Степени двойки с цифрами из $\{1, 2, 8\}$: комбинаторное доказательство конечности

Горюшкин С.В.

25 октября 2025 г.

Аннотация

Мы даём полностью элементарное доказательство того, что единственные степени двойки, чья десятичная запись использует только цифры из $\{1, 2, 8\}$, это $2, 8, 128$. Ключевые идеи: (i) фазовое условие $2^n \equiv 2 \pmod 6$ для нечётных n; (ii) инвариант состава цифр $a \equiv b \pmod 3$ (число единиц и число цифр из $\{2, 8\}$ в старших разрядах равны по модулю 3); (iii) явный вывод допустимых двух- и трёхзначных хвостов; (iv) запрет длины 4 через сумму цифр и делимость на 16; (v) запрет длин ≥ 5 с помощью инварианта.

1 Постановка

Назовём число валидным, если его десятичная запись содержит только цифры из $\{1, 2, 8\}$. Нас интересуют валидные степени двойки $N = 2^n$. Очевидно, 2 и 8 валидны, а также $128 = 2^7$ валидно. Покажем, что других нет.

2 Фаза по модулю 6 и структура разрядов

Отметим две элементарные наблюдения.

- Для нечётных n имеем $2^n \equiv 2 \pmod 6$ (фаза 2); для чётных n остаток 4, а последняя цифра 4 или 6, что невалидно. Значит, всегда n нечётно, а $N \equiv 2 \pmod 6$.
- В $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ справедливо $10 \equiv 4$ и, следовательно, $10^j \equiv 4$ для всех $j \geq 1$.

Лемма 1 (Инвариант состава по модулю 6). Пусть валидное N имеет последнюю цифру $u \in \{2, 8\}$, а выше единиц стоят a штук цифры 1 и b штук цифр из $\{2, 8\}$. Тогда

$$2a + b \equiv 0 \pmod 3, \qquad a + 2b \equiv 0 \pmod 3, \qquad \text{в частности } a \equiv b \pmod 3. \quad (1)$$

Доказательство. Работаем в $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Вклад единиц $u \equiv 2$. Каждый старший разряд 1 даёт вклад $4 \cdot 1 \equiv 4$, каждый старший разряд 2 или 8 даёт вклад $4 \cdot 2 \equiv 8 \equiv 2$. Итак,

$$N \equiv 2 + 4a + 2b \pmod 6.$$

Так как $N \equiv 2 \pmod 6$, получаем $4a + 2b \equiv 0 \pmod 6$, т. е. $2a + b \equiv 0 \pmod 3$.

С другой стороны, по модулю 3 сумма цифр равна $N \pmod 3$. При нечётном n имеем $2^n \equiv 2 \pmod 3$. Остатки цифр: $1 \equiv 1$, $2 \equiv 2$, $8 \equiv 2$. Следовательно,

$$(2) + a \cdot 1 + b \cdot 2 \equiv 2 \pmod 3 \quad \Rightarrow \quad a + 2b \equiv 0 \pmod 3.$$

Вычитая две конгруэнции, получаем $a \equiv b \pmod 3$. □

Следствие 1. Если N валидно, то добавление слева одной цифры из $\{1, 2, 8\}$ нарушает $a \equiv b \pmod 3$. Следовательно, любое возможное удлинение валидной записи слева должно происходить блоками по три цифры.

Пример. Для $N = 128$ имеем $a = 1$, $b = 1$ и $a \equiv b \pmod 3$. Добавление слева любой одной цифры (получая 1128, 2128 или 8128) нарушает инвариант (или другие обязательные признаки степени 2, см. ниже).

3 Разрешённые хвосты: mod10, mod100, mod1000

В этом разделе явно получаем допустимые хвосты.

Одна цифра

Последняя цифра степеней 2 циклична: $2, 4, 8, 6, \ldots$. Для нечётных n остаются 2 и 8 — обе валидны.

Две цифры: вывод через CRT

Период $2^n \bmod 100$ равен $\mathrm{lcm}(\mathrm{ord}_{25}(2), \mathrm{ord}_4(2)) = \mathrm{lcm}(20, 2) = 20$. Рассмотрим только нечётные n (последняя цифра 2 или 8). Явная таблица остатков $2^n \bmod 100$ для нечётных n даёт ровно три хвоста с обеими цифрами в алфавите $\{1, 2, 8\}$:

$$\boxed{12, \quad 28, \quad 88.} \tag{2}$$

$n \bmod 20$	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
$2^n \bmod 100$	2	8	32	28	12	48	92	68	72	88

Из этой строки видны только $12, 28, 88$ как допустимые пары.

Три цифры: кратность 8 + период по 125

Для $n \geq 3$ имеем $2^n \equiv 0 \pmod 8$, значит последние три цифры кратны 8. Среди трёхзначных на алфавите $\{1, 2, 8\}$ и с последней цифрой 2 или 8 кратность 8 оставляет кандидатов:

$$112, \ 128, \ 288, \ 888.$$

Далее используем периодичность по модулю 1000: $\mathrm{ord}_{125}(2) = 100$, следовательно период $2^n \bmod 1000$ равен 100. Просмотр цикла даёт ровно три реальных хвоста:

$$\boxed{112, \quad 128, \quad 288,} \tag{3}$$

а 888 не встречается.

Замечание (Как проверить (2)–(3) вручную). Для двух цифр: считать $2^n \bmod 25$ при $n = 1, 3, \dots, 19$ и согласовать с $\bmod 4$ (последняя цифра уже фиксирует $\bmod 4$). Для трёх цифр: требование кратности 8 резко сокращает список, затем согласовать с $\bmod 125$ (цикл длины 100).

4 Мини-таблица переносов (локальная динамика)

При переходе $2^n \to 2^{n+1}$ справа налево действует правило: если d — цифра, $c \in \{0, 1\}$ — перенос справа, то

$$e = (2d + c) \bmod 10, \qquad c' = \left\lfloor \frac{2d + c}{10} \right\rfloor.$$

Требование $e \in \{1, 2, 8\}$ оставляет только одну локально допустимую пару из $\{1, 2, 8\}$:

d	c	$2d + c$	$e = (2d + c) \bmod 10$	c'	валиден ли e
1	0	2	2	0	да
1	1	3	3	0	нет
2	0	4	4	0	нет
2	1	5	5	0	нет
8	0	16	6	1	нет
8	1	17	7	1	нет

То есть устойчивый правый мотив единственный: $11 \mapsto 22$ без переноса, согласующийся с наблюдаемым хвостом $112 \to 128$.

5 Запрет длины 4

Лемма 2. Никакое четырёхзначное валидное число не является степенью 2.

Доказательство. По (3) возможны трёхзначные хвосты только $112, 128, 288$. Рассмотрим $dXYZ$, где $XYZ \in \{112, 128, 288\}$ и $d \in \{1, 2, 8\}$.
(i) Сумма цифр $\bmod 3$. Для нечётных n имеем $2^n \equiv 2 \pmod 3$, т. е. сумма цифр $\equiv 2 \pmod 3$. Дадим значения:

$$\begin{aligned}
\mathrm{sum}(d112) &= d + 1 + 1 + 2 \equiv d + 1 \pmod 3, \\
\mathrm{sum}(d128) &= d + 1 + 2 + 8 \equiv d + 1 \pmod 3, \\
\mathrm{sum}(d288) &= d + 2 + 8 + 8 \equiv d + 2 \pmod 3.
\end{aligned}$$

Отсюда сразу запрещены: $d \in \{2, 8\}$ для $d112$ и $d128$ (дают $0 \bmod 3$ вместо 2), а также все $d288$ (так как $d \equiv 1, 2, 2 \pmod 3$ и ни одно не даёт 2). Остаётся единственный кандидат по сумме цифр: $d = 1$ в случаях 1112 и 1128.
(ii) Делимость на 16. Для $n \geq 4$ число 2^n кратно 16. Проверим кандидатов:

$$\begin{aligned}
1112 &\equiv 8 \pmod{16}, \\
1128 &\equiv 8 \pmod{16}.
\end{aligned}$$

Оба не кратны 16. Следовательно, четырёхзначных валидных степеней 2 нет. □

Пример. 1128 выглядит правдоподобно (все цифры допустимы), но не делится на 16; 2128, 8128 нарушают сумму цифр $\bmod 3$.

6 Запрет всех длин ≥ 5

Лемма 3. Валидных степеней 2 длины ≥ 5 не существует.

Доказательство. Пусть N валидно. По лемме 1 инвариант $a \equiv b \pmod 3$ должен сохраняться. По следствию 1 любое допустимое удлинение/укорочение происходит пакетами по три цифры. Отбрасывая слева по три цифры, мы неизбежно попадём либо в длину $1, 2, 3$, либо в длину 4. Случаи $1, 2, 3$ дают ровно $2, 8, 128$ (прямой просмотр); длина 4 невозможна по лемме 2. Противоречие. □

7 Главная теорема и проверяемые примеры

Теорема 1. Единственные валидные степени двойки (для алфавита $\{1, 2, 8\}$) — это

$$2^1 = 2, \qquad 2^3 = 8, \qquad 2^7 = 128.$$

Доказательство. Нечётность показателя обязательна (фаза $\bmod 6$). По разделу о хвостах единственный реализуемый валидный трёхзначный хвост — 128 (при $n = 7$). По леммам 2 и 3 длин ≥ 4 не бывает. Длины $1, 2, 3$ даются вычислениями: $2^1 = 2$, $2^3 = 8$, $2^7 = 128$. □

Пример. Проверка:

- $2^1 = 2$ — валидно.
- $2^3 = 8$ — валидно.
- $2^5 = 32$ — невалидно (цифра 3).
- $2^7 = 128$ — валидно.
- $2^{19} = 524288$ — невалидно (хвост 288 формально допустим, но есть цифра 5 слева).
- Любая попытка $d128$ с $d \in \{1, 2, 8\}$ — не степень 2 (см. лемму 2).

8 Расширение: добавление цифры 4

Рассмотрим алфавит $\{1, 2, 4, 8\}$. Цифра 4 по модулю 3 эквивалентна 1, а по модулю 6 её вклад равен 4 (как у единицы), поэтому инвариант леммы 1 сохраняется, если объединить единицы и четвёрки в один класс. Фаза по модулю 6 теперь допускает также чётные n с последней цифрой 4, однако из реальных степеней это даёт лишь $2^2 = 4$.

Теорема 2 (Алфавит $\{1, 2, 4, 8\}$). Единственные валидные степени двойки — это

$$2^1 = 2, \qquad 2^2 = 4, \qquad 2^3 = 8, \qquad 2^7 = 128.$$

Доказательство. Инвариант и локальная таблица переносов остаются в силе. Новым становится только $2^2 = 4$ (последняя цифра 4 разрешена). Запрет длины 4 и длин ≥ 5 переносится дословно. □

Приложение A: как получить хвосты ещё короче

Две цифры. См. таблицу для $2^n \bmod 100$ (нечётные n) выше; допустимы только $12, 28, 88$.

Три цифры. Кандидаты, кратные 8, сузили список до $112, 128, 288, 888$, из которых по циклу $\bmod 1000$ реализуются лишь $112, 128, 288$.

Приложение B: компактная таблица переносов

Сводная таблица локальных переходов для правой цифры при удвоении приведена в разделе «Мини-таблица переносов». Она показывает, что допустим только переход $1 \to 2$ без переноса, что согласуется с наблюдаемым устойчивым фрагментом $11 \mapsto 22$ и хвостом $112 \to 128$.