$$u_{12}=0.2\text{mg}$$

故三个砝码组合使用时，质量的标准差为

$$u_1=\sqrt{u_{11}^2+2u_{12}^2}=\sqrt{0.4^2+2\times0.2^2}\text{mg}\approx0.5\text{mg}$$

（2）天平示值误差

天平示值为 100 ×0.1mg 时，最大误差为 ±2 ×0.1mg，称该球质量时，示值为 40 ×0.1mg，且对应 3 倍标准差，故该项标准差为

$$u_2=2\times0.1\times\frac{40}{100}\times\frac{1}{3}\text{mg}\approx0.03\text{mg}$$

以上三项误差互不相关，而且显然可知各个误差传递系数均为 1，因此误差合成后可得到测量结果的总标准差为

$$\sigma=\sqrt{\sigma_1^2+u_1^2+u_2^2}=\sqrt{0.05^2+0.5^2+0.03^2}\text{mg}\approx0.5\text{mg}$$

则最后测量结果应表示为（1 倍标准差）

$$M=14.0040\text{g}\pm0.0005\text{g}$$

第五节 误 差 分 配

前面已述，任何测量过程皆包含有多项误差，而测量结果的总误差则由各单项误差的综合影响所确定。现在要研究一个新的课题，即给定测量结果总误差的允差，要求确定各个单项误差。在进行测量工作前，应根据给定测量总误差的允差来选择测量方案，合理进行误差分配，确定各单项误差，以保证测量精度。例如前述的弓高弦长法测量大直径 D，若已给定直径测量的允许极限误差 δ_D，要求确定弓高 h 和弦长 s 的测量极限误差 δ_h 及 δ_s 应为多少，这就是误差分配问题。

误差分配应考虑测量过程中所有误差组成项的分配问题。为便于说明误差分配原理，这里只研究间接测量的函数误差分配，但其基本原理也适用于一般测量的误差分配。

对于函数的已定系统误差，可用修正方法来消除，不必考虑各个测量值已定系统误差的影响，而只需研究随机误差和未定系统误差的分配问题。根据式（3-47）和式（3-50），这两种误差在误差合成时可同等看待，因此在误差分配时也可同等看待，其误差分配方法完全相同。

现设各误差因素皆为随机误差，且互不相关，由式（3-14）可得

$$\begin{aligned}\sigma_y&=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2\sigma_1^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2\sigma_2^2+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2\sigma_n^2}=\sqrt{a_1^2\sigma_1^2+a_2^2\sigma_2^2+\cdots+a_n^2\sigma_n^2}\\&=\sqrt{D_1^2+D_2^2+\cdots+D_n^2}\end{aligned}\tag{3-52}$$

式中，D_i 为函数的部分误差，$D_i=\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\sigma_i=a_i\sigma_i$。

若已给定 σ_y，需确定 D_i 或相应的 σ_i，使满足

$$\sigma_y\geqslant\sqrt{D_1^2+D_2^2+\cdots+D_n^2}\tag{3-53}$$

显然，式中 D_i 可以是任意值，为不确定解，因此一般需按下列步骤求解。

一、按等作用原则分配误差

等作用原则认为各个部分误差对函数误差的影响相等，即

$$D_1 = D_2 = \cdots = D_n = \frac{\sigma_y}{\sqrt{n}} \tag{3-54}$$

由此可得

$$\sigma_i = \frac{\sigma_y}{\sqrt{n}} \frac{1}{\partial f/\partial x_i} = \frac{\sigma_y}{\sqrt{n}} \frac{1}{a_i} \tag{3-55}$$

或用极限误差表示

$$\delta_i = \frac{\delta}{\sqrt{n}} \frac{1}{\partial f/\partial x_i} = \frac{\delta}{\sqrt{n}} \frac{1}{a_i} \tag{3-56}$$

式中，δ 为函数的总极限误差；δ_i 为各单项误差的极限误差。

如果各个测得值的误差满足式（3-55）、式（3-56），则所得的函数误差不会超过允许的给定值。

二、按可能性调整误差

按等作用原则分配误差可能会出现不合理情况，这是因为计算出来的各个部分误差都相等，对于其中有的测量值，要保证它的测量误差不超出允许范围较为容易实现，而对于其中有的测量值则难以满足要求，若要保证它的测量精度，势必要用昂贵的高精度仪器，或者要付出较大的劳动。

另一方面，由式（3-55）、式（3-56）可以看出，当各个部分误差一定时，则相应测量值的误差与其传递系数成反比。所以各个部分误差相等，其相应测量值的误差并不相等，有时可能相差较大。

由于存在上述两种情况，对按等作用原则分配的误差，必须根据具体情况进行调整。对难以实现测量的误差项适当扩大，对容易实现测量的误差项尽可能缩小，而对其余误差项不予调整。

三、验算调整后的总误差

误差分配后，应按误差合成公式计算实际总误差，若超出给定的允许误差范围，应选择可能缩小的误差项再予缩小误差。若实际总误差较小，可适当扩大难以测量的误差项的误差。

按等作用原则分配误差需注意，当有的误差已经确定而不能改变时（如受测量条件限制，必须采用某种仪器测量某一项目时），应先从给定的允许总误差中除掉，然后再对其余误差项进行误差分配。

例 3-7 测量一圆柱体的体积时，可间接测量圆柱直径 D 及高度 h，根据函数式

$$V = \frac{\pi D^2}{4} h$$

求得体积 V，若要求测量体积的相对误差为 1%，试确定直径 D 及高度 h 的测量精度？

已知直径和高度的公称值为

$$D_0 = 20\text{mm} \qquad h_0 = 50\text{mm}$$

并把 π 看作常数，取值为 3.1416，则可计算出体积 V_0 为

$$V_0 = \frac{\pi D_0^2}{4} h_0 = \frac{3.1416 \times 20^2}{4} \times 50\text{mm}^3 = 15708\text{mm}^3$$

而体积的绝对误差为

$$\delta_V = V_0 \times 1\% = 15708\text{mm}^3 \times 1\% = 157.08\text{mm}^3$$

因为测量项目有两项，即 $n=2$。

根据式（3-56）按等作用原则分配误差，则可得测量直径 D 与高度 h 的极限误差为

$$\delta_D = \frac{\delta_V}{\sqrt{n}}\frac{1}{\partial V/\partial D} = \frac{\delta_V}{\sqrt{n}}\frac{2}{\pi Dh} = \frac{157.08}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{\pi \times 20 \times 50}\text{mm} = 0.071\text{mm}$$

$$\delta_h = \frac{\delta_V}{\sqrt{n}}\frac{1}{\partial V/\partial h} = \frac{\delta_V}{\sqrt{n}}\frac{4}{\pi D^2} = \frac{157.08}{\sqrt{2}} \times \frac{4}{\pi \times 20^2}\text{mm} = 0.351\text{mm}$$

由此可知，测量直径 D 的精度需要高些，而测量高度 h 的精度可低些。若用量具测量，由各种量具的极限误差表查得，直径可用 2 级千分尺测量，在 20mm 测量范围内的极限误差为 ±0.013mm。而高度只需用分度值为 0.10mm 的游标卡尺测量，在 50mm 测量范围内的极限误差为 ±0.150mm。用这两种量具测量的体积极限误差为

$$\begin{aligned}
\delta_V &= \pm\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial D}\right)^2 \delta_D^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial h}\right)^2 \delta_h^2} = \pm\sqrt{\left(\frac{\pi Dh}{2}\right)^2 \delta_D^2 + \left(\frac{\pi D^2}{4}\right)^2 \delta_h^2} \\
&= \pm\sqrt{\left(\frac{\pi \times 20 \times 50}{2}\right)^2 \times (0.013)^2 + \left(\frac{\pi \times 20^2}{4}\right)^2 \times (0.150)^2}\text{mm}^3 \\
&= \pm 51.36\text{mm}^3
\end{aligned}$$

因为
$$|\delta_V| = 51.36\text{mm}^3 < 157.08\text{mm}^3$$

显然，用这两种量具测量不够合理，需进行调整，选用精度较低的量具。

现改用分度值为 0.05mm 的游标卡尺来测量直径和高度，在 50mm 测量范围内，其极限误差为 ±0.08mm，这时测量直径的极限误差虽超出按等作用原则分配所得的允差，但可从测量高度允差的多余部分得到补偿。

调整后的实际测量极限误差为

$$\begin{aligned}
\delta_V &= \pm\sqrt{\left(\frac{\pi Dh}{2}\right)^2 \delta_D^2 + \left(\frac{\pi D^2}{4}\right)^2 \delta_h^2} \\
&= \pm\sqrt{\left(\frac{\pi \times 20 \times 50}{2}\right)^2 \times (0.08)^2 + \left(\frac{\pi \times 20^2}{4}\right)^2 \times (0.08)^2}\text{mm}^3 \\
&= \pm 128.45\text{mm}^3
\end{aligned}$$

因为
$$|\delta_V| = 128.45\text{mm}^3 < 157.08\text{mm}^3$$

故调整以后用一把游标卡尺测量即能保证测量精度。

第六节　微小误差的取舍准则

测量过程包含有多种误差时，往往有的误差对测量结果总误差的影响较小。当这种误差数值小到一定程度后，计算测量结果总误差时可不予考虑，则称这种误差为微小误差。为了确定误差数值小到什么程度才能作为微小误差而予以舍去，这就需要给出一个微小误差的取舍准则。

若已知测量结果的标准差为

$$\sigma_y = \sqrt{D_1^2 + D_2^2 + \cdots + D_{k-1}^2 + D_k^2 + D_{k+1}^2 + \cdots + D_n^2}$$

将其中的部分误差 D_k 取出后，则得

$$\sigma_y' = \sqrt{D_1^2 + D_2^2 + \cdots + D_{k-1}^2 + D_{k+1}^2 + \cdots + D_n^2}$$

若有

$$\sigma_y \approx \sigma_y'$$

则称 D_k 为微小误差，在计算测量结果总误差时可予舍去。

根据有效数字运算准则，对一般精度的测量，测量误差的有效数字取一位。在此情况下，若将某项部分误差舍去后，满足

$$\sigma_y - \sigma'_y \leqslant (0.1 \sim 0.05)\sigma_y \tag{3-57}$$

则对测量结果的误差计算没有影响。

将式（3-57）写成下列形式

$$\sqrt{D_1^2 + D_2^2 + \cdots + D_k^2 + \cdots + D_n^2} - \sqrt{D_1^2 + D_2^2 + \cdots + D_{k-1}^2 + D_{k+1}^2 + D_n^2}$$
$$\leqslant (0.1 \sim 0.05)\sqrt{D_1^2 + D_2^2 + \cdots + D_k^2 + \cdots + D_n^2}$$

解此式得

$$D_k \leqslant (0.4 \sim 0.3)\sigma_y \tag{3-58}$$

因此，满足此条件只需取

$$D_k \leqslant \frac{1}{3}\sigma_y \tag{3-59}$$

对于比较精密的测量，误差的有效数字可取两位，则有

$$\sigma_y - \sigma'_y \leqslant (0.01 \sim 0.005)\sigma_y \tag{3-60}$$

由此可得

$$D_k \leqslant (0.14 \sim 0.1)\sigma_y \tag{3-61}$$

满足此条件需取

$$D_k \leqslant \frac{1}{10}\sigma_y \tag{3-62}$$

因此，对于随机误差和未定系统误差，微小误差舍去准则是被舍去的误差必须小于或等于测量结果总标准差的 1/3 ~ 1/10。

微小误差取舍准则在总误差计算和选择高一级标准量等方面都有实际意义。计算总误差或误差分配时，若发现有微小误差，可不考虑该误差对总误差的影响。选择高一级精度的标准器具时，其误差一般应为被检器具允许总误差的 1/10 ~ 3/10。

第七节　最佳测量方案的确定

当测量结果与多个测量因素有关时，采用什么方法确定各个因素，才能使测量结果的误差为最小，这就是最佳测量方案的确定问题。

因为已定系统误差可用修正方法来消除，所以讨论最佳测量方案，只需考虑随机误差和未定系统误差对测量方案的影响。为便于介绍最佳测量方案确定的基本原理，只研究间接测量中使函数误差为最小的最佳测量方案的各种途径，但这些途径同样也适用于其他情况的测量实践。

根据式（3-14），函数的标准差为

$$\sigma_y = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_2^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \sigma_n^2}$$

由此式可知，欲使 σ_y 为最小，可从以下几方面来考虑。

一、选择最佳函数误差公式

一般情况下，间接测量中的部分误差项数越少，则函数误差也会越小，即直接测量值的数目越少，函数误差也就会越小。所以在间接测量中如果可由不同的函数公式来表示，则应选取包含直接测量值最少的函数公式。若不同的函数公式所包含的直接测量值数目相同，则应选取误差较小的直接测量值的函数公式。如测量零件几何尺寸时，在相同条件下测量内尺寸的误差要比测量外尺寸的误差大，应尽量选择包含测量外尺寸的函数公式。

例 3-8 测量某箱体零件的轴心距 L（见图 3-5），试选择最佳测量方案。

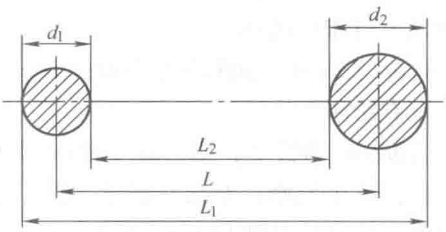

图 3-5

根据图 3-5 所示，测量轴心距 L 有下列三种方法。

1）测量两轴直径 d_1、d_2 和外尺寸 L_1，其函数式为

$$L = L_1 - \frac{1}{2}d_1 - \frac{1}{2}d_2$$

2）测量两轴直径 d_1，d_2 和内尺寸 L_2，其函数式为

$$L = L_2 + \frac{1}{2}d_1 + \frac{1}{2}d_2$$

3）测量外尺寸 L_1 和内尺寸 L_2，其函数式为

$$L = \frac{1}{2}L_1 + \frac{1}{2}L_2$$

若已知测量的标准差分别为

$$\sigma_{d1} = 5\mu\text{m}，\ \sigma_{d2} = 7\mu\text{m}$$
$$\sigma_{L1} = 8\mu\text{m}，\ \sigma_{L2} = 10\mu\text{m}$$

由式（3-14）可得上述三种方法的函数标准差分别为

第一种方法

$$\begin{aligned}\sigma_L &= \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial L_1}\right)^2 \sigma_{L1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial d_1}\right)^2 \sigma_{d1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial d_2}\right)^2 \sigma_{d2}^2} \\ &= \sqrt{\sigma_{L1}^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sigma_{d1}^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sigma_{d2}^2} \\ &= \sqrt{8^2 + 2.5^2 + 3.5^2}\,\mu\text{m} = 9.1\,\mu\text{m}\end{aligned}$$

第二种方法

$$\begin{aligned}\sigma_L &= \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial L_2}\right)^2 \sigma_{L2}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial d_1}\right)^2 \sigma_{d1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial d_2}\right)^2 \sigma_{d2}^2} \\ &= \sqrt{\sigma_{L2}^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sigma_{d1}^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sigma_{L2}^2} \\ &= \sqrt{10^2 + 2.5^2 + 3.5^2}\,\mu\text{m} = 10.9\,\mu\text{m}\end{aligned}$$

第三种方法

$$\sigma_L = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial L_1}\right)^2 \sigma_{L1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial L_2}\right)^2 \sigma_{L2}^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \sigma_{L1}^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sigma_{L2}^2}$$
$$= \sqrt{4^2 + 5^2}\mu\text{m} = 6.4\mu\text{m}$$

由计算结果可知，第三种方法误差最小，而第二种方法误差最大，这是因为第三种方法的函数式最简单，而第二种方法的函数式包含的直接测量值数目较多，且又含有内尺寸测量的缘故。

二、使误差传递系数等于零或为最小

由函数误差公式可知，若使各个测量值对函数的误差传递系数$\partial f/\partial x_i = 0$或为最小，则函数误差可相应减小。

若$\partial f/\partial x_i = 0$，则该项部分误差$D_i = (\partial f/\partial x_i)\sigma_i$也将为零，即该测量值的误差$\sigma_i$对函数误差没有影响。

若$\partial f/\partial x_i$为最小，则可减小该项部分误差D_i对函数误差的影响。

根据这个原则，对某些测量实践，尽管有时不可能达到使$\partial f/\partial x_i$等于零的测量条件，但却指出了达到最佳测量方案的趋向。

例 3-9 前面例 3-3 用弓高弦长法测量直径 D（见图 3-1），已知其函数式为

$$D = \frac{s^2}{4h} + h$$

试确定最佳测量方案。

根据式（3-14），求得测量直径的标准差公式为

$$\sigma_D = \sqrt{\left(\frac{s}{2h}\right)^2 \sigma_s^2 + \left(\frac{s^2}{4h^2} - 1\right)^2 \sigma_h^2}$$

欲使σ_D为最小，必须满足：

1. 使$s/(2h) = 0$或为最小

满足$s/(2h) = 0$，必须$s = 0$，但由图中几何关系可知，此时有$h = 0$，因而无实际意义。若满足$s/(2h)$为最小，则$2h$值越大越好，即s值越接近直径越好。

2. 使$s^2/(4h^2) - 1 = 0$

满足此条件必须$s = 2h$，即要求测量直径。

由上述分析可知，欲使σ_D为最小，必须测量直径，此时弓高的测量误差σ_h已不影响直径的测量精度，而只有弦长（实际上此时的弦长也就是直径）的测量误差σ_s影响直径的测量精度。但对大直径测量，此条件难以满足，不过它指出了当h值越接近$s/2$值时，直径的测量误差也越小。

例 3-10 测量金属导线的电导率γ，已知其函数式为

$$\gamma = \frac{4l}{\pi d^2 R}$$

式中的l、d和R分别为金属导线的长度、直径和电阻。根据式（3-14），求得电导率的标准差公式为

$$\sigma_\gamma = \sqrt{\left(\frac{\partial \gamma}{\partial l}\right)^2 \sigma_l^2 + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial d}\right)^2 \sigma_d^2 + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial R}\right)^2 \sigma_R^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{4}{\pi d^2 R}\right)^2 \sigma_l^2+\left(\frac{8l}{\pi d^3 R}\right)^2 \sigma_d^2+\left(\frac{4l}{\pi d^2 R^2}\right)^2 \sigma_R^2}$$

分析式中各项误差传递函数可知，欲使 σ_γ 为最小，必须满足：

1. 使 $l=0$ 或最小

导线长度 $l=0$，无实际意义，但表明 l 值越小越好，即意味着用短小导线来测量金属电导率 γ，导线直径 d 和电阻 R 的误差传递函数较小，可减小其误差 σ_d 及 σ_R 的影响。

2. 使 d 和 R 较大

电导率标准差公式中各个误差传递函数的分母均有直径 d 和电阻 R，取 d 和 R 为较大值，则可减小各项标准差 σ_l、σ_d 和 σ_R 对金属导线电导率 γ 测量精度的影响。

由以上分析可知，金属电导率测量的最佳方案是选择长度小、直径大的金属导线，即用短而粗的导线来测量金属电导率。而且还可看出导线直径的标准差 σ_d 对电导率的测量标准差 σ_γ 影响较大，故需用高精度方法测量导线直径。

习　　题

3-1　相对测量时需用 54.255mm 的量块组做标准件，量块组由 4 块量块研合而成，它们的基本尺寸为 $l_1=40$mm，$l_2=12$mm，$l_3=1.25$mm，$l_4=1.005$mm。经测量，它们的尺寸偏差及其测量极限误差分别为 $\Delta l_1=-0.7\mu$m，$\Delta l_2=+0.5\mu$m，$\Delta l_3=-0.3\mu$m，$\Delta l_4=+0.1\mu$m；$\delta_{\lim} l_1=\pm0.35\mu$m，$\delta_{\lim} l_2=\pm0.25\mu$m，$\delta_{\lim} l_3=\pm0.20\mu$m，$\delta_{\lim} l_4=\pm0.20\mu$m。试求量块组按基本尺寸使用时的修正值及给相对测量带来的测量误差。

3-2　为求长方体体积 V，直接测量其各边长为 $a=161.6$mm，$b=44.5$mm，$c=11.2$mm，已知测量的系统误差为 $\Delta a=1.2$mm，$\Delta b=-0.8$mm，$\Delta c=0.5$mm，测量的极限误差为 $\delta_a=\pm0.8$mm，$\delta_b=\pm0.5$mm，$\delta_c=\pm0.5$mm，试求立方体的体积及其体积的极限误差。

3-3　长方体的边长分别为 a_1、a_2、a_3，测量时：①标准差均为 σ；②标准差各为 σ_1、σ_2、σ_3。试求两种情况测量体积的标准差。

3-4　测量某电路的电流 $I=22.5$mA，电压 $U=12.6$V，测量的标准差分别为 $\sigma_I=0.5$mA，$\sigma_U=0.1$V，求所耗功率 $P=UI$ 及其标准差 σ_P。

3-5　已知 $x\pm\sigma_x=2.0\pm0.1$，$y\pm\sigma_y=3.0\pm0.2$，相关系数 $\rho_{xy}=0$，试求 $\varphi=x\sqrt[3]{y}$ 的值及其标准差。

3-6　已知 x 与 y 的相关系数 $\rho_{xy}=-1$，试求 $u=x^2+ay$ 的方差 σ_u^2。

3-7　通过电流表的电流 I 与指针偏转角 φ 服从下列关系：

$$I=C\tan\varphi$$

式中 C 为决定于仪表结构的常数，$C=5.031\times10^{-7}$A，两次测得 $\varphi_1=6°17'\pm1'$、$\varphi_2=43°32'\pm1'$。试求两种情况下的 I_1、I_2 及其极限误差，并分析最佳测量方案。

3-8　如图 3-6 所示，用双球法测量孔的直径 D，其钢球直径分别为 d_1、d_2，测出距离分别为 H_1、H_2，试求被测孔径 D 与各直接测量量的函数关系 $D=f(d_1, d_2, H_1, H_2)$ 及其误差传递系数。

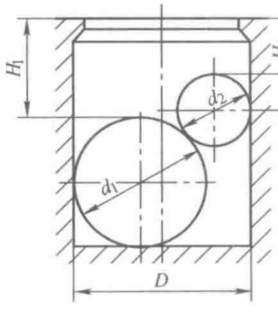

图　3-6

3-9　测量某电路电阻 R 两端的电压 U，按式 $I=U/R$ 计算出电路电流，若需保证电流的误差为 0.04A，试求电阻 R 和电压 U 的测量误差为多少？

3-10　题 3-7 中，若测得 $C+\sigma_C=(124.18\pm0.03)$A，$\varphi+\sigma_\varphi=19°41'30''\pm40''$，试求电流 I 的标准差。

3-11　测量某电路电阻 R 两端的电压降 U，可由公式 $I=U/R$ 计算出

电路电流 I。若电压降为16V，电阻为4Ω，欲使电流的极限误差为0.04A，试决定电阻 R 和电压降 U 的测量误差为多少？

3-12　按公式 $V=\pi r^2 h$ 求圆柱体体积，若已知 r 为2cm，h 为20cm，要使体积的相对误差等于1%，试问 r 和 h 测量时误差应为多少？

3-13　假定从支点到重心的长度为 L 的单摆振动周期为 T，重力加速度可由公式 $T=2\pi\sqrt{L/g}$中给出。若要求测量 g 的相对标准差 $\sigma_g/g\leqslant 0.1\%$，试问按等作用原则分配误差时，测量 L 和 T 的相对标准差应是多少？

3-14　对某一质量进行4次重复测量，测得数据（单位：g）为428.6，429.2，426.5，430.8。已知测量的已定系统误差 $\Delta=-2.6$g，测量的各极限误差分量及其相应的传递系数如下表所列。若各误差均服从正态分布，试求该质量的最可信赖值及其极限误差。

序　号	极限误差/g		误差传递系数
	随机误差	未定系统误差	
1	2.1	—	1
2	—	1.5	1
3	—	1.0	1
4	—	0.5	1
5	4.5	—	1
6	—	2.2	1.4
7	1.0	—	2.2
8	—	1.8	1

3-15　对某压力计的误差因素进行了全面分析计算，测得各误差因素引起的极限误差如下表所示：

序号	误差因素	极限误差/mPa	
		随机误差	未定系统误差
1	活塞有效面积误差	13.8	13.0
2	专用砝码及活塞杆质量误差	—	4.0
3	使用时温度变化误差	4.8	—
4	结构系统安装误差	—	0.1
5	活塞移动加速度误差	—	0.5
6	活塞有效面积变形误差	3.0	—

若各项误差传递函数均为1，置信系数均取为2，试求压力计的极限误差？

第四章 测量不确定度

由于测量误差的存在，被测量的真值难以确定，测量结果带有不确定性。长期以来，人们不断追求以最佳方式估计被测量的值，以最科学的方法评价测量结果的质量高低的程度。本章介绍的测量不确定度就是评定测量结果质量高低的一个重要指标。不确定度越小，测量结果的质量越高，使用价值越大，其测量水平也越高；不确定度越大，测量结果的质量越低，使用价值越小，其测量水平也越低。

第一节 测量不确定度的基本概念

一、概述

"不确定度"一词起源于1927年德国物理学家海森堡在量子力学中提出的不确定度关系，又称测不准关系。1970年前后，一些学者逐渐使用不确定度一词，一些国家计量部门也开始相继使用不确定度，但对不确定度的理解和表示方法尚缺乏一致性。鉴于国际间表示测量不确定度的不一致，1980年国际计量局（BIPM）在征求各国意见的基础上提出了《实验不确定度建议书INC－1》；1986年由国际标准化组织（ISO）等七个国际组织共同组成了国际不确定度工作组，制定了《测量不确定度表示指南》，简称"指南GUM"；1993年，指南GUM由国际标准化组织颁布实施，在世界各国得到执行和广泛应用。

随着生产的发展和科学技术的进步，对测量数据的准确性和可靠性提出了更高的要求，特别是我国国际贸易的不断发展与扩大，测量数据的质量高低需要在国际间得到评价和承认，因此，测量不确定度在我国受到越来越高的重视。广大科技人员，尤其是从事测量的专业技术人员都应正确理解测量不确定度的概念，正确掌握测量不确定度的表示与评定方法，以适应现代测试技术发展的需要。

二、测量不确定度定义

测量不确定度是指测量结果变化的不肯定，是表征被测量的真值在某个量值范围的一个估计，是测量结果含有的一个参数，用以表示被测量值的分散性。这种测量不确定度的定义表明，一个完整的测量结果应包含被测量值的估计与分散性参数两部分。例如被测量Y的测量结果为$y \pm U$，其中y是被测量值的估计，它具有的测量不确定度为U。显然，在测量不确定度的定义下，被测量的测量结果所表示的并非为一个确定的值，而是分散的无限个可能值所处于的一个区间。

根据测量不确定度定义，在测量实践中如何对测量不确定度进行合理的评定，这是必须解决的基本问题。对于一个实际测量过程，影响测量结果的精度有多方面因素，因此测量不确定度一般包含若干个分量，各不确定度分量不论其性质如何，皆可用两类方法进行评定，即A类评定与B类评定。其中一些分量由一系列观测数据的统计分析来评定，称为A类评定；另一些分量不是用一系列观测数据的统计分析法，而是基于经验或其他信息所认定的概率分布来评定，称为B类评定。所有的不确定度分量均用标准差表征，它们或是由随机误

差而引起，或是由系统误差而引起，都对测量结果的分散性产生相应的影响。

三、测量不确定度与误差

测量不确定度和误差是误差理论中两个重要概念，它们具有相同点，都是评价测量结果质量高低的重要指标，都可作为测量结果的精度评定参数。但它们又有明显的区别，必须正确认识和区分，以防混淆和误用。

从定义上讲，按照误差的定义式（1-1），误差是测量结果与真值之差，它以真值或约定真值为中心；而测量不确定度是以被测量的估计值为中心，因此误差是一个理想的概念，一般不能准确知道，难以定量；而测量不确定度是反映人们对测量认识不足的程度，是可以定量评定的。

在分类上，误差按自身特征和性质分为系统误差、随机误差和粗大误差，并可采取不同的措施来减小或消除各类误差对测量的影响。但由于各类误差之间并不存在绝对界限，故在分类判别和误差计算时不易准确掌握；测量不确定度不按性质分类，而是按评定方法分为 A 类评定和 B 类评定，两类评定方法不分优劣，按实际情况的可能性加以选用。由于不确定度的评定不论影响不确定度因素的来源和性质，只考虑其影响结果的评定方法，从而简化了分类，便于评定与计算。

不确定度与误差有区别，也有联系。误差是不确定度的基础，研究不确定度首先需研究误差，只有对误差的性质、分布规律、相互联系及对测量结果的误差传递关系等有了充分的认识和了解，才能更好地估计各不确定度分量，正确得到测量结果的不确定度。用测量不确定度代替误差表示测量结果，易于理解、便于评定，具有合理性和实用性。但测量不确定度的内容不能包罗更不能取代误差理论的所有内容，如传统的误差分析与数据处理等均不能被取代。客观地说，不确定度是对经典误差理论的一个补充，是现代误差理论的内容之一，但它还有待于进一步研究、完善与发展。

第二节　标准不确定度的评定

用标准差表征的不确定度，称为标准不确定度，用 u 表示。测量不确定度所包含的若干个不确定度分量，均是标准不确定度分量，用 u_i 表示，其评定方法如下：

一、标准不确定度的 A 类评定

A 类评定是用统计分析法评定，其标准不确定度 u 等同于由系列观测值获得的标准差 σ，即 $u=\sigma$。标准差 σ 的基本求法在本教材第二章已作详细介绍，如贝塞尔法、别捷尔斯法、极差法、最大误差法等。

当被测量 Y 取决于其他 N 个量 X_1，X_2，…，X_N 时，则 Y 的估计值 y 的标准不确定度 u_y 将取决于 X_i 的估计值 x_i 的标准不确定度 u_{xi}，为此要首先评定 x_i 的标准不确定度 u_{xi}。其方法是：在其他 $X_j(j\neq i)$ 保持不变的条件下，仅对 X_i 进行 n 次等精度独立测量，用统计法由 n 个观测值求得单次测量标准差 σ_i，则 x_i 的标准不确定度 u_{xi} 的数值按下列情况分别确定：如果用单次测量值作为 X_i 的估计值 x_i，则 $u_{xi}=\sigma_i$；如果用 n 次测量的平均值作为 X_i 的估计值 x_i，则 $u_{xi}=\sigma_i/\sqrt{n}$。

二、标准不确定度的 B 类评定

B 类评定不用统计分析法，而是基于其他方法估计概率分布或分布假设来评定标准差并

得到标准不确定度。B 类评定在不确定度评定中占有重要地位，因为有的不确定度无法用统计方法来评定，或者虽可用统计法，但不经济可行，所以在实际工作中，采用 B 类评定方法居多。

设被测量 X 的估计值为 x，其标准不确定度的 B 类评定是借助于影响 x 可能变化的全部信息进行科学判定的。这些信息可能是：以前的测量数据、经验或资料；有关仪器和装置的一般知识；制造说明书和检定证书或其他报告所提供的数据；由手册提供的参考数据等。为了合理使用信息，正确进行标准不确定度的 B 类评定，要求有一定的经验及对一般知识有透彻的了解。

采用 B 类评定法，需先根据实际情况分析，对测量值进行一定的分布假设，可假设为正态分布，也可假设为其他分布，常见有下列几种情况：

1）当测量估计值 x 受到多个独立因素影响，且影响大小相近，则假设为正态分布，由所取置信概率 P 的分布区间半宽 a 与包含因子 k_p 来估计标准不确定度，即

$$u_x = \frac{a}{k_p} \tag{4-1}$$

式中包含因子 k_p 的数值可由本教材附录中的正态分布积分表查得。

2）当估计值 x 取自有关资料，所给出的测量不确定度 U_x 为标准差的 k 倍时，则其标准不确定度为

$$u_x = \frac{U_x}{k} \tag{4-2}$$

3）若根据信息，已知估计值 x 落在区间（$x-a$，$x+a$）内的概率为 1，且在区间内各处出现的机会相等，则 x 服从均匀分布，其标准不确定度为

$$u_x = \frac{a}{\sqrt{3}} \tag{4-3}$$

4）当估计值 x 受到两个独立且皆是具有均匀分布的因素影响，则 x 服从在区间（$x-a$，$x+a$）内的三角分布，其标准不确定度为

$$u_x = \frac{a}{\sqrt{6}} \tag{4-4}$$

5）当估计值 x 服从在区间（$x-a$，$x+a$）内的反正弦分布，则其标准不确定度为

$$u_x = \frac{a}{\sqrt{2}} \tag{4-5}$$

例 4-1 某校准证书说明，标称值 1kg 的标准砝码的质量 m_s 为 1000.000325g，该值的测量不确定度按三倍标准差计算为 240μg，求该砝码质量的标准不确定度。

解：已知测量不确定度 $U_{ms}=240\mu g$，$k=3$，故标准不确定度为

$$u_{ms}=\frac{U_{ms}}{k}=\frac{240\mu g}{3}=80\mu g$$

例 4-2 由手册查得纯铜在温度 20℃时的线膨胀系数 α 为 $16.52\times10^{-6}/℃$，并已知该系数 α 的误差范围为 $\pm0.4\times10^{-6}/℃$，求线膨胀系数 α 的标准不确定度。

解：根据手册提供的信息可认为 α 的值以等概率位于区间 $(16.52-0.4)\times10^{-6}/℃$ 至 $(16.52+0.4)\times10^{-6}/℃$ 内，且不可能位于此区间之外，故假设 α 服从均匀分布。已知其区

间半宽 $a=0.4\times10^{-6}/℃$，则纯铜在温度为20℃的线膨胀系数 α 的标准不确定度为

$$u_\alpha=\frac{a}{\sqrt{3}}=\frac{0.4\times10^{-6}/℃}{\sqrt{3}}=0.23\times10^{-6}/℃$$

三、自由度及其确定

（一）自由度概念

根据概率论与数理统计所定义的自由度，在 n 个变量 v_i 的平方和 $\sum_{i=1}^{n}v_i^2$ 中，如果 n 个 v_i 之间存在着 k 个独立的线性约束条件，即 n 个变量中独立变量的个数仅为 $n-k$，则称平方和 $\sum_{i=1}^{n}v_i^2$ 的自由度为 $n-k$。因此若用贝塞尔公式（2-18）计算单次测量标准差 σ，式中 $\sum_{i=1}^{n}v_i^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ 的 n 个变量 v_i 之间存在唯一的线性约束条件 $\sum_{i=1}^{n}v_i=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})=0$，故平方和 $\sum_{i=1}^{n}v_i^2$ 的自由度为 $n-1$，则由式（2-18）计算的标准差 σ 的自由度也等于 $n-1$。由此可以看出，系列测量的标准差的可信赖程度与自由度有密切关系，自由度越大，标准差越可信赖。由于不确定度是用标准差来表征，因此不确定度评定的质量如何，也可用自由度来说明。每个不确定度都对应着一个自由度，并将不确定度计算表达式中总和所包含的项数减去各项之间存在的约束条件数，所得差值称为不确定度的自由度。

（二）自由度的确定

1. 标准不确定度A类评定的自由度

对A类评定的标准不确定度，其自由度 ν 即为标准差 σ 的自由度。由于标准差有不同的计算方法，其自由度也有所不同，并且可由相应公式计算出不同的自由度。例如，用贝塞尔法计算的标准差，其自由度 $\nu=n-1$，而用其他方法计算标准差，其自由度有所不同。为方便起见，将已计算好的自由度列表使用。表4-1给出了其他几种方法计算标准差的自由度。

表 4-1

计算方法 \ ν \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
别捷尔斯法		0.9	1.8	2.7	3.6	4.5	5.4	6.2	7.1	8.0	12.4	16.7
极差法		0.9	1.8	2.7	3.6	4.5	5.3	6.0	6.8	7.5	10.5	13.1
最大误差法	0.9	1.9	2.6	3.3	3.9	4.6	5.2	5.8	6.4	6.9	8.3	9.5

2. 标准不确定度B类评定的自由度

对B类评定的标准不确定度 u，由估计 u 的相对标准差来确定自由度，其自由度定义为

$$\nu=\frac{1}{2\left(\frac{\sigma_u}{u}\right)^2} \tag{4-6}$$

式中，σ_u 为评定 u 的标准差；σ_u/u 为评定 u 的相对标准差。

例如，当 $\sigma_u/u=0.5$ 时，则 u 的自由度 $\nu=2$；当 $\sigma_u/u=0.25$ 时，则 u 的自由度 $\nu=8$；

当 $\sigma_u/u=0.10$ 时，则 u 的自由度 $\nu=50$；当 $\sigma_u/u=0$ 时，则 u 的自由度 $\nu=\infty$，即 u 的评定非常可靠。表4-2给出了标准不确定度B类评定时不同的相对标准差所对应的自由度。

表 4-2

σ_u/u	0.71	0.50	0.41	0.35	0.32	0.29	0.27	0.25	0.24	0.22	0.18	0.16	0.10	0.07
ν	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	50	100

例 4-3 用标准数字电压表在标准条件下，对直流电压源10V点的输出电压值进行重复测量10次，测得值如下：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ν_i/V	10.000107	10.000103	10.000097	10.000111	10.000091	10.000108	10.000121	10.000101	10.000110	10.000094

已知标准电压表的示值误差按3倍标准差计算为 $\pm 3.5\times10^{-6}\times U_0$（$U_0$ 为标准电压表的读数，相对标准差为25%），24h的稳定度不超过 $\pm15\mu$V（按均匀分布，相对标准差为10%）。若用10次测量的平均值作为电压测量的估计值，试分析电压测量的不确定度来源，并分别计算其标准不确定度和自由度。

解：根据题意，引起电压测量不确定度的主要来源有电压测量的重复性、标准电压表的示值误差及其稳定性，其相应标准不确定度和自由度分别计算如下：

（1）电压测量重复性引起的标准不确定度 u_{x1}

由10次测量数据计算的平均值 $\overline{V}=10.000104$V，用贝塞尔法计算单次测量的标准差

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10}(\nu_i-\overline{V})^2}{10-1}}=0.000009\text{V}=9\mu\text{V}$$

平均值的标准差
$$\sigma_{\overline{V}}=\frac{\sigma}{\sqrt{10}}=2.8\mu\text{V}$$

电压测量重复性引起的标准不确定度 u_{x1} 的计算属A类评定，则 $u_{x1}=\sigma_{\overline{V}}=2.8\mu$V，其自由度 $\nu_1=10-1=9$。

（2）标准电压表的示值误差引起的标准不确定度 u_{x2}

标准电压表的示值误差按3倍标准差计算，不确定度 u_{x2} 的计算属B类评定，根据式(4-2)计算，其中 $U_x=3.5\times10^{-6}\times10$V，$k=3$，则标准不确定度为

$$u_{x2}=\frac{3.5\times10^{-6}\times10\text{V}}{3}=1.17\times10^{-5}\text{V}=11.7\mu\text{V}$$

其相对标准差为25%，则自由度为

$$\nu_2=\frac{1}{2\left(\frac{\sigma_{u2}}{u_2}\right)^2}=\frac{1}{2\times(25\%)^2}=8$$

（3）标准电压表的稳定度引起的标准不确定度 u_{x3}

标准电压表的稳定度按均匀分布，其不确定度 u_{x3} 属B类评定，根据式（4-3）计算标准不确定度为

$$u_{x3}=\frac{15\mu\text{V}}{\sqrt{3}}=8.7\mu\text{V}$$

其相对标准差为10%，则自由度为