$$(\sum_{i=1}^{n} p_i)x = \sum_{i=1}^{n} p_i l_i$$

可得最小二乘法处理的结果

$$x = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i l_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i} = \frac{p_1 l_1 + p_2 l_2 + \cdots + p_n l_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} \tag{5-37}$$

这正是不等精度测量时加权算术平均值原理所给出的结果。

对于等精度测量有

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_n = p$$

则由最小二乘法所确定的估计量为

$$x = \frac{p_1 l_1 + p_2 l_2 + \cdots + p_n l_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} = \frac{p(l_1 + l_2 + \cdots + l_n)}{np} = \frac{\sum_{i=1}^{n} l_i}{n} \tag{5-38}$$

此式与等精度测量时算术平均值原理给出的结果相同。

由此可见，最小二乘法原理与算术平均值原理是一致的，算术平均值原理可以看做是最小二乘法原理的特例。

第三节　精 度 估 计

对测量数据最小二乘法处理的最终结果，不仅要给出待求量的最可信赖的估计量，而且还要确定其可信赖程度，即应给出所得估计量的精度。

一、测量数据的精度估计

为了确定最小二乘估计量 x_1，x_2，…，x_t 的精度，首先需要给出直接测量所得测量数据的精度。测量数据的精度也以标准差 σ 来表示。因为无法求得 σ 的真值，因而只能依据有限次的测量结果给出 σ 的估计值 $\hat{\sigma}$，所谓给出精度估计，实际上是求出估计值 $\hat{\sigma}$。

（一）等精度测量数据的精度估计

设对包含 t 个未知量的 n 个线性测量参数方程组（5-7）进行 n 次独立的等精度测量，获得了 n 个测量数据 l_1，l_2，…，l_n。其相应的测量误差分别为 δ_1，δ_2，…，δ_n，它们是互不相关的随机误差。因为一般情况下真误差 δ_1，δ_2，…，δ_n 是未知的，只能由残余误差 v_1，v_2，…，v_n 给出 σ^2 的估计量。

可以证明（$\sum_{i=1}^{n} v_i^2$）$/\sigma^2$ 是自由度为（$n-t$）的χ^2 变量。根据χ^2 变量的性质，有

$$E\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{\sigma^2}\right\} = n - t \tag{5-39}$$

因而

$$E\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n}\right\} = \frac{n-t}{n}\sigma^2$$

由此可知，若仿照式（5-39）的结果，取残余误差平方的平均值作为 σ^2 的估计量 $\hat{\sigma}^2$，则所得 $\hat{\sigma}^2$ 将对 σ^2 有系统偏移，即

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n}$$

将不是 σ^2 的无偏估计量。因为

$$E\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n} \frac{n}{n-t}\right\} = E\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n-t}\right\} = \sigma^2$$

所以，可取

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n-t} \tag{5-40}$$

作为 σ^2 的无偏估计量。习惯上，这个估计量也写成 σ^2，即

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n-t} \tag{5-41}$$

因而测量数据的标准差的估计量为

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n-t}} \tag{5-42}$$

一般写成

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n-t}} \tag{5-43}$$

例 5-3 试求例 5-1 中铜棒长度的测量精度。

已知残余误差方程为

$$v_i = [l_i - 1999.97 \times (1 + 0.0000183 t_i/℃)]\text{mm} \quad (i = 1,2,\cdots,6)$$

将 t_i，l_i 值代入上式，可得残余误差为

$$v_1 = [2000.36 - 1999.97 \times (1 + 0.0000183 \times 10)]\text{mm} = 0.03\text{mm}$$

$$v_2 = [2000.72 - 1999.97 \times (1 + 0.0000183 \times 20)]\text{mm} = 0.02\text{mm}$$

$$v_3 = [2000.80 - 1999.97 \times (1 + 0.0000183 \times 25)]\text{mm} = -0.08\text{mm}$$

$$v_4 = [2001.07 - 1999.97 \times (1 + 0.0000183 \times 30)]\text{mm} = 0\text{mm}$$

$$v_5 = [2001.48 - 1999.97 \times (1 + 0.0000183 \times 40)]\text{mm} = 0.05\text{mm}$$

$$v_6 = [2001.60 - 1999.97 \times (1 + 0.0000183 \times 45)]\text{mm} = -0.02\text{mm}$$

$$\sum_{i=1}^{6} v_i^2 = 0.0106\text{mm}^2$$

因 $n=6$，$t=2$

于是可得标准差为

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{6} v_i^2}{n-t}} = \sqrt{\frac{0.0106}{6-2}}\text{mm} = 0.051\text{mm}$$

（二）不等精度测量数据的精度估计

不等精度测量数据的精度估计与等精度测量数据的精度估计相似，只是公式中的残余误差平方和变为加权的残余误差平方和，测量数据的单位权方差的无偏估计为

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i v_i^2}{n-t} \tag{5-44}$$

通常习惯写成

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i v_i^2}{n-t} \tag{5-45}$$

故测量数据的单位权标准差为

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i v_i^2}{n-t}} \tag{5-46}$$

二、最小二乘估计量的精度估计

最小二乘法所确定的估计量 x_1，x_2，…，x_t 的精度取决于测量数据的精度和线性方程组所给出的函数关系。对给定的线性方程组，若已知测量数据 l_1，l_2，…，l_n 的精度，就可求得最小二乘估计量的精度。

下面首先讨论等精度测量时最小二乘估计量的精度估计。

设有正规方程

$$\left.\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} a_{i1}a_{i1}x_1 + \sum_{i=1}^{n} a_{i1}a_{i2}x_2 + \cdots + \sum_{i=1}^{n} a_{i1}a_{it}x_t &= \sum_{i=1}^{n} a_{i1}l_i \\
\sum_{i=1}^{n} a_{i2}a_{i1}x_1 + \sum_{i=1}^{n} a_{i2}a_{i2}x_2 + \cdots + \sum_{i=1}^{n} a_{i2}a_{it}x_t &= \sum_{i=1}^{n} a_{i2}l_i \\
&\vdots \\
\sum_{i=1}^{n} a_{it}a_{i1}x_1 + \sum_{i=1}^{n} a_{it}a_{i2}x_2 + \cdots + \sum_{i=1}^{n} a_{it}a_{it}x_t &= \sum_{i=1}^{n} a_{it}l_i
\end{aligned}\right\}$$

现要给出由此方程所确定的估计量 x_1，x_2，…，x_t 的精度。为此，利用不定乘数法求出 x_1，x_2，…，x_t 的表达式，然后再找出估计量 x_1，x_2，…，x_t 的精度与测量数据 l_1，l_2，…，l_n 精度的关系，即可得到估计量精度估计的表达式。

设有不定乘数 d_{11}，d_{12}，…，d_{1t}；d_{21}，d_{22}，…，d_{2t}；…；d_{t1}，d_{t2}，…，d_{tt}（共$t\times t$个）。为求 x_1，令 d_{11}，d_{12}，…，d_{1t}分别去乘上面的正规方程中的第 1，2，…，t 式，得

$$\left.\begin{aligned}
d_{11}\sum_{i=1}^{n}a_{i1}a_{i1}x_1+d_{11}\sum_{i=1}^{n}a_{i1}a_{i1}x_2+\cdots+d_{11}\sum_{i=1}^{n}a_{i1}a_{it}x_t&=d_{11}\sum_{i=1}^{n}a_{i1}l_i\\
d_{12}\sum_{i=1}^{n}a_{i2}a_{i1}x_1+d_{12}\sum_{i=1}^{n}a_{i2}a_{i2}x_2+\cdots+d_{12}\sum_{i=1}^{n}a_{i2}a_{it}x_t&=d_{12}\sum_{i=1}^{n}a_{i2}l_i\\
&\vdots\\
d_{1t}\sum_{i=1}^{n}a_{it}a_{i1}x_1+d_{1t}\sum_{i=1}^{n}a_{it}a_{i2}x_2+\cdots+d_{1t}\sum_{i=1}^{n}a_{it}a_{it}x_t&=d_{1t}\sum_{i=1}^{n}a_{it}l_i
\end{aligned}\right\}$$

将上面的方程组各式的左右两边分别相加得

$$\sum_{r=1}^{t}d_{1r}\sum_{i=1}^{n}a_{ir}a_{i1}x_1+\sum_{r=1}^{t}d_{1r}\sum_{i=1}^{n}a_{ir}a_{i2}x_2+\cdots+\sum_{r=1}^{t}d_{1r}\sum_{i=1}^{n}a_{ir}a_{it}x_t=\sum_{r=1}^{t}d_{1r}\sum_{i=1}^{n}a_{ir}l_i$$

选择 d_{11}，d_{12}，…，d_{1t}值，使之满足如下条件：

$$\left.\begin{aligned}
\sum_{r=1}^{t}d_{1r}\sum_{i=1}^{n}a_{ir}a_{i1}&=1\\
\sum_{r=1}^{t}d_{1r}\sum_{i=1}^{n}a_{ir}a_{i2}&=0\\
&\vdots\\
\sum_{r=1}^{t}d_{1r}\sum_{i=1}^{n}a_{ir}a_{it}&=0
\end{aligned}\right\}\tag{5-47}$$

则

$$\begin{aligned}
x_1&=\sum_{r=1}^{t}d_{1r}\sum_{i=1}^{n}a_{ir}l_i\\
&=d_{11}\sum_{i=1}^{n}a_{i1}l_i+d_{12}\sum_{i=1}^{n}a_{i2}l_i+\cdots+d_{1t}\sum_{i=1}^{n}a_{it}l_i\\
&=[d_{11}a_{11}+d_{12}a_{12}+\cdots+d_{1t}a_{1t}]l_1+[d_{11}a_{21}+d_{12}a_{22}+\cdots+d_{1t}a_{2t}]l_2+\cdots\\
&\quad+[d_{11}a_{n1}+d_{12}a_{n2}+\cdots+d_{1t}a_{nt}]l_n
\end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}
d_{11}a_{11}+d_{12}a_{12}+\cdots+d_{1t}a_{1t}&=h_{11}\\
d_{11}a_{21}+d_{12}a_{22}+\cdots+d_{1t}a_{2t}&=h_{12}\\
&\vdots\\
d_{11}a_{n1}+d_{12}a_{n2}+\cdots+d_{1t}a_{nt}&=h_{1n}
\end{aligned}$$

则

$$x_1=h_{11}l_1+h_{12}l_2+\cdots+h_{1n}l_n\tag{5-48}$$

因 l_1，l_2，…，l_n 为相互独立（因而互不相关）的正态随机变量，且为等精度的，即 $\sigma_1=\sigma_2=\cdots=\sigma_n=\sigma$，则有

$$\sigma_{x1}^2=h_{11}^2\sigma_1^2+h_{12}^2\sigma_2^2+\cdots+h_{1n}^2\sigma_n^2=(h_{11}^2+h_{12}^2+\cdots+h_{1n}^2)\sigma^2\tag{5-49}$$

将等式右端 σ^2 的系数展开，并适当地合并同类项，注意到不定乘数 d_{11}，d_{12}，…，d_{1t}的选择条件式（5-47），最后可得

$$\sigma_{x1}^2=d_{11}\sigma^2$$

同样，再用 d_{21}，d_{22}，…，d_{2t}分别去乘正规方程各式，将乘得的各式相加，按 x_1，x_2，

$\cdots$，x_t 合并同类项得

$$\sum_{r=1}^{t} d_{2r} \sum_{i=1}^{n} a_{ir} a_{i1} x_1 + \sum_{r=1}^{t} d_{2r} \sum_{i=1}^{n} a_{ir} a_{i2} x_2 + \cdots + \sum_{r=1}^{t} d_{2r} \sum_{i=1}^{n} a_{ir} a_{it} x_t = \sum_{r=1}^{t} d_{2r} \sum_{i=1}^{n} a_{ir} l_i$$

适当选择 d_{21}，d_{22}，$\cdots$，d_{2t}，使之满足如下条件：

$$\left.\begin{aligned} \sum_{r=1}^{t} d_{2r} \sum_{i=1}^{n} a_{ir} a_{i1} &= 0 \\ \sum_{r=1}^{t} d_{2r} \sum_{i=1}^{n} a_{ir} a_{i2} &= 1 \\ &\vdots \\ \sum_{r=1}^{t} d_{2r} \sum_{i=1}^{n} a_{ir} a_{it} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{5-50}$$

则可求得 x_2 的表达式，由此得

$$\sigma_{x2}^2 = d_{22}\sigma^2$$

依此类推，可得 σ_{x3}^2，$\cdots$，σ_{xt}^2。

由上所述，可给出下面的结果：

设 d_{11}，d_{12}，$\cdots$，d_{1t}；d_{21}，d_{22}，$\cdots$，d_{2t}；$\cdots$；d_{t1}，d_{t2}，$\cdots$，d_{tt}分别为下列各方程组的解：

$$\left.\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} a_{i1}a_{i1}d_{11} + \sum_{i=1}^{n} a_{i1}a_{i2}d_{12} + \cdots + \sum_{i=1}^{n} a_{i1}a_{it}d_{1t} &= 1 \\
\sum_{i=1}^{n} a_{i2}a_{i1}d_{11} + \sum_{i=1}^{n} a_{i2}a_{i2}d_{12} + \cdots + \sum_{i=1}^{n} a_{i2}a_{it}d_{1t} &= 0 \\
&\vdots \\
\sum_{i=1}^{n} a_{it}a_{i1}d_{11} + \sum_{i=1}^{n} a_{it}a_{i2}d_{12} + \cdots + \sum_{i=1}^{n} a_{it}a_{it}d_{1t} &= 0
\end{aligned}\right\} \\
&\left.\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} a_{i1}a_{i1}d_{21} + \sum_{i=1}^{n} a_{i1}a_{i2}d_{22} + \cdots + \sum_{i=1}^{n} a_{i1}a_{it}d_{2t} &= 0 \\
\sum_{i=1}^{n} a_{i2}a_{i1}d_{21} + \sum_{i=1}^{n} a_{i2}a_{i2}d_{22} + \cdots + \sum_{i=1}^{n} a_{i2}a_{it}d_{2t} &= 1 \\
&\vdots \\
\sum_{i=1}^{n} a_{it}a_{i1}d_{21} + \sum_{i=1}^{n} a_{it}a_{i2}d_{22} + \cdots + \sum_{i=1}^{n} a_{it}a_{it}d_{2t} &= 0
\end{aligned}\right\} \\
&\qquad\qquad\vdots \\
&\left.\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} a_{i1}a_{i1}d_{t1} + \sum_{i=1}^{n} a_{i1}a_{i2}d_{t2} + \cdots + \sum_{i=1}^{n} a_{i1}a_{it}d_{tt} &= 0 \\
\sum_{i=1}^{n} a_{i2}a_{i1}d_{t1} + \sum_{i=1}^{n} a_{i2}a_{i2}d_{t2} + \cdots + \sum_{i=1}^{n} a_{i2}a_{it}d_{tt} &= 0 \\
&\vdots \\
\sum_{i=1}^{n} a_{it}a_{i1}d_{t1} + \sum_{i=1}^{n} a_{it}a_{i2}d_{t2} + \cdots + \sum_{i=1}^{n} a_{it}a_{it}d_{tt} &= 1
\end{aligned}\right\}
\end{aligned}\right\} \tag{5-51}$$

方程组（5-51）中，不定乘数 d_{rs}（r，$s=1$，2，…，t）的系数与正规方程（5-19）的系数完全一样，因而在实际计算时，可以利用解正规方程的中间结果，十分简便。

由式（5-51）求得不定乘数 d_{11}，d_{12}，…，d_{tt}，则各估计量 x_1，x_2，…，x_t 的方差为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{x1}^2 &= d_{11}\sigma^2\\ \sigma_{x2}^2 &= d_{22}\sigma^2\\ &\vdots\\ \sigma_{xt}^2 &= d_{tt}\sigma^2\end{aligned}\right\}\tag{5-52}$$

相应的标准差为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{x1} &= \sigma\sqrt{d_{11}}\\ \sigma_{x2} &= \sigma\sqrt{d_{22}}\\ &\vdots\\ \sigma_{xt} &= \sigma\sqrt{d_{tt}}\end{aligned}\right\}\tag{5-53}$$

式中，σ 为测量数据的标准差。

不等精度测量的情况与此类似。若有正规方程

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=1}^n p_i a_{i1}a_{i1}x_1 + \sum_{i=1}^n p_i a_{i1}a_{i2}x_2 + \cdots + \sum_{i=1}^n p_i a_{i1}a_{it}x_t &= \sum_{i=1}^n p_i a_{i1}l_i\\ \sum_{i=1}^n p_i a_{i2}a_{i1}x_1 + \sum_{i=1}^n p_i a_{i2}a_{i2}x_2 + \cdots + \sum_{i=1}^n p_i a_{i2}a_{it}x_t &= \sum_{i=1}^n p_i a_{i2}l_i\\ &\vdots\\ \sum_{i=1}^n p_i a_{it}a_{i1}x_1 + \sum_{i=1}^n p_i a_{it}a_{i2}x_2 + \cdots + \sum_{i=1}^n p_i a_{it}a_{it}x_t &= \sum_{i=1}^n p_i a_{it}l_i\end{aligned}\right\}$$

求解下面的 t 个方程组：

$$\left.\begin{aligned}&\left.\begin{aligned}\sum_{i=1}^n p_i a_{i1}a_{i1}d_{11} + \sum_{i=1}^n p_i a_{i1}a_{i2}d_{12} + \cdots + \sum_{i=1}^n p_i a_{i1}a_{it}d_{1t} &= 1\\ \sum_{i=1}^n p_i a_{i2}a_{i1}d_{11} + \sum_{i=1}^n p_i a_{i2}a_{i2}d_{12} + \cdots + \sum_{i=1}^n p_i a_{i2}a_{it}d_{1t} &= 0\\ &\vdots\\ \sum_{i=1}^n p_i a_{it}a_{i1}d_{11} + \sum_{i=1}^n p_i a_{it}a_{i2}d_{12} + \cdots + \sum_{i=1}^n p_i a_{it}a_{it}d_{1t} &= 0\end{aligned}\right\}\\ &\left.\begin{aligned}\sum_{i=1}^n p_i a_{i1}a_{i1}d_{21} + \sum_{i=1}^n p_i a_{i1}a_{i2}d_{22} + \cdots + \sum_{i=1}^n p_i a_{i1}a_{it}d_{2t} &= 0\\ \sum_{i=1}^n p_i a_{i2}a_{i1}d_{21} + \sum_{i=1}^n p_i a_{i2}a_{i2}d_{22} + \cdots + \sum_{i=1}^n p_i a_{i2}a_{it}d_{2t} &= 1\\ &\vdots\\ \sum_{i=1}^n p_i a_{it}a_{i1}d_{21} + \sum_{i=1}^n p_i a_{it}a_{i2}d_{22} + \cdots + \sum_{i=1}^n p_i a_{it}a_{it}d_{2t} &= 0\end{aligned}\right\}\end{aligned}\right\}\tag{5-54}$$

$$\left.\begin{array}{c}\vdots\\ \sum_{i=1}^{n}p_ia_{i1}a_{i1}d_{t1}+\sum_{i=1}^{n}p_ia_{i1}a_{i2}d_{t2}+\cdots+\sum_{i=1}^{n}p_ia_{i1}a_{it}d_{tt}=0\\ \sum_{i=1}^{n}p_ia_{i2}a_{i1}d_{t1}+\sum_{i=1}^{n}p_ia_{i2}a_{i2}d_{t2}+\cdots+\sum_{i=1}^{n}p_ia_{i2}a_{it}d_{tt}=0\\ \vdots\\ \sum_{i=1}^{n}p_ia_{it}a_{i1}d_{t1}+\sum_{i=1}^{n}p_ia_{it}a_{i2}d_{t2}+\cdots+\sum_{i=1}^{n}p_ia_{it}a_{it}d_{tt}=1\end{array}\right\}$$

得到 d_{11}，d_{22}，…，d_{tt}，于是估计量的标准差为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{x1}&=\sigma\sqrt{d_{11}}\\ \sigma_{x2}&=\sigma\sqrt{d_{22}}\\ &\vdots\\ \sigma_{xt}&=\sigma\sqrt{d_{tt}}\end{aligned}\right\}\tag{5-55}$$

式中，σ 为单位权标准差。

对等精度测量，因 $p_1=p_2=\cdots=p_n$（可取值为 1），σ 即为测量数据的标准差，这是不等精度测量的特例。

利用矩阵的形式可以更方便地获得上述结果。设有协方差矩阵（$n\times n$ 阶矩阵）

$$\begin{aligned}\boldsymbol{DL}&=\begin{pmatrix}Dl_{11}&Dl_{12}&\cdots&Dl_{1n}\\ Dl_{21}&Dl_{22}&\cdots&Dl_{2n}\\ &&\vdots&\\ Dl_{n1}&Dl_{n2}&\cdots&Dl_{nn}\end{pmatrix}\\ &=E(\boldsymbol{L}-E\boldsymbol{L})(\boldsymbol{L}-E\boldsymbol{L})^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

式中，Dl_{ii}为 l_i 的方差，$Dl_{ii}=E(l_i-El_i)(l_i-El_i)=\sigma_i^2(i=1,2,\cdots,n)$；$Dl_{ij}$为 l_i 与 l_j 的协方差（或称相关矩）；$Dl_{ij}=E(l_i-El_i)(l_j-El_j)=\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j(i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,n;\ i\neq j)$。

若 l_1，l_2，…，l_n 等精度独立测量的结果，即

$$\sigma_1=\sigma_2=\cdots=\sigma_n=\sigma$$

且相关系数 $\rho_{ij}=0$，即 $Dl_{ij}=0$

则有

$$\boldsymbol{DL}=\begin{pmatrix}\sigma^2&&&0\\ &\sigma^2&&\\ &&\ddots&\\ 0&&&\sigma^2\end{pmatrix}$$

于是估计量的协方差为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D\hat{X}}&=E(\boldsymbol{\hat{X}}-E\boldsymbol{\hat{X}})(\boldsymbol{\hat{X}}-E\boldsymbol{\hat{X}})^{\mathrm{T}}\\ &=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}E(\boldsymbol{L}-E\boldsymbol{L})(\boldsymbol{L}-E\boldsymbol{L})^{\mathrm{T}}[(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{DLA}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1} \\
&= (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\sigma^{2}\boldsymbol{IA}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1} \\
&= (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\sigma^{2}
\end{aligned}
$$

矩阵

$$
(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1t} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2t} \\ & & \vdots & \\ d_{t1} & d_{t2} & \cdots & d_{tt} \end{pmatrix}
$$

式中各元素即为上述的不定乘数，可由矩阵（$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$）求逆而得，或由式（5-51）求得。

同样，也可得不等精度测量的协方差矩阵

$$
D\hat{\boldsymbol{X}} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PA})^{-1}\sigma^{2}
$$

式中，σ 为单位权标准差。

矩阵

$$
(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PA})^{-1} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1t} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2t} \\ & & \vdots & \\ d_{t1} & d_{t2} & \cdots & d_{tt} \end{pmatrix}
$$

式中各元素即为不定乘数，可由（$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PA}$）求逆得到，也可由式（5-54）求得。

例 5-4 试求例 5-1 中铜棒长度和线膨胀系数估计量的精度。

已知正规方程为

$$
\left.\begin{aligned}
6a + 170b℃ &= 12006.03\text{mm} \\
170a + 5650b℃ &= 340201.3\text{mm}
\end{aligned}\right\}
$$

测量数据 l_i 的标准差为

$$
\sigma = 0.051\text{mm}
$$

由式（5-51）及所给正规方程的系数，可列出求解不定乘数

$$
\left.\begin{matrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{matrix}\right\}
$$

的方程组为

$$
\left.\begin{aligned}
6d_{11} + 170d_{12} &= 1 \\
170d_{11} + 5650d_{12} &= 0
\end{aligned}\right\}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
6d_{21} + 170d_{22} &= 0 \\
170d_{21} + 5650d_{22} &= 1
\end{aligned}\right\}
$$

分别解得

$$
d_{11} = 1.13
$$

$$
d_{22} = 0.0012
$$

则按式（5-53），可得估计量 a、b 的标准差为

$$\sigma_a = \sigma\sqrt{d_{11}} = 0.051\sqrt{1.13}\mathrm{mm} = 0.054\mathrm{mm}$$

$$\sigma_b = \sigma\sqrt{d_{22}} = 0.051\sqrt{0.0012}\mathrm{mm}/^\circ\mathrm{C} = 0.0018\mathrm{mm}/^\circ\mathrm{C}$$

因

$$y_0 = a,\ \alpha = \frac{b}{y_0}$$

故

$$\sigma_{y0} = \sigma_a = 0.054\mathrm{mm}$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_b}{y_0} = \frac{0.0018}{1999.97}/^\circ\mathrm{C} = 9\times10^{-7}{}^\circ\mathrm{C}$$

第四节　组合测量的最小二乘法处理

在精密测试工作中，组合测量占有十分重要的地位。例如，作为标准量的多面棱体、度盘、砝码、电容器以及其他标准器的检定等，为了减小随机误差的影响，提高测量精度，可采用组合测量的方法。

组合测量是通过直接测量待测参数的各种组合量（一般是等精度测量），然后对这些测量数据进行处理，从而求得待测参数的估计量，并给出其精度估计。通常组合测量数据是用最小二乘法进行处理，它是最小二乘法在精密测试中的一种重要的应用。

为简单起见，现以检定三段刻线间距为例，说明组合测量的数据处理方法。

如图 5-1 所示，要求检定刻线 A、B、C、D 间的距离 x_1、x_2、x_3。

为此，直接测量刻线间距的各种组合量（见图 5-2），得到如下测量数据：

$$l_1 = 1.015\mathrm{mm}\quad l_2 = 0.985\mathrm{mm}\quad l_3 = 1.020\mathrm{mm}$$
$$l_4 = 2.016\mathrm{mm}\quad l_5 = 1.981\mathrm{mm}\quad l_6 = 3.032\mathrm{mm}$$

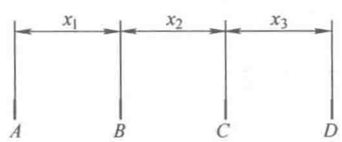

图　5-1

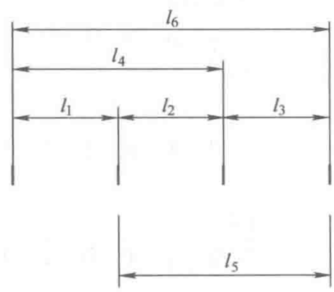

图　5-2

首先按式（5-9）列出误差方程

$$\left.\begin{aligned}
v_1 &= l_1 - x_1\\
v_2 &= l_2 - x_2\\
v_3 &= l_3 - x_3\\
v_4 &= l_4 - (x_1 + x_2)\\
v_5 &= l_5 - (x_2 + x_3)\\
v_6 &= l_6 - (x_1 + x_2 + x_3)
\end{aligned}\right\}$$

根据矩阵形式（5-10），上式可以表示为

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \\ l_5 \\ l_6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

即

$$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \\ l_5 \\ l_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.015 \\ 0.985 \\ 1.020 \\ 2.016 \\ 1.981 \\ 3.032 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ \hat{\boldsymbol{X}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

由式（5-24）可得

$$\hat{\boldsymbol{X}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}$$

式中

$$\boldsymbol{C}^{-1} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 \\ -4 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

所以

$$\hat{\boldsymbol{X}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1.015 \\ 0.985 \\ 1.020 \\ 2.016 \\ 1.981 \\ 3.032 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1.015 \\ 0.985 \\ 1.020 \\ 2.016 \\ 1.981 \\ 3.032 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4.112 \\ 3.932 \\ 4.052 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.028 \\ 0.983 \\ 1.013 \end{pmatrix}$$

即解得

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 1.028\text{mm} \\ x_2 &= 0.983\text{mm} \\ x_3 &= 1.013\text{mm} \end{aligned}\right\}$$

这就是刻线间距 AB、BC、CD 的最佳估计值，现再求出上述估计量的精度估计。

将最佳估计值代入误差方程可得

$$v_1 = l_1 - x_1 = 1.015\text{mm} - 1.028\text{mm} = -0.013\text{mm}$$

$$v_2 = l_2 - x_2 = 0.985\text{mm} - 0.983\text{mm} = 0.002\text{mm}$$

$$v_3 = l_3 - x_3 = 1.020\text{mm} - 1.013\text{mm} = 0.007\text{mm}$$

$$v_4 = l_4 - (x_1 + x_2) = 2.016\text{mm} - (1.028 + 0.983)\text{mm} = 0.005\text{mm}$$

$$v_5 = l_5 - (x_2 + x_3) = 1.981\text{mm} - (0.983 + 1.013)\text{mm} = -0.015\text{mm}$$

$$v_6 = l_6 - (x_1 + x_2 + x_3) = 3.032\text{mm} - (1.028 + 0.983 + 1.013)\text{mm} = 0.008\text{mm}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{6} v_i^2 &= v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 + v_5^2 + v_6^2 \\ &= (0.013^2 + 0.002^2 + 0.007^2 + 0.005^2 + 0.015^2 + 0.008^2)\text{mm}^2 \\ &= 0.000536\text{mm}^2 \end{aligned}$$

因为是等精度测量，测得数据 l_1，l_2，l_3，l_4，l_5，l_6 的标准差相同，为

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{6} v_i^2}{n-t}} = \sqrt{\frac{0.000536}{6-3}}\text{mm} = 0.013\text{mm}$$

为求出估计量 x_1，x_2，x_3 的标准差，首先需求出不定乘数 $d_{ij}(i,\ j=1,\ 2,\ 3)$。由方程（5-51）可知，不定乘数 d_{ij}的系数与正规方程（5-19）的系数相同，因而 d_{ij}是矩阵 $\boldsymbol{C}^{-1}$中各元素，即

$$\boldsymbol{C}^{-1} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

则

$$d_{11} = \frac{1}{4} \times 2 = 0.5$$

$$d_{22} = \frac{1}{4} \times 2 = 0.5$$

$$d_{33} = \frac{1}{4} \times 2 = 0.5$$

按式（5-53），可得估计量的标准差为

$$\sigma_{x1} = \sigma\sqrt{d_{11}} = 0.013\sqrt{0.5}\text{mm} = 0.009\text{mm}$$

$$\sigma_{x2} = \sigma\sqrt{d_{22}} = 0.013\sqrt{0.5}\text{mm} = 0.009\text{mm}$$

$$\sigma_{x3} = \sigma\sqrt{d_{33}} = 0.013\sqrt{0.5}\text{mm} = 0.009\text{mm}$$

例 5-5　为了测定公称值是 10g、20g、50g 的三只砝码质量 m_1、m_2、m_3，对三只砝码采用不同组合进行了 6 次测量（测量无系统误差），按下列组合方式和测量后的结果为

对砝码 m_1 单独测量，得　　$y_1 = 10.002\text{g}$

对砝码 m_2 单独测量，得　　$y_2 = 20.002\text{g}$

对砝码 m_3 单独测量，得　　$y_3 = 50.006\text{g}$

对砝码 m_1、m_2 之和组合测量，得　　$y_4 = 30.004\text{g}$

对砝码 m_1、m_3 之和组合测量，得　　$y_5 = 60.002\text{g}$

对砝码 m_2、m_3 之和组合测量，得　　$y_6 = 70.002\text{g}$

对砝码 m_1、m_2、m_3 之和组合测量，得　　$y_7 = 80.008\text{g}$

求三只砝码的最佳估计值及其标准差？

首先按式（5-9）列出误差方程

$$\left.\begin{aligned}
v_1 &= y_1 - m_1 \\
v_2 &= y_2 - m_2 \\
v_3 &= y_3 - m_3 \\
v_4 &= y_4 - (m_1 + m_2) \\
v_5 &= y_5 - (m_1 + m_3) \\
v_6 &= y_6 - (m_2 + m_3) \\
v_7 &= y_7 - (m_1 + m_2 + m_3)
\end{aligned}\right\}$$

根据矩阵形式（5-10），上式可以用矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}$$

即

$$V=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\\v_5\\v_6\\v_7\end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\\y_5\\y_6\\y_7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10.002\\20.002\\50.006\\30.004\\60.002\\70.002\\80.008\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix},\ \hat{M}=\begin{pmatrix}m_1\\m_2\\m_3\end{pmatrix}$$

由式（5-24）可得

$$\hat{M}=\begin{pmatrix}m_1\\m_2\\m_3\end{pmatrix}=C^{-1}A^{\mathrm{T}}Y$$

式中

$$\begin{aligned}C^{-1}&=(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}\\&=\begin{pmatrix}4&2&2\\2&4&2\\2&2&4\end{pmatrix}^{-1}\\&=\frac{1}{\begin{vmatrix}4&2&2\\2&4&2\\2&2&4\end{vmatrix}}\begin{pmatrix}12&-4&-4\\-4&12&-4\\-4&-4&12\end{pmatrix}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}3&-1&-1\\-1&3&-1\\-1&-1&3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\hat{M}&=\begin{pmatrix}m_1\\m_2\\m_3\end{pmatrix}=C^{-1}A^{\mathrm{T}}Y\\&=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}3&-1&-1\\-1&3&-1\\-1&-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&1&1&0&1\\0&1&0&1&0&1&1\\0&0&1&0&1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10.002\\20.002\\50.006\\30.004\\60.002\\70.002\\80.008\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}3&-1&-1&2&2&-2&1\\-1&3&-1&2&-2&2&1\\-1&-1&3&-2&2&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10.002\\20.002\\50.006\\30.004\\60.002\\70.002\\80.008\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}80.014\\160.014\\400.022\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10.00175\\20.00175\\50.00275\end{pmatrix}\end{aligned}$$

即解得

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= 10.00175\text{g} \\ m_2 &= 20.00175\text{g} \\ m_3 &= 50.00275\text{g} \end{aligned}\right\}$$

这就是砝码质量 m_1、m_2、m_3 的最佳估计值，现再求出上述估计量的标准差。

将最佳估计值代入误差方程可得

$$v_1 = y_1 - m_1 = 10.002\text{g} - 10.00175\text{g} = 0.00025\text{g}$$

$$v_2 = y_2 - m_2 = 20.002\text{g} - 20.00175\text{g} = 0.00025\text{g}$$

$$v_3 = y_3 - m_3 = 50.006\text{g} - 50.00275\text{g} = 0.00325\text{g}$$

$$v_4 = y_4 - (m_1 + m_2) = 30.004\text{g} - (10.00175\text{g} + 20.00175\text{g}) = 0.0005\text{g}$$

$$v_5 = y_5 - (m_1 + m_3) = 60.002\text{g} - (10.00175\text{g} + 50.00275\text{g}) = -0.0025\text{g}$$

$$v_6 = y_6 - (m_2 + m_3) = 70.002\text{g} - (20.00175\text{g} + 50.00275\text{g}) = -0.0025\text{g}$$

$$v_7 = y_7 - (m_1 + m_2 + m_3) = 80.008\text{g} - (10.00175 + 20.00175\text{g} + 50.00275\text{g}) = 0.00175\text{g}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{7} v_i^2 &= v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 + v_5^2 + v_6^2 + v_7^2 \\ &= (0.00025^2 + 0.00025^2 + 0.00325^2 + 0.0005^2 + (-0.0025)^2 + (-0.0025)^2 + 0.00175^2)\text{g}^2 \\ &= 0.0000265\text{g}^2 \end{aligned}$$

因为是等精度测量，测得数据 y_1，y_2，y_3，y_4，y_5，y_6，y_7 的标准差相同，为

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n-t}} = \sqrt{\frac{0.0000265}{7-3}}\text{g} = 0.0026\text{g}$$

为求出估计量 m_1，m_2，m_3 的标准差，首先需要求出不定乘数 d_{ij}（i，$j=1$，2，3）。由式（5-51）可知，不定乘数 d_{ij} 的系数与正规方程（5-19）的系数相同，因而 d_{ij} 是矩阵 $\boldsymbol{C}^{-1}$ 中的各元素，即

$$\boldsymbol{C}^{-1} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

则

$$d_{11} = \frac{1}{8} \times 3 = 0.375$$

$$d_{22} = \frac{1}{8} \times 3 = 0.375$$

$$d_{33} = \frac{1}{8} \times 3 = 0.375$$

按式（5-53），可得估计量的标准差为

$$\sigma_{m1} = \sigma\sqrt{d_{11}} = 0.0026\sqrt{0.375}\text{g} = 0.0016\text{g}$$

$$\sigma_{m2} = \sigma\sqrt{d_{22}} = 0.0026\sqrt{0.375}\text{g} = 0.0016\text{g}$$

$$\sigma_{m3} = \sigma\sqrt{d_{33}} = 0.0026\sqrt{0.375}\text{g} = 0.0016\text{g}$$

习　题

5-1　由测量方程

$$3x + y = 2.9 \quad x - 2y = 0.9 \quad 2x - 3y = 1.9$$

试求 x、y 的最小二乘法处理及其相应精度。

5-2　对未知量 x、y、z，组合测量的结果如下：

$$x = 0 \qquad y = 0 \qquad z = 0 \qquad -y + x = 1.35 \qquad x - y = 0.92 \qquad -x + z = 1.00$$

试求 x、y、z 的最可信赖值及其标准差。

5-3　已知误差方程为

$$v_1 = 10.013 - x_1 \qquad v_3 = 10.002 - x_3 \qquad v_5 = 0.008 - (x_1 - x_3)$$
$$v_2 = 10.010 - x_2 \qquad v_4 = 0.004 - (x_1 - x_2) \qquad v_6 = 0.006 - (x_2 - x_3)$$

试给出 x_1、x_2、x_3 的最小二乘法处理及其相应精度。

5-4　今有等精度测量方程组：

$$x + 37y + 1369z = 36.3 \qquad x + 27y + 729z = 47.5 \qquad x + 2y + 484z = 54.7$$
$$x + 17y + 289z = 63.2 \qquad x + 12y + 144z = 72.9 \qquad x + 7y + 49z = 83.7$$

试用矩阵最小二乘法求 x、y、z 的最可信赖值及其精度。

5-5　测力计示值与测量时的温度 t 的对应值独立测得如下表所示：

t/℃	15	18	21	24	27	30
F/N	43.61	43.63	43.68	43.71	43.74	43.78

设 t 无误差，F 值随 t 的变化呈线性关系 $F = k_0 + kt$，试给出线性方程中系数 k_0 和 k 的最小二乘估计及其相应精度。

5-6　研究米尺基准器的线膨胀系数，得出在不同温度时该基准器的长度修正值可用公式 $\Delta L = x + yt + zt^2$ 表示。式中为 0℃时米尺基准器的修正值（单位为 μm），y 和 z 为温度系数，t 为温度。在不同温度时米尺基准器的修正值 ΔL 如下表所示：

t/℃	0.551	5.363	10.459	14.277	17.806	22.103	24.633	28.986	34.417
ΔL/μm	5.70	47.61	91.49	124.25	154.87	192.64	214.57	252.09	299.84

试求 x，y，z 的最小二乘法处理及其相应精度。

5-7　不等精度测量的方程组如下：

$$x - 3y = -5.6,\ P_1 = 1;\ 4x + y = 8.1,\ P_2 = 2;\ 2x - y = 0.5,\ P_3 = 3$$

试求 x、y 的最小二乘法处理及其相应精度。

5-8　对某一角度值 a_i，分两个测回进行测量，其权 p_i 等于测定次数，测定值如下表。试求该角度的最可信赖值及其标准差。

第一测回		第二测回	
p_i	a_i	p_i	a_i
7	34°56′	3	34°55′40″
1	34°54′	2	34°55′30″
		1	34°55′20″
		1	34°55′0″
2	34°55′	1	34°55′70″
		1	34°55′10″
		1	34°55′50″

5-9　已知不等精度测量的单位权标准差 $\sigma=0.004$，正规方程为

$$33x_1+32x_2=70.184 \qquad 32x_1+117x_2=111.994$$

试给出 x_1、x_2 的最小二乘法处理及其相应精度。

5-10　将下面的非线性误差方程组化成线性的形式，并给出未知参数 x_1、x_2 的二乘法处理及其相应精度。

$$\nu_1=5.13-x_1 \qquad \nu_2=8.26-x_2 \qquad \nu_3=13.21-(x_1+x_2) \qquad \nu_4=3.01-\frac{x_1x_2}{x_1+x_2}$$

5-11　今有两个电容器，分别测其电容，然后又将其串联和并联测量，测得如下结果：

$$C_1=0.2071\mu\text{F} \qquad C_2=0.2056\mu\text{F} \qquad C_1+C_2=0.4111\mu\text{F} \qquad \frac{C_1C_2}{C_1+C_2}=0.1035\mu\text{F}$$

试求电容器电容量的最可信赖值及其精度。

5-12　交流电路的电抗 $x=\omega L-\dfrac{1}{\omega C}$，测得角频率 ω 和电抗 x 为

$$\omega_1=3,\ x_1=0.8; \qquad \omega_2=2,\ x_2=0.2; \qquad \omega_3=1,\ x_3=-0.3$$

试求：(1) L、C 最可信赖值及其标准差；(2) $\omega=3$ 时（$\sigma_\omega=0.1$）电抗值及其标准差。

5-13　今测得由坐标点（1，0）、（3，1）和（−1，2）到某点的距离分别为3.1、2.2和3.2。试求该点坐标位置的最可信赖值及其标准差。

5-14　某平面三角形三个角被测出为 $A=48°5'10''$，$B=60°25'24''$，$C=70°42'7''$，今假设这种测量为 (1) 各次权相等；(2) 各次权分别为1、2、3；试分别求 A、B、C 的最可信赖结果。