

t 分布的数学期望为零, 分布密度曲线对称于纵坐标轴, 但它和标准化正态分布密度曲线不同, 见图 2-9。可以证明, 当自由度较小时, t 分布与正态分布有明显区别, 但当自由度 $\nu \rightarrow \infty$ 时, t 分布曲线趋于正态分布曲线。

t 分布是一种重要分布, 当测量列的测量次数较少时, 极限误差的估计, 或者在检验测量数据的系统误差时经常用到它。

(六) F 分布

若 ξ_1 具有自由度为 ν_1 的卡埃平方分布函数, ξ_2 具有自由度为 ν_2 的卡埃平方分布函数, 定义新的随机变量为

$$F = \frac{\xi_1/\nu_1}{\xi_2/\nu_2} = \frac{\xi_1\nu_2}{\xi_2\nu_1} \quad (2-77)$$

随机变量 F 称为自由度为 ν_1 、 ν_2 的 F 变量。

F 分布的分布密度 $f(F)$ 见图 2-10。

$$f(F) = \begin{cases} \nu_1^{\nu_1/2} \nu_2^{\nu_2/2} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_1 + \nu_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)} \frac{F^{\nu_1/2-1}}{(\nu_2 + \nu_1 F)^{\frac{\nu_1 + \nu_2}{2}}} & \text{当 } F \geq 0 \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } F < 0 \text{ 时} \end{cases} \quad (2-78)$$

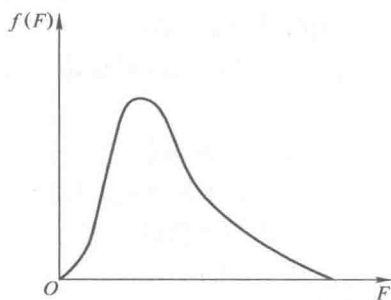


图 2-10

它的数学期望为

$$E = \int_0^{\infty} F f(F) dF = \frac{\nu_2}{\nu_2 - 2} \quad (\nu_2 > 2) \quad (2-79)$$

它的方差和标准差分别为

$$\sigma^2 = \frac{2\nu_2^2(\nu_1 + \nu_2 - 2)}{\nu_1(\nu_2 - 2)^2(\nu_2 - 4)} \quad (\nu_2 > 4) \quad (2-80)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{2\nu_2^2(\nu_1 + \nu_2 - 2)}{\nu_1(\nu_2 - 2)^2(\nu_2 - 4)}} \quad (\nu_2 > 4) \quad (2-81)$$

F 分布也是一种重要分布, 在检验统计假设和方差分析中经常应用。

第二节 系统误差

前面所述的随机误差处理方法, 是以测量数据中不含有系统误差为前提。实际上, 测量过程中往往存在系统误差, 在某些情况下的系统误差数值还比较大。因此测量结果的精度, 不仅取决于随机误差, 还取决于系统误差的影响。由于系统误差是和随机误差同时存在测量数据之中, 且不易被发现, 多次重复测量又不能减小它对测量结果的影响, 这种潜伏性使得系统误差比随机误差具有更大的危险性。因此研究系统误差的特征与规律性, 用一定的方法发现和减小或消除系统误差, 就显得十分重要。否则, 对随机误差的严格数学处理将失去意义, 或者其效果甚微。

目前, 对于系统误差的研究, 虽已引起人们的重视, 但是由于系统误差的特殊性, 在处

理方法上与随机误差完全不同,它涉及对测量设备和测量对象的全面分析,并与测量者的经验、水平以及测量技术的发展密切相关。因此对系统误差的研究较为复杂和困难,研究新的、有效的发现减小或消除系统误差的方法,已成为误差理论的重要课题之一。

一、系统误差的产生原因

系统误差是由固定不变的或按确定规律变化的因素所造成,这些误差因素是可以掌握的。

1. 测量装置方面的因素

仪器机构设计原理上的缺点,如齿轮杠杆测微仪直线位移和转角不成比例的误差;仪器零件制造和安装不正确,如标尺的刻度偏差、刻度盘和指针的安装偏心、仪器各导轨的误差、天平的臂长不等;仪器附件制造偏差,如标准环规直径偏差等。

2. 环境方面的因素

测量时的实际温度对标准温度的偏差、测量过程中温度、湿度等按一定规律变化的误差。

3. 测量方法的因素

采用近似的测量方法或近似的计算公式等引起的误差。

4. 测量人员方面的因素

由于测量者的个人特点,在刻度上估计读数时,习惯偏于某一方向;动态测量时,记录某一信号有滞后的倾向。

二、系统误差的特征

系统误差的特征是在同一条件下,多次测量同一量值时,误差的绝对值和符号保持不变,或者在条件改变时,误差按一定的规律变化。

由系统误差的特征可知,在多次重复测量同一量值时,系统误差不具有抵偿性,它是固定的或服从一定函数规律的误差。从广义上理解,系统误差即是服从某一确定规律变化的误差。

图 2-11 所示为各种系统误差 Δ 随测量过程 t 变化而表现出不同特征。曲线 a 为不变的系统误差,曲线 b 为线性变化的系统误差,曲线 c 为非线性变化的系统误差,曲线 d 为周期性变化的系统误差,曲线 e 为复杂规律变化的系统误差。

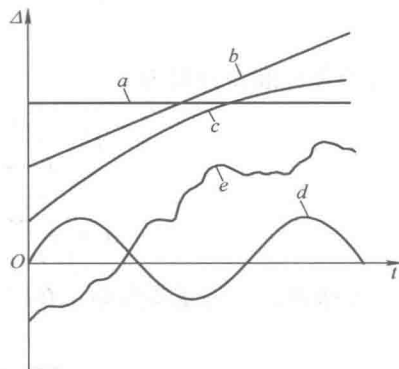


图 2-11

当系统误差与随机误差同时存在时,误差表现特征见图 2-12。图中设 x_0 为被测量的真实值,在多次重复测量中系统误差为固定值 Δ ,而随机误差为对称分布,分布范围为 2δ ,并以系统误差 Δ 为中心而变化。

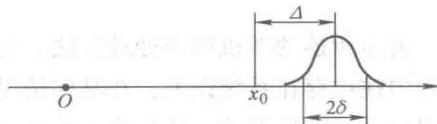


图 2-12

(一) 不变的系统误差

在整个测量过程中,误差符号和大小固定不变的系统误差,称为不变的系统误差。如某量块的公称尺寸为 10mm,实际尺寸为 10.001mm,误差为 -0.001mm ,若按公称尺寸使用,量块就会存在 -0.001mm 的系统误差。

(二) 线性变化的系统误差

在整个测量过程中,随着测量值或时间的变化,误差值是成比例地增大或减小,称为线性变化的系统误差。如刻度值为 1mm 的标准刻尺,由于存在刻划误差 Δl ,每一刻度间距实际为 $1\text{mm} + \Delta l$,若用它与另一长度比较,得到的比值为 K ,则被测长度的实际值为

$$L = K(1 + \Delta l/\text{mm})\text{mm}$$

若认为该长度实际值为 $K\text{mm}$,就产生了随测量值大小而变化的线性系统误差 $-K\Delta l$ 。

又如用电位计测量电动势(见图 2-13),先用标准电阻 R_n 上的电压去平衡标准电池的电动势 E_n ,再用测量电阻 R_x 上的电压去平衡被测量的电动势 E_x ,当工作电流恒为零时,被测电池和标准电池电动势之比才等于两次平衡时相应的电阻之比,但电位器工作电流回路蓄电池电压随放电时间而降低,不能保证工作电流的恒定。此时随时间 t 增加而不断减少的工作电流 I ,将引起线性系统误差(见图 2-14)。

当开关 S 与 a 接通时

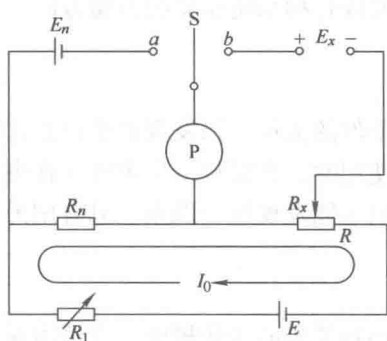


图 2-13

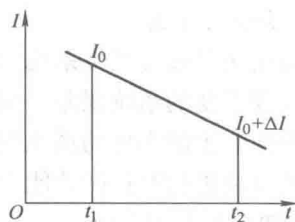


图 2-14

$$\frac{E_n}{R_n} = I_0$$

当开关 S 与 b 接通时

$$\frac{E_x}{R_x} = I_0 + \Delta I$$

则

$$\frac{E_x}{R_x} = \frac{E_n}{R_n} + \Delta I$$

显然, $\Delta t = t_2 - t_1$ 越大,则 ΔI 也越大。

若仍认为

$$\frac{E_x}{R_x} = \frac{E_n}{R_n}$$

则工作电流的降低将带来线性误差 $-\Delta I R_x$ 。

(三) 周期性变化的系统误差

在整个测量过程中,若随着测量值或时间的变化,误差是按周期性规律变化的,则称为周期性变化的系统误差。如仪表指针的回转中心与刻度盘中心有偏心值 e ,则指针在任一转角 φ 引起的读数误差即为周期性系统误差(见图 2-15)。

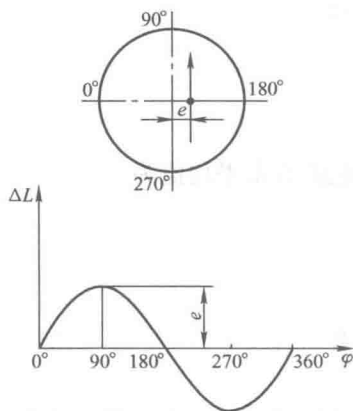


图 2-15

$$\Delta L = e \sin \varphi$$

此误差变化规律符合正弦曲线, 指针在 0° 和 180° 时误差为零, 而在 90° 和 270° 时误差最大, 误差值为 $\pm e$ 。

(四) 复杂规律变化的系统误差

在整个测量过程中, 若误差是按确定的且复杂的规律变化的, 则称为复杂规律变化的系统误差。如微安表的指针偏转角与偏转力矩不能严格保持线性关系, 而表盘仍采用均匀刻度所产生的误差等。

三、系统误差的发现

因为系统误差的数值往往比较大, 所以必须清除系统误差的影响, 才能有效地提高测量精度。为了消除或减小系统误差, 首先碰到的困难问题是如何发现系统误差。在测量过程中形成系统误差的因素是复杂的, 通常人们还难于查明所有的系统误差, 也不可能全部消除系统误差的影响。发现系统误差必须根据具体测量过程和测量仪器进行全面的仔细的分析, 这是一件困难而又复杂的工作, 目前还没有能够适用于发现各种系统误差的普遍方法, 下面只介绍适用于发现某些系统误差常用的几种方法。

(一) 实验对比法

实验对比法是改变产生系统误差的条件进行不同条件的测量, 以发现系统误差, 这种方法适用于发现不变的系统误差。例如量块按公称尺寸使用时, 在测量结果中就存在由于量块的尺寸偏差而产生的不变的系统误差, 多次重复测量也不能发现这一误差, 只有用另一块高一精度的量块进行对比时才能发现它。

(二) 残余误差观察法

残余误差观察法是根据测量列的各个残余误差大小和符号的变化规律, 直接由误差数据或误差曲线图形来判断有无系统误差, 这种方法主要适用于发现有规律变化的系统误差。

若有测量列 l_1, l_2, \dots, l_n

它们的系统误差为

$$\Delta l_1, \Delta l_2, \dots, \Delta l_n$$

它们不含系统误差之值为

$$l'_1, l'_2, \dots, l'_n$$

则有

$$l_1 = l'_1 + \Delta l_1$$

$$l_2 = l'_2 + \Delta l_2$$

$$\vdots$$

$$l_n = l'_n + \Delta l_n$$

它们的算术平均值为

$$\bar{x} = \bar{x}' + \Delta \bar{x}$$

因

$$l_i - \bar{x} = v_i$$

$$l'_i - \bar{x}' = v'_i$$

故有

$$v_i = v'_i + (\Delta l_i - \Delta \bar{x}) \quad (2-82)$$

若系统误差显著大于随机误差, v'_i 可以忽略, 则得

$$v_i \approx \Delta l_i - \Delta \bar{x} \quad (2-83)$$

式 (2-83) 说明, 显著含有系统误差的测量列, 其任一测量值的残余误差为系统误差与测量列系统误差平均值之差。

根据测量先后顺序, 将测量列的残余误差列表或作图进行观察, 可以判断有无系统误差。

若残余误差大体上是正负相同, 且无显著变化规律, 则无根据怀疑存在系统误差 (见图 2-16a)。若残余误差数值有规律地递增或递减, 且在测量开始与结束时误差符号相反, 则存在线性系统误差 (见图 2-16b)。若残余误差符号有规律地逐渐由负变正、再由正变负, 且循环交替重复变化, 则存在周期性系统误差 (见图 2-16c)。若残余误差有如图 2-16d 所示的变化规律, 则应怀疑同时存在线性系统误差和周期性系统误差。由式 (2-82) 和图 2-16 可以看出, 若测量列中含有不变的系统误差, 用残余误差观察法则发现不了。

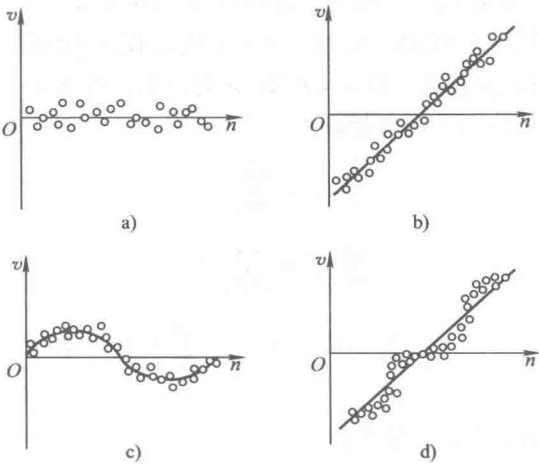


图 2-16

例 2-15 对恒温箱温度测量 10 次, 测得数据见表 2-9。

表 2-9

序号	$t_i/^{\circ}\text{C}$	$v_i/^{\circ}\text{C}$
1	20.06	-0.06
2	20.07	-0.05
3	20.06	-0.06
4	20.08	-0.04
5	20.10	-0.02
6	20.12	0.00
7	20.14	+0.02
8	20.18	+0.06
9	20.18	+0.06
10	20.21	+0.09
$\bar{x}=20.12^{\circ}\text{C}$ $\sigma=0.055^{\circ}\text{C}$		$\sum_{i=1}^5 v_i = -0.23^{\circ}\text{C}, \sum_{i=6}^{10} v_i = +0.23^{\circ}\text{C}$ $\sum_{i=1}^{10} v_i = (-0.23 + 0.23)^{\circ}\text{C} = 0$

由表 2-9 和图 2-17 可知, 残余误差符号由负变正, 误差值由小到大, 则测量列中存在线性系统误差。

(三) 残余误差校核法

1. 用于发现线性系统误差

根据式 (2-82), 若将测量列中前 K 个残余误差相加, 后 $(n-K)$ 个残余误差相加 (当 n 为偶数, 取 $K=n/2$; n 为奇数, 取 $K=(n+1)/2$, 两者相减得

$$\begin{aligned}\Delta &= \sum_{i=1}^K v_i - \sum_{j=K+1}^n v_j \\ &= \sum_{i=1}^K v_i' - \sum_{j=K+1}^n v_j' + \\ &\quad \sum_{i=1}^K (\Delta l_i - \Delta \bar{x}) - \sum_{j=K+1}^n (\Delta l_j - \Delta \bar{x})\end{aligned}$$

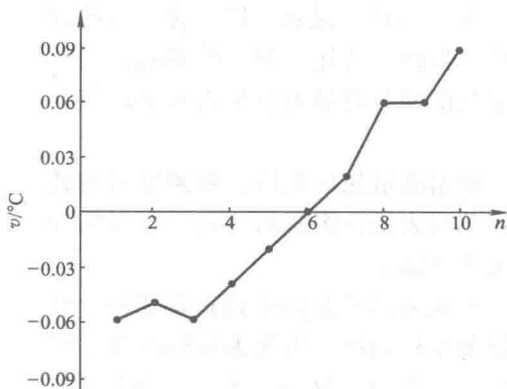


图 2-17

当测量次数足够多时

$$\sum_{i=1}^K v_i' \approx \sum_{j=K+1}^n v_j' \approx 0$$

得

$$\Delta = \sum_{i=1}^K v_i - \sum_{j=K+1}^n v_j \approx \sum_{i=1}^K (\Delta l_i - \Delta \bar{x}) - \sum_{j=K+1}^n (\Delta l_j - \Delta \bar{x}) \quad (2-84)$$

若式 (2-84) 的两部分差值 Δ 显著不为零, 则有理由认为测量列存在线性系统误差。这种校核法又称为马利科夫准则, 它能有效地发现线性系统误差。但值得指出的是, 有时按残余误差校核法求得差值 $\Delta=0$, 仍有可能存在系统误差。如测量列中仅仅含有图 2-17 所示的系统误差, 其均值为零, 则所得的差值 $\Delta=0$ 。

例 2-16 仍用例 2-16 的测量数据, 此时 $n=10$, $K=5$, 而

$$\begin{aligned}\Delta &= (-0.06 - 0.05 - 0.06 - 0.04 - 0.02)^\circ\text{C} - (0 + 0.02 + 0.06 + 0.06 + 0.09)^\circ\text{C} \\ &= (-0.23)^\circ\text{C} - (+0.23)^\circ\text{C} = -0.46^\circ\text{C}\end{aligned}$$

因差值 Δ 显著不为零, 故测量列中含有线性系统误差。

2. 用于发现周期性系统误差

若有一等精度测量列, 按测量先后顺序将残余误差排列为 v_1, v_2, \dots, v_n , 如果存在着按此顺序呈周期性变化的系统误差, 则相邻两个残余误差的差值 $(v_i - v_{i+1})$ 符号也将出现周期性的正负号变化, 因此由差值 $(v_i - v_{i+1})$ 可以判断是否存在周期性系统误差。但是这种方法只有当周期性系统误差是整个测量误差的主要成分时, 才有实用效果。否则, 差值 $(v_i - v_{i+1})$ 符号变化将主要取决于随机误差, 以致不能判断出周期性系统误差。在此情况下, 可用统计准则进行判断, 令

$$u = \left| \sum_{i=1}^{n-1} v_i v_{i+1} \right| = |v_1 v_2 + v_2 v_3 + \dots + v_{n-1} v_n|$$

$$\text{若} \quad u > \sqrt{n-1} \sigma^2 \quad (2-85)$$

则认为该测量列中含有周期性系统误差。这种校核法又叫阿卑—赫梅特准则, 它能有效地发现周期性系统误差。

(四) 不同公式计算标准差比较法

对等精度测量, 可用不同公式计算标准差, 通过比较以发现系统误差。

按贝塞尔公式

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n v_i^2}{n-1}}$$

按别捷尔斯公式

$$\sigma_2 = 1.253 \frac{\sum_{i=1}^n |v_i|}{\sqrt{n(n-1)}}$$

令

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 1 + u$$

若

$$|u| \geq \frac{2}{\sqrt{n-1}} \quad (2-86)$$

则怀疑测量列中存在系统误差。

(五) 计算数据比较法

对同一量进行多组测量, 得到很多数据, 通过多组计算数据比较, 若不存在系统误差, 其比较结果应满足随机误差条件, 否则可认为存在系统误差。

若对同一量独立测得 m 组结果, 并知它们的算术平均值和标准差为

$$\bar{x}_1, \sigma_1; \bar{x}_2, \sigma_2; \cdots; \bar{x}_m, \sigma_m$$

而任意两组结果之差为

$$\Delta = \bar{x}_i - \bar{x}_j$$

其标准差为

$$\sigma = \sqrt{\sigma_i^2 + \sigma_j^2}$$

则任意两组结果 \bar{x}_i 与 \bar{x}_j 间不存在系统误差的标志是

$$|\bar{x}_i - \bar{x}_j| < 2 \sqrt{\sigma_i^2 + \sigma_j^2} \quad (2-87)$$

例 2-17 雷莱用不同方法制取氮, 测得氮气相对密度平均值及其标准差为

由化学法制取氮: $\bar{x}_1 = 2.29971$, $\sigma_1 = 0.00041$

由大气中提取氮: $\bar{x}_2 = 2.31022$, $\sigma_2 = 0.00019$

两者差值

$$\Delta = \bar{x}_2 - \bar{x}_1 = 0.01051$$

而标准差

$$\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \sqrt{0.00041^2 + 0.00019^2} = 0.00045$$

$$\Delta \gg 2 \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = 2 \times 0.00045 = 0.0009$$

因为两种方法所得结果的差值远远大于两倍标准差, 故两种方法间存在系统误差, 且经过分析认为由于操作技术引起系统误差的可能性很小, 因此雷莱没有企图设法改进制取氮的操作技术而使两者结果之差变小, 相反, 他强调了两种方法的实质差别, 从而导致后来由雷塞姆进行深入的研究, 终于发现了空气中存在惰性气体。这一新的发现, 深刻揭示了两种方法差别的原因。

(六) 秩和检验法

对某量进行两组测量, 这两组间是否存在系统误差, 可用秩和检验法根据两组分布是否

相同来判断。

若独立测得两组的数据为

$$\begin{aligned} x_i & \quad i=1, 2, \cdots, n_x \\ y_j & \quad j=1, 2, \cdots, n_y \end{aligned}$$

则将它们混合以后，按大小顺序重新排列，取测量次数较少的那一组，数出它的测得值在混合后的次序（即秩），再将所有测得值的次序相加，即得秩和 T 。

通常，两组的测量次数 $n_1、n_2 \leq 10$ ，可根据测量次数较少的组的次数 n_1 和测量次数较多的组的次数 n_2 ，由秩和检验表 2-10 查得 T_- 和 T_+ （显著度 0.05），若

$$T_- < T < T_+ \tag{2-88}$$

则无根据怀疑两组间存在系统误差。

当 $n_1、n_2 > 10$ ，秩和 T 近似服从正态分布

$$N\left(\frac{n_1(n_1+n_2+1)}{2}, \sqrt{\frac{n_1n_2(n_1+n_2+1)}{12}}\right)$$

括号中第一项为数学期望，第二项为标准差，此时 T_- 和 T_+ 可由正态分布算出。

根据求得的数学期望值 a 和标准差 σ ，则

$$T - a = t\sigma, \quad t = \frac{T - a}{\sigma}$$

选取概率 $\phi(t)$ ，由正态分布积分表（附表 1）查得 t ，若

$$|t| \leq t_\alpha$$

则无根据怀疑两组间存在系统误差。

表 2-10

n_1	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3
n_2	4	5	6	7	8	9	10	3	4	5	6
T_-	3	3	4	4	4	4	5	6	7	7	8
T_+	11	13	14	16	18	20	21	15	17	20	22
n_1	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4
n_2	7	8	9	10	4	5	6	7	8	9	10
T_-	9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
T_+	24	27	29	31	24	27	30	33	36	39	42
n_1	5	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6
n_2	5	6	7	8	9	10	6	7	8	9	10
T_-	19	20	22	23	25	26	28	30	32	33	35
T_+	36	40	43	47	50	54	50	54	58	63	67
n_1	7	7	7	7	8	8	8	9	9	10	
n_2	7	8	9	10	8	9	10	9	10	10	
T_-	39	41	43	46	52	54	57	66	69	83	
T_+	66	71	76	80	84	90	95	105	111	127	

例 2-18 对某量测得两组数据如下，判断两组间有无系统误差。

$$\begin{aligned} x_i: & 14.7, 14.8, 15.2, 15.6 \\ y_j: & 14.6, 15.0, 15.1 \end{aligned}$$

将两组数据混合排列成下表：

T	1	2	3	4	5	6	7
x_i		14.7	14.8			15.2	15.6
y_j	14.6			15.0	15.1		

已知

$$n_1 = 3, n_2 = 4$$

计算秩和

$$T = 1 + 4 + 5 = 10$$

查表 2-10 得

$$T_- = 7, T_+ = 17$$

因

$$T_- = 7 < T = 10 < 17 = T_+$$

故无根据怀疑两组间存在系统误差。

若两组数据中有相同的数值, 则该数据的秩按所排列的两个次序的平均值计算。

(七) t 检验法

当两组测得值服从正态分布时, 可用 t 检验法判断两组间是否存在系统误差。

若独立测得的两组数据为

$$x_i, i = 1, 2, \dots, n_x$$

$$y_j, j = 1, 2, \dots, n_y$$

令变量

$$t = (\bar{x} - \bar{y}) \sqrt{\frac{n_x n_y (n_x + n_y - 2)}{(n_x + n_y)(n_x \sigma_x^2 + n_y \sigma_y^2)}} \quad (2-89)$$

此变量服从自由度为 $n_x + n_y - 2$ 的 t 分布变量

式中

$$\bar{x} = \frac{1}{n_x} \sum x_i$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n_y} \sum y_j$$

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n_x} \sum (x_i - \bar{x})^2$$

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{n_y} \sum (y_j - \bar{y})^2$$

取显著度 α , 由 t 分布表 (附表 3) 查 $P(|t| > t_\alpha) = \alpha$ 中的 t_α , 若实测数列中算出之 $|t| < t_\alpha$, 则无根据怀疑两组间有系统误差。

例 2-19 对某量测得两组数据

$$x: 1.9, 0.8, 1.1, 0.1, -0.1, 4.4, 5.5, 1.6, 4.6, 3.4$$

$$y: 0.7, -1.6, -0.2, -1.2, -0.1, 3.4, 3.7, 0.8, 0.0, 2.0$$

计算

$$\bar{x} = \frac{1}{10} \sum x = 2.33$$

$$\bar{y} = \frac{1}{10} \sum y = 0.75$$

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{10} \sum (x_i - \bar{x})^2 = 3.61$$

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{10} \sum (y_j - \bar{y})^2 = 2.89$$

$$t = (2.33 - 0.75) \sqrt{\frac{10 \times 10 \times (10 + 10 - 2)}{(10 + 10)(10 \times 3.61 + 10 \times 2.89)}} = 1.86$$

由 $\nu = 10 + 10 - 2 = 18$ 及取 $\alpha = 0.05$, 查 t 分布表 (见附表 3), 得

$$t_{\alpha} = 2.10$$

因 $|t| = 1.86 < t_{\alpha} = 2.10$

故无根据怀疑两组间有系统误差。

上面介绍 7 种系统误差发现方法, 按其用途可分为两类: 第一类用于发现测量列组内的系统误差, 包括前四种方法, 即实验对比法、残余误差观察法、残余误差校核法和不同公式计算标准差比较法。第二类用于发现各组测量之间的系统误差, 包括后三种方法, 即计算数据比较法、秩和检验法和 t 检验法。这些方法各具有不同特点, 有的只能在一定条件下应用, 必须根据具体测量仪器和测量过程来选用相应的方法。例如实验对比法是发现各种系统误差的有效方法, 但由于这种方法需相应的高精度测量仪器和较好的测量条件, 因而其应用受到限制。残余误差观察法是发现组内系统误差的有效方法, 一般情况皆可应用, 但它发现不了不变的系统误差。

四、系统误差的减小和消除

在测量过程中, 发现有系统误差存在, 必须进一步分析比较, 找出可能产生系统误差的因素以及减小和消除系统误差的方法, 但是这些方法和具体的测量对象、测量方法、测量人员的经验有关, 因此要找出普遍有效的方法比较困难, 下面介绍其中最基本的方法以及适应各种系统误差的特殊方法。

(一) 从产生误差根源上消除系统误差

从产生误差根源上消除误差是最根本的方法, 它要求测量人员对测量过程中可能产生的系统误差的环节作仔细分析, 并在测量前就将误差从产生根源上加以消除。如为了防止调整误差, 要正确调整仪器, 选择合理的被测件的定位面或支承点; 又如: 为了防止测量过程中仪器零位的变动, 测量开始和结束时都需检查零位; 再如: 为了防止在长期使用时, 仪器精度降低, 要严格进行周期的检定与修理。如果误差是由外界条件引起的, 应在外界条件比较稳定时进行测量, 当外界条件急剧变化时应停止测量。

(二) 用修正方法消除系统误差

这种方法是预先将测量器具的系统误差检定出来或计算出来, 做出误差表或误差曲线, 然后取与误差数值大小相同而符号相反的值作为修正值, 将实际测得值加上相应的修正值, 即可得到不包含该系统误差的测量结果。如量块的实际尺寸不等于公称尺寸, 若按公称尺寸使用, 就要产生系统误差。因此应按经过检定的实际尺寸 (即将量块的公称尺寸加上修正量) 使用, 就可避免此项系统误差的产生。

由于修正值本身也包含有一定误差, 因此用修正值消除系统误差的方法, 不可能将全部系统误差修正掉, 总要残留少量系统误差, 对这种残留的系统误差则应按随机误差进行处理。

(三) 不变系统误差消除法

对测得值中存在固定不变的系统误差, 常用以下几种消除法:

1. 代替法

代替法的实质是在测量装置上对被测量测量后不改变测量条件, 立即用一个标准量代替

被测量，放到测量装置上再次进行测量，从而求出被测量与标准量的差值，即

$$\text{被测量} = \text{标准量} + \text{差值}$$

例如在等臂天平上称重，被测重量 X 先与媒介物重量 Q 平衡，如天平的两臂长有误差，设长度为 l_1 、 l_2 ，则

$$X = \frac{l_2}{l_1} Q$$

但由于不能准确知道两臂长 l_1 、 l_2 的实际值，若取 $X = Q$ ，将带来固定不变的系统误差。今移去被测量 X ，用已知质量为 P 的标准砝码代替，若该砝码可使天平重新平衡，则有

$$P = \frac{l_2}{l_1} Q$$

所以

$$X = P$$

若该砝码不能使天平重新平衡，读出差值 ΔP ，则有

$$P + \Delta P = \frac{l_2}{l_1} Q$$

所以

$$X = P + \Delta P$$

这样就可消除由于天平两臂不等而带来的系统误差。

2. 抵消法

这种方法要求进行两次测量，以便使两次读数时出现的系统误差大小相等，符号相反，取两次测得值的平均值，作为测量结果，即可消除系统误差。

例如，在工具显微镜上测量螺纹中径，由于被测螺纹轴线与工作台纵向移动方向不一致，当按螺纹牙廓的一侧测量时，所得的测得值 d_{21} 将包含系统误差 $+\Delta$ 。当按螺纹牙廓另一侧测量时，所得的测得值 d_{22} 将包含系统误差 $-\Delta$ 。取两次测得值的算术平均值作为测量结果，便可消除由于被测螺纹轴线与工作台纵向移动方向不一致所引起的误差。即

$$\frac{d_{21} + d_{22}}{2} = \frac{d_2 + \Delta + d_2 - \Delta}{2} = d_2$$

3. 交换法

这种方法是根据误差产生原因，将某些条件交换，以消除系统误差。

例如在等臂天平上称量（见图 2-18），先将被测量 X 放于左边，标准砝码 P 放于右边，调平衡后，则有

$$X = \frac{l_2}{l_1} P$$

将 X 、 P 交换位置后，由于 $l_1 \neq l_2$ ， P 将换为 $P' = P + \Delta P$ 才能与 X 平衡，即

$$P' = P + \Delta P = \frac{l_2}{l_1} X$$

则取

$$X = \sqrt{PP'} \approx \frac{P + P'}{2}$$

即可消除两臂不等而带来的系统误差。

（四）线性系统误差消除法——对称法

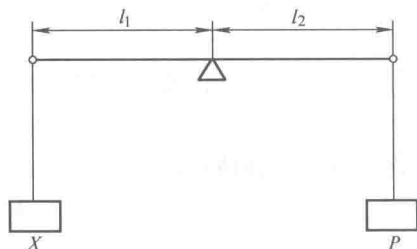


图 2-18

对称法是消除线性系统误差的有效方法, 见图 2-19。随着时间的变化, 被测量作线性增加, 若选定某时刻为 midpoint, 则对称此点的系统误差算术平均值皆相等。即

$$\frac{\Delta l_1 + \Delta l_5}{2} = \frac{\Delta l_2 + \Delta l_4}{2} = \Delta l_3$$

利用这一特点, 可将测量对称安排, 取各对称点两次读数的算术平均值作为测得值, 即可消除线性系统误差。

例如检定量块平面平行性时 (见图 2-20), 先以标准量块 A 的中心 O 点对零, 然后按图中所示被检量块 B 上的顺序逐点检定, 再按相反顺序进行检定, 取正反两次读数的平均值作为各点的测得值, 就可消除因温度变化而产生的线性系统误差。

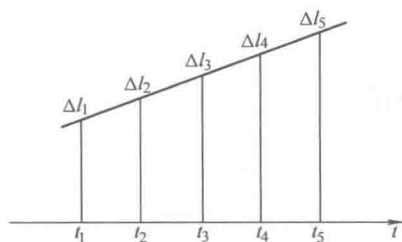


图 2-19

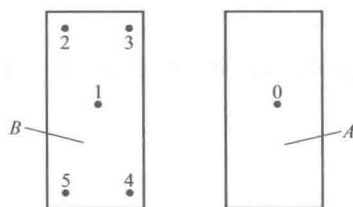


图 2-20

对称法可以有效地消除随时间变化而产生的线性系统误差。很多误差都随时间变化, 而在短时间内均可认为是线性规律。有时, 按复杂规律变化的误差, 也可近似地作为线性误差处理, 因此, 在一切有条件的场合, 均宜采用对称法消除系统误差。

(五) 周期性系统误差消除法——半周期法

对周期性误差, 可以相隔半个周期进行两次测量, 取两次读数平均值, 即可有效地消除周期性系统误差。

周期性系统误差一般可表示为

$$\Delta l = a \sin \varphi$$

设 $\varphi = \varphi_1$ 时, 误差为

$$\Delta l_1 = a \sin \varphi_1$$

当 $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi$ 时, 即相差半周期的误差为

$$\Delta l_2 = a \sin(\varphi_1 + \pi) = -a \sin \varphi_1 = -\Delta l_1$$

取两次读数平均值则有

$$\frac{\Delta l_1 + \Delta l_2}{2} = \frac{\Delta l_1 - \Delta l_1}{2} = 0$$

由此可知半周期法能消除周期性误差。

例如仪器度盘安装偏心, 测微表指针回转中心与刻度盘中心有偏心等引起的周期性误差, 皆可用半周期法予以消除。

第三节 粗大误差

粗大误差的数值比较大, 它会对测量结果产生明显的歪曲, 一旦发现含有粗大误差的测量值, 应将其从测量结果中剔除。