或

$$(\boldsymbol{L}^{*}-\boldsymbol{A}^{*}\hat{\boldsymbol{X}})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{L}^{*}-\boldsymbol{A}^{*}\hat{\boldsymbol{X}})=\text{最小} \tag{5-18}$$

第二节 正规方程

为了获得更可靠的结果，测量次数 n 总要多于未知参数的个数 t，即所得误差方程式的个数总是要多于未知数的个数。因而直接用一般解代数方程的方法是无法求解这些未知参数的。最小二乘法则可以由误差方程得到有确定解的代数方程组（其方程式个数正好等于未知数的个数），从而可求解出这些未知参数。这个有确定解的代数方程组称为最小二乘法估计的正规方程（或称为法方程）。

线性测量参数的最小二乘法处理程序可归结为：首先根据具体问题列出误差方程式；再按最小二乘法原理，利用求极值的方法由误差方程得到正规方程；然后求解正规方程，得到待求的估计量；最后给出精度估计。对于非线性测量方程，可先将其线性化，然后按上述线性测量参数的最小二乘法处理程序去处理。因此，建立正规方程是待求参数最小二乘法处理的基本环节。

一、等精度线性测量参数最小二乘法处理的正规方程

线性测量的误差方程式为

$$\left.\begin{aligned}v_1&=l_1-(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1t}x_t)\\v_2&=l_2-(a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2t}x_t)\\&\vdots\\v_n&=l_n-(a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nt}x_t)\end{aligned}\right\}$$

在等精度测量中，应满足最小二乘条件式（5-6），即

$$\sum_{i=1}^{n}v_i^2=v_1^2+v_2^2+\cdots+v_n^2=\text{最小}$$

现求上式的估计量 x_1，x_2，…，x_t，可利用求极值的方法来满足上式的条件。为此，对残余误差的平方和 $\sum\limits_{i=1}^{n}v_i^2$ 求导数，并令其为零，有

$$\begin{aligned}\frac{\partial\left(\sum\limits_{i=1}^{n}v_i^2\right)}{\partial x_1}=&-2a_{11}\{l_1-(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1t}x_t)\}\\&-2a_{21}\{l_2-(a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2t}x_t)\}\\&-\cdots-2a_{n1}\{l_n-(a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nt}x_t)\}=0\end{aligned}$$

因为

$$\sum_{i=1}^{n}a_{i1}a_{i1}=a_{11}a_{11}+a_{21}a_{21}+\cdots+a_{n1}a_{n1}$$

$$\sum_{i=1}^{n}a_{i1}a_{i2}=a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}+\cdots+a_{n1}a_{n2}$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i1}a_{it} = a_{11}a_{1t} + a_{21}a_{2t} + \cdots + a_{n1}a_{nt}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i1}l_i = a_{11}l_1 + a_{21}l_2 + \cdots + a_{n1}l_n$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\sum_{i=1}^{n} v_i^2)}{\partial x_1} &= -2\left\{\sum_{i=1}^{n} a_{i1}l_i - \left(x_1\sum_{i=1}^{n} a_{i1}a_{i1} + x_2\sum_{i=1}^{n} a_{i1}a_{i2} + \cdots + x_t\sum_{i=1}^{n} a_{i1}a_{it}\right)\right\}\\ &= 0\end{aligned}$$

同理有

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\sum_{i=1}^{n} v_i^2)}{\partial x_2} &= -2\left\{\sum_{i=1}^{n} a_{i2}l_i - \left(x_1\sum_{i=1}^{n} a_{i2}a_{i1} + x_2\sum_{i=1}^{n} a_{i2}a_{i2} + \cdots + x_t\sum_{i=1}^{n} a_{i2}a_{it}\right)\right\}\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\sum_{i=1}^{n} v_i^2)}{\partial x_t} &= -2\left\{\sum_{i=1}^{n} a_{it}l_i - \left(x_1\sum_{i=1}^{n} a_{it}a_{i1} + x_2\sum_{i=1}^{n} a_{it}a_{i2} + \cdots + x_t\sum_{i=1}^{n} a_{it}a_{it}\right)\right\}\\ &= 0\end{aligned}$$

注意到上式中各二阶偏导数恒正，即

$$\frac{\partial^2(\sum_{i=1}^{n} v_i^2)}{\partial x_1^2} = 2\sum_{i=1}^{n} a_{i1}a_{i1} > 0$$

$$\frac{\partial^2(\sum_{i=1}^{n} v_i^2)}{\partial x_2^2} = 2\sum_{i=1}^{n} a_{i2}a_{i2} > 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial^2(\sum_{i=1}^{n} v_i^2)}{\partial x_t^2} = 2\sum_{i=1}^{n} a_{it}a_{it} > 0$$

由此可知，上面各方程求得的极值是最小值，满足最小二乘条件，因而也是所要求的估计量，最后把它写成

$$\left.\begin{array}{l}\sum_{i=1}^{n} a_{i1}a_{i1}x_1 + \sum_{i=1}^{n} a_{i1}a_{i2}x_2 + \cdots + \sum_{i=1}^{n} a_{i1}a_{it}x_t = \sum_{i=1}^{n} a_{i1}l_i\\ \sum_{i=1}^{n} a_{i2}a_{i1}x_1 + \sum_{i=1}^{n} a_{i2}a_{i2}x_2 + \cdots + \sum_{i=1}^{n} a_{i2}a_{it}x_t = \sum_{i=1}^{n} a_{i2}l_i\\ \qquad\vdots\\ \sum_{i=1}^{n} a_{it}a_{i1}x_1 + \sum_{i=1}^{n} a_{it}a_{i2}x_2 + \cdots + \sum_{i=1}^{n} a_{it}a_{it}x_t = \sum_{i=1}^{n} a_{it}l_i\end{array}\right\} \tag{5-19}$$

式（5-19）即为等精度测量的线性方程最小二乘法处理的正规方程。这是一个 t 元线性方程组，当其系数行列式不为零时，有唯一确定的解，由此可解得欲求的估计量。

注意到方程组（5-19）在形式上有如下特点：

1）沿主对角线分布着平方项系数 $\sum_{i=1}^{n} a_{i1}a_{i1}$，$\sum_{i=1}^{n} a_{i2}a_{i2}$，…，$\sum_{i=1}^{n} a_{it}a_{it}$ 都为正数。

2）以主对角线为对称线，对称分布的各系数彼此两两相等，如 $\sum_{i=1}^{n} a_{i1}a_{i2}$ 与 $\sum_{i=1}^{n} a_{i2}a_{i1}$ 相等，$\sum_{i=1}^{n} a_{i2}a_{it}$ 与 $\sum_{i=1}^{n} a_{it}a_{i2}$ 相等，…

现将上述正规方程（5-19）表示成矩阵形式。把正规方程组中第 r 个方程式（$r=1$，2，…，t）

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ir}l_i - \left[\sum_{i=1}^{n} a_{ir}a_{i1}x_1 + \sum_{i=1}^{n} a_{ir}a_{i2}x_2 + \cdots + \sum_{i=1}^{n} a_{ir}a_{it}x_t\right] = 0$$

改写成如下形式为

$$\begin{aligned}
&(a_{1r}l_1 + a_{2r}l_2 + \cdots + a_{nr}l_n) - (a_{1r}a_{11}x_1 + a_{2r}a_{21}x_1 + \cdots + a_{nr}a_{n1}x_1) \\
&\quad - (a_{1r}a_{12}x_2 + a_{2r}a_{22}x_2 + \cdots + a_{nr}a_{n2}x_2) - \cdots - (a_{1r}a_{1t}x_t + a_{2r}a_{2t}x_t + \cdots + a_{nr}a_{nt}x_t) \\
&= a_{1r}[l_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1t}x_t)] + a_{2r}[l_2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2t}x_t)] + \cdots \\
&\quad + a_{nr}[l_n - (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nt}x_t)] \\
&= a_{1r}v_1 + a_{2r}v_2 + \cdots + a_{nr}v_n \\
&= 0
\end{aligned}$$

式中，$r=1$，2，…，t。

由此，正规方程组可写成

$$\left.\begin{aligned}
a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \cdots + a_{n1}v_n &= 0 \\
a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{n2}v_n &= 0 \\
&\vdots \\
a_{1t}v_1 + a_{2t}v_2 + \cdots + a_{nt}v_n &= 0
\end{aligned}\right\} \tag{5-20}$$

因而它可表示为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ & & \vdots & \\ a_{1t} & a_{2t} & \cdots & a_{nt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

即

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{0} \tag{5-21}$$

这就是等精度测量情况下以矩阵形式表示的正规方程。又因

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{L} - \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}}$$

所以正规方程又可表示为

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{0}$$

即

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\hat{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L} \tag{5-22}$$

若令

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$$

则正规方程又可写成

$$\boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L} \tag{5-23}$$

若 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于 t，则矩阵 $\boldsymbol{C}$ 是满秩的，即其行列式 $|\boldsymbol{C}|\neq\boldsymbol{0}$。那么 $\hat{\boldsymbol{X}}$ 必定有唯一的解。此时用 $\boldsymbol{C}^{-1}$ 左乘正规方程的两边，就得到正规方程解的矩阵表达式

$$\hat{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L} \tag{5-24}$$

所解得 $\hat{\boldsymbol{X}}$ 的数学期望为

$$\boldsymbol{E}[\hat{\boldsymbol{X}}]=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L})=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{L})=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}$$

式中，$\boldsymbol{Y}$、$\boldsymbol{X}$ 为列向量（$n\times1$ 阶矩阵和 $t\times1$ 阶矩阵）

$$\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}Y_1\\Y_2\\\vdots\\Y_n\end{pmatrix}\qquad\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\\\vdots\\X_t\end{pmatrix}$$

式中，矩阵元素 Y_1，Y_2，…，Y_n 为直接量的真值，而 X_1，X_2，…，X_t 为待求量的真值。可见 $\hat{\boldsymbol{X}}$ 是 X 的无偏估计。

例 5-1 已知任意温度 t 时的铜棒长度 y_t、0℃时的铜棒长度 y_0 和铜的线膨胀系数 α 具有线性关系 $y_1=y_0(1+\alpha t)$。现测得在不同温度 t_i 下，铜棒长度 l_i 见下表，试估计 y_0 和 α 的最可信赖值。

i	1	2	3	4	5	6
t_i/℃	10	20	25	30	40	45
l_i/mm	2000.36	2000.72	2000.80	2001.07	2001.48	2001.60

解：列出误差方程

$$v_i=l_i-y_0(1+\alpha t_i)\qquad(i=1,2,\cdots,6)$$

式中，l_i 为在温度 t_i 下铜棒长度的测得值；α 为铜的线膨胀系数。

令 $y_0=a$，$\alpha y_0=b$ 为两个待估计参量，则误差方程可写为

$$v_i=l_i-(a+t_ib)\qquad(i=1,2,\cdots,6)$$

为计算方便，将数据列表如下：

i	t_i/℃	t_i^2/℃^{2}	l_i/mm	t_il_i/（℃·mm）
1	10	100	2000.36	20003.6
2	20	400	2000.72	40014.4
3	25	625	2000.80	50020.0
4	30	900	2001.07	60032.1
5	40	1600	2001.48	80059.2
6	45	2025	2001.60	90072.0
$\sum$	170	5650	12006.03	340201.3

根据误差方程，按式（5-19）列出正规方程

$$\left.\begin{aligned} na + \sum_{i=1}^{6} t_i b &= \sum_{i=1}^{6} l_i \\ \sum_{i=1}^{6} t_i a + \sum_{i=1}^{6} t_i^2 b &= \sum_{i=1}^{6} t_i l_i \end{aligned}\right\}$$

将表中计算出的相应系数值代入上面的正规方程得

$$6a + 170b℃ = 12006.03\text{mm}$$

$$170a + 5650b℃ = 340201.3\text{mm}$$

解得

$$a \approx 1999.97\text{mm}$$

$$b \approx 0.03654\text{mm}/℃$$

即

$$y_0 = 1999.97\text{mm}$$

$$\alpha = \frac{b}{y_0} = \frac{0.03654\text{mm}/℃}{1999.97\text{mm}} \approx 0.0000183/℃$$

按矩阵形式解算，则有

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{6} t_i \\ \sum_{i=1}^{6} t_i & \sum_{i=1}^{6} t_i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 170 \\ 170 & 5650 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}^{-1} = \begin{pmatrix} 1.13 & -0.034 \\ -0.034 & 0.0012 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{6} l_i \\ \sum_{i=1}^{6} t_i l_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12006.03 \\ 340201.3 \end{pmatrix}$$

得

$$\hat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.13 & -0.034 \\ -0.034 & 0.0012 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12006.03 \\ 340201.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1999.97 \\ 0.03654 \end{pmatrix}$$

所以

$$y_0 = a = 1999.97\text{mm}$$

$$\alpha = \frac{b}{y_0} = \frac{0.03654\text{mm}/℃}{1999.97\text{mm}} \approx 0.0000183/℃$$

因此，铜棒长度 y_t 随温度 t 的线性变化规律为

$$y_t = 1999.97(1 + 0.0000183t/℃)\text{mm}$$

二、不等精度线性测量参数最小二乘法处理的正规方程

不等精度线性测量时参数的误差方程仍如式（5-9）一样，但在进行最小二乘法处理时，要取加权残余误差平方和为最小，即

$$\sum_{i=1}^{n} p_i v_i^2 = \text{最小}$$

对 $\sum_{i=1}^{n} p_i v_i^2$ 求导数并令其为0

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\left(\sum_{i=1}^{n} p_i v_i^2\right)}{\partial x_1} &= 0 \\
\frac{\partial\left(\sum_{i=1}^{n} p_i v_i^2\right)}{\partial x_2} &= 0 \\
&\vdots \\
\frac{\partial\left(\sum_{i=1}^{n} p_i v_i^2\right)}{\partial x_t} &= 0
\end{aligned}\right\}$$

该方程满足 $\sum_{i=1}^{n} p_i v_i^2 =$ 最小的条件，经整理后得如下方程组：

$$\left.\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} p_i a_{i1} a_{i1} x_1 + \sum_{i=1}^{n} p_i a_{i1} a_{i2} x_2 + \cdots + \sum_{i=1}^{n} p_i a_{i1} a_{it} x_t &= \sum_{i=1}^{n} p_i a_{i1} l_i \\
\sum_{i=1}^{n} p_i a_{i2} a_{i1} x_1 + \sum_{i=1}^{n} p_i a_{i2} a_{i2} x_2 + \cdots + \sum_{i=1}^{n} p_i a_{i2} a_{it} x_t &= \sum_{i=1}^{n} p_i a_{i2} l_i \\
&\vdots \\
\sum_{i=1}^{n} p_i a_{it} a_{i1} x_1 + \sum_{i=1}^{n} p_i a_{it} a_{i2} x_2 + \cdots + \sum_{i=1}^{n} p_i a_{it} a_{it} x_t &= \sum_{i=1}^{n} p_i a_{it} l_i
\end{aligned}\right\} \tag{5-25}$$

式中

$$\sum_{i=1}^{n} p_i a_{ir} a_{is} = p_1 a_{1r} a_{1s} + p_2 a_{2r} a_{2s} + \cdots + p_n a_{nr} a_{ns}$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i a_{ir} l_i = p_1 a_{1r} l_1 + p_2 a_{2r} l_2 + \cdots + p_n a_{nr} l_n$$

$$r = 1, 2, \cdots, t; s = 1, 2, \cdots, t$$

式（5-25）就是不等精度线性测量时线性测量参数最小二乘法处理的正规方程。它仍有前述等精度测量时正规方程的特点，即主对角线各项系数是平方和，为正值，以主对角线为对称轴线的其他各相应项两两相等。

我们还可以将该正规方程化成等精度的形式。为此，做代换

$$\left.\begin{aligned} a_{ir}' &= p_i^{1/2} a_{ir} \\ l_i' &= p_i^{1/2} l_i \end{aligned}\right\} \begin{pmatrix} i = 1, 2, \cdots, n \\ r = 1, 2, \cdots, t \end{pmatrix}$$

将其代入正规方程（5-25），经整理后得到下面的正规方程

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a_{i1}'a_{i1}'x_1 + \sum_{i=1}^{n} a_{i1}'a_{i2}'x_2 + \cdots + \sum_{i=1}^{n} a_{i1}'a_{it}'x_t &= \sum_{i=1}^{n} a_{i1}'l_i' \\ \sum_{i=1}^{n} a_{i2}'a_{i1}'x_1 + \sum_{i=1}^{n} a_{i2}'a_{i2}'x_2 + \cdots + \sum_{i=1}^{n} a_{i2}'a_{it}'x_t &= \sum_{i=1}^{n} a_{i2}'l_i' \\ &\vdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{it}'a_{i1}'x_1 + \sum_{i=1}^{n} a_{it}'a_{i2}'x_2 + \cdots + \sum_{i=1}^{n} a_{it}'a_{it}'x_t &= \sum_{i=1}^{n} a_{it}'l_i'\end{aligned}\right\} \tag{5-26}$$

可以看出，上列正规方程在形式上已与等精度测量时的正规方程（5-19）完全一致了。将正规方程（5-25）各式分别展开，整理后可得与式（5-20）类似的结果

$$\left.\begin{aligned}p_1a_{11}v_1 + p_2a_{21}v_2 + \cdots + p_na_{n1}v_n &= 0 \\ p_1a_{12}v_1 + p_2a_{22}v_2 + \cdots + p_na_{n2}v_n &= 0 \\ &\vdots \\ p_1a_{1t}v_1 + p_2a_{2t}v_2 + \cdots + p_na_{nt}v_n &= 0\end{aligned}\right\}$$

用矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ & \vdots & & \\ a_{1t} & a_{2t} & \cdots & a_{nt} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & \cdots & 0 \\ & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & p_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

即

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PV} = \boldsymbol{0} \tag{5-27}$$

而

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{L} - \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}}$$

所以式（5-27）又可写成

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{L} - \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}}) = \boldsymbol{0}$$

由

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PA}\hat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PL} \tag{5-28}$$

可得出正规方程的解，即参数的最小二乘解为

$$\hat{\boldsymbol{X}} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PA})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PL} \tag{5-29}$$

令

$$\boldsymbol{C}^{*} = \boldsymbol{A}^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{*} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PA}$$

则

$$\hat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{C}^{*-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PL} \tag{5-30}$$

这就是不等精度线性测量时，线性测量参数的最小二乘法处理。因为

$$\boldsymbol{E}(\hat{\boldsymbol{X}}) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{C}^{*-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PL}) = \boldsymbol{C}^{*-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PE}(\boldsymbol{L}) = \boldsymbol{C}^{*-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PAX} = \boldsymbol{X}$$

可见 $\hat{\boldsymbol{X}}$ 是 $\boldsymbol{X}$ 的无偏估计。

例 5-2 某测量过程有误差方程式及相应的标准差如下：

$$\begin{aligned} v_1 &= 6.44 - (x_1 + x_2) & \sigma_1 &= 0.06 \\ v_2 &= 8.60 - (x_1 + 2x_2) & \sigma_2 &= 0.06 \\ v_3 &= 10.81 - (x_1 + 3x_2) & \sigma_3 &= 0.08 \\ v_4 &= 13.22 - (x_1 + 4x_2) & \sigma_4 &= 0.08 \\ v_5 &= 15.27 - (x_1 + 5x_2) & \sigma_5 &= 0.08 \end{aligned}$$

试求 x_1、x_2 的最小二乘法处理正规方程的解。

解：首先确定各式的权，由式（2-42）得

$$p_1:p_2:p_3:p_4:p_5 = \frac{1}{\sigma_1^2}:\frac{1}{\sigma_2^2}:\frac{1}{\sigma_3^2}:\frac{1}{\sigma_4^2}:\frac{1}{\sigma_5^2}$$
$$=\frac{1}{0.06^2}:\frac{1}{0.06^2}:\frac{1}{0.08^2}:\frac{1}{0.08^2}:\frac{1}{0.08^2}$$
$$=16:16:9:9:9$$

取各式的权为

$$p_1=16,\ p_2=16,\ p_3=9,\ p_4=9,\ p_5=9$$

现用表格计算给出正规方程常数项和系数:

i	a_{i1}	a_{i2}	p_i	$p_i a_{i1}^2$	$p_i a_{i2}^2$	$p_i a_{i1} a_{i2}$	l_i	$p_i a_{i1} l_i$	$p_i a_{i2} l_i$
1	1	1	16	16	16	16	6.44	103.04	103.04
2	1	2	16	16	64	32	8.60	137.60	275.20
3	1	3	9	9	81	27	10.81	97.29	291.87
4	1	4	9	9	144	36	13.22	118.98	475.92
5	1	5	9	9	225	45	15.27	137.43	687.15
Σ				59	530	156		594.34	1833.18

可得正规方程

$$\left.\begin{aligned} 59x_1 + 156x_2 &= 594.34 \\ 156x_1 + 530x_2 &= 1833.18 \end{aligned}\right\}$$

解得最小二乘法处理结果为

$$\left.\begin{aligned} x_1 &\approx 4.186 \\ x_2 &\approx 2.227 \end{aligned}\right\}$$

三、非线性测量参数最小二乘法处理的正规方程

在一般情况下，函数

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \cdots, x_t) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

为非线性函数，测量的误差方程

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= l_1 - f_1(x_1, x_2, \cdots, x_t) \\ v_2 &= l_2 - f_2(x_1, x_2, \cdots, x_t) \\ &\ \ \vdots \\ v_n &= l_n - f_n(x_1, x_2, \cdots, x_t) \end{aligned}\right\} \tag{5-31}$$

是非线性方程组。一般来说，直接由它建立正规方程并求解是困难的。

为了解决这类问题，一般采取线性化的方法，将非线性函数化为线性函数，再按线性测量方程参数的情形进行处理。

为此，取 x_{10}，x_{20}，…，x_{t0}为待估计量 x_1，x_2，…，x_t 的近似值，而估计量 x_r 则可表示为

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_{10} + \delta_1 \\ x_2 &= x_{20} + \delta_2 \\ &\ \ \vdots \\ x_t &= x_{t0} + \delta_t \end{aligned}\right\} \tag{5-32}$$

式中，δ_1，δ_2，…，δ_t 分别为估计量与所取近似值的偏差。

因此，只须求得偏差 δ_1，δ_2，…，δ_t 即可由式（5-32）获得估计量 x_1，x_2，…，x_t。

现将函数在 x_{10}，x_{20}，…，x_{t0}处展开，取一次项，则有

$$f_i(x_1,x_2,\cdots,x_t) = f_i(x_{10},x_{20},\cdots,x_{t0}) + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\right)_0 \delta_1 + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_2}\right)_0 \delta_2 + \cdots + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_t}\right)_0 \delta_t$$
$$(i = 1,2,\cdots,n) \tag{5-33}$$

式中，$(\partial f_i/\partial x_r)_0$ 为函数 f_i 对 x_r 的偏导数在 x_{10}，x_{20}，…，x_{t0}处的值，$r=1$，2，…，t。将展开式（5-33）代入误差方程（5-31），并令

$$l'_i = l_i - f_i(x_{10},x_{20},\cdots,x_{t0})$$

$$a_{i1} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\right)_0,\ a_{i2} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_2}\right)_0,\ \cdots,\ a_{it} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_t}\right)_0$$

则误差方程（5-31）化成线性方程组

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= l'_1 - (a_{11}\delta_1 + a_{12}\delta_2 + \cdots + a_{1t}\delta_t) \\ v_2 &= l'_2 - (a_{21}\delta_1 + a_{22}\delta_2 + \cdots + a_{2t}\delta_t) \\ &\vdots \\ v_n &= l'_n - (a_{n1}\delta_1 + a_{n2}\delta_2 + \cdots + a_{nt}\delta_t) \end{aligned}\right\} \tag{5-34}$$

于是，就可以按线性测量方程参数的情形列出正规方程并求解出 δ_r（$r=1$，2，…，t），进而可按式(5-32)求得相应的估计量 x_r（$r=1$，2，…，t）。

应该指出，为获得线性化的结果，函数的展开式只取一次项而略去了二次以上的高次项，严格地说，由此给出的估计量是近似的。不过一般来说这已能满足实际的要求，因为只要所取近似值 x_{r0}的偏差 δ_r 相对于所研究的问题而言足够小，则二次项以上的高次项其值甚微，可以忽略不计。因此，在作线性化处理时，估计量近似值的选取应有相应的精度要求。

为获得函数的展开式，必须首先确定未知数的近似值，其方法可以是：

（1）直接测量　对未知量 x_r 直接进行测量，所得结果即可作为其近似值。

（2）通过部分方程式进行计算　从误差方程中选取最简单的 t 个方程式，采用近似的求解方法，如令 $v_i=0$，于是可以得到一个 t 元齐次方程组，由此解得 x_{10}，x_{20}，…，x_{t0}，即为未知数的近似值。至于到底选用哪种方法，应视具体问题而定。

由以上讨论可见，所有情况（等精度与非等精度测量，线性与非线性测量）最后均可归结为等精度线性测量的情形。从而，可按等精度线性测量的情形建立和解算正规方程。

四、最小二乘原理与算术平均值原理的关系

为了确定一个量 X 的估计量 x，对它进行 n 次直接测量，得到 n 个数据 l_1，l_2，…，l_n，相应的权分别为 p_1，p_2，…，p_n，则测量的误差方程为

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= l_1 - x \\ v_2 &= l_2 - x \\ &\vdots \\ v_n &= l_n - x \end{aligned}\right\} \tag{5-35}$$

其最小二乘法处理的正规方程为

$$\left(\sum_{i=1}^{n} p_i a_i a_i\right) x = \sum_{i=1}^{n} p_i a_i l_i \tag{5-36}$$

由误差方程知 $a_i=1$，因而有

$$(\sum_{i=1}^{n} p_i)x = \sum_{i=1}^{n} p_i l_i$$

可得最小二乘法处理的结果

$$x = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i l_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i} = \frac{p_1 l_1 + p_2 l_2 + \cdots + p_n l_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} \tag{5-37}$$

这正是不等精度测量时加权算术平均值原理所给出的结果。

对于等精度测量有

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_n = p$$

则由最小二乘法所确定的估计量为

$$x = \frac{p_1 l_1 + p_2 l_2 + \cdots + p_n l_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} = \frac{p(l_1 + l_2 + \cdots + l_n)}{np} = \frac{\sum_{i=1}^{n} l_i}{n} \tag{5-38}$$

此式与等精度测量时算术平均值原理给出的结果相同。

由此可见，最小二乘法原理与算术平均值原理是一致的，算术平均值原理可以看做是最小二乘法原理的特例。

第三节　精 度 估 计

对测量数据最小二乘法处理的最终结果，不仅要给出待求量的最可信赖的估计量，而且还要确定其可信赖程度，即应给出所得估计量的精度。

一、测量数据的精度估计

为了确定最小二乘估计量 x_1，x_2，…，x_t 的精度，首先需要给出直接测量所得测量数据的精度。测量数据的精度也以标准差 σ 来表示。因为无法求得 σ 的真值，因而只能依据有限次的测量结果给出 σ 的估计值 $\hat{\sigma}$，所谓给出精度估计，实际上是求出估计值 $\hat{\sigma}$。

（一）等精度测量数据的精度估计

设对包含 t 个未知量的 n 个线性测量参数方程组（5-7）进行 n 次独立的等精度测量，获得了 n 个测量数据 l_1，l_2，…，l_n。其相应的测量误差分别为 δ_1，δ_2，…，δ_n，它们是互不相关的随机误差。因为一般情况下真误差 δ_1，δ_2，…，δ_n 是未知的，只能由残余误差 v_1，v_2，…，v_n 给出 σ^2 的估计量。

可以证明（$\sum_{i=1}^{n} v_i^2$）$/\sigma^2$ 是自由度为（$n-t$）的 χ^2 变量。根据 χ^2 变量的性质，有

$$E\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{\sigma^2}\right\} = n - t \tag{5-39}$$

因而

$$E\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n}\right\} = \frac{n-t}{n}\sigma^2$$