…，l_n 的方差。

线性测量中的不等精度测量还可以转化为等精度的形式，从而可以利用等精度测量时测量数据的最小二乘法处理的全部结果。为此，应将误差方程化为等权的形式。若不等精度测量数据 l_1，l_2，…，l_n 的权分别为 p_1，p_2，…，p_n，此时不等精度测量的误差方程式仍用式（5-9）表示，将其两端同乘以相应权的平方根得

$$\left.\begin{aligned}v_1 p_1^{1/2} &= l_1 p_1^{1/2} - (a_{11} p_1^{1/2}x_1 + a_{12} p_1^{1/2}x_2 + \cdots + a_{1t} p_1^{1/2}x_t)\\ v_2 p_2^{1/2} &= l_2 p_2^{1/2} - (a_{21} p_2^{1/2}x_1 + a_{22} p_2^{1/2}x_2 + \cdots + a_{2t} p_2^{1/2}x_t)\\ &\vdots\\ v_n p_n^{1/2} &= l_n p_n^{1/2} - (a_{n1} p_n^{1/2}x_1 + a_{n2} p_n^{1/2}x_2 + \cdots + a_{nt} p_n^{1/2}x_t)\end{aligned}\right\}$$

令

$$a'_{11} = a_{11} p_1^{1/2}, a'_{12} = a_{12} p_1^{1/2}, \cdots, a'_{nt} = a_{nt} p_n^{1/2},$$

$$l'_1 = l_1 p_1^{1/2}, l'_2 = l_2 p_2^{1/2}, \cdots, l'_n = l_n p_n^{1/2},$$

$$v'_1 = v_1 p_1^{1/2}, v_2 = v_2 p_2^{1/2}, \cdots, v'_n = v_n p_n^{1/2},$$

则误差方程化为等精度的形式为

$$\left.\begin{aligned}v'_1 &= l'_1 - (a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots + a'_{1t}x_t)\\ v'_2 &= l'_2 - (a'_{21}x_1 + a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2t}x_t)\\ &\vdots\\ v'_n &= l'_n - (a'_{n1}x_1 + a'_{n2}x_2 + \cdots + a'_{nt}x_t)\end{aligned}\right\} \tag{5-15}$$

方程式（5-15）中各式已具有相同的权，与等精度测量的误差方程（5-9）形式一致，即可按等精度测量数据处理的方法来处理。

设有 $n\times 1$ 阶矩阵（列向量）

$$\boldsymbol{L}^* = \begin{pmatrix} l'_1 \\ l'_2 \\ \vdots \\ l'_n \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{V}^* = \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \vdots \\ v'_n \end{pmatrix}$$

和 $n\times t$ 阶矩阵

$$\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1t} \\ a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2t} \\ & & \vdots & \\ a'_{n1} & a'_{n2} & \cdots & a'_{nt} \end{pmatrix}$$

则线性测量参数不等精度测量的误差方程的矩阵形式为

$$\boldsymbol{V}^* = \boldsymbol{L}^* - \boldsymbol{A}^*\hat{\boldsymbol{X}} \tag{5-16}$$

此时最小二乘条件用矩阵形式可表达为

$$\boldsymbol{V}^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{V}^* = \text{最小} \tag{5-17}$$

或

$$(\boldsymbol{L}^{*}-\boldsymbol{A}^{*}\hat{\boldsymbol{X}})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{L}^{*}-\boldsymbol{A}^{*}\hat{\boldsymbol{X}}) = \text{最小} \tag{5-18}$$

第二节 正 规 方 程

为了获得更可靠的结果，测量次数 n 总要多于未知参数的个数 t，即所得误差方程式的个数总是要多于未知数的个数。因而直接用一般解代数方程的方法是无法求解这些未知参数的。最小二乘法则可以由误差方程得到有确定解的代数方程组（其方程式个数正好等于未知数的个数），从而可求解出这些未知参数。这个有确定解的代数方程组称为最小二乘法估计的正规方程（或称为法方程）。

线性测量参数的最小二乘法处理程序可归结为：首先根据具体问题列出误差方程式；再按最小二乘法原理，利用求极值的方法由误差方程得到正规方程；然后求解正规方程，得到待求的估计量；最后给出精度估计。对于非线性测量方程，可先将其线性化，然后按上述线性测量参数的最小二乘法处理程序去处理。因此，建立正规方程是待求参数最小二乘法处理的基本环节。

一、等精度线性测量参数最小二乘法处理的正规方程

线性测量的误差方程式为

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= l_1-(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1t}x_t)\\ v_2 &= l_2-(a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2t}x_t)\\ &\vdots\\ v_n &= l_n-(a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nt}x_t)\end{aligned}\right\}$$

在等精度测量中，应满足最小二乘条件式（5-6），即

$$\sum_{i=1}^{n}v_i^2 = v_1^2+v_2^2+\cdots+v_n^2 = \text{最小}$$

现求上式的估计量 x_1，x_2，…，x_t，可利用求极值的方法来满足上式的条件。为此，对残余误差的平方和 $\sum_{i=1}^{n}v_i^2$ 求导数，并令其为零，有

$$\begin{aligned}\frac{\partial\left(\sum_{i=1}^{n}v_i^2\right)}{\partial x_1} = &-2a_{11}\{l_1-(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1t}x_t)\}\\ &-2a_{21}\{l_2-(a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2t}x_t)\}\\ &-\cdots-2a_{n1}\{l_n-(a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nt}x_t)\} = 0\end{aligned}$$

因为

$$\sum_{i=1}^{n}a_{i1}a_{i1} = a_{11}a_{11}+a_{21}a_{21}+\cdots+a_{n1}a_{n1}$$

$$\sum_{i=1}^{n}a_{i1}a_{i2} = a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}+\cdots+a_{n1}a_{n2}$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i1}a_{it} = a_{11}a_{1t} + a_{21}a_{2t} + \cdots + a_{n1}a_{nt}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i1}l_i = a_{11}l_1 + a_{21}l_2 + \cdots + a_{n1}l_n$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{\partial\left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2\right)}{\partial x_1} &= -2\left\{\sum_{i=1}^{n} a_{i1}l_i - \left(x_1\sum_{i=1}^{n} a_{i1}a_{i1} + x_2\sum_{i=1}^{n} a_{i1}a_{i2} + \cdots + x_t\sum_{i=1}^{n} a_{i1}a_{it}\right)\right\}\\ &= 0\end{aligned}$$

同理有

$$\begin{aligned}\frac{\partial\left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2\right)}{\partial x_2} &= -2\left\{\sum_{i=1}^{n} a_{i2}l_i - \left(x_1\sum_{i=1}^{n} a_{i2}a_{i1} + x_2\sum_{i=1}^{n} a_{i2}a_{i2} + \cdots + x_t\sum_{i=1}^{n} a_{i2}a_{it}\right)\right\}\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2\right)}{\partial x_t} &= -2\left\{\sum_{i=1}^{n} a_{it}l_i - \left(x_1\sum_{i=1}^{n} a_{it}a_{i1} + x_2\sum_{i=1}^{n} a_{it}a_{i2} + \cdots + x_t\sum_{i=1}^{n} a_{it}a_{it}\right)\right\}\\ &= 0\end{aligned}$$

注意到上式中各二阶偏导数恒正，即

$$\frac{\partial^2\left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2\right)}{\partial x_1^2} = 2\sum_{i=1}^{n} a_{i1}a_{i1} > 0$$

$$\frac{\partial^2\left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2\right)}{\partial x_2^2} = 2\sum_{i=1}^{n} a_{i2}a_{i2} > 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial^2\left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2\right)}{\partial x_t^2} = 2\sum_{i=1}^{n} a_{it}a_{it} > 0$$

由此可知，上面各方程求得的极值是最小值，满足最小二乘条件，因而也是所要求的估计量，最后把它写成

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a_{i1}a_{i1}x_1 + \sum_{i=1}^{n} a_{i1}a_{i2}x_2 + \cdots + \sum_{i=1}^{n} a_{i1}a_{it}x_t &= \sum_{i=1}^{n} a_{i1}l_i\\ \sum_{i=1}^{n} a_{i2}a_{i1}x_1 + \sum_{i=1}^{n} a_{i2}a_{i2}x_2 + \cdots + \sum_{i=1}^{n} a_{i2}a_{it}x_t &= \sum_{i=1}^{n} a_{i2}l_i\\ &\vdots\\ \sum_{i=1}^{n} a_{it}a_{i1}x_1 + \sum_{i=1}^{n} a_{it}a_{i2}x_2 + \cdots + \sum_{i=1}^{n} a_{it}a_{it}x_t &= \sum_{i=1}^{n} a_{it}l_i\end{aligned}\right\} \tag{5-19}$$

式（5-19）即为等精度测量的线性方程最小二乘法处理的正规方程。这是一个 t 元线性方程组，当其系数行列式不为零时，有唯一确定的解，由此可解得欲求的估计量。

注意到方程组（5-19）在形式上有如下特点：

1）沿主对角线分布着平方项系数 $\sum_{i=1}^{n} a_{i1}a_{i1}, \sum_{i=1}^{n} a_{i2}a_{i2}, \cdots, \sum_{i=1}^{n} a_{it}a_{it}$ 都为正数。

2）以主对角线为对称线，对称分布的各系数彼此两两相等，如 $\sum_{i=1}^{n} a_{i1}a_{i2}$ 与 $\sum_{i=1}^{n} a_{i2}a_{i1}$ 相等，$\sum_{i=1}^{n} a_{i2}a_{it}$ 与 $\sum_{i=1}^{n} a_{it}a_{i2}$ 相等，…

现将上述正规方程（5-19）表示成矩阵形式。把正规方程组中第 r 个方程式（$r=1, 2, \cdots, t$）

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ir}l_i - \left[\sum_{i=1}^{n} a_{ir}a_{i1}x_1 + \sum_{i=1}^{n} a_{ir}a_{i2}x_2 + \cdots + \sum_{i=1}^{n} a_{ir}a_{it}x_t\right] = 0$$

改写成如下形式为

$$\begin{aligned}
&(a_{1r}l_1 + a_{2r}l_2 + \cdots + a_{nr}l_n) - (a_{1r}a_{11}x_1 + a_{2r}a_{21}x_1 + \cdots + a_{nr}a_{n1}x_1) \\
&\quad - (a_{1r}a_{12}x_2 + a_{2r}a_{22}x_2 + \cdots + a_{nr}a_{n2}x_2) - \cdots - (a_{1r}a_{1t}x_t + a_{2r}a_{2t}x_t + \cdots + a_{nr}a_{nt}x_t) \\
&= a_{1r}[l_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1t}x_t)] + a_{2r}[l_2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2t}x_t)] + \cdots \\
&\quad + a_{nr}[l_n - (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nt}x_t)] \\
&= a_{1r}v_1 + a_{2r}v_2 + \cdots + a_{nr}v_n \\
&= 0
\end{aligned}$$

式中，$r=1, 2, \cdots, t$。

由此，正规方程组可写成

$$\left.\begin{aligned}
a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \cdots + a_{n1}v_n &= 0 \\
a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{n2}v_n &= 0 \\
&\vdots \\
a_{1t}v_1 + a_{2t}v_2 + \cdots + a_{nt}v_n &= 0
\end{aligned}\right\} \tag{5-20}$$

因而它可表示为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ & & \vdots & \\ a_{1t} & a_{2t} & \cdots & a_{nt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

即

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{0} \tag{5-21}$$

这就是等精度测量情况下以矩阵形式表示的正规方程。又因

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{L} - \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}}$$

所以正规方程又可表示为

$$A^{T}L - A^{T}A\hat{X} = 0$$

即

$$(A^{T}A)\hat{X} = A^{T}L \tag{5-22}$$

若令

$$C = A^{T}A$$

则正规方程又可写成

$$C\hat{X} = A^{T}L \tag{5-23}$$

若 A 的秩等于 t，则矩阵 C 是满秩的，即其行列式 $|C| \neq 0$。那么 $\hat{X}$ 必定有唯一的解。此时用 C^{-1} 左乘正规方程的两边，就得到正规方程解的矩阵表达式

$$\hat{X} = C^{-1}A^{T}L \tag{5-24}$$

所解得 $\hat{X}$ 的数学期望为

$$E[\hat{X}] = E(C^{-1}A^{T}L) = C^{-1}A^{T}E(L) = C^{-1}A^{T}Y = C^{-1}A^{T}AX = X$$

式中，Y、X 为列向量（$n \times 1$ 阶矩阵和 $t \times 1$ 阶矩阵）

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_t \end{pmatrix}$$

式中，矩阵元素 Y_1，Y_2，…，Y_n 为直接量的真值，而 X_1，X_2，…，X_t 为待求量的真值。可见 $\hat{X}$ 是 X 的无偏估计。

例 5-1 已知任意温度 t 时的铜棒长度 y_t、0℃时的铜棒长度 y_0 和铜的线膨胀系数 α 具有线性关系 $y_1 = y_0(1 + \alpha t)$。现测得在不同温度 t_i 下，铜棒长度 l_i 见下表，试估计 y_0 和 α 的最可信赖值。

i	1	2	3	4	5	6
t_i/℃	10	20	25	30	40	45
l_i/mm	2000.36	2000.72	2000.80	2001.07	2001.48	2001.60

解：列出误差方程

$$v_i = l_i - y_0(1 + \alpha t_i) \qquad (i = 1,2,\cdots,6)$$

式中，l_i 为在温度 t_i 下铜棒长度的测得值；α 为铜的线膨胀系数。

令 $y_0 = a$，$\alpha y_0 = b$ 为两个待估计参量，则误差方程可写为

$$v_i = l_i - (a + t_i b) \qquad (i = 1,2,\cdots,6)$$

为计算方便，将数据列表如下：

i	t_i/℃	t_i^2/℃^{2}	l_i/mm	$t_i l_i$/（℃·mm）
1	10	100	2000.36	20003.6
2	20	400	2000.72	40014.4
3	25	625	2000.80	50020.0
4	30	900	2001.07	60032.1
5	40	1600	2001.48	80059.2
6	45	2025	2001.60	90072.0
$\sum$	170	5650	12006.03	340201.3

根据误差方程，按式（5-19）列出正规方程

$$\left.\begin{aligned} na + \sum_{i=1}^{6} t_i b &= \sum_{i=1}^{6} l_i \\ \sum_{i=1}^{6} t_i a + \sum_{i=1}^{6} t_i^2 b &= \sum_{i=1}^{6} t_i l_i \end{aligned}\right\}$$

将表中计算出的相应系数值代入上面的正规方程得

$$6a + 170b℃ = 12006.03\text{mm}$$

$$170a + 5650b℃ = 340201.3\text{mm}$$

解得

$$a \approx 1999.97\text{mm}$$

$$b \approx 0.03654\text{mm/℃}$$

即

$$y_0 = 1999.97\text{mm}$$

$$\alpha = \frac{b}{y_0} = \frac{0.03654\text{mm/℃}}{1999.97\text{mm}} \approx 0.0000183/℃$$

按矩阵形式解算，则有

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{6} t_i \\ \sum_{i=1}^{6} t_i & \sum_{i=1}^{6} t_i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 170 \\ 170 & 5650 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}^{-1} = \begin{pmatrix} 1.13 & -0.034 \\ -0.034 & 0.0012 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{6} l_i \\ \sum_{i=1}^{6} t_i l_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12006.03 \\ 340201.3 \end{pmatrix}$$

得

$$\hat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.13 & -0.034 \\ -0.034 & 0.0012 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12006.03 \\ 340201.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1999.97 \\ 0.03654 \end{pmatrix}$$

所以

$$y_0 = a = 1999.97\text{mm}$$

$$\alpha = \frac{b}{y_0} = \frac{0.03654\text{mm/℃}}{1999.97\text{mm}} \approx 0.0000183/℃$$

因此，铜棒长度 y_t 随温度 t 的线性变化规律为

$$y_t = 1999.97(1 + 0.0000183t/℃)\text{mm}$$

二、不等精度线性测量参数最小二乘法处理的正规方程

不等精度线性测量时参数的误差方程仍如式（5-9）一样，但在进行最小二乘法处理时，要取加权残余误差平方和为最小，即