الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنـــــية
امتحان البكالوريا التجريبي
الشعبة: تسيير واقتصاد

مديـــــرية التربية لولاية البيض
ثانـوية حميتو الحاج علي الشلالة
دورة: مــــــــــاي 2023

اختبار في مادة: الرياضيات

المدة: ثلاث ساعـــات ونصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول(20نقطة)

التمرين الأول:(04ن)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0=3$ و $u_{n+1}=3u_n-4$

1. بين أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n \succ 2$
2. بين أن المتتالية (u_n) متزايدة.
3. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n ب: $v_n=u_n-2$
   أ - بين أن المتتالية (v_n) هندسية، حدد أساسها وحدها الأول.
   ب – أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n
   ج- أحسب المجموع: $S_n=u_0+u_1+...+u_n$
4. نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n ب: $w_n=\ln(u_n-2)$
   أ - بين أن (w_n) متتالية حسابية ثم عبر عن w_n بدلالة n .
   ب- أحسب المجموع: $S_n^{'}=w_0+w_1+...+w_n$

التمرين الثاني:(04ن)

يمثل الجدول التالي التطور في رأس مال المقاولات بالملايير بين سنوات 2003 و2010 حسب تصريحات مديرية الضرائب:

السنوات	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
رتبة السنة x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
رأس المال بالمليار Y_i	10 ,7	13,3	14,9	15,4	17,4	17,1	15,8	17,8

المصدر: المديرية العامة للضرائب (أوت 2011)

1. مثل سحابة النقط $M_i(x_i;y_i)$ في معلم متعامد مبدؤه $O(0;10)$ ، ($1cm$ لكل 1 سنة على محور الفواصل و $1cm$ لكل 1 مليار على محور التراتيب)
2. احسب إحداثيا النقطة المتوسطة $G(\overline{x};\overline{y})$ ثم علمها.
3. أ- بين أن معادلة لمستقيم الانحدار بالمربعات الدنيا هي: $y=0.84x+12.36$
   ب-بفرض ان هذا التعديل الخطي يبقى صالح حتى سنة 2023 اوجد قيمة رأس مال هذه المقاولات في هذه السنة 2023
4. اوجد السنة التي سيتضاعف رأس مال هذه المقاولات الابتدائي (يصبح 21,4 مليار).

التمرين الثالث:(04ن)

نعتبر كثير الحدود $P(x)$ للمتغير الحقيقي x حيث: $P(x)=2x^3+x^2-13x+6$

1. تحقق ان $x=2$ حل للمعادلة $P(x)=0$.
2. تحقق أنه من اجل كل عدد حقيقي x : $P(x)=(x-2)(2x^2+5x-3)$.
3. أ-حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x)=0$.

ب- حل في $\mathbb{R}$ المعادلتين ذات المجهول x التاليتين:

$$2(\ln x)^3+(\ln x)^2-13\ln x+6=0 \quad ، \quad 6e^{-3x}+e^{-x}-13e^{-2x}+2=0$$

4. حل في المجال $]0;+\infty[$ المعادلة: $\log\left(x^2+81\right)=\log 2+\log 9+\log x$

التمرين الرابع:(08ن)

I. g هي الالة المعرفة على $\Re$ كما يلي: $g(x)=1-x+e^x$

1. ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.
2. استنتج إشارة $g(x)$ على $\Re$.

II. f هي الدالة المعرفة على $\Re$ كما يلي: $f(x)=x+1+xe^{-x}$.

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $\left(0;\vec{i};\vec{j}\right)$

1. احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
2. **أ.** بين أن: $f'(x)=e^{-x}g(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f.

ب. شكل جدول تغيرات الدالة f .

3. بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\Re$ ثم تحقق أن $-1<\alpha<0$
4. أ. برهن أن المستقيم (T) ذو المعادلة $y=2x+1$ مماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

ب. أدرس وضعية (C_f) و (T) .

5. أرسم (T) والمنحنى (C_f) .
6. لتكن الدالة H المعرفة على $\Re$ كما يلي: $H(x)=(-x-1)e^{-x}$

أ. برهن أن H أصلية للدالة $h(x)=xe^{-x}$ على $\Re$.

ب. احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمماس (T) والمستقيمين اللذين معادلتاهما: $x=1$ ، $x=3$

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني(20نقطة)

التمرين الأول(04ن):

لتكن الدالة f المعرفة بجدول تغيراتها وليكن $\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

أجب بصح او خطأ مع تبرير اجابتك:

1. المستقيم ذو المعادلة $y=-1$ مقـارب للمنحنى $\left(C_f\right)$.
2. المنحنى $\left(C_f\right)$ يقطع المستقيم ذو المعادلة $y=5$ في نقطتين.
3. مماس المنحنى $\left(C_f\right)$ في النقطة $A(1;4)$ موازي لمحور الفواصل.
4. العدد $\int_{-4}^{-3} f(x)dx$ يمثل مساحة الحيز المحدد بالمنحنى $\left(C_f\right)$ ومحور الفواصل والمستقيمين ذو المعادلتين $x=-4$ و $x=-3$

التمرين الثاني (04ن)

يعطى الجدول التالي كلفة استهلاك الكهرباء من طرف عائلات معينة من مدينة ما خلال سنة (مقدرة بآلاف الدنانير)

السنة	2011	2013	2014	2015	2017
رتبة السنة x_i	1	3	4	5	7
الكلفة y_i (بآلاف الدنانير)	29	35	52	71	101

1. أ) مثّل سحابة النقط $M_i(x_i;y_i)$ في معلم متعامد ($1cm$لكل سنة على محور الفواصل و$1cm$لكل 10آلاف دينار على محور التراتيب) .
ب) هل يمكن تسوية سحابة النقط السابقة بتعديل خطي؟ برّر.
2. نبحث في هذا الجزء عن تعديل آخر (تدور النتائج الى 10^{-2})
أ- اتمم الجدول التالي

رتبة السنة x_i	1	3	4	5	7
$z_i=\ln y_i$	3,37				

ب- اوجد إحداثيي النقطة المتوسطة $G(\overline{x};\overline{z})$ لسحابة النقط $M'_i(x_i;z_i)$
ت- بيّن ان معادلة مستقيم الانحدار بالمربعات الدنيا هي: $z=0,22x+3,07$
3. أ- تحقق ان $y=ke^{0,22x}$ حيث k عدد حقيقي يطلب تعيينه.
ب- احسب تقدير كلفة استهلاك العائلات للكهرباء سنة 2020.

التمرين الثالث: (04ن)

اجتاح وباء كورونا-كوفيد-الجزائر سنة 2020 حيث في نهاية شهر مارس بلغ عدد المصابين 626 مصاب.
لاحظ الأطباء أن في نهاية كل شهر يزداد عدد المصابين بأربعة أضعاف عن الشهر السابق في حين بلغت عدد حالات الشفاء 1410 شخص. نرمز بـ u_n إلى عدد المصابين بالفيروس خلال نهاية كل شهر.

1. أحسب u_1 ، u_2 ، u_3 ثم بين أن (u_n) ليست حسابية ولا هندسية.
2. بين أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=4u_n-1410$
3. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n : $v_n=470-u_n$
   أ- بين ان المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.
   ب- أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n.
4. أ- ما هو عدد المصابين المتوقع خلال نهاية شهر سبتمبر 2020؟
   ب- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$ وفسر هذه النتيجة
   ج- أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n=u_1+u_2+...+u_n$

التمرين الرابع(08ن)

I. نعتبر الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^2+\ln x-2$
1. أدرس اتجاه تغير الدالة g .
2. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ ، $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} g(x)$
3. أنجز جدول تغيرات الدالة g .
4. بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1.30\prec\alpha\prec1.35$
5. استنتج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$.

II. نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^2+1-\ln x}{x}$

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.(الوحدة $2cm$)

1. أحسب النهايات $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$
2. بيّن أنّ: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$.
3. استنتج اتجاه تغير f ثم أنجز جدول تغيرات الدالة f .
4. أ- بيّن أنّ المنحني (C_f) يقبل المستقيم (D) الذي معادلته $y=x$ كمستقيم مقارب مائل عند $+\infty$.
   ب- أدرس الوضع النسبي بين (C_f) و (D).
5. أنشئ (C_f) و (D) . نأخذ $f(\alpha)=1.85$.

III. لتكن الدالة G المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $G(x)=\dfrac{x^3}{3}+x\ln x-3x$.

أ- أحسب $G'(x)$.
ب- استنتج دالة أصلية للدالة g على المجال $]0;+\infty[$ التي تحقق: $G(1)=1$.

بالتوفيق مع تمنيات أستاذة المادة لكم بالتوفيق في بكالوريا 2023

تصحيح الموضوع التجريبي الأول

التمرين الأول(04ن):

$u_0=3$ و $u_{n+1}=3u_n-4$

1.بين أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n \succ 2$ (0.5ن)

لدينا: $u_0=3$ و $3\succ 2$ إذا الخاصية محققة من اجل $n=0$

نفرض من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $u_n \succ 2$ صحيحة ونثبت صحة $u_{n+1}\succ 2$

لدينا: $u_n\succ 2$ ومنه: $3u_n-4\succ 3\times 2-4$

إذا: $u_{n+1}\succ 2$ ومنه حسب مبدا الاستدلال بالتراجع $u_n\succ 2$

2. بين أن المتتالية (u_n) متزايدة. (0.5 ن)

لدينا: $u_{n+1}-u_n=3u_n-4-u_n=2u_n-4$

ولدينا: $u_n\succ 2$ ومنه: $u_{n+1}-u_n\succ 0$ إذا (u_n) متزايدة

3.نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n ب: $v_n=u_n-2$

أ - تبين أن المتتالية (v_n) هندسية وتحديد أساسها وحدها الأول. (0.5ن)

لدينا: $v_n=u_n-2$ ومنه: $v_{n+1}=u_{n+1}-2$

ومنه: $v_{n+1}=3u_n-4-2$ ومنه $v_{n+1}=3(v_n+2)-4-2$

وعليه: $v_{n+1}=3v_n$

إذا (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=3$ وحدها الأول

$v_0=u_0-2=3-2=1$ (0.25ن)

ب-كتابة عبارة v_n بدلالة n واستنتاج عبارة u_n بدلالة n

لدينا: $v_n=v_0\times q^n$ ومنه: $v_n=3^n$ (0.25ن)

$u_n=v_n+2$ ومنه: $u_n=3^n+2$ (0.25ن)

ج- حساب المجموع: (0.75ن)

$$S_n=u_0+u_1+...+u_n=v_0+2+v_1+2+...+v_n+2$$

ومنه: $S_n=(v_0+v_1+...+v_n)+(2+2+...+2)$

ومنه: $S_n=v_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}+2(n+1)$ إذا:

$$S_n=\frac{1-3^{n+1}}{-2}+2(n+1)$$

4.نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n ب: $w_n=\ln(u_n-2)$

أ - تبين أن (w_n) متتالية حسابية (0.5 ن)

$$w_{n+1}-w_n=\ln(u_{n+1}-2)-\ln(u_n-2)$$
$$=\ln(3u_n-4-2)-\ln(u_n-2)$$
$$=\ln(3u_n-6)-\ln(u_n-2)=\ln\left(\frac{3u_n-6}{u_n-2}\right)$$
$$=\ln\left(\frac{3(u_n-2)}{u_n-2}\right)$$

ومنه: $w_{n+1}-w_n=\ln3$

إذا: (w_n) متتالية حسابية أساسها $r=\ln3$ وحدها الأول w_0

حيث: $w_0=\ln(u_0-2)=\ln(3-2)=0$ (0.25ن)

التعبير عن w_n بدلالة n : $w_n=w_0+nr=n\ln2$

ب- حساب المجموع: (0.25ن)

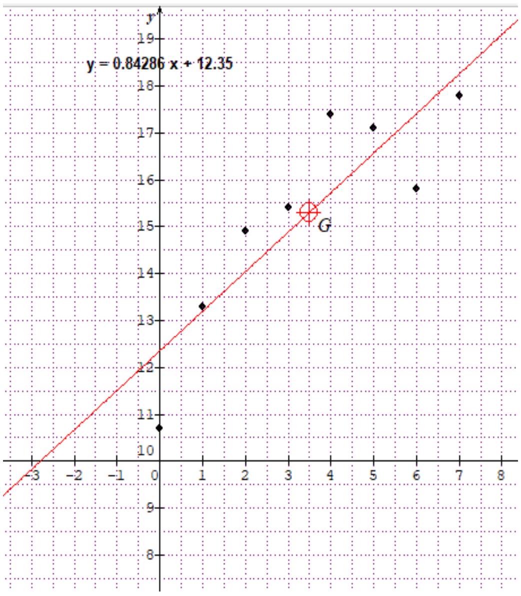
$$S'_n=w_0+w_1+...+w_n=(n+1)\left(\frac{w_0+w_n}{2}\right)$$

$$S'_n=w_0+w_1+...+w_n=(n+1)\left(\frac{w_0+w_n}{2}\right)$$

إذا: $=(n+1)\left(\frac{n\ln2}{2}\right)$

التمرين الثاني(04ن)

1.تمثيل سحابة النقط (0.5 ن)



2. حساب إحداثيا النقطة المتوسطة $G(\bar{x};\bar{y})$ وتعليمها

$$\begin{cases}\bar{x}=\dfrac{0+1+2+3+4+5+6+7}{8}\\ \bar{y}=\dfrac{10.7+13.3+14.9+15.4+17.4+17.1+15.8+17.8}{8}\end{cases}$$

ومنه: $\begin{cases}\bar{x}=3.5\\ \bar{y}=15.3\end{cases}$ (0.5ن+0.5ن) + (0.25ن)

3. أ- تبيين أن معادلة لمستقيم الانحدار بالمربعات الدنيا هي: $y=0.84x+12.35$

$$a=\frac{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)-\overline{xy}}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}=\frac{\frac{1}{8}\times463.8-3.5\times15.3}{\frac{1}{8}\times42}=0.8428$$

ومنه: $a\simeq0.84$ (01ن)

$b=\bar{y}-a\bar{x}=15.3-0.8428\times3.5=12.35$ (0.25ن)

إذا: $y=0.84x+12.35$

ب-ايجاد قيمة رأس مال هذه المقاولات في سنة 2023 **(0.5ن)**

رتبة 2023 هي 20 ومنه: $y=0.84\times 20+12.35=29.15$

4.اوجد السنة التي سيتضاعف رأس مال هذه المقاولات الابتدائي (يصبح 21,4 مليار). **(0.5ن)**

$y=21.4$ تكافئ: $0.84x+12.35=21.4$

ومنه: $x=\dfrac{21.4-12.35}{0.84}=10.77\approx 11$

إذا: السنة التي سيتضاعف رأس مال هذه المقاولات الابتدائي هي: 2014

التمرين الثالث(04ن):

$P(x)=2x^3+x^2-13x+6$

1.التحقق ان $x=2$ حل للمعادلة $P(x)=0$ **(0.5ن)**

$P(2)=2\times 2^3+2^2-13\times 2+6=16+4-26+6=0$

ومنه: $x=2$ حل للمعادلة $P(x)=0$

تحقق أنه من اجل كل عدد حقيقي x **(0.5ن)**

$P(x)=(x-2)(2x^2+5x-3)$

$(x-2)(2x^2+5x-3)=2x^3+5x^2-3x-4x^2-10x+6$

$=2x^3+x^2-33x+6=P(x)$

3.أ-حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x)=0$ **(0.75ن)**

$P(x)=0$ تكافئ $(x-2)(2x^2+5x-3)=0$

ومنه: أو $\begin{cases}2x^2+5x-3=0\\ x-2=0\end{cases}$ ومنه:

$\begin{cases}\Delta=49،x_1=-3,\ x_2=\dfrac{1}{2}\\ x_3=2\end{cases}$ إذا: $S=\{-3;0.5;2\}$

ب -حل في $\mathbb{R}$ المعادلتين ذات المجهول x التاليتين:

$2(\ln x)^3+(\ln x)^2-13\ln x+6=0$ **(0.75ن)**

نضع: $\ln x=X$ تصبح المعادلة

$2X^3+X^2-13X+6=0$

السؤال السابق نجد:

$\begin{cases}X_1=-3\\ X_2=0.5\\ X_3=2\end{cases}$ ومنه: $\begin{cases}\ln x_1=-3 \text{ مرفوض}\\ \ln x_2=0.5\\ \ln x_3=2\end{cases}$ ومنه:

$\begin{cases}x_1=e^{0.5}\\ x_2=e^2\end{cases}$ إذا: $S=\{e^{0.5};e^2\}$

لدينا: $6e^{-3x}+e^{-x}-13e^{-2x}+2=0$ **(0.75ن)**

ومنه: $\dfrac{6}{e^{3x}}+\dfrac{1}{e^x}-\dfrac{13}{e^{2x}}+2=0$

ومنه: $\dfrac{6}{e^{3x}}+\dfrac{e^{2x}}{e^{3x}}-\dfrac{13e^x}{e^{3x}}+\dfrac{2e^{3x}}{e^{3x}}=0$

ومنه: $\dfrac{2e^{3x}+e^{2x}-13e^x+6}{e^{3x}}=0$ تكافئ

$2e^{3x}+e^{2x}-13e^x+6=0$

نضع: $X=e^x$ تصبح المعادلة $2X^3+X^2-13X+6=0$ السؤال السابق نجد:

$\begin{cases}X_1=-3\\ X_2=0.5\\ X_3=2\end{cases}$ ومنه: $\begin{cases}e^{x_1}=-3 \text{ مرفوض}\\ e^{x_2}=0.5\\ e^{x_3}=2\end{cases}$ ومنه:

$\begin{cases}x_1=\ln 0.5\\ x_2=\ln 2\end{cases}$ إذا: $S=\{\ln 0.5;\ln 2\}$

4.حل في المجال $]0;+\infty[$ المعادلة: **(0.75ن)**

$\log(x^2+81)=\log 2+\log 9+\log x$ تكافئ

$\log(x^2+81)=\log(18x)$ ومنه $x^2+81=18x$

ومنه: $x^2-18x+81=0$ ومنه: $\Delta=0$ ومنه المعادلة تقبل حل مضاعف هو: $x=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{18}{2}=9$ إذا: $S=\{9\}$

التمرين الرابع(07ن):

I. g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=1-x+e^x$

1.دارسة اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها **(0.75ن)**

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و: $g'(x)=-1+e^x$

$g'(x)=0$ تكافئ: $-1+e^x=0$ ومنه: $e^x=1$ إذا: $x=0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	2	↗

2.استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$ **(0.5ن)**

من جدول التغيرات نجد: $g(x)\geq g(0)\geq 2\succ 0$

II. $f(x)=x+1+xe^{-x}$.

1.حساب النهايات

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+1+xe^{-x}\right)=-\infty$ **(0.25ن)**

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+1+xe^{-x}\right)=+\infty$ **(0.25ن)**

2.أ. تبيين أن: $f'(x)=e^{-x}g(x)$ **(0.5ن)**

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و:

$f'(x)=1+e^{-x}-xe^{-x}=e^{-x}\left(e^x+1-x\right)=e^{-x}.g(x)$

استنتاج اتجاه تغير الدالة f : **(0.5ن)**

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ أي: الدالة f متزايدة على $\mathbb{R}$

ب. شكل جدول تغيرات الدالة f **(0.5ن)**

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

3.بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ثم تحقق أن $-1<\alpha<0$ **(0.75ن)**

الدالة f مستمرة ورتيبة على $\mathbb{R}$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $0\in]-\infty;+\infty[$ إذا حسب مبر هنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$

التحقق أن $-1<\alpha<0$ **(0.25ن)**

$f(-1)=-e$ ، $f(0)=1$ و $f(0)\times f(-1)\prec 0$

إذا: $-1<\alpha<0$

4.أ. برهن أن المستقيم (T) ذو المعادلة $y=2x+1$ مماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 **(0.75ن)**

لدينا: $(T): y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

ومنه: $y=f'(0)(x-0)+f(0)$

ومنه: $y=2x+1$ وهو المطلوب.

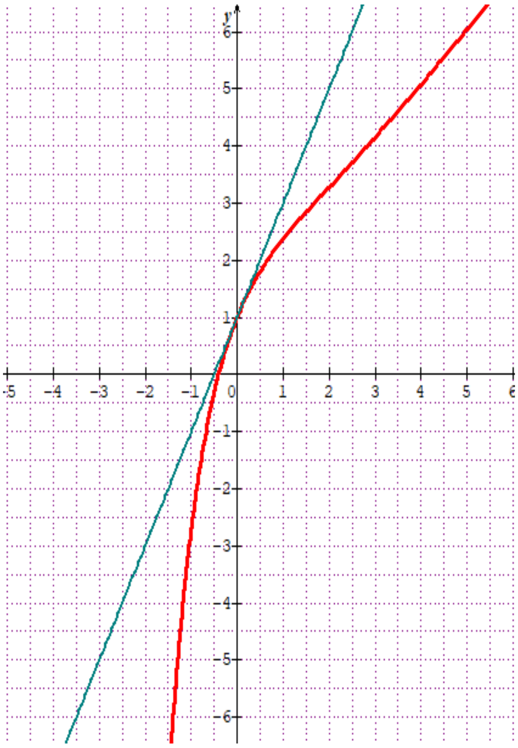
ب. دراسة وضعية (C_f) و (T) **(0.75ن)**

دراسة إشارة الفرق: $f(x)-y=x+1+xe^{-x}-2x-1$

$=xe^{-x}-x=x(e^{-x}-1)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
$e^{-x}-1$		$+$	0	$-$	
$f(x)-y$		$-$	0	$-$	
الوضع النسبي	(C_f) تحت (Δ)		تماس		(C_f) تحت (Δ)

5.أرسم (T) والمنحنى (C_f) **(0.75ن)**



6.أ- برهن أن H أصلية للدالة $h(x)=xe^{-x}$ على $\mathbb{R}$ **(0.75ن)**

الدالة H قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$:

$H'(x)=-e^{-x}-(-x-1)e^{-x}=-e^{-x}+xe^{-x}+e^{-x}$

$=xe^{-x}=h(x)$

H أصلية للدالة $h(x)=xe^{-x}$ على $\mathbb{R}$

ت- احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمماس (T) والمستقيمين اللذين معادلتاهما: $x=1$ ، $x=3$ **(0.75ن)**

لدينا: $S=\int_1^3[y-f(x)]dx=\int_1^3(x-xe^{-x})dx$

ومنه: $S=\left[\frac{1}{2}x^2-(-x-1)e^{-x}\right]_1^3=4.7-1.24=3.46u.a$

الموضوع الثاني

التمرين الأول(04ن):

الإجابة بصح أو خطأ مع التبرير

1. خ: (0.75ن+0.25ن)

المستقيم ذو المعادلة $x=-1$ مقارب للمنحنى (C_f).

2. ص: (0.75ن+0.25ن)

الدالة f متزايدة على المجال $]1;+\infty[$ وتأخذ قيمها في المجال $]4;+\infty[$ و $5\in]4;+\infty[$

الدالة f متناقصة على المجال $]-1;1]$ وتأخذ قيمها في المجال $]4;+\infty[$ و $5\in]4;+\infty[$

إذا المنحنى (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y=5$ في نقطتين

3. ص: (0.75ن+0.25ن)

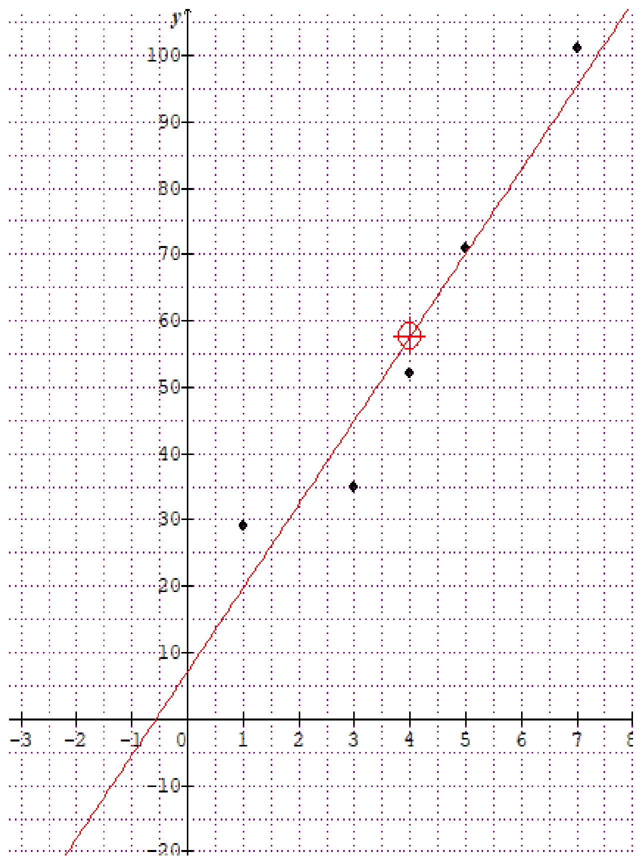
لأن: $f'(1)=0$

4. خ: (0.75ن+0.25ن)

لأن: $f(x)\le 0$ على المجال $[-4;-3]$ إذا: مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين ذو المعادلتين $x=-4$ و $x=-3$ هي العدد $\int_{-4}^{-3}-f(x)dx$

التمرين الثاني(04ن):

1. أ-سحابة النقط (0.5ن)



ب- لا يمكن تسوية سحابة النقط السابقة بتعديل خطي لأن لها شكل غير متطاول. (0.25ن)

2. اتمام الجــدول (0.5ن)

رتبة x_i	1	3	4	5	7
$z_i=\ln y_i$	3.37	3.56	3.95	4.26	4.62

ب-ايجاد إحداثيي النقطة المتوسطة $G(\bar{x};\bar{z})$ لسحابة النقط $M_i'(x_i;z_i)$ (01ن)

$$\begin{cases}\bar{x}=\dfrac{1+3+4+5+7}{5}=4\\ \bar{z}=\dfrac{3.37+3.56+3.95+4.26+4.62}{5}=3.95\end{cases}$$

ومنه: $G(4;3.95)$

3. تبيين أن معادلة لمستقيم الانحدار بالمربعات الدنيا هي: $y=0.22x+3.07$ (0.5ن)

$$a=\frac{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iz_i\right)-\overline{xz}}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}=\frac{\frac{1}{5}\times83.49-4\times3.95}{\frac{1}{5}\times20}=0.22$$

$b=\bar{z}-a\bar{x}=3.95-0.22\times4=3.07$ (0.25ن)

إذا: $y=0.22x+3.07$

4. أ- تحقق ان $y=ke^{0.22x}$ حيث k عدد حقيقي يطلب تعيينه. (0. 5ن)

لدينا: $z=\ln y$ ومنه: $y=e^{z}$ ومنه: $y=e^{0.22x+3.07}$

ومنه: $y=e^{0.22x}\times e^{3.07}$ وعليه: $y=21.54e^{0.22x}$

إذا: $k=21.54$

ب-حساب تقدير كلفة استهلاك العائلات للكهرباء سنة 2020. (0.5 ن)

رتبة 2020 هي: 10

$y=21.54e^{0.22\times10}=194.40$

التمرين الثالث(04ن):

1. حساب u_1 ، u_2 ، u_3

$u_0=626$ ، $u_1=4\times626-1410=1094$ (0.25ن)

$u_2=4\times1094-1410=2966$ ، (0.25ن)

$u_3=4\times2966-1410=10454$ (0.25ن)

تبين أن (u_n) ليست حسابية ولا هندسية

لدينا: $u_2-u_1=2966-1094=1872$

و $u_3-u_2=10454-2966=7488$

ومنه $u_3-u_2\ne u_2-u_1$ ومنه (u_n) ليست حسابية (0.25ن)

$\frac{u_3}{u_2}=\frac{10454}{2966}=3.52$ ، $\frac{u_2}{u_1}=\frac{2966}{1094}=2.71$

$\frac{u_3}{u_2}\ne\frac{u_2}{u_1}$ ومنه (u_n) ليست هندسية (0.25ن)

2.تبين أنه من اجل كل عدد طبيعي n **(0.25ن)**
$u_{n+1}=4u_n-1410$

لدينا: $u_1=4u_0-1410$ ، $u_2=4u_1-1410$ ،
$u_3=4u_2-1410$ ومنه: $u_{n+1}=4u_n-1410$

3. $v_n=470-u_n$

أ. تبين ان المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.**(0. 5ن)**

لدينا: $v_{n+1}=470-u_{n+1}$ ومنه: $v_{n+1}=470-4u_n+1410$

ولدينا: $u_n=470-v_n$ إذا:
$v_{n+1}=470-1880+4v_n+1410$
ومنه: $v_{n+1}=4v_n$

إذا (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=4$ وحدها الأول
$v_0=470-u_0=470-626=-156$ **(0.25ن)**

ت- كتابة v_n بدلالة n ثم استنتاج عبارة u_n بدلالة n.

$v_n=v_0\times q^n$ ومنه: $v_n=-156\times 4^n$ **(0.25ن)**

$u_n=470-v_n$ ومنه: $u_n=470+156\times 4^n$ **(0.25ن)**

4.أ- ما هو عدد المصابين المتوقع خلال نهاية شهر سبتمبر 2020؟**(0.25ن)**

رتبة 2020 هي 6: $u_6=470+156\times 4^6=639446$

ب- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$ **(0.25ن)**

$$\lim_{x\to+\infty} u_n=\lim_{x\to+\infty}\left(470+156\times 4^n\right)=+\infty$$

تفسير هذه النتيجة: المتتالية (u_n) متباعدة وعدد المصابين في تزايد مستمر.**(0.25ن)**

ج-حساب بدلالة n المجموع S_n : **(0.5ن)**

$$\begin{aligned}S_n&=u_1+u_2+\ldots+u_n\\&=470-v_1+470-v_2+\ldots+470-v_n\\&=(470+470+\ldots+470)-(v_1+v_2+\ldots+v_n)\\&=470n+624\times\frac{1-4^n}{1-4}=470n-208\left(1-4^n\right)\end{aligned}$$

التمرين الرابع(07ن):

ا. g معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^2+\ln x-2$

1. دراسة اتجاه تغير الدالة g **(0.75ن)**

الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و:

$g(x)=2x+\frac{1}{x}\succ 0$ ومنه الدالة g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$

2.حساب النهايات

(0.25ن) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+\ln x-2\right)=+\infty$

(0.25ن) $\lim\limits_{x\overset{\succ}{\to}0} g(x)=\lim\limits_{x\overset{\succ}{\to}0}\left(x^2+\ln x-2\right)=-\infty$

3.انجاز جدول تغيرات الدالة g **(0.25ن)**

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

4.تبيين أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث:
$1.30\prec\alpha\prec 1.35$ **(0.75ن)**

الدالة g مستمرة ورتيبة على المجال $[1.30;1.35]$ و
$g(1.30)=-0.04$ ، $g(1.35)=0.12$ و
$g(1.30)\times g(1.35)\prec 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث:
$1.30\prec\alpha\prec 1.35$

5.استنتاج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$ **(0.5ن)**

من جدول التغيرات نجد:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

II.الدالة f معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{x^2+1-\ln x}{x}$

1.حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\overset{\succ}{\to}0} f(x)$ **(2×0.25ن)**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1-\ln x}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\overset{\succ}{\to}0} f(x)=\lim_{x\overset{\succ}{\to}0}\left(\frac{x^2+1-\ln x}{x}\right)=+\infty$$

2.تبيين أنّ: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ **(0. 5ن)**

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و:

$$f'(x)=\frac{\left(2x-\frac{1}{x}\right)\times x-1\left(x^2+1-\ln x\right)}{x^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x^2-1-x^2-1+\ln x}{x^2}=\frac{x^2-2+\ln x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$$

3.استنتاج اتجاه تغير الدالة f **(0.5ن)**

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ أي الدالة f متناقصة على المجال $]-\infty;\alpha]$ ومتزايدة على المجال $[\alpha;+\infty[$

جدول تغيرات الدالة f (0.5ن)

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$

4. أ- بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل المستقيم (D) الذي معادلته $y=x$ كمستقيم مقارب مائل عند $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)=0$$

ومنه (C_f) يقبل المستقيم (D) الذي معادلته $y=x$ كمستقيم مقارب مائل عند $+\infty$ (0.75ن)

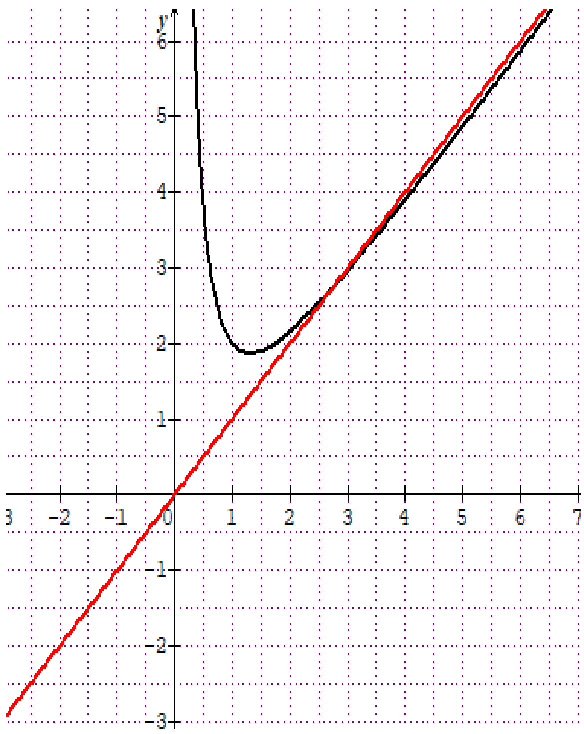
ب- أدرس الوضع النسبي بين (C_f) و (D). (0.5ن)

$$f(x)-y=\frac{1-\ln x}{x}$$

$f(x)-y=0$ تكافئ: $1-\ln x=0$ ومنه: $x=1$

x	0	1	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$	0	$-$
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)	تقاطع	(C_f) تحت (Δ)

5. أنشئ (C_f) و (D) . نأخذ $f(\alpha)=1.85$. (0.75ن)



III. الدالة G معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $G(x)=\frac{x^3}{3}+x\ln x-3x$

أ- حساب $G'(x)$. (0.5ن)

الدالة G قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و:

$$G'(x)=x^2+\ln x+1-3$$

ومنه: $G'(x)=x^2+\ln x-2$

ب- استنتج دالة أصلية للدالة g على المجال $]0;+\infty[$ التي تحقق: $G(1)=1$ (0.75ن)

$$G(x)=\int_1^x g(t)dt$$

$$G(x)=\int_1^x\left(t^2+\ln t-2\right)dt$$

$$=\left[\frac{1}{3}t^3+t\ln t-2t\right]_1^x$$

$$=\frac{1}{3}x^3+x\ln x-2x-\frac{1}{3}+2$$

إذا:

$$G(x)=\frac{1}{3}x^3+x\ln x-2x+\frac{5}{3}$$

بالتوفيق في بكالوريا 2023