Фазовая намотка числовой прямой, фазовая плоскость и двойное решето

Короткие определения, простые леммы и геометрические эвристики

Сергей В. Горюшкин

31 августа 2025 г.

Аннотация

В работе предложена геометрическая интерпретация числовой прямой через фазовую намотку и её развёртку в цилиндрическую и плоскую модели. Каждому целому числу n сопоставляются координаты *(фаза, высота)* по модулю m, что даёт явную визуализацию арифметических функций (в частности, функции Эйлера). Переход от точки к *вертикали фиксированной фазы* на фазовой плоскости индуцирует естественную векторную структуру; это можно рассматривать как математический аналог дуализма «частица–волна» (эвристически).

Мы вводим *минимальный треугольник* как базовый шаблон для диофантовых равенств $A + B = C$ и показываем, что эта конструкция порождает бесконечные семейства решений (в том числе в якорной параметризации). Отдельное внимание уделено *двойному решету* для классов $6k\pm1$, демонстрирующему синхронную фазовую структуру и мотивирующему *гипотезу щита* о стабильном появлении пар близнецов в окнах (p^2, q^2) между соседними простыми $p < q$.

Наконец, мы формализуем *двухфазную намотку* и связываем её с китайской теоремой об остатках как с комбинаторной геометрией на торе $S^1 \times S^1$. Обсуждаются связи с эвристиками ABC и ситовыми методами. Материал подаётся кратко и конструктивно, в расчёте на вставку готовых рисунков (цилиндр, фазовая плоскость, двойное решето).

Аннотация

We propose a geometric interpretation of the integer line via *phase winding* and its unfolding into cylindrical and planar models. Each integer n is assigned *(phase, height)* coordinates modulo m, which yields an explicit visualization of arithmetic functions (notably Euler's totient). The transformation from a point to the *vertical line of fixed phase* on the phase plane induces a natural vector structure and may be viewed, heuristically, as a mathematical analogue of wave–particle duality.

We introduce the *minimal triangle* as a basic template for Diophantine equations $A + B = C$ and show that it generates infinite families of solutions (including an anchored parametrization). Special emphasis is placed on the *double sieve* for the classes $6k \pm 1$, which exhibits a synchronous phase pattern and motivates the *Shield Hypothesis* on the stable occurrence of twin primes in windows (p^2, q^2) between consecutive primes $p < q$.

Finally, we formalize *two–phase winding* and relate it to the Chinese Remainder Theorem as a combinatorial geometry on the torus $S^1 \times S^1$. Connections to ABC heuristics and sieve methods are outlined. The exposition is concise and constructive, aimed at embedding prepared figures (cylinder, phase plane, double sieve).

Содержание

1 Введение

Цель работы — дать минималистскую геометрическую модель целых чисел, в которой остатки по модулю m реализуются как *фазы*, а шаги по числовой прямой — как *витки* (высота) на цилиндре. Развёртка цилиндра порождает *фазовую плоскость*, где множество чисел с фиксированной фазой образует *вертикальную* прямую; этим объясняется наглядность действий «по фазе» и визуализация таких операций, как умножение и возведение в степень.

Мы концентрируемся на трёх конструкциях: (1) *минимальные треугольники* для равенств $A + B = C$ и их якорные срезы; (2) *двойное решето* для $6k \pm 1$ и *гипотеза щита* для окон (p^2, q^2); (3) *двухфазная намотка* и комбинаторная форма КТО на торе. Отдельно выделим «преобразование точки в вертикаль фиксированной фазы», порождающее естественную векторизацию и позволяющее быстро извлекать классические факты (например, малую теорему Ферма).

2 Фазовая намотка и развёртка цилиндра

Определение 2.1 (Фаза и высота числа)**.** Фиксируем модуль $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Наматываем числовую прямую на цилиндр так, что точки $0, 1, 2, \ldots$ последовательно ложатся на поверхность по спирали. Каждому числу $n \in \mathbb{Z}$ сопоставим:

$$\text{фаза: } v(n) := n \bmod m \in \{0, 1, \ldots, m-1\}, \qquad \text{высота: } h(n) := \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor \in \mathbb{Z}.$$

Фаза $v(n)$ определяет угол $\theta = \frac{2\pi}{m} v(n)$ на цилиндре, а высота $h(n)$ — осевую координату.

Замечание (Геометрическая картина)*.* Если двигаться по числовой прямой и укладывать её на цилиндр радиуса 1, то после каждых m шагов мы замыкаем полный оборот вокруг цилиндра и попадаем на ту же образующую, но на один виток выше. Таким образом последовательность чисел реализуется как бесконечная спираль.

Замечание (Эвристическое наблюдение о фазовых сдвигах)*.* Если рассматривать единичную квадратную сетку и свернуть её в цилиндр так, чтобы совпали вертикали $v = 0$ и $v = m$, то числа располагаются по спирали. При $m = 6$ легко заметить, что каждые 6 шагов по высоте фаза сдвигается на $+1$:

$$v(n + 6m) \equiv v(n) + 1 \pmod{m}.$$

Такое *несовпадение фаз* можно трактовать как регулярный сдвиг фазовой сетки. Эвристически подобные сдвиги напоминают остаточные члены, возникающие в аналитической теории чисел, например, в суммах типа Рамануджана. Здесь это лишь иллюстрация: строгих выводов мы не делаем, но геометрическая картина подсказывает наличие устойчивых «остатков» для каждой фазы.

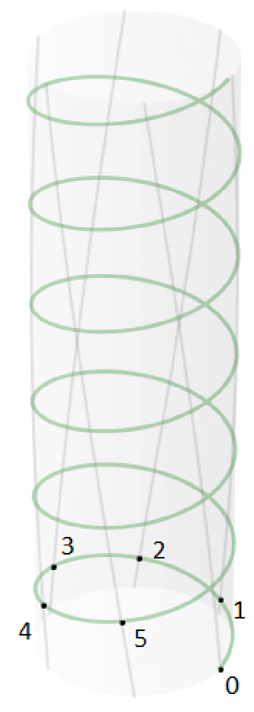

Рис. 1: Намотка числовой прямой на цилиндр при $m = 6$: каждые 6 шагов спираль поднимается на один виток.

Определение 2.2 (Фазовая плоскость)**.** Если «разрезать» цилиндр вдоль образующей и развернуть его на плоскость, спираль превращается в прямоугольную сетку. Каждое число n имеет координаты $(v(n), h(n))$:

- $v(n) \in \{0, \dots, m-1\}$ — *фаза* (горизонтальная координата),

- $h(n) \in \mathbb{Z}$ — *высота* (вертикальная координата).

Таким образом получаем *фазовую плоскость*, которая является периодической по фазе с периодом m.

Замечание (Пример при $m = 6$). Числа $0, 1, \ldots, 5$ образуют первый ряд на высоте $h = 0$, числа $6, 7, \ldots, 11$ — второй ряд на высоте $h = 1$, и так далее. Все числа с одинаковой фазой лежат на одной *вертикали*.

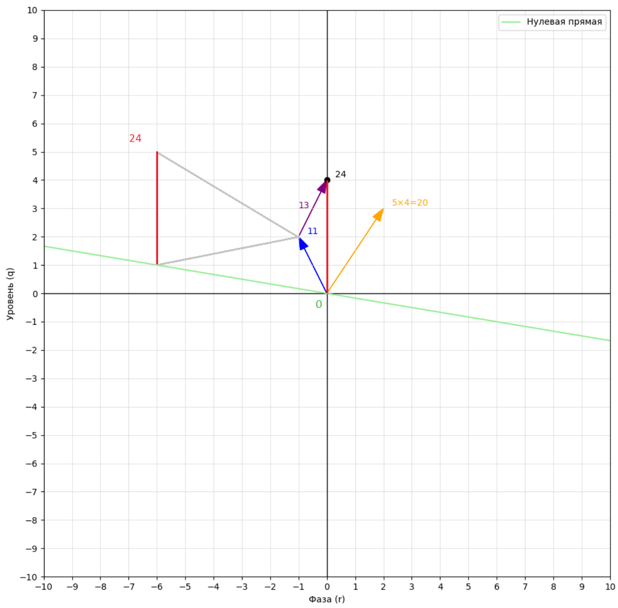

Рис. 2: Фазовая плоскость при $m = 6$: горизонтальные линии соответствуют высотам, вертикали — фиксированным фазам.

3 Векторизация и операции по фазам

Свойство. Каждое число n сопоставляется точке $(v(n), h(n))$ на фазовой плоскости. При увеличении n на m фаза v остаётся той же, а высота h увеличивается на 1. Последовательность чисел с фиксированной фазой образует вертикальный вектор $(0, 1)$; переход по числовой прямой соответствует сложению векторов.

Пример. При $m = 6$: переход $8 \to 14$ даёт $(2, 1) \to (2, 2)$, то есть сдвиг $(0, 1)$. А переход $8 \to 9$ даёт $(2, 1) \to (3, 1)$, то есть сдвиг $(+1, 0)$.

Свойство. На фазовой плоскости корректно определены стандартные векторные операции:

$$(u_1, h_1) + (u_2, h_2) = (u_1 + u_2 \bmod m,\ h_1 + h_2), \qquad k \cdot (u, h) = (ku \bmod m,\ kh).$$

Можно также ввести скалярное произведение $(u_1, h_1) \cdot (u_2, h_2) = u_1 u_2 + h_1 h_2$.

Пример. При $m = 6$: $(2, 1) + (3, 2) = (5, 3)$, а $2 \cdot (2, 1) = (4, 2)$.

Свойство. Умножение по модулю m и возведение в степень соответствуют линейному действию по фазе:

$$v \mapsto kv \pmod{m}.$$

Пример. Для простого $p = 7$ и $a = 3$:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6 \ \mapsto \ 3, 6, 2, 5, 1, 4,$$

то есть перестановка фаз. Отсюда $3^6 \equiv 1 \pmod 7$ (малая теорема Ферма).

Свойство. Если $A+B \equiv C \ (\bmod m)$, то на фазовой плоскости три точки $(v(A), h(A)),\ (v(B), h(B)),$ связаны линейным соотношением по фазе, а по высоте различаются только сдвигами. Фазовая плоскость естественно кодирует линейные факторы сравнений.

Пример. При $m = 6$: $1 + 2 \equiv 3 \pmod 6$. Точки $(1, 0), (2, 0), (3, 0)$ образуют минимальный треугольник, который повторяется на всех высотах.

Свойство. Прямые pk (для простого p) проходят через простое число p единично. Дальше они пересекаются либо на фазе p^2 (чётная степень), либо на произведении pq, где они встречаются с прямой qk.

Пример. Для $p = 5$ и $q = 7$:

$5^1 = 5$ (фаза 5), $\quad 5^2 = 25 \equiv 1$ (фаза 1), $\quad 5{\cdot}7 = 35$ (точка пересечения прямых $5k$ и $7k$).

Свойство. Последовательность степеней простого p^k распределяется по фиксированному множеству фаз. Например, при $m = 6$:

$$5^{2k} \equiv 1 \pmod 6, \qquad 5^{2k+1} \equiv 5 \pmod 6.$$

То есть чётные степени всегда лежат в фазе 1, нечётные — в фазе 5.

Пример. $5, 25, 125, 625, \dots$ дают чередование фаз $5, 1, 5, 1, \dots$

Свойство. Для $m = 6$ все простые числа $p > 3$ лежат только в двух классах вычетов:

$$p \equiv 1 \pmod 6 \quad \text{или} \quad p \equiv 5 \pmod 6.$$

Исключения составляют лишь $p = 2$ и $p = 3$, так как они являются делителями модуля.

Пример. Простые начинают распределяться так:

$$5 \equiv 5, \quad 7 \equiv 1, \quad 11 \equiv 5, \quad 13 \equiv 1 \pmod 6.$$

Таким образом простые после 3 чередуются между фазами 1 и 5.

Замечание. Это свойство отражает мультипликативную структуру: произведения чисел из фаз 1 и 5 остаются в этих же фазах. Остальные частные случаи следуют из стандартной модульной арифметики и потому здесь не перечисляются.

4 Минимальный треугольник и структура по BC

Определение 4.1 (Минимальный треугольник)**.** Пусть $A, B > 0$ и $C = A+B$. Будем называть *минимальным треугольником* исходную тройку (A, B, C), в которой A и B образуют базис (рёбра), а C — диагональ. Все производные тройки данного класса получаются сдвигами вдоль тех же прямых Bk и Ck:

$$(A,\ B_k,\ C_k), \qquad B_k := B + k \cdot BC, \quad C_k := C + k \cdot BC, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Лемма 4.2 (Формулы для сдвигов и сохранение прямых)**.** *Для всякого $k \in \mathbb{Z}$ выполнено*

$$A + B_k = C_k, \qquad B \mid B_k, \quad C \mid C_k,$$

причём

$$B_k = B(1 + kC), \qquad C_k = C(1 + kB).$$

Доказательство. Из определений $B_k = B + k \cdot BC = B(1+kC)$ и $C_k = C + k \cdot BC = C(1 + kB)$, откуда делимость $B \mid B_k$ и $C \mid C_k$. Равенство $A + B_k = C_k$ следует напрямую:

$$A + B_k = A + B + k \cdot BC = C + k \cdot BC = C_k.$$

□

Утверждение 4.3 (Структура семейства по шагу BC)**.** *Множество всех троек данного класса есть именно* $\{(A, B_k, C_k) : k \in \mathbb{Z}\}$.

Доказательство. Лемма 4.2 даёт включение $\subseteq$: каждая такая тройка удовлетворяет $A + B_k = C_k$ и не сходит с прямых Bk, Ck. Обратно, пусть $(A, \widetilde{B}, \widetilde{C})$ удовлетворяет $A + \widetilde{B} = \widetilde{C}$ и $\widetilde{B} \in B\mathbb{Z}$, $\widetilde{C} \in C\mathbb{Z}$. Тогда существуют $u, v \in \mathbb{Z}$ со $\widetilde{B} = Bu$, $\widetilde{C} = Cv$. Из $A + Bu = Cv$ вытекает $Bu - Cv = -A$. Поскольку $C = A + B$, получаем $Bu - C(A+B) = -A$, то есть $Bu - CB - CA = -A$, эквивалентно $B(u - CB) = A(C-1)$. Так как A, B, C фиксированы, из этой линейной связи существует единственное $k \in \mathbb{Z}$ с $u = 1 + kC$ и $v = 1 + kB$, т.е. $\widetilde{B} = B_k$, $\widetilde{C} = C_k$. □

Теорема 4.4 (Минимальный треугольник по радикалу: существование и единственность)**.** *Обозначим* $R(k) := \operatorname{rad}\bigl(B_k C_k\bigr)$. *Тогда:*

(a) *Для всякого $k \in \mathbb{Z}$ выполнено*

$$R(k) \;=\; \operatorname{rad}\bigl(BC\bigr) \cdot \frac{\operatorname{rad}\bigl((1+kC)(1+kB)\bigr)}{\operatorname{rad}\bigl(\gcd\bigl(BC, (1+kC)(1+kB)\bigr)\bigr)} \;\geq\; \operatorname{rad}\bigl(BC\bigr).$$

В частности, новые простые в B_k и C_k могут появиться только из множителей $(1 + kC)$ и $(1 + kB)$.

(b) *Минимум $R(k)$ достигается при $k = 0$ и равен* $\operatorname{rad}(BC)$.

(c) *Если для некоторого $k \neq 0$ выполнено $R(k) = \operatorname{rad}(BC)$, то множества простых делителей $B_k C_k$ и BC совпадают (никаких новых простых не появилось и ни один из имеющихся не исчез); такие случаи эквивалентны исходной тройке. В этом смысле минимальный треугольник единственен в классе.*

Доказательство. Из леммы 4.2 имеем факторизации $B_k = B\,(1 + kC)$ и $C_k = C\,(1 + kB)$. Радикал произведения равен радикалу произведения радикалов с учётом делителей, общих с BC. Отсюда формула в (a) и неравенство $R(k) \geq \operatorname{rad}(BC)$. При $k = 0$ получаем ровно $R(0) = \operatorname{rad}(BC)$, что даёт пункт (b). Если $R(k) = \operatorname{rad}(BC)$ при $k \neq 0$, то ни $(1 + kC)$, ни $(1 + kB)$ не привнесли новых простых (их простые делители целиком содержатся в BC), и ни один простой из BC не «исчез» — следовательно, множества простых совпадают; это и есть пункт (c). □

Пример (Минимальный треугольник $1+2=3$). Базовая тройка $(1,2,3)$ является минимальным треугольником: $A=1$, $B=2$, $C=3$. Все остальные тройки этого класса получаются сдвигами

$$(1,\,2+6k,\,3+6k),\qquad k\in\mathbb{Z}.$$

Например: $(1,2,3)$, $(1,8,9)$, $(1,14,15)$, $(1,20,21)$ и т.д.

Замечание (Связь с гипотезой ABC). Минимальный треугольник задаёт базовую структуру, от которой порождаются все остальные тройки класса. Именно с таких конфигураций удобно начинать анализ качества в духе гипотезы ABC. Далее мы введём понятие *провала радикала*, чтобы формализовать этот анализ.

5 Провал радикала

Определение 5.1 (Провал радикала)**.** Для семейства (A,B_k,C_k), задаваемого шагом BC, будем говорить, что возникает *провал радикала*, если при переходе $k\mapsto k+1$ радикал $\mathrm{rad}(AB_{k+1}C_{k+1})$ оказывается меньше, чем на предыдущем шаге.

Теорема 5.2 (Нижняя граница провала)**.** *Пусть* (A,B,C) *— минимальный треугольник. Тогда для всех* $k\in\mathbb{Z}$

$$\mathrm{rad}(AB_kC_k)\ \geq\ \mathrm{rad}(ABC).$$

Иными словами, никакой провал радикала не может опуститься ниже радикала исходного минимального треугольника.

Доказательство. Мы движемся вдоль прямых Bk и Ck, то есть $B\mid B_k$ и $C\mid C_k$ для всех k. Следовательно, все простые делители B и C сохраняются во всех B_k и C_k. А значит, множество простых в $\mathrm{rad}(ABC)$ всегда содержится в множестве простых в $\mathrm{rad}(AB_kC_k)$, и падение ниже $\mathrm{rad}(ABC)$ невозможно. □

Замечание (Статистическое наблюдение). Хотя радикал минимального треугольника может встретиться максимум один–два раза, далее нижняя граница провалов постепенно растёт. Например:

$$(1,2,3)\ \rightsquigarrow\ \mathrm{rad}=6,\qquad (1,80,81)\ \rightsquigarrow\ \mathrm{rad}=30,\qquad \text{следующие уровни ещё выше.}$$

Таким образом, провалы радикала существуют, но они всегда ограничены снизу, и этот минимальный уровень со временем увеличивается.

6 Исторический контекст и гипотеза щита

Наше рассуждение опирается на несколько классических идей:

- **Гипотеза Лежандра** (ок. 1798): в каждом интервале $[n^2,(n+1)^2]$ содержится хотя бы одно простое.

- **Гипотеза простых близнецов** (Харди–Литлвуд, 1923): существует бесконечно много пар простых $(p, p+2)$ и даже предсказана их асимптотическая плотность.
- **Ситовые методы** (Халберстам–Рихерт, Иванець–Ковальски и др.): позволяют оценивать выживаемость кандидатов в простые числа при отсечке малых делителей.

Идея *гипотезы щита* возникла как комбинация этих направлений. Рассмотрим окно

$$I_p = [p^2, (p+2)^2],$$

где $(p, p+2)$ — пара близнецов. Оно обладает двумя свойствами: (1) оно достаточно короткое, чтобы проследить комбинаторику кандидатов; (2) простые $> p$, а также сами p и $p+2$, не влияют на числа внутри I_p. Отсюда естественно попытаться оценить, насколько часто кандидаты внутри I_p уничтожаются малыми простыми.

Гипотеза 6.1 (Гипотеза щита). *Для всякой пары простых близнецов* $(p, p+2)$ *интервал*

$$I_p = [p^2, (p+2)^2]$$

содержит хотя бы одну пару простых близнецов $(q, q+2)$.

7 Две комбинаторные леммы

Лемма 7.1 (дефицит покрытия). *Пусть* $I_p = [p^2, (p+2)^2]$. *Тогда покрытие* I_p *числами с делителем* $< p$ *строго меньше* $|I_p|$. *Следовательно, в* I_p *существует число без делителей* $< p$ *(новый простой* $\geq p$*).*

Лемма 7.2 (двойное сито). *Рассмотрим пары* $(n, n+2)$, $n, n+2 \in I_p$. *При отсечке делителей до* $z = \sqrt{p}$ *в* I_p *остаётся* $\gg |I_p|/(\ln p)^2$ *пар* $(n, n+2)$, *у которых нет малых делителей. Среди них существуют кандидаты на простые близнецы.*

Эти две простые леммы вместе объясняют, почему интервал I_p выступает как «щит»: старые простые не могут полностью закрыть все кандидаты, а двойное сито гарантирует наличие большого числа пар, которые выживают. Именно это мотивирует формулировку гипотезы щита.

8 Фазово-высотная формулировка гипотезы Гольдбаха

Введём понятие *высоты* относительно шага $H \in \mathbb{N}$:

$$x = H\, h_H(x) + r_H(x), \qquad h_H(x) = \left\lfloor \frac{x}{H} \right\rfloor, \ \ 0 \leq r_H(x) < H.$$

Здесь $h_H(x)$ называется *высотой* числа x, а $r_H(x)$ — *остатком по горизонтали.*

Лемма 8.1 (Аддитивность высот). *Для $N = A + B$ имеем*

$$h_H(N) = h_H(A) + h_H(B) + c_H(A, B),$$

где перенос $c_H(A, B) \in \{0, 1\}$ равен 1 тогда и только тогда, когда $r_H(A)+r_H(B) \geq H$.

Совместив это с фазовой классификацией по модулю 6, получаем простое, но ключевое ограничение:

Лемма 8.2 (Фазово-высотная лемма для Гольдбаха). *Для всякого чётного $N > 4$ верно:*

$$\begin{aligned} N \equiv 2 \pmod 6 \ &\Rightarrow\ N = (6k+1) + (6k'+1), \\ N \equiv 0 \pmod 6 \ &\Rightarrow\ N = (6k+1) + (6k'-1), \\ N \equiv 4 \pmod 6 \ &\Rightarrow\ N = (6k-1) + (6k'-1). \end{aligned}$$

Иными словами, всякое голдбаховское разложение фиксируется одновременно по вертикали (сумма высот) и по горизонтали (фаза N).

Таким образом, гипотеза Гольдбаха приобретает жёсткую структуру: для заданного чётного N остаётся лишь проверить наличие простых на предписанной высоте и в предписанной фазе. Это позволяет рассматривать задачу не через массовый анализ распределения простых, а через дискретную геометрию фазовых вертикалей.

Заключение

В работе предложена геометрическая модель на основе фазовой намотки и введено понятие высоты, которая позволяет унифицировать взгляд на несколько классических задач теории чисел. Мы не ставили целью дать окончательные доказательства, а показали, как разные гипотезы получают наглядное и структурное представление в рамках одной схемы.

- Гипотеза ABC традиционно формулируется через радикалы чисел и тройки решений $a + b = c$. В нашей модели она получает наглядное представление как диофантовое уравнение в геометрической схеме фазовых координат. Насколько нам известно, именно такой ракурс отдельно в литературе не выделялся

- Для гипотезы Гольдбаха переход к фазам и высотам позволяет трактовать задачу не как «случайное пересечение простых», а как *неизбежную структуру*: каждая чётная вершина попадает в строго определённую фазу и фиксируется суммой высот простых.

- Гипотеза «Щита» возникла благодаря введению вертикалей: стало видно, что в фиксированном окне часть вертикалей систематически занята простыми числами, причём на одной вертикали. Первичный численный анализ до 10^7 (и частично до 10^{10}) подтвердил это наблюдение: вертикали действительно повторяются устойчиво. На этой основе и была сформулирована сама гипотеза — как это обычно и происходит при рождении новых идей в теории чисел.

Таким образом, мы показали, что единая конструкция (фазы и высоты) позволяет по-новому взглянуть на три значимые гипотезы современной теории чисел. С одной стороны, строгие доказательства остаются открытыми; с другой стороны, предложенный подход выявляет скрытую структуру распределения простых и задаёт новые перспективы для дальнейших исследований.

Список литературы

[1] T. M. Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory*. Springer, 1976.

[2] G. H. Hardy, E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*. 6th ed., Oxford Univ. Press, 2008.

[3] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, "Some problems of Partitio Numerorum III: On the expression of a number as a sum of primes," *Acta Math.*, 44 (1923), 1–70.

[4] H. Halberstam, H.-E. Richert, *Sieve Methods*. Academic Press, 1974.

[5] H. Iwaniec, E. Kowalski, *Analytic Number Theory*. AMS Colloquium Publ. 53, 2004.