

# 用快速电子验证动量-动能的相对论关系

智朝晖\*, 张高龙†

北京航空航天大学大学 物理学院, 北京 100191

**【摘要】** 经典力学和电磁学以及光学之间的矛盾, 促成了狭义相对论理论的诞生. 狭义相对论理论对于高速物体的运动, 和经典力学对于物体的动量-动能关系, 给出了不同的预计. 本实验通过测量高能  $\beta$  粒子的动量和动能, 验证了狭义相对论对于高速运动物体动量-动能关系的预计. 并且通过对于空气中  $\beta$  粒子运动的研究, 证明了  $\beta$  粒子在空气中运动时会损失能量.

**【关键词】** 动量-动能关系,  $\beta$  衰变,  $\beta$  粒子, 狭义相对论

## 1 引言

19 世纪, 电磁理论得到了极大的发展; 麦克斯韦 (James C. Maxwell) 等人的工作表明, 电磁理论可以完美地整合到一组方程中 `maxwell1865dynamical`, 这便是麦克斯韦方程组. 麦克斯韦方程组完整地描述了经典电动力学中的现象, 其波动解自然地给出了电磁波的预测; 通过计算波速:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (1)$$

麦克斯韦发现 `maxwell1865dynamical`, 可见光正是一种电磁波, 从而统一了光学和电磁学.

然而, 麦克斯韦方程与经典的伽利略变换不可调和. 于是人们猜测, 麦克斯韦方程实际只适用于一个特殊的参考系; 相应地, 电磁波在一种特殊的介质——以太 (aether) 中传播, 可以通过精确测量光速的变动获得地面参考系相对以太的漂移速度. 然而, 实验迹象表明, 这一漂移速度十分微小; 迈克尔逊-莫雷实验 (Michelson-Morley experiment, 1887) `michelson1887relative` 给出漂移速度的上限为 8 km/s, 考虑地球的公转以及太阳系的运动, 这一速度实在微乎其微, 令人费解<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>最近的实验结果给出的上限为  $10^{-17}c \approx 3 \text{ nm/s}$ , 参见 [1].

人们不得不转而考虑另一种可能的办法, 即对伽利略变换进行修正. 经由洛伦兹 (Hendrik Lorentz, 参见 [2])、庞加莱 (Henri Poincaré, 参见 [3]) 及爱因斯坦 (Albert Einstein) 等人的共同努力, 以洛伦兹变换为基础的狭义相对论时空观得以建立. 相对论时空观与经典时空观的主要差异在于:

- 光速不变:** 在所有惯性系中, 真空光速恒为  $c$ , 它同时也是运动速度的上限;
- 相对时空:** 不存在绝对时空, 尤其是不存在绝对的时间坐标; 所有惯性系在物理上都是平等的, 物理规律具有相同的形式.

相对论时空观自然与电动力学相容, 但又引出了一些新的疑问. 例如, 作为时间相对性的直接推论, 运动的时钟与静止的时钟并不同步 (钟慢效应); 类似的反直观现象还有动尺收缩等等. 进一步, 对于高速运动的粒子而言, 狭义相对论的动力学对物体的动量-动能关系做出了不寻常的预计; 通过探测高速运动粒子的动量和能量, 我们可以方便地验证这一新的色散关系 (dispersion relation, 借用了光学中动量-能量关系的等价表述), 从而初步检验狭义相对论的正确性; 此即本实验的首要目的.

## 2 理论

相对论性的时空由事件 (events) 构成, 时空间隔表示为四矢量:

$$\begin{aligned} dx^\mu &\sim \left( \frac{c dt}{dx} \right), \mu = 0, 1, 2, 3 \\ dx^0 &= c dt, dx^i = dx^i, i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (2)$$

其中  $c$  为光速; 光速不变原理表明, 变换到另一惯性系后, 相应的时空间隔保持不变 (类似于洛伦兹变换中, 空间间隔保持不变), 即:

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu &\equiv \sum_{\mu,\nu} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= (c dt)^2 - d\mathbf{x}^2 \text{ 是洛伦兹不变量 (标量),} \\ \eta_{\mu\nu} &\sim \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

考察运动物体的共动参考系, 其时间坐标  $\tau$  称为固有时或原时, 有:

$$\begin{aligned} (c d\tau)^2 - 0 &= (c dt)^2 - (d\mathbf{x})^2 \\ \Rightarrow d\tau &= dt \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} = \frac{1}{\gamma} dt, \end{aligned} \quad (4)$$

这里  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}}$ .  $\gamma$  因子表征了相对论与经典情形的差异。

四动量  $p^\mu = m \frac{dx^\mu}{d\tau} \sim \gamma m \left( \frac{c}{\mathbf{v}} \right) = \left( \frac{E/c}{\mathbf{p}} \right)$ , 它同样是洛伦兹标量; 这给出:

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu &= \left( \frac{E}{c} \right)^2 - \mathbf{p}^2 = (mc)^2, \\ E^2 &= \mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4 \end{aligned} \quad (5)$$

此即相对论性色散关系。我们发现, 非零质量的粒子不仅具有动能, 还具有静能  $mc^2$ ; 扣除掉静能后, 粒子的动能可表示为:

$$\begin{aligned} E_k &= \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} - m^2 c^4 \\ &\rightarrow \frac{1}{2} m v^2 \left( 1 + O\left(\frac{v}{c}\right)^2 \right) \end{aligned} \quad (6)$$

可见, 在低速极限下, 相对论性色散关系回归至经典情形; 而对于高速运动的粒子,  $\left(\frac{v}{c}\right)^2$  阶项不可忽略, 两者将会出现显著的差异。本实验即采用  $\beta$  衰变产生的高速  $\beta$  粒子, 试图观测这一非经典的现象。

## 3 实验

### 3.1 实验原理

实验装置的基本结构如图 1 所示, 使用  $^{90}\text{Sr}-^{90}\text{Y}$   $\beta$  源产生高速  $\beta$  粒子 (负电子, 质量  $m =$

$0.511 \text{ MeV}/c^2$ ), 能量上限为  $2.27 \text{ MeV}$ , 假定相对论色散关系确切无误, 这意味着粒子的速度最高可达 97% 光速, 应当出现显著的相对论效应。

带电粒子的动量通过磁谱仪测定。据经典电动力学, 磁场中电子的运动方程:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (7)$$

注意到相对论与电动力学的相容性, 此运动方程对高速情形依然成立; 垂直射入匀强磁场中的粒子轨迹为圆弧, 方程进一步简化为:

$$p = eBR = \left( \frac{BRc}{\text{MV}} \right) \frac{\text{MeV}}{c} \quad (8)$$

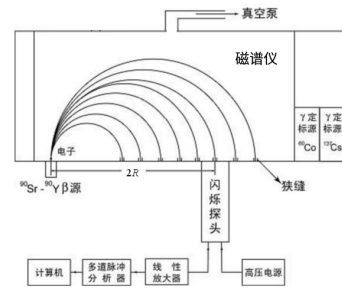


图 1 实验装置示意图, 参考[4]。

$\beta$  粒子源射出的粒子经准直后进入磁谱仪, 真空泵可控制其真空度, 减少碰撞导致的能动能改变。 $\beta$  粒子运动半周后离开磁谱仪, 进入闪烁探头; 数据按图示流程进行采集、分析。闪烁探头固定在轨道上, 有坐标  $x$  便于确定其位置; 实际有:

$$2R = x - 10 \text{ cm}$$

应当注意, 辐射阻尼可能导致粒子损失动能。利用亚伯拉罕-洛伦兹方程:

$$\mathbf{F} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \dot{\mathbf{a}} \quad (9)$$

结合本实验中装置的  $B = 636.6 \text{ G} = 63.66 \text{ mT}$ , 加速度的变化率  $\dot{a} \sim \frac{v^2}{r} \cdot \frac{v}{r}$ , 估计辐射阻尼的等效作用力  $F$  及外磁场作用力  $evB$  分别为:

$$F \sim \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 r^2} \left( \frac{v}{c} \right)^3 \sim 10^{-26} \text{ N}, evB \sim ecB \left( \frac{v}{c} \right) \sim 10^{-12} \text{ N} \quad (10)$$

因此可以安全地略去辐射阻尼的影响。

动能测定通过 NaI (TI) 闪烁体探测器实现。入射粒子的动能传递给闪烁体使之激发、退激, 放出光子 (闪烁), 经光电倍增、前置放大、线性放大等步骤, 转化为充分强的电脉冲输入多道分析器; 多道分析器将脉冲强度转化为道址  $n$  存储并计数。

注意, 上述能量转换过程基本上是线性的, 即有  $n \propto E$ ; 利用标准放射源  $^{137}\text{Cs}$  和  $^{60}\text{Cs}$  进行定标, 可进一步确定  $n-E$  关系, 由此获得粒子的动能。此外,  $\beta$  粒子在穿入、穿出真空室以及进入探头的过程中存在能量损失, 需要进行修正; 采用<sup>[4]</sup> 给出的数值进行修正<sup>2</sup>。

### 3.2 实验数据

最后的实验结果如下

|        |       |       |      |      |
|--------|-------|-------|------|------|
| 能量/MeV | 0.184 | 0.662 | 1.17 | 1.33 |
| 道数/CH  | 97    | 313   | 536  | 605  |

表 1 测量的道数对应的能量

利用最小二乘法, 拟合出来能量  $E$  和道数  $CH$  的关系为:

$$E = a + b \times CH$$

$$\rightarrow E = 0.0023CH - 0.0383, R=0.9999 \quad (11)$$

|       |        |        |        |        |        |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|
| x     | x_1    | x_2    | x_3    | x_4    | x_5    |
| 位置/cm | 12     | 14     | 16     | 18     | 20     |
| CH    | 300    | 370    | 457    | 535    | 620    |
| 动量    | 1.142  | 1.332  | 1.523  | 1.713  | 1.903  |
| 能量    | 0.6517 | 0.8127 | 1.0128 | 1.1922 | 1.3877 |

表 2 不同位置的粒子对应的道数和动量, 以及道数对应的能量

## 4 实验结果与分析

根据  $6E_k = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} - m^2 c^4$  我们带入得到动能的理论值为3:

结果如图2所示:

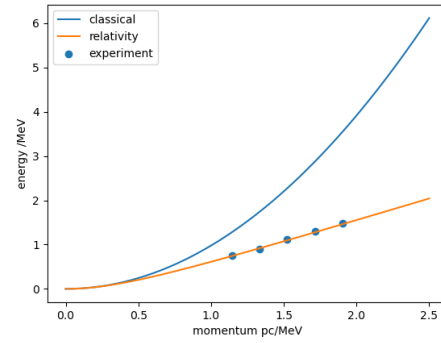


图 2 粒子的相对论和经典动能动量关系以及实验数据

|     |        |        |        |        |        |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|
| 理论值 | 0.740  | 0.916  | 1.096  | 1.277  | 1.459  |
| 测量值 | 0.6517 | 0.8127 | 1.0128 | 1.1922 | 1.3877 |
| 真实值 | 0.749  | 0.9007 | 1.109  | 1.2986 | 1.485  |

表 3 能量的理论值、测量值、真实值

我们可以看到相对误差为: 1.2%, 1.63%, 1.24%, 1.72%, 1.75%。误差很小。

在此基础上, 我们尝试估计  $\beta$  粒子在 1 atm 的衰减长度  $L_0$ 。与空气分子的碰撞导致沿轨迹运动的粒子数目指数衰减, 考虑探测装置的效率  $\epsilon$ , 有探测到的粒子数目:

$$N_0 = \epsilon C e^{-\frac{L}{L_0}}, \quad p = p_0 = 1 \text{ atm} \quad (12)$$

此外, 粒子的自由程反比于压强, 故改变压强  $p$  时, 有:

$$N = \epsilon C e^{-\frac{pL}{p_0 L_0}} \Rightarrow L_0 = L \left( 1 - \frac{p}{p_0} \right) / \ln \frac{N}{N_0} \quad (13)$$

本实验中,  $L = \pi R, (1 - \frac{p}{p_0}) \rightarrow 1$ , 进一步有:

$$L_0 = \pi R / \ln \frac{N}{N_0} \quad (14)$$

$\beta$  粒子在空气中的衰减长度  $L_0$  大致为三十几厘米, 且  $L_0$  似乎随着粒子能动量的增大而增大。可以肯定的是, 该能量范围的  $\beta$  粒子在 1 atm 下的衰减长度大致均在 30 cm to 40 cm 上下, 与  $L$  在同一量级。这也进一步肯定了在真空环境中进行实验的必要性。

<sup>2</sup>参考<sup>[4]</sup> p.109 to 110, 表 4.1-1 及 4.1-2.

## 5 结 论

实验证实了高能  $\beta$  粒子的动量-动能的关系（色散关系）满足狭义相对论的理论预测，即在误差容许的范围内，有：

$$E_k = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} - m^2 c^4 \quad (6)$$

从而初步验证了狭义相对论对高速运动物体的适用性。同时，实验结果与经典理论的严重偏离确认了经典力学对高速运动不适用。

在此基础上，实验估测了  $\beta$  粒子在 1 atm 空气中的衰减长度  $L_0 \sim 30 \text{ cm to } 40 \text{ cm}$ ，从而强调了真空环境对提高数据质量的重要意义。

### 参考文献

- [1] HERRMANN S, SENGGER A, MÖHLE K, et al. Rotating optical cavity experiment testing lorentz invariance at the 10- 17 level[J]. Physical Review D, 2009, 80(10): 105011.
- [2] LORENTZ H. Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity smaller than that of light[C]//KNAW Proceedings: volume 6. 1904: 1903-1904.
- [3] POINCARÉ H. The measure of time[M]//The Concepts of Space and Time. Springer, 1976: 317-327.
- [4] 钱建强, 张高龙. 近代物理实验[M]. 近代物理实验, 2016.