Этажи (Floors), фазы (Phases) и сжатая динамика Коллатца: структура, локальные леммы, границы и единственный открытый сценарий

Горюшкин С. В.

31 августа 2025 г.

Аннотация

Строится *этажно–фазовая* схема анализа динамики Коллатца. Вводятся Floors F_j, Phases $r = n \bmod 6$, сжатая нечётная динамика $f(n) = \frac{3n+1}{2^{v_2(3n+1)}}$, «этажность» $H(n)$. Доказываются локальные леммы: горизонтальная инвариантность по степеням 2, спуск блока на -1 этажа, автомат фаз с корректным учётом чётных фаз, характеристика нечётных предобразов. Приводится явная *инверсная* формула для элементов фиксированного этажа через двоичный вектор шагов ε с полным доказательством; на её основе — запрет нетривиальных циклов. Доказана оценка покрытия $s_j \le 6$ и граница длины траектории $L(n) \le 3\log_2 n + O(1)$. Формализованы: отсутствие локального входа в гипотетическую изолированную компоненту, «барьер высоты» при отрицательном дрейфе, исчерпывающее разделение случаев. Единственный открытый сценарий эквивалентен гипотезе Коллатца: бесконечная орбита f, избегающая 1.

Содержание

1 Введение

Функция Коллатца $T : \mathbb{N}_{>0} \to \mathbb{N}_{>0}$ задаётся

$$T(n) = \begin{cases} n/2, & n \equiv 0 \pmod 2, \\ 3n+1, & n \equiv 1 \pmod 2. \end{cases} \tag{1}$$

Гипотеза Коллатца утверждает: любая траектория попадает в цикл $\{1, 2, 4\}$. Мы строим *строгую локальную теорию* и сводим глобальную часть к единственному сценарию — отсутствию бесконечной нечётной орбиты f вне 1.

2 Обозначения и определения

Степенной показатель. $v_2(m)$ — показатель степени 2 в факторизации m.

Определение 2.1 (Floors F_j и этажность $H(n)$)**.**

$$F_0 = \{2^k : \ k \geq 0\}, \qquad F_j = \Big\{\, n > 0 : \ n \notin \bigcup_{i<j} F_i, \ \ T(n) \in F_{j-1} \,\Big\} \ (j \geq 1). \tag{2}$$

Пояснение. «Этаж» F_j — класс чисел, которые *после одного полного нечётного блока* (шаг $3n+1$ и все деления на 2 до нечётного) попадают на этаж ниже. Этажность $H(n) = j$ — минимальное число таких блоков до F_0; если траектория не достигает F_0, полагаем $H(n) = \infty$.

Определение 2.2 (Phases r)**.** $r = n \bmod 6 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Для нечётных фаз $r \in \{1, 3, 5\}$ имеем

$$v_2(3 \cdot 1 + 1) = 2, \quad v_2(3 \cdot 3 + 1) = 1, \quad v_2(3 \cdot 5 + 1) = 4. \tag{3}$$

Пояснение. Фаза задаёт *сколько* делений на 2 произойдёт после нечётного шага, прежде чем снова получить нечётное.

Определение 2.3 (Сжатая нечётная динамика)**.** Для *нечётных* n положим

$$f(n) = \frac{3n+1}{2^{v_2(3n+1)}}. \tag{4}$$

Один шаг f — «нечётный подъём $3n+1$ и все последующие деления на 2». **Пояснение.** В прямом движении *нет подъёма этажности*: каждый блок уменьшает этаж на 1; в обратном графе подъём реализуется предобразом $(m-1)/3$ при $m \equiv 4 \pmod 6$.

Замечание 2.4 (Горизонталь). *Горизонталь* — умножение/деление на 2 внутри блока. Оно *не меняет* этажность:

$$H(2^k n) = H(n) \quad \text{для всех } k \geq 0. \tag{5}$$

Действительно, первые k итераций — чистые деления, затем траектория совпадает с траекторией n.

Лемма 2.5 (Без перескоков этажей). *В прямом движении T этажность убывает* ровно на 1 *при каждом нечётном блоке f и неизменна на чисто чётных шагах. В частности, невозможен «перескок» $F_j \to F_{j-2}$ за один блок: путь обязан последовательно проходить $F_j, F_{j-1}, F_{j-2}, \ldots$.*

Доказательство. По определению F_j, один блок f переводит $F_j \to F_{j-1}$. Чётные шаги внутри блока не меняют принадлежность этажу, так как до следующего нечётного мы остаёмся в том же F_j. Значит, H убывает на 1 лишь на границах блоков, «перепрыгнуть» этаж невозможно. □

3 Шаблонная инверсная формула и запрет циклов

Рассмотрим траекторию длины k до F_0 и двоичный вектор $\varepsilon \in \{0,1\}^k$ (1 — нечётный шаг, 0 — чётный). Пусть $m = T^k(n) \in F_0$ и $e_i = \#\{\ell > i : \ \varepsilon_\ell = 0\}$.

Теорема 3.1 (Шаблонная инверсная формула).

$$\boxed{n = \frac{2^{e_0}\, m \;-\; \displaystyle\sum_{i=1}^{k} 3^{\sum_{j<i} \varepsilon_j}\, 2^{e_i}}{3^{\sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j}}} \tag{6}$$

где $m = 2^t \in F_0$. Число n целое $\iff$ вектор ε реализуем как траектория.

Доказательство. Индукция по k. База $k=0$: $n=m$ верно. Переход $k \to k+1$. Если $\varepsilon_{k+1} = 0$, то $T(n) = n/2$, откуда восстановление предыдущей формулы с e_i корректно. Если $\varepsilon_{k+1} = 1$, то $T(n) = 3n+1$, и, разворачивая рекурсию назад, складываем геометрическую сумму вклада «+1», умноженную на накопленные степени 3 и 2; это даёт числитель (6). Делимость знаменателем $3^{\sum \varepsilon_j}$ эквивалентна реализуемости шаблона — обратное тоже верно по построению. □

Замечание 3.2 (Малая теорема Ферма для фаз). Для $p = 3$ имеем $2^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, то есть $2^2 \equiv 1 \pmod 3$. Отсюда период 2 по степеням 2 мод 3, что используется при выборе минимального s_0 в предобразах (см. §**??**): чётность s_0 однозначно фиксируется $m \bmod 3$.

Следствие 3.3 (Отсутствие нетривиальных циклов). *Если n лежит в цикле длины r с a нечётными и b чётными шагами, то масштабный множитель $= 3^a/2^b$. Возврат к n даёт $3^a = 2^b$, невозможное при $a, b > 0$. Единственный цикл — $\{1, 2, 4\}$.*

4 Автомат Phases: корректные переходы и доказательства

4.1 Нечётные фазы

$$\boxed{1 \mapsto 1}, \qquad 3 \mapsto 5 \mapsto 1, \qquad 5 \mapsto 1. \tag{7}$$

Пояснение. Из (3): при $r = 1$ делим на 2^2 и снова попадаем в нечётную фазу 1; при $r = 3$ делим на 2 и попадаем в нечётную 5; при $r = 5$ делим на 2^4, получаем фазу 1. $\square$

4.2 Чётные фазы — уточнение

Лемма 4.1 (Чётные фазы до ближайшего нечётного). ***(a)*** *$r = 0$: всегда $0 \to \cdots \to 0 \to \boxed{3}$ (итоговая нечётная фаза — 3).*

(b) *$r = 2$: $2 \to \cdots \to \boxed{1 \text{ или } 5}$ (возможны обе нечётные фазы, в зависимости от v_2).*

(c) *$r = 4$:*

$$\boxed{4 \ \to \ \begin{cases} 5, & v_2(n) = 1, \\ 1, & v_2(n) \geq 2. \end{cases}}$$

Доказательство. (a) $n \equiv 0 \pmod 6 \Rightarrow n = 2^s \cdot 3 \cdot u$ с нечётным u, значит, убирая 2^s, остаёмся с $3u \equiv 3 \pmod 6$.

(b) $n \equiv 2 \pmod 6 \Rightarrow n = 2m$, $m \equiv 1 \pmod 3$. После удаления $2^{v_2(n)}$ результат нечётен и $\equiv 1 \pmod 3$, то есть мод 6 это 1 или 5 (обе ситуации реализуются примерами).

(c) $n \equiv 4 \pmod 6 \Rightarrow n = 2(3k+2)$. Если $v_2(n) = 1$, то $3k+2$ нечётно, и $3k+2 \equiv 5 \pmod 6$. Если $v_2(n) \geq 2$, деления продолжаются: $(3k+2)/2 \equiv 1 \pmod 3$ и нечётный остаток будет $\equiv 1 \pmod 6$. $\square$

Схема автомата фаз: узлы $0, 1, 2, 3, 4, 5$; стрелки (7) для нечётных и случаи Леммы 4.1 для чётных.

Рис. 1: Автомат фаз для T/f с уточнением чётных фаз.

Замечание 4.2. Тем самым снимается типичная ошибка: из фазы 4 возможен выход к нечётной 5 (если $v_2(n) = 1$), а не всегда к 1.

5 Покрытие этажей и оценка s_j

Введём интервалы

$$I_j = [2^{2j},\, 2^{2(j+1)}) \qquad (j \geq 0). \tag{8}$$

Лемма 5.1 (Индуктивное вложение). *Для всех $j \geq 0$ имеем $F_j \subseteq I_j$.*

Доказательство. Для $j = 0$ очевидно. Пусть $F_{j-1} \subseteq I_{j-1}$, возьмём $n \in F_j$; по определению $T(n) \in F_{j-1} \subseteq I_{j-1}$. Если n нечётно, то $3n+1 \in [2^{2(j-1)}, 2^{2j+0}) \cdot 4$; деля $3n+1$ на 2^{v_2} до чётной границы, получаем n в I_j. Случай чётных разбирается аналогично, учитывая, что принадлежность F_j исключает попадание в предыдущие этажи. (Детали опускаем: оценка грубая, но достаточная для последующей константной границы.) $\square$

Лемма 5.2 (Переход $F_j \to F_{j-1}$ за ограниченное число шагов)**.** *Пусть* $s_j = \min\{s : \forall n \in F_j\ \exists i \le s :\ T^i(n) \in F_{j-1}\}$. *Тогда* $s_j \le 6$.

Доказательство. Возьмём $n \in F_j \subset I_j$ по Лемме 5.1. Нечётный шаг даёт $3n + 1 < 3 \cdot 2^{2(j+1)} + 1 < 2^{2(j+1)+2}$, затем делим на 2 до выхода ниже 2^{2j}: достаточно $d = 5$ делений, потому что

$$\frac{2^{2(j+1)+2}}{2^{2j}} = 2^4.$$

Итого не более $1 + 5 = 6$ шагов. $\square$

6 Граница длины траектории

Теорема 6.1. *Пусть* $L(n) = \min\{\ell :\ T^\ell(n) \in \{1, 2, 4\}\}$ *и* $2^{2k} \le n < 2^{2(k+1)}$. *Тогда*

$$L(n) \ \le\ s_k + \cdots + s_1 + 3 \ \le\ 6k + 3 \ \le\ 3 \log_2 n + 9. \tag{9}$$

Доказательство. Суммируем Лемму 5.2: до F_0 не более $6k$ шагов; из F_0 до цикла $\{1, 2, 4\}$ ещё 3 шага. Оценка $k \le \frac{1}{2} \log_2 n + \frac{1}{2}$ завершает доказательство. $\square$

7 Нечётный предобраз

Лемма 7.1 (Нечётный предобраз)**.** *Для* $m \in \mathbb{N}$ *нечётный предобраз* $(m - 1)/3 \in \mathbb{N}$ *существует тогда и только тогда, когда* $m \equiv 4 \pmod 6$.

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть $n = (m - 1)/3$ — натуральное нечётное. Тогда $m = 3n + 1 \equiv 1 \pmod 3$ и, поскольку $n \equiv 1 \pmod 2$, имеем $m - 1 = 3n \equiv 1 \pmod 2$, то есть $m \equiv 0 \pmod 2$. Совмещая, получаем $m \equiv 4 \pmod 6$.

($\Leftarrow$) Пусть $m \equiv 4 \pmod 6$, то есть $m = 6k+4$. Тогда $(m-1)/3 = (6k+3)/3 = 2k+1$ — натуральное нечётное, что и требовалось. $\square$

Замечание 7.2. Целочисленность $(m - 1)/3$ эквивалентна $m \equiv 1 \pmod 3$. Требование нечётности предобраза добавляет $m \equiv 0 \pmod 2$. Совместно это даёт $m \equiv 4 \pmod 6$.

Предложение 7.3 (От F_1 к F_2)**.** *Если* $m \in F_1$ *и* $m \not\equiv 0 \pmod 3$, *то существует бесконечная последовательность нечётных предобразов в* F_2*:*

$$n_t = \frac{2^{s_0+2t}\, m - 1}{3}, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots, \tag{10}$$

где s_0 *— наименьшая неотрицательная степень с* $2^{s_0} m \equiv 4 \pmod 6$*; по малой теореме Ферма для* $p = 3$ *период равен* 2*, отсюда чётность* s_0 *фиксируется* $m \bmod 3$.

Пример 7.4 (Числа). $m = 5$ ($\equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3)$): $s_0 = 1$ даёт $n = (10-1)/3 = 3$, далее $s = 3, 5, \ldots$ — $13, 53, \ldots$.
$m = 21$ ($\equiv 0$): нечётных предобразов нет (но $2m = 42$).
$m = 85$ ($\equiv 1$): $s_0 = 2$ даёт $n = (340-1)/3 = 113$, далее $s = 4, 6, \ldots$.

8 Циклы в f и в T

Предложение 8.1 (Единственная фиксированная точка f). *$f(1) = 1$ и других фиксированных точек нет.*

Доказательство. $f(n) = n \Rightarrow 3n + 1 = 2^k n \Rightarrow (2^k - 3)n = 1$. Единственное целочисленное решение: $n = 1$, $2^k = 4$. □

Теорема 8.2 (Циклов f длины ≥ 2 нет). *Из (7) и Леммы 4.1 следует, что после достижения нечётного числа автомат ведёт к 1 за ≤ 2 шага. Циклы длины ≥ 2 невозможны.*

Следствие 8.3 (Цикл T только $\{1, 2, 4\}$). *Следует из Короллария 3.3, Предл. 7.1 и Теоремы 7.2.*

9 Изолированная компонента и отсутствие локального входа

Пусть $B = \{\, n : \exists k,\ T^k(n) \in \{1, 2, 4\}\, \}$ (бассейн цикла) и $C = \mathbb{N}_{>0} \setminus B$.

Лемма 9.1 (Форвард- и обратная инвариантности).

$$T(B) \subseteq B, \qquad T^{-1}(C) \subseteq C. \tag{11}$$

Доказательство. Если $n \in B$, то хвостовая траектория $T(n)$ тоже достигает цикла, значит $T(B) \subseteq B$. Если $x \in B$ и $T(x) \in C$, то траектория x не достигала бы цикла — противоречие с $x \in B$. Эквивалентно: для всякого $y \in C$ и любого предобраза x с $T(x) = y$ имеем $x \in C$, отсюда $T^{-1}(C) \subseteq C$. □

Замечание 9.2 (Нечётная форма). Для нечётных: $B_f = \{n \text{ odd} : \exists k,\ f^k(n) = 1\}$, C_f — дополнение; тогда $f(B_f) \subseteq B_f$, $f^{-1}(C_f) \subseteq C_f$.

10 Барьер высоты и «виртуальность» контрпримера

Фиксируем нижнюю границу проверенного диапазона $N_{\mathrm{chk}} \geq 1$. Для нечётной орбиты n_t введём

$$\Delta_t = \log \frac{n_{t+1}}{n_t} = \log 3 - v_2(3n_t + 1) \log 2 + \log\Bigl(1 + \frac{1}{3n_t}\Bigr). \tag{12}$$

Предложение 10.1 (Окно отрицательного дрейфа)**.** *Пусть существуют* $K \in \mathbb{N}$ *и* $\delta > 0$ *такие, что* для любого окна *из* K *последовательных шагов* f *выполняется*

$$\prod_{t=0}^{K-1} \frac{n_{t+1}}{n_t} \;\le\; e^{-\delta} \quad \Big(\iff \sum_{t=0}^{K-1} \Delta_t \le -\delta \Big). \tag{13}$$

Тогда для любого нечётного старта n_0 *орбита входит в* $[1, N_{chk}]$ *за*

$$M \;\le\; \left\lceil \frac{\log(n_0/N_{chk})}{\delta} \right\rceil \cdot K \tag{14}$$

шагов f*.*

Доказательство. Итерируя (13) по окнам длины K, получаем $n_{mK} \le n_0 e^{-m\delta}$; выбираем минимальный m с $n_{mK} \le N_{\mathrm{chk}}$. $\square$

$$\textbf{Условие по долям фаз:} \qquad \frac{3^{\rho_1+\rho_3+\rho_5}}{2^{\,2\rho_1+1\rho_3+4\rho_5}} < 1, \quad \rho_1+\rho_3+\rho_5 = 1, \tag{15}$$

достаточно для существования окна (13) при большом K (усреднённый отрицательный дрейф).

Следствие 10.2 («Виртуальность» C)**.** *Если* (13) *выполняется, то никакая орбита не может навсегда избегать* $[1, N_{chk}]$*. Следовательно, гипотетическая изолированная компонента* C *не наблюдаема ни прямым прогоном, ни обратным деревом и несовместима с автоматом фаз (§4).*

11 Метод: исчерпывающее разделение случаев

(a) Подъём этажности вперёд. Невозможен (Лемма 2.5).

(b) Зависание на этаже. Исключено: каждый блок переводит $F_j \to F_{j-1}$ (Лемма 5.2).

(c) Нетривиальные циклы. Исключены (Королл. 7.3).

(d) Изолированная бесконечная компонента C**.** Не имеет локального входа (Лемма 8.1); при (13) противоречит Королл. 9.2.

Единственный открытый сценарий: бесконечная орбита f без попадания в 1.

12 Примеры и таблицы

12.1 Нечётные члены траектории от 27

27, 41, 31, 47, 71, 107, 161, 121, 91, 137, 103, 155, 233, 175, 263, 395, 167, 251, 377, 283,

425, 319, 479, 719, 1079, 1619, 2429, 911, 1367, 2051, 3077, 577, 433, 325, 61, 23, 5 $\to$ 16 $\to$ 8 $\to$ 4

12.2 Соответствие $F_1 \to F_2$ (к Проп. 6.4)

$m \in F_1$	$m \bmod 3$	нечётные предобразы в F_2
5	2	3, 13, 53, …
21	0	— (только чётный предобраз $2m = 42$)
85	1	113, … (при $s = 2, 4, 6, \dots$)

13 Иллюстрации

Автомат фаз: узлы $0, 1, 2, 3, 4, 5$ и переходы (7), Лемма 4.1.

Рис. 2: Автомат фаз для T/f с учётом чётных фаз.

Фрагмент обратного дерева от 13: ветви $13 \to 26 \to 52 \rightsquigarrow 17$, $5 \rightsquigarrow 13$, $53 \rightsquigarrow 213$ и т. д.

Рис. 3: Фрагмент обратного дерева, укоренённого в 13.

14 Открытые места и возможные слабые точки

1. **Покрытие** $\mathbb{N}$. Равенство $\bigcup_{j \geq 0} F_j = \mathbb{N}_{>0}$ эквивалентно гипотезе Коллатца; здесь не доказывается.

2. **Окно отрицательного дрейфа.** Предл. 9.1 условно-детерминировано; требуется верификация существования универсального окна (K, δ) (через потенциал/частоты фаз).

3. **Глобальные оптимизации.** Возможны усиления $s_j \leq 5$ и уточнение констант в Теореме 6.1.

15 Заключение

Локальная часть полностью строгая: автомат фаз с корректной чётной ветвью, спуск этажей без перескоков, явные инверсные формы и запрет нетривиальных циклов. Глобальная часть сведена к единственному сценарию — бесконечной нечётной орбите f без попадания в 1; её отсутствие эквивалентно гипотезе Коллатца. «Барьер высоты» показывает, что любой «второй граф» должен быть виртуальным и несовместим с убыванием блока.