ANALISIS RIIL I

Disusun oleh

Bambang Hendriya Guswanto, S.Si., M.Si.

Siti Rahmah Nurshiami, S.Si., M.Si.

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

JURUSAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

FAKULTAS SAINS DAN TEKNIK

UNIVERSITAS JENDERAL SOEDIRMAN

PURWOKERTO

2006

KATA PENGANTAR

Buku ini ditulis dalam rangka pengadaan buku ajar mata kuliah Analisis I, yang merupakan mata kuliah wajib. Buku ini berisi materi yang diperuntukan bagi mahasiswa yang telah mengambil mata Kalkulus I dan Kalkulus II. Topik-topik dalam buku ini sebenarnya sudah dikenal oleh mahasiswa yang telah mengambil kedua mata kuliah tersebut. Hanya saja, materi pada buku ini lebih abstrak, teoritis, dan mendalam. Materi pada buku ini merupakan materi dasar analisis real. Analisis real merupakan alat yang esensial, baik di dalam berbagai cabang dari matematika maupun bidang ilmu-ilmu lain, seperti fisika, kimia, dan ekonomi. Mata kuliah Analisis I adalah gerbang menuju mata kuliah yang lebih lanjut, baik di dalam maupun di luar jurusan Matematika. Jika mata kuliah ini dapat dipahami dengan baik maka mahasiswa mempunyai modal yang sangat berharga untuk memahami mata kuliah lain. Diharapkan, setelah mempelajari materi pada buku ini, mahasiswa mempunyai kedewasaan dalam bermatematika, yang meliputi antara lain kemampuan berpikir secara deduktif, logis, dan runtut, serta memiliki kemampuan menganalisis masalah dan mengomunikasikan penyelesaiannya secara akurat dan *rigorous*.

Buku ini terdiri dari lima bab. Bab I membahas tentang himpunan bilangan real. Di dalamnya, dibicarakan tentang sifat aljabar (lapangan), sifat terurut, dan sifat kelengkapan dari himpunan bilangan real. Kemudian, dibahas tentang himpunan bagian dari himpunan bilangan real yang dikonstruksi berdasarkan sifat terurutnya, yang disebut sebagai interval. Dijelaskan pula tentang representasi desimal dari bilangan real dan menggunakannya untuk membuktikan Teorema Cantor. Selanjutnya, bab II berisi tentang barisan bilangan real, yang meliputi definisi dan sifat-sifat barisan, Teorema Bolzano-Weierstrass, kriteria Cauchy, barisan divergen, dan sekilas tentang deret tak hingga. Kemudian, bab III mendiskusikan tentang definisi limit fungsi (termasuk limit sepihak, limit di tak hingga, dan limit tak hingga) dan sifat-sifatnya. Lalu, bab IV membahas kekontinuan fungsi, yang meliputi definisi fungsi kontinu dan sifat-sifatnya, fungsi kontinu pada interval, kekontinuan seragam, serta fungsi monoton dan fungsi invers.

Buku ini masih dalam proses pengembangan dan tentunya masih jauh dari sempurna. Untuk itu, penulis membuka diri terhadap saran dan kritik dari pembaca, demi semakin baiknya buku ini sebagai buku ajar mata kuliah wajib Analisis I.

Purwokerto, 29 Juli 2006
Penulis,

Bambang Hendriya Guswanto, S.Si., M.Si.
Siti Rahmah Nurshiami, S.Si., M.Si.

DAFTAR ISI

BAB III

LIMIT FUNGSI

3.1 Titik Timbun

Definisi 3.1.

Misalkan $A \subseteq \mathbf{R}$ dan $c \in \mathbf{R}$, dengan c tidak harus di A. C di sebut titik timbun A jika

$\forall \delta > 0, V_\delta(C) = (c-\delta, c+\delta)$ memuat paling sedikit satu anggota A yang tidak sama dengan c, atau $\left(V_\delta(c)/\{c\}\right) \cap A \neq \varnothing$.

Contoh 3.2.

1. Misalkan A = (2 , 3), tentukan titik timbun A.

   Penyelesaian

   2 titik timbun A, karena dengan mengambil sebarang δ = ½ , dimana $V_{1/2}(2) = (1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2})$ maka $\left(V_{1/2}(2)/\{2\}\right) \cap A \neq \varnothing$. Sehingga dengan mengambil δ > 0 dapat disimpulkan $\left(V_\delta(2)/\{2\}\right) \cap A \neq \varnothing$.

   2 ½ juga titik timbun A, karena $\forall \delta > 0, \left(V_\delta(2\frac{1}{2})/\{2\frac{1}{2}\}\right) \cap A \neq \varnothing$.

   3 juga titik timbun A, karena $\forall \delta > 0, \left(V_\delta(3)/\{3\}\right) \cap A \neq \varnothing$.

   Jadi dapat disimpulkan bahwa setiap titik pada interval [2 , 3] merupakan titik timbun A.

2. Misalkan B = {1, 2, 3, 4, 5 }, tentukan titik timbun B.

   Penyelesaian

   Ambil δ = ½ , sehingga $V_{1/2}(1) = (\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2})$. Tetapi $\left(V_{1/2}(1)/\{1\}\right) \cap B = \varnothing$. Jadi 1 bukan titik timbun B. Begitu juga dengan titik yang lain..

   Jadi dapat disimpulkan bahwa B = {1, 2, 3, 4, 5 } tidak mempunyai titik timbun.

Teorema 3.3.

Misalkan $A \subseteq \mathbf{R}$ dan $c \in \mathbf{R}$, c titik timbun A jika dan hanya jika $\exists (a_n), a_n \neq c, \forall n \in \mathbf{N} \ni \lim_{n\to\infty}(a_n) = c$.

Bukti:

$(\Rightarrow)$ Misal c titik timbun A. Sehingga $V_{\frac{1}{n}}(c)$ memuat sedikitnya satu titik di A yang berbeda dari *c*. Jika a_n titik tersebut, maka $a_n \in A, a_n \neq c, \forall n \in \mathbf{N} \ni \lim_{n\to\infty}(a_n) = c$.

$(\Leftarrow)$ Diserahkan kepada pembaca sebagai latihan. ■

3.2 Definisi Limit Fungsi

Definisi 3.4.

Misalkan $A \subseteq \mathbf{R}, f : A \to \mathbf{R}$ dan $c \in \mathbf{R}$, dengan c titik timbun A. Misalkan L limit dari f di titik c, ditulis $\lim_{x\to c} f(x) = L$ jika $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \ni$ untuk $x \in (V_\delta(c)/\{c\}) \cap A$ berlaku $f(x) \in V_\varepsilon(L)$.

Definisi limit di atas dapat ditulis $\lim_{x\to c} f(x) = L$ jika dan hanya jika $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \ni$ untuk $0 < |x - c| < \delta$ dan $x \in A$ berlaku $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Contoh 3.5

1. Misalkan $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{R}\right\}, f : A \to \mathbf{R}, f(x) = 2x$. Buktikan $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

   Bukti:

   Ambil $\varepsilon > 0$ sebarang. Pilih $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, Sehingga jika $0 < |x - 0| = |x| < \delta$ dan $x \in A$ berlaku $|f(x) - L| = |2x - 0| = |2x| = 2|x| < 2\delta = 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

   Jadi terbukti $\lim_{x\to 0} 2x = 0$.

2. Buktikan $\lim_{x\to c} x^2 = c^2$.

Analisa pendahuluan

Tujuan pembuktian ini mencari $\delta > 0$ sehingga untuk $\forall \varepsilon > 0, \quad 0 < |x - c| < \delta, x \in A$ berlaku $|x^2 - c^2| < \varepsilon$.

Perhatikan bahwa $|x^2 - c^2| = |(x+c)(x-c)| = |x+c||x-c|$.

Jika diambil $\delta = 1$ maka $|x - c| < 1$.

Menurut pertidaksamaan segitiga $|x| - |c| < |x - c| < 1$ atau $|x| < 1 + |c|$.

Sehingga $|x^2 - c^2| = |x+c||x-c| < (1 + 2|c|)|x - c|$,

Dengan mengambil $\delta = \dfrac{\varepsilon}{1 + 2|c|}$ maka diperoleh $|x^2 - c^2| < \varepsilon$.

Bukti:

Ambil $\varepsilon > 0$ sebarang. Pilih $\delta = \min\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{1+2|c|}\right\}$, Sehingga jika $0 < |x - c| < \delta$ dan $x \in \mathbf{R}$ berlaku $|x^2 - c^2| = |x+c||x-c| \le (1 + 2|c|)|x - c| < \varepsilon$

Jadi terbukti $\lim\limits_{x \to c} x^2 = c^2$. ■

Teorema 3.6.

Jika $f : A \to \mathbf{R}$ dan c titik timbun A , $c \in \mathbf{R}$ maka *f* hanya mempunyai satu limit di titik c.

Selanjutnya akan dibicarakan kaitan antara barisan dengan limit fungsi dan kriteria kedivergenan.

Teorema 3.7 (Kriteria Barisan untuk Limit).

Misalkan $f : A \to \mathbf{R}$ dan *c* titik timbun *A* , maka

$\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ **jika dan hanya jika** untuk setiap barisan (x_n) di *A* yang konvergen ke *c* dimana $x_n \ne c, \forall n \in \mathbf{N}, (f(x_n))$ konvergen ke *L*.

Bukti dari teorema 3.6 dan 3.7 diserahkan kepada pembaca sebagai latihan.

Contoh 3.8.

Buktikan $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$ dengan menggunakan kriteria barisan.

Bukti:

Ambil $(x_n) = 2 - \frac{1}{n}, n \in ℵ$. Akan ditunjukkan $(f(x_n))$ konvergen ke 4.

Perhatikan bahwa $\lim_{x\to 2} f(x_n) = \lim_{x\to 2}\left(4 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = 4$.

Jadi terbukti bahwa $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$. ■

Teorema 3.9 (Kriteria Kedivergenan).

Misalkan $A \subseteq \mathbf{R}, f : A \to \mathbf{R}$ dan $c \in \mathbf{R}$, dengan c titik timbun A.

a) Jika $L \in \mathbf{R}$ maka *f* tidak punya limit *L* di *c* jika dan hanya jika ada barisan (x_n) di *A* yang konvergen ke *c* dimana $x_n \neq c, \forall n \in ℵ$, tetapi $(f(x_n))$ tidak konvergen ke *L*.

b) *f* tidak punya limit di *c* jika dan hanya jika ada barisan *(x_n)* di *A* yang konvergen ke *c* dimana $x_n \neq c, \forall n \in \mathbf{N}$, tetapi $(f(x_n))$ tidak konvergen ke $\mathbf{R}$.

Contoh 3.10.

1. Buktikan $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ tidak ada di $\mathbf{R}$.

   Bukti:

   Misalkan $f(x) = \frac{1}{x}$. Ambil $(x_n) = \frac{1}{n^2}, n \in \mathbf{N}$. Tetapi $f(x_n) = \frac{1}{1/n^2} = n^2$,sehingga $(f(x_n))$ tidak konvergen karena tidak terbatas di $\Re$. Jadi terbukti bahwa $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ tidak ada di $\mathbf{R}$.

2. Buktikan $\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x)$ tidak ada.

   Bukti:

Misalkan f(x) = sgn (x). Perhatikan bahwa $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}$.

Sehingga fungsi sgn (x) dapat ditulis menjadi $\operatorname{sgn}(x) = \frac{x}{|x|}, x \neq 0$.

Ambil $(x_n) = \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbf{N}$. Tetapi

$$f(x_n) = \operatorname{sgn}(x_n) = \frac{x_n}{|x_n|} = \frac{(-1)^n / n}{\left|(-1)^n / n\right|} = (-1)^n,$$

sehingga $(f(x_n))$ divergen. ■

3.3 Teorema Limit

Definisi 3.11.

Misalkan $A \subseteq \mathbf{R}, f : A \to \mathbf{R}$ dan $c \in \mathbf{R}$, dengan *c* titik timbun *A*. *f* dikatakan terbatas pada lingkungan *c* jika ada lingkungan δ dari c, yaitu $V_\delta(c)$ dan konstanta *M > 0* sehingga $|f(x)| \leq M, \forall x \in A \cap V_\delta(c)$.

Teorema 3.12.

Misalkan $A \subseteq \mathbf{R}, f : A \to \mathbf{R}$ dan *f* mempunyai limit di $c \in \mathbf{R}$, maka *f* terbatas pada suatu lingkungan dari *c*.

Definisi 3.13

Misalkan $A \subseteq \mathbf{R}, f : A \to \mathbf{R}, g : A \to \mathbf{R}$. Definisikan

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ $\quad (f-g)(x) = f(x) - g(x)$ $\quad ,(fg)(x) = f(x)g(x)$

$(bf)(x) = bf(x), b \in \Re$ $\quad \left(\frac{f}{h}\right)(x) = \frac{f(x)}{h(x)}, h(x) \neq 0$ $\quad ,\forall x \in A$

Teorema 3.14.

Misalkan $A \subseteq \mathbf{R}, f : A \to \mathbf{R}, g : A \to \mathbf{R}$ dan $c \in \mathbf{R}$, dengan *c* titik timbun *A*. Misalkan $b \in \Re$.

1. Jika $\lim_{x \to c} f(x) = L$ dan $\lim_{x \to c} g(x) = M$, maka

$$\lim_{x \to c}(f+g)(x) = L + M \quad \lim_{x \to c}(f-g)(x) = L - M$$
$$\lim_{x \to c}(fg)(x) = LM \quad \lim_{x \to c}(bf)(x) = bL$$

2. Jika $h : A \to \mathbf{R}, h(x) \neq 0, \forall x \in A, \lim_{x \to c} h(x) = H \neq 0$ maka $\lim_{x \to c}\left(\frac{f}{h}\right) = \frac{L}{H}$.

Bukti:

1. Ambil $\varepsilon > 0$ sebarang.

   Misal $\lim_{x \to c} f(x) = L$, artinya $\exists \delta_1 > 0, \ni$ untuk $0 < |x - c| < \delta_1$ dan $x \in A$ berlaku $|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$.

   Misal $\lim_{x \to c} g(x) = M$, artinya $\exists \delta_2 > 0, \ni$ untuk $0 < |x - c| < \delta_2$ dan $x \in A$ berlaku $|g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}$.

   Akan ditunjukkan $\lim_{x \to c}(f+g)(x) = L + M$.

   Pilih $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, sehingga untuk $0 < |x - c| < \delta$ dan $x \in A$ berlaku

$$\begin{aligned} |(f+g)(x) - (L+M)| &= |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \\ &\leq |f(x) - L| + |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

   Jadi terbukti $\lim_{x \to c}(f+g)(x) = L + M$. ■

2. Bukti selanjutnya diserahkan kepada pembaca sebagai latihan.

Contoh 3.15.

Hitung $a).\lim_{x \to 2}\left(\frac{x+4}{x^2}\right) \quad b).\lim_{x \to 2}\left(\frac{x^2 - 4}{3x - 6}\right)$

Jawab.

a) Kita dapat menggunakan teorema 3.13 (b), karena jika dimisalkan *f(x) = x + 4* dan *h(x) = x²*, $h(x) \neq 0, \forall x \in \Re, \lim_{x \to 2} h(x) = H \neq 0$ maka

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{x+4}{x^2} \right) = \frac{\lim_{x \to 2}(x+4)}{\lim_{x \to 2} x^2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

b) Tidak dapat menggunakan teorema 3.13 (b), karena jika dimisalkan $f(x) = x^2 - 4, h(x) = 3x - 6, \forall x \in \Re$ tetapi $H = \lim_{x \to 2} h(x) = \lim_{x \to 2}(3x - 6) = 0$

maka untuk $x \neq 2$, $\lim_{x \to 2} \left(\frac{x^2 - 4}{3x - 6} \right) = \lim_{x \to 2} \frac{1}{3}(x+2) = \frac{1}{3}\left(\lim_{x \to 2} x + 2 \right) = \frac{1}{3}(2+2) = \frac{4}{3}$.

■

Teorema 3.16.

Misalkan $A \subseteq \mathbf{R}, f : A \to \mathbf{R}$ dan $c \in \mathbf{R}$, dengan *c* titik timbun *A*. Jika $a \leq f(x) \leq b \quad \forall x \in A, x \neq c$ dan jika $\lim_{x \to c} f(x)$ ada maka $a \leq \lim_{x \to c} f(x) \leq b$.

Teorema Apit 3.17.

Misalkan $A \subseteq \mathbf{R}, f, g, h : A \to \mathbf{R}$ dan $c \in \mathbf{R}$, dengan *c* titik timbun *A*. Jika $f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in A, x \neq c$ dan jika $\lim_{x \to c} f(x) = L = \lim_{x \to c} h(x)$ maka $\lim_{x \to c} g(x) = L$.

Contoh 3.18.

Buktikan bahwa $\lim_{x \to 0} \cos\left(\frac{1}{x} \right)$ tidak ada tetapi $\lim_{x \to 0} x \cos\left(\frac{1}{x} \right) = 0$.

Bukti.

Akan dibuktikan $\lim_{x \to 0} \cos\left(\frac{1}{x} \right)$ tidak ada . Misalkan $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x} \right)$.

Ambil subbarisan $(x_n) = \dfrac{1}{2n\pi}, n \in \aleph$ dan subbarisan $(y_n) = \dfrac{1}{(2n-1)\pi}, n \in \aleph$,

dimana $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2n\pi} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{(2n-1)\pi} = 0$ .Tetapi $f(x_n) = \cos 2n\pi = 1$ dan

$f(y_n) = \cos(2n-1)\pi = -1$, sehingga $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n)) \neq \lim\limits_{n\to\infty}(f(y_n))$.

Jadi $\lim\limits_{x\to 0} \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ tidak ada.

Akan dibuktikan $\lim\limits_{x\to 0} x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$.

Perhatikan bahwa $-x \leq x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) \leq x$ dan $\lim\limits_{x\to 0} x = 0 = \lim\limits_{x\to 0} -x$ maka menurut teorema apit $\lim\limits_{x\to 0} x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$. ■

Teorema 3.19.

Misalkan $A \subseteq \mathbf{R}, f : A \to \mathbf{R}$ dan $c \in \mathbf{R}$, dengan *c* titik timbun *A*. Jika $\lim\limits_{x\to c} f(x) > 0$ maka $\exists V_\delta(c) \ni f(x) > 0, \forall x \in A \cap V_\delta(c), x \neq c$.

Bukti:

Misalkan $L = \lim\limits_{x\to c} f(x) > 0$. Pilih $\varepsilon = \dfrac{L}{2} > 0$, sehingga menurut definisi limit fungsi $\exists \delta > 0 \ni 0 < |x-c| < \delta, x \in A \Rightarrow |f(x) - L| < \dfrac{L}{2}$.

Karena $|f(x) - L| < \dfrac{L}{2}$ maka $-\dfrac{L}{2} < f(x) - L < \dfrac{L}{2}$ atau $f(x) > \dfrac{L}{2} > 0, \forall x \in A \cap V_\delta(c), x \neq c$. ■

Soal – soal

1. Misalkan $D=\left\{\frac{1}{n}:n\in\mathbf{N}\right\}$. Tentukan titik timbun D.
2. Misalkan $A=(0,2), f:A\to\mathbf{R}, f(x)=3x+5$.
   Buktikan $\lim_{x\to 0} f(x)=5$ dan $\lim_{x\to 1} f(x)=8$
3. Buktikan jika $f:A\to\mathbf{R}$ dan *c* titik timbun *A* , $c\in\mathbf{R}$ maka *f* hanya mempunyai satu limit di titik *c*.
4. Buktikan $\lim_{x\to c}\frac{1}{x}=\frac{1}{c}, c>0$.
5. Misalkan $A\subseteq\mathbf{R}, f:A\to\mathbf{R}$ dan $c\in\mathbf{R}$, dengan *c* titik timbun *A*. Buktikan jika $\lim_{x\to c} f(x)=L \Leftrightarrow \lim_{x\to c}|f(x)-L|=0$.
6. Misalkan $I\subseteq\mathbf{R}, f:I\to\mathbf{R}$ dan $c\in I$. Misalkan $\exists K \;\&\; L \ni |f(x)-L|\le K|x-c| \quad , x\in I$ Buktikan $\lim_{x\to c} f(x)=L$.
7. Buktikan bahwa limit berikut tidak ada
   $$(a)\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\quad (x>0)\qquad (b)\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}}\quad (x>0)$$
   $$(c)\lim_{x\to 0}(x+\operatorname{sgn}(x))\qquad (d)\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\quad (x\neq 0)$$
8. Misalkan $A\subseteq\mathbf{R}, f,g:A\to\mathbf{R}$ dan $c\in\mathbf{R}$, dengan *c* titik timbun *A*. Misalkan *f* terbatas pada lingkungan dari *c* dan $\lim_{x\to c} g(x)=0$. Buktikan bahwa $\lim_{x\to c}(fg)(x)=0$.
9. Berikan contoh fungsi *f* dan *g* dimana fungsi *f* dan *g* tidak punya limit di titik *c*, tetapi *f + g* dan *fg* mempunyai limit di titik *c.*
10. Buktikan teorema 3.15
11. Misalkan $A\subseteq\mathbf{R}, f:A\to\mathbf{R}$ dan $c\in\mathbf{R}$, dengan *c* titik timbun *A*. Buktikan jika $\lim_{x\to c} f(x)<0$ maka $\exists V_\delta(c)\ni f(x)<0, \forall x\in A\cap V_\delta(c), x\neq c$.

DAFTAR PUSTAKA

1. Bartle, R. G., Sherbert, D. R., *Introduction to Real Analysis*, John Wilwey & Sons, Inc., Third Edition, 2000.
2. DePree, J., Swartz, C., *Introduction to Real Analysis,* John Wilwey & Sons, Inc., 1988.
3. Goldberg, R. R., *Methods of Real Analysis*, John Wiley & Sons, Second Edition.