

Contents

1 排队论基础	1
2 排队论的概念	1
2.1 基本概念	1
2.1.1 三个参数	1
2.1.2 一般性质	2
2.1.3 到达时间分布	2
2.1.4 服务时间分布	3
2.1.5 排队系统表示方式	3
2.1.6 常见几种分布	3
2.2 系统的工作方式	3
2.2.1 排队规则	3
2.2.2 服务规则	4
2.3 主要性能指标	4
2.4 M M 1 问题	4
2.4.1 M M 1 参数求解	5
2.4.2 M M 1 闲期和忙期	5
2.4.3 通信网中的排队论计算	5
2.5 M M m(n)	5
2.5.1 业务量和呼叫量	6
3 通信网络的业务模型与分析	6
3.1 阻塞率和呼损率	6
3.1.1 时间阻塞率	6
3.1.2 呼叫阻塞率	6
3.2 用户数为有限制 N 的准随机呼叫	6
3.3 业务分析	6
3.3.1 即时拒绝系统	7
3.3.2 主备线即时拒绝系统	8
3.3.3 公用备线即时拒绝系统	8
3.3.4 优先制排队系统	9

1 排队论基础

资源的有限性和需求的随机性是排队现象存在的基础;

由于顾客到达和服务完毕的时间都是不确定的, 绝大多数排队系统工作于随机状态。

2 排队论的概念

2.1 基本概念

2.1.1 三个参数

- 服务员数目 m
- 顾客到达率 λ , 相邻两顾客到达的时间间隔 t , 其统计平均值 $\bar{t} = \frac{1}{\lambda}$
- 服务员服务速率 μ , 顾客服务时间 τ , 其统计平均值为 $\bar{\tau} = \frac{1}{\mu}$
 - $m = 1, \mu$ 为服务速率
 - $m > 1, m\mu$ 为服务速率

2.1.2 一般性质

- 平稳性，在时间间隔 t 内，到达 k 个顾客的概率只与 t 的长的长度有关，而与这间隔的起始时刻无关。
- 无后效性，顾客到达时刻互相独立，即顾客各自独立地随机到达。
- 稀疏性，在 δt 内只有一个顾客到达或没有顾客到达。

满足上三个条件的随机流成为**简单流**，简单流的到达间隔是负指数分布，在一段时间内到达的顾客数服从泊松分布。

2.1.3 到达时间分布

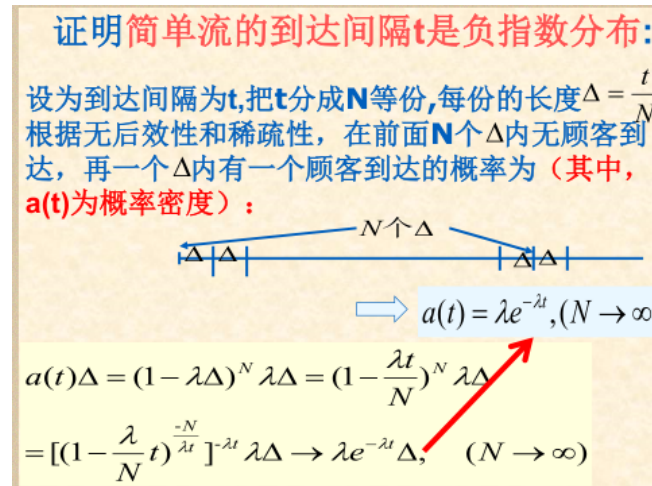


Figure 1:

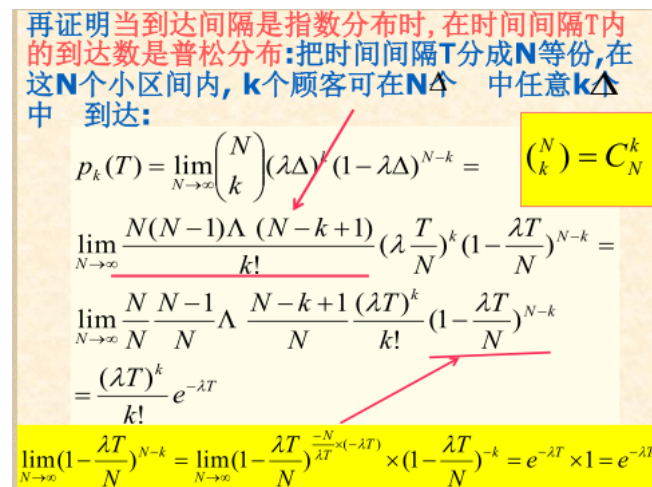


Figure 2:

$(0, t)$ 时间内有顾客达到的概率： $p = 1 - p_0(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ ，即 $1 - (0, t)$ 时间内没有人到达的概率

2.1.4 服务时间分布

同到达时间，只用将字母 λ 换成 μ

2.1.5 排队系统表示方式

$A|B|m(N, n)$

- A-顾客到达时间间隔分布
- B-服务时间间隔分布
- m-窗口数
- N-潜在顾客数
- n-截止队长

2.1.6 常见几种分布

1. M 分布
2. E_r 分布，适用于成批处理的排队。
3. D 分布，冲激
4. E_r, D 分布
5. H_R 分布，R 阶指数分布

2.2 系统的工作方式

排队系统的运行性能不仅与上述的统计分布有关，还与系统预先规定的工作方式有关。

- 排队规则是指服务机构是否允许排队
- 服务规则是指在排队等待情形下服务的顺序是什么

2.2.1 排队规则

排队系统的工作方式---排队规则

❖ **n为顾客数，m为窗口数。**

☞ 顾客到达时，如果所有服务窗口m均被占满

❖ 等待制系统（不拒绝方式）—允许排队，且队长没有限制，但应满足稳定性要求，即排队强度：

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < m \quad \text{或} \quad \rho' = \frac{\lambda}{m\mu} < 1$$

❖ 截止型，即时拒绝方式—立即遭到拒绝，即服务机构不允许顾客排队等待（ $m=n$, 电话通信网常采用）

☞ 即除了m个正在服务的人外，系统不允许有其他人排队

❖ 截止型，延迟拒绝方式—允许排队，但队长有限制。（ $m < n$, 带缓冲存储的数据通信就属于这一类）

☞ 即除了m个正在服务的人外，还允许n-m个人排队

Figure 3:

2.2.2 服务规则

- 先到先服务
- 后到先服务
- 优先制服务
- 随机服务

2.3 主要性能指标

❖ 排队系统的主要性能指标

- (1) 排队长度 k
- (2) 等待时间 w
- (3) 服务时间 τ
- (4) 系统时间 s
- (5) 系统效率 η
- (6) 稳定性 ρ

Figure 4:

2.4 M|M|1 问题

求解步骤:

1. 确定状态变量
2. 画出状态转移图
3. 列出状态转移方程
4. 求解状态转移方程

2.4.1 M|M|1 参数求解

至此,得M/M/1结论如下:

k 概率 $p_k = (1-\rho)\rho^k$ $p_0 = 1-\rho$

平均队长, $\bar{k} = \frac{\rho}{1-\rho}$ $\bar{k} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$

平均等待时间 $\bar{w} = \bar{k} \cdot \frac{1}{\mu} = \frac{\rho}{1-\rho} \cdot \frac{1}{\mu}$

平均等待时间 \bar{w} 的方差 $\sigma_w^2 = \frac{\rho(2-\rho)}{\mu^2(1-\rho)^2}$

系统时间 $\bar{s} = \bar{w} + \bar{\tau} = \frac{\bar{k}}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} = \frac{1}{\mu-\lambda}$

系统效率 $\eta = \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1 - p_0 = \rho$

Figure 5:

2.4.2 M|M|1 闲期和忙期

M|M|1

平均闲期 $\bar{T} = \frac{1}{\lambda}$ 忙期平均顾客: $n = \frac{1}{1-\rho}$

平均忙期 $\bar{T} = \frac{1}{\mu-\lambda}$ 平均队长: $k = n\rho$

空闲率 $p_0 = 1-\rho$

忙概率 ρ

各变量分布解析结果、平均值结果均取决于 ρ

ρ 的三个意义 $\left\{ \begin{array}{l} \text{效率指标: 窗口占用率 } \eta = \rho \\ \text{稳定性指标: } \rho > 1 \text{ 不稳} \\ \text{顾客观点: } \rho \text{ 越小越好} \end{array} \right.$

Figure 6:

2.4.3 通信网中的排队论计算

计算通信网中的 M/M/1 系统指标, 将原来的 μ 换为 μC

2.5 M|M|m(n)

压缩排队长度的措施:

- 增加窗口数
- 截止排队长度

融合上述两种方式，成为**截止型多窗口排队系统 即时拒绝系统的拒绝概率（爱尔兰公式）**

$$p_n = \frac{a^m/m!}{\sum_{r=0}^m a^r/r!}$$

2.5.1 业务量和呼叫量

业务量是在指定时间内线路被占用的总时间
呼叫量定义为线路占用时间和观察时间之比。

3 通信网络的业务模型与分析

3.1 阻塞率和呼损率

拒绝状态站全部状态的百分比。

3.1.1 时间阻塞率

$$p_n = \frac{\text{阻塞时间}}{\text{总观察时间}}$$

3.1.2 呼叫阻塞率

$$p_c = \frac{\text{被拒绝的呼叫次数}}{\text{总呼叫次数}}$$

总有： $p_c \leq p_n$ 。因为 p_c 只在呼叫的时候统计，但在不呼叫的时候也可能发生呼损。

3.2 用户数为有限制 N 的准随机呼叫

$$p_c = \frac{(N-n)\lambda p_n}{\sum_{r=0}^n (N-r)\lambda p_r}$$

N 为潜在用户数，n 为截止队长。特别地，当 $\lambda \rightarrow \infty$ 时，

$$p_c = \frac{\lambda p_n}{\sum_{r=0}^n \lambda p_r}$$

3.3 业务分析

线路利用率： $\sum_{r=1}^m \frac{1}{r} P_r$ ，其中，m 为该系统服务台（维数）， P_r 为 r 状态的概率

3.3.1 即时拒绝系统

时间阻塞率或拒绝概率（表示同时呼叫用户数有m个，将中继线m条完全占用，产生阻塞）

$$p_m = \binom{N}{m} \rho^m p_0 = \binom{N}{m} \rho^m / \sum_{r=0}^m \binom{N}{r} \rho^r$$

代入公式（2-107）：

$$p_c = \frac{(N-m)\lambda_0 p_m}{\sum_{r=0}^m (N-r)\lambda_0 p_r}$$

得呼叫阻塞率或呼损为：

$$p_c = \frac{(N-m)\lambda_0 p_m}{\sum_{r=0}^m (N-r)\lambda_0 p_r} = \frac{\binom{N-1}{m} \rho^m}{\sum_{r=0}^m \binom{N-1}{r} \rho^r}$$

$$p_c = \frac{(N-m)\lambda_0 p_m}{\sum_{r=0}^m (N-r)\lambda_0 p_r} = \frac{(N-m)\lambda_0 \binom{N}{m} \rho^m p_0}{\sum_{r=0}^m (N-r)\lambda_0 \binom{N}{r} \rho^r p_0} = \frac{\binom{N-1}{m} \rho^m}{\sum_{r=0}^m \binom{N-1}{r} \rho^r}$$

Figure 7:

3.3.2 主备线即时拒绝系统

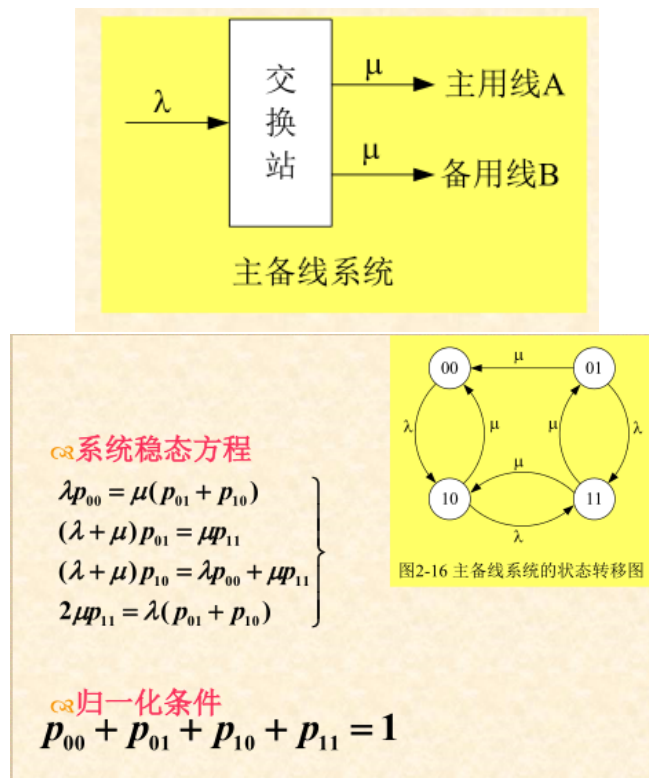


Figure 8:

3.3.3 公用备线即时拒绝系统

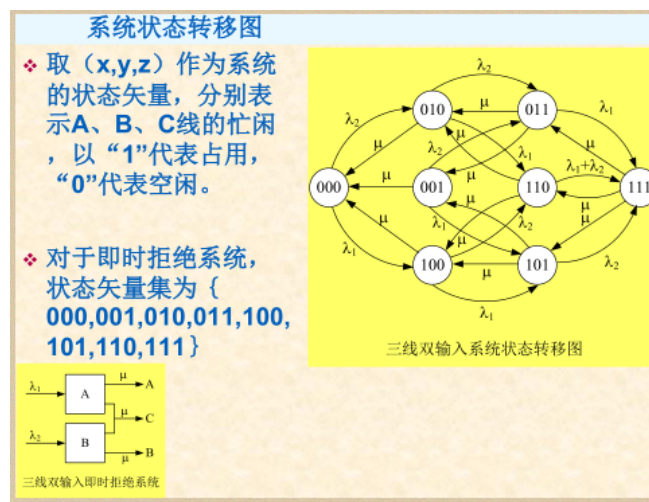


Figure 9:

公用备线系统与主备线系统的比较：公用备线系统减少一条信道，其信道利用率提高，但是呼损率有损增加。在业务量不太大的情况下，采用公用备线是很合算的。

3.3.4 优先制排队系统

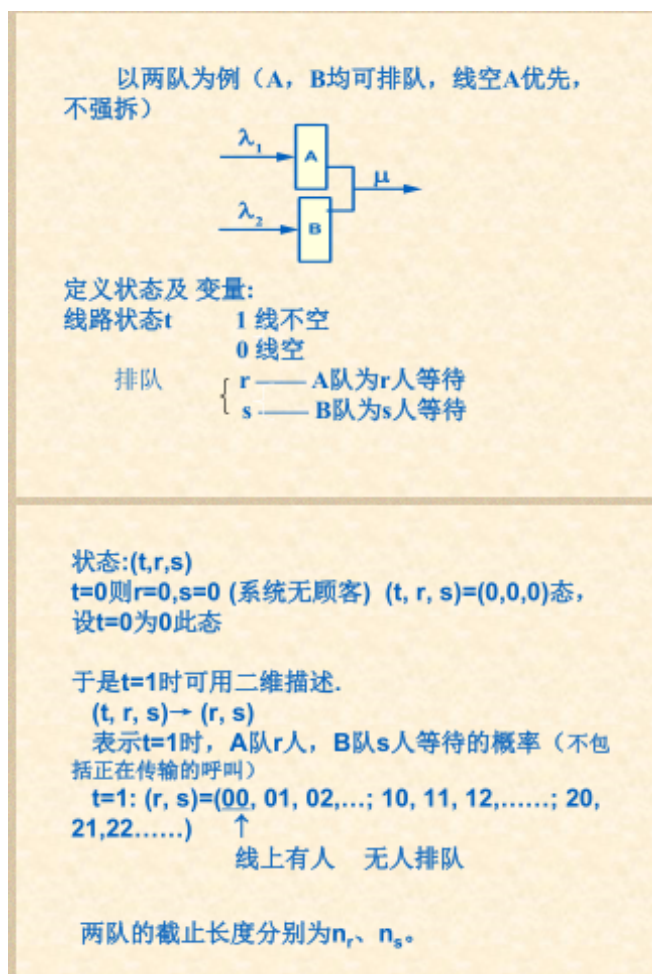


Figure 10:

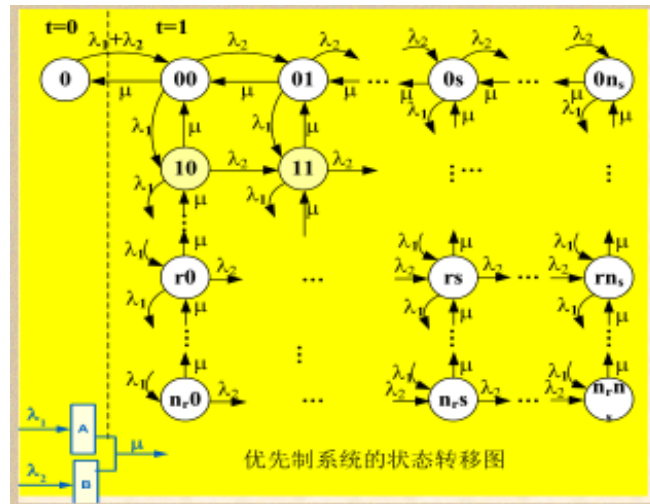


Figure 11: