（回忆大学所学）线性代数

一、行列式

（1）行列式的由来

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 & (1) \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 & (2) \end{cases}$$

$$(2)-\frac{a_{21}}{a_{11}}(1)=(a_{22}-\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}})x_2=b_2-\frac{a_{21}b_1}{a_{11}}\Rightarrow(\frac{a_{11}a_{12}-a_{12}a_{21}}{a_{11}})x_2$$
$$=\frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}}\Rightarrow x_2=\frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{11}}$$

$$(2)-\frac{a_{22}}{a_{12}}(1)=(a_{21}-\frac{a_{11}a_{22}}{a_{12}})x_1=b_2-\frac{a_{22}b_1}{a_{12}}\Rightarrow(\frac{a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22}}{a_{12}})x_1$$
$$=\frac{a_{12}b_2-a_{22}b_1}{a_{12}}\Rightarrow x_1=\frac{a_{12}b_2-a_{22}b_1}{a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22}}$$

$$x_1=\frac{a_{12}b_2-a_{22}b_1}{a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22}}\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{11}}$$

整理： $x_1=\dfrac{a_{12}b_2-a_{22}b_1}{a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22}}\quad x_2=\dfrac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{11}}$

它们的分母都是$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{11}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

（2）行列式的定义

1.逆序数定义法

①排列：如$a_1a_2\ldots a_n$这样的一个有序数组（下标有序），称为一个（n 阶）排列

②逆序：如果$a_i<a_j$且$i<j$，则称为一个逆序；如(5,3)就是一个逆序

③逆序数：一个排列中全部逆序的个数，称为逆序数；如$\sigma(1,2)=0,\ \sigma(2,1)=1,\ \sigma(3,1,2)=2,\ \sigma(3,2,1)=3$，其中$\sigma$是求逆序数的符号

逆序数定义法：

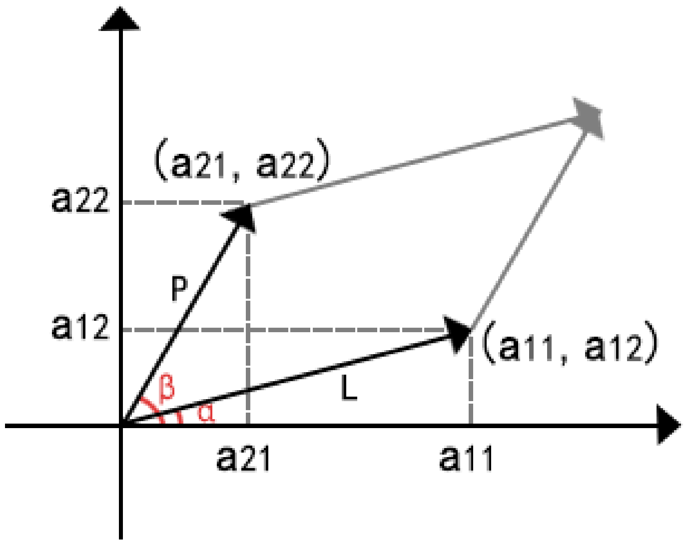
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = |a_{ij}| = \sum_{j_1 \cdots j_n} (-1)^{\sigma(j_1 \cdots j_n)} a_1 j_1 a_2 j_2 \dots a_n j_n$$

例：$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 1 \\ 0 & 8 & 6 \end{vmatrix}$ 如果取9、4、8，请问是带正号还是负号？

解：$a_{13} = 9,\ a_{21} = 4, a_3 2 = 8;\ \sigma(312) = 2;$

则$(-1)^2 \times 9 \times 4 \times 8 = +288$（带正号）

2.几何定义法（向量为邻边/棱，围成的图像的面积/体积）



S平行四边形 = L * P * sin(β－α)

= L * P * (sinβcosα － cosβsinα)

= LP * sinβcosα － LP * cosβsinα

= Lcosα * Psinβ － Lsinα * Pcosβ

= a11 * a22 － a12 * a21

（3）行列式的计算

1.沙路法（划线法，主对角线-负对角线）

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 9 & 7 \end{vmatrix} = 5*7 - 3*9 = 35 - 27 = 8$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 9 & 7 & 2 \\ 6 & 4 & 0 \end{vmatrix} \begin{aligned} &= 5*7*0 + 3*2*6 + 9*4*8 \\ &- 8*7*6 - 3*9*0 - 2*4*5 \\ &= 0+36+288 - 336-0-40 \\ &= -52 \end{aligned}$$

注：只能用于三阶以下（含三阶）的行列式

2.定义法

$$\begin{vmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a11 \begin{cases} a22-a33 = (-1)^{\sigma(1,2,3)} = +a11a22a33 \\ a23-a32 = (-1)^{\sigma(1,3,2)} = -a11a23a32 \end{cases} \\ a12 \begin{cases} a21-a33 = (-1)^{\sigma(2,1,3)} = -a12a21a33 \\ a23-a31 = (-1)^{\sigma(2,3,1)} = +a12a23a31 \end{cases} \\ a13 \begin{cases} a21-a32 = (-1)^{\sigma(3,1,2)} = +a13a21a32 \\ a22-a31 = (-1)^{\sigma(3,2,1)} = -a13a22a31 \end{cases} \end{array}$$

3.展开公式（最常用）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

其中$A_{11} = (-1)^{(1+1)} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

称“去掉第1行第1列的代数余子式”

注：一般哪行/列 0 比较多，就按那行/列来展开；展开公式本质是一种降维打击

4.特殊的行列式

①上/下三角行列式和反三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

②爪型行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{斜消直}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

③范德蒙德行列式（Vandermonde）

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_3^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le j\le i\le n} (x_i - x_j)$$

例：$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1)$

④拉普拉斯公式（Laplace）

$$\begin{vmatrix} A & * \\ 0 & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ * & B \end{vmatrix} = |A||B|$$

$$\begin{vmatrix} * & A \\ B & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & A \\ B & * \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|A||B|$$

注：其中 A 为 m 阶方阵，B 为 n 阶方阵，*为任意方阵，0 位零矩阵

（4）行列式的性质

1.转置

$|A^T| = |A|$，这表示行性质同时也是列性质

2.可拆

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+b_1 & a_{22}+b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

3.互换

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}$$

4.数乘

$$k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{vmatrix}$$

5.倍加（最常用）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+ka_{11} & a_{22}+ka_{12} \end{vmatrix}$$

（5）行列式的应用

1.线性相关性

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0,$ 表示向量(a_{11}, a_{21})和向量(a_{12}, a_{22})线性相关

反之，则线性无关

2.判断矩阵是否可逆

$|A| \neq 0 \Leftrightarrow A$可逆，也就是线性无关即为可逆矩阵

3.克莱默法则（Cramer）

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \Rightarrow \text{系数矩阵} A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow$ 方程组有唯一解

如果$b_1 = b_2 = 0$（齐次），则唯一解为$x_1 = x_2 = 0$

如果$b_1 \neq 0,\ b_2 \neq 0$（齐次），则唯一解为$x_1 = \dfrac{D_1}{|A|},\ x_2 = \dfrac{D_2}{|A|}$

其中$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\ D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$

注：$D_i =$ 去掉第i列后用常数项替代

二、矩阵

（1）矩阵的由来

1.矩阵——用于描述系统信息

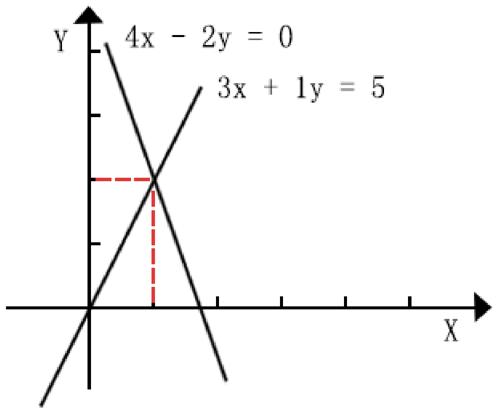
称呼	身高	体重	学历	性格
A小姐	165cm	45kg	本科	傲娇
B小姐	170cm	50kg	硕士	人妻

$$\xrightarrow{\text{抽象+量化}} \begin{pmatrix} 165\ 45\ 2\ 1 \\ 170\ 50\ 3\ 0 \end{pmatrix}$$

设：本科为2，硕士为3；傲娇为1，人妻为0

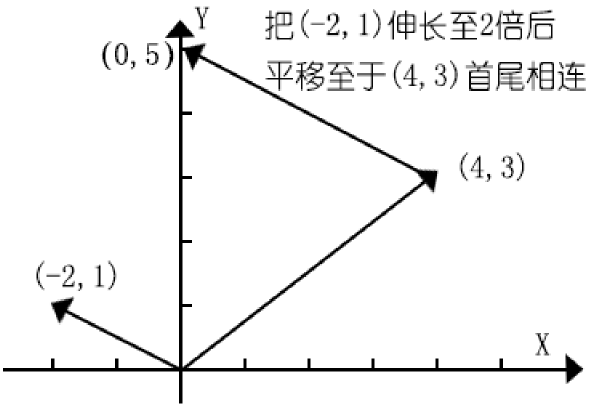
2.行图像（中学的作图法）

$$\begin{cases} 4x+2y=0 \\ 3x+y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$



3.列图像（线性组合法）

$$\begin{cases} 4x+2y=0 \\ 3x+y=5 \end{cases} \Rightarrow x\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$



（2）矩阵的运算

1.加减法（对应元素相加减，前提是同型矩阵）

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} \end{pmatrix}$$

2.数乘（主要和行列式数乘的区别）

$$k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix}$$

3.乘法（左行 x 右列，重点）

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

（3）如何求逆矩阵（矩阵除法）

1.定义法

$AA^{-1} = A^{-1}A = E \Leftrightarrow A$可逆，$A^{-1}$是A的逆矩阵

如“乘法”中的这个例子：$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

则 $\begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} \end{pmatrix}$ 就是 $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

2.伴随矩阵

$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$ 其中A_{ij}为代数余子式

例：$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ 则：$A^* = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

口诀：主对角元素对换，其他元素变号（针对二阶矩阵）

核心公式：$AA^* = A^*A = |A|E \Rightarrow A\frac{A^*}{|A|} = E \Rightarrow$求出逆矩阵

注：因为计算多个代数余子式太麻烦了，所以一般只在三阶内用此法

3.初等变换（最常用）

①互换（注意和行列式互换的区别）

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}$$

②数乘（这不是矩阵运算里的那个数乘）

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

③倍加（最常用）

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{11}+a_{21} & ka_{12}+a_{22} \end{pmatrix}$$

例：求$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$的逆矩阵

解：$\begin{pmatrix} 2 & 4 & | & 1 & 0 \\ 3 & 5 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & | & 1 & 0 \\ 0 & -1 & | & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & | & -5 & 4 \\ 0 & -1 & | & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & \frac{-5}{2} & 2 \\ 0 & 1 & | & \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-5}{2} & 2 \\ \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

补充：单位矩阵经过一次初等变换后得到的矩阵叫初等矩阵

单位矩阵初等变换后为初等矩阵：$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

左乘行变换：$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

右乘列变换：$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & a_{12} \\ ka_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

A 矩阵与初等矩阵相乘 ＝ 对 A 矩阵进行相同的初等变换

4.分块矩阵

$$\begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} a11 & a12 & a13 \\ \hline a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

其中A=（a11），B=（a12 a13），C= $\begin{pmatrix} a21 \\ a31 \end{pmatrix}$ ，D= $\begin{pmatrix} a22 & a23 \\ a32 & a33 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

补充：|AB| = |A||B|（两个矩阵相乘的行列式 = 两个矩阵的行列式之和）

$$(A^{-1})^{-1} = A \qquad (A^T)^T = A$$
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \qquad (AB)^T = B^T A^T$$
$$(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1} \qquad (kA)^T = kA^T$$
$$(A+B)^{-1} = \text{不存在} \qquad (A+B)^T = A^T + B^T$$

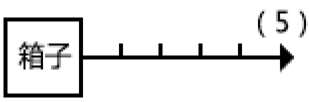
三、向量组

（1）向量的定义

什么是向量，什么是向量组？

向量：有大小有方向的量（可视作空间中的箭头）

一个箱子被5N的力拉动



建立坐标后便可这样表示

在数学上，无论是向量还是向量组都不过只是一堆数值。

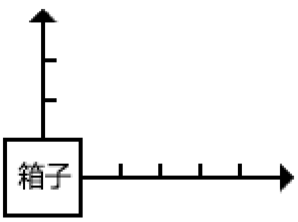
向量长成这个样子：$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}$

而向量组：$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

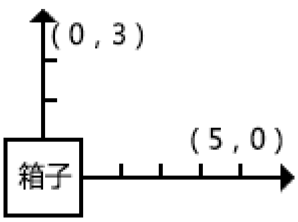
这便使向量和矩阵发生了联系。

向量组：有多个向量构成的集合

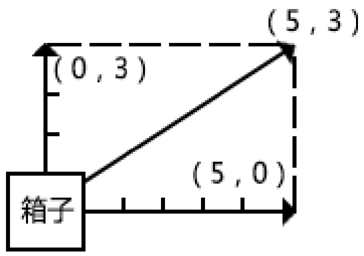
（作用于用一个对象的多个向量，称为线性组合）



箱子被5N和3N的力拉动



坐标化（两方向的力-二维）



组合后（平行四边形原则）

（2）向量的关系

1.线性组合

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_n\alpha_n$，称为$\alpha_1\ldots\alpha_n$的线性组合（其中$k_i$为常数）

2.线性表出（线性表示）

$\beta\overset{if}{=}k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_n\alpha_n$，则称$\alpha_1\ldots\alpha_n$是$\beta$的线性表出（线性表示）

3.线性相关

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_n\alpha_n\overset{if}{=}0$，则称$\alpha_1\ldots\alpha_n$是线性无关（反之，线性相关）

还记得另外一种描述方法吗？$|\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n|=0$，则线性相关

补充：方程组问题变成向量组问题

非齐次方程组：

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2\end{cases}\overset{列图像}{\Rightarrow}x_1\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$$

$\overset{\alpha和\beta表示向量}{\Rightarrow}\quad x_1\alpha_1+x_2\alpha_2=\beta$（能否线性表出？）

齐次方程组：

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2=0\end{cases}\overset{列图像}{\Rightarrow}x_1\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

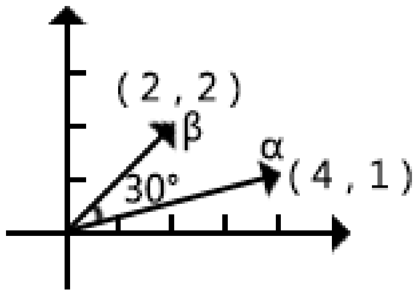
$\overset{\alpha和\beta表示向量}{\Rightarrow}\quad x_1\alpha_1+x_2\alpha_2=\beta$（是否线性相关？）

4.内积（也叫“点积”和“数量积”，实则有细微的区别）

$\alpha=(x_1,x_2)^T,\ \beta\alpha=(y_1,y_2)^T,\ \alpha\cdot\beta=\alpha^T\beta$

$=(x_1\quad x_2)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=x_1y_1+x_2y_2$（可推广至$n$维）

在几何下，$\alpha\cdot\beta$表示$|\alpha|\cdot|\beta|\cdot\cos(\alpha,\beta)$，在数值上，就是对应元素相乘再相加



$$\alpha\cdot\beta=|\alpha|\cdot|\beta|\cdot cos(\alpha,\beta)$$

$$=(4\quad 1)\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=4\times2+1\times2$$

$$=8+2=10$$

注：矩阵乘法其实就是在不断地作内积

拓展：点积和数量积是在“欧几里得空间”里的叫法；而内积的范围更广，不仅在实数域，更是在复数域，并且在复数域中“对应元素相乘再相加”这一法则就失效了，如（i, i, i）与自身的内积 = -3（内积表示一种距离，不可能是负的）

5.正交

$\alpha\cdot\beta=0\Leftrightarrow\alpha$与 β 正交$\Leftrightarrow\alpha\perp\beta$（$\alpha$垂直于 β，因为$\cos 90°=0$）

6.标准正交基（标准正交向量组）

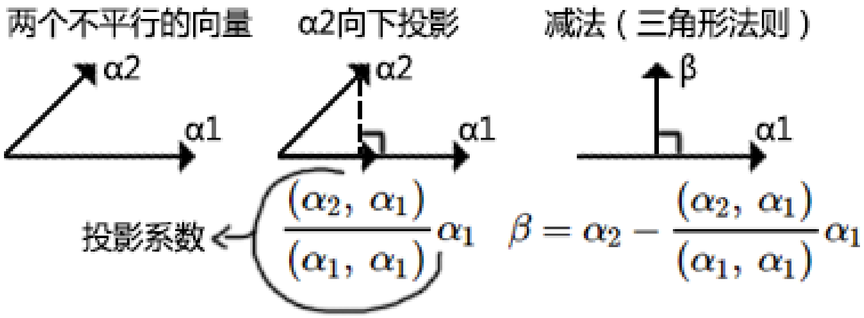
两两正交的单位向量，叫标准正交基（单位向量就是模为 1 的向量，模是向量的长度，数值上等于自己与自己的内积），单位矩阵 E 是一种常见的标准正交基

7.正交矩阵（标准正交矩阵）

由标准正交基拼起来的矩阵，叫正交矩阵

正交矩阵的特点：$\mathrm{A}^{\mathrm{T}}A=E\Rightarrow A^{T}=A^{-1}$

8.施密特正交化（Schmidt）



$$\beta_1=\alpha_1$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(a_2,\ \beta_1)}{(\beta_1,\ \beta_1)}\beta_1$$

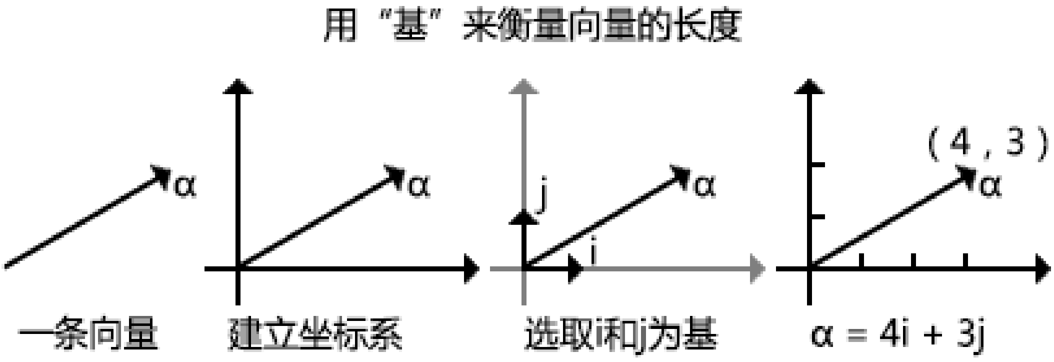
$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(a_3,\ \beta_2)}{(\beta_2,\ \beta_2)}\beta_2-\frac{(a_3,\ \beta_1)}{(\beta_1,\ \beta_1)}\beta_1$$

$$\cdots\cdots$$

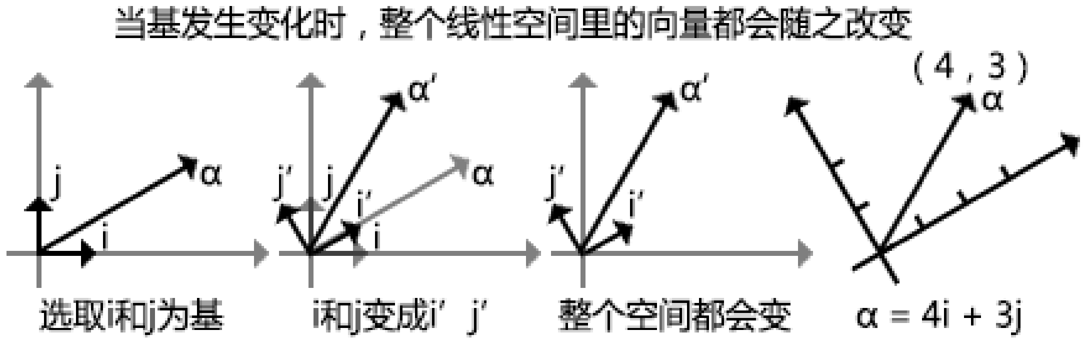
$$\beta_n=\alpha_n-\frac{(a_n,\ \beta_{n-1})}{(\beta_{n-1},\ \beta_{n-1})}\beta_{n-1}-\frac{(a_n,\ \beta_{n-2})}{(\beta_{n-2},\ \beta_{n-2})}\beta_{n-2}-\ \cdots\ -\frac{(a_2,\ \beta_1)}{(\beta_1,\ \beta_1)}\beta_1$$

（3）线性空间

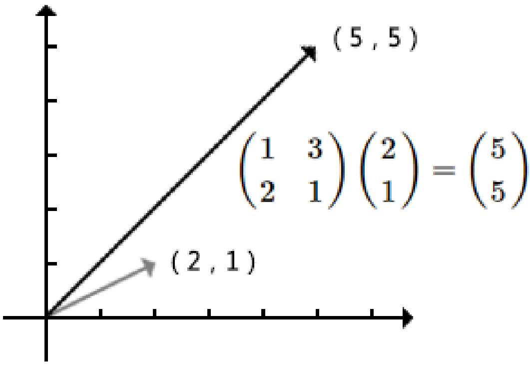
1.基（度量工具）



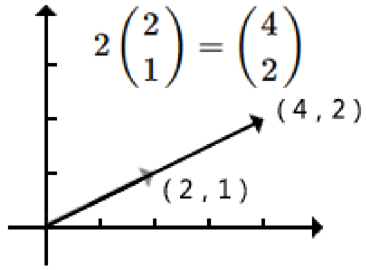
2.基变换



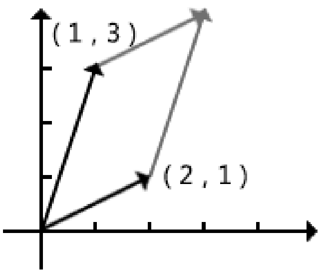
3.线性变换（又叫线性映射，或线性算子）



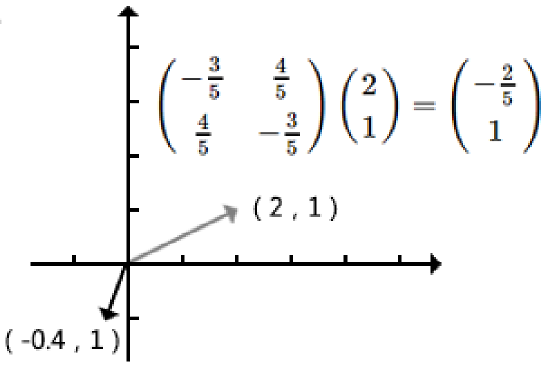
矩阵乘以向量（线性变换-伸缩和旋转）



常数乘以向量（线性变换-伸缩）



行列式代表伸缩因子（衡量变换的程度）



正交矩阵乘以向量（正交变换）

4.极大无关组

在向量组（ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ）中取出部分向量后，重组成一个线性无关的新向量组（ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ ）（m≤n），如果再从剩下的向量中取出任意向量加入新向量组中，都会导致线性相关，则称（ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ ）为极大无关组

5.秩（实际维度）

极大无关组中向量的个数，称为秩

从几何上看，一个向量组所张开的空间的最高维度，就是秩

从方程上看，方程组中对变量的约束条件，就是秩

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2=0 \\ 5x_1+9x_2=0 \end{cases} \text{秩为}2\text{，满秩，有唯一解（零解）}$$

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2=0 \\ 6x_1+8x_2=0 \end{cases} \text{秩为}1\text{，非满秩，有无穷多解}$$

常用公式：

$$r(A^TA)=r(AA^T)=r(A), \quad r(A+B)\le r(A)+r(B)$$
$$r(AB)\le min(r(A),r(B)), \quad AB=0,\ r(A)+r(B)\le \text{内标}$$
$$P,Q\text{可逆},\ r(A)=r(PA)=r(AQ)=r(PAQ)$$
$$r(A^*)=n, \quad r(A)=n;r(A^*)=1, \quad r(A)=n-1;r(A^*)=0, \quad r(A)\le n-1$$

四、方程组

（1）齐次方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2-3x_4-x_5=0 \\ x_1-x_2+2x_3-x_4=0 \\ 4x_1-2x_2+6x_3+3x_4-4x_5=0 \\ 2x_1+4x_2-2x_3+4x_4-7x_5=0 \end{cases} \xrightarrow{\text{①写出系数矩阵}} A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{（只准行变换）}]{\text{②化行阶梯形矩阵}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 6 & 15 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 10 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{剩余n-r(A)列为自由变量} \\ \text{（即2列）}}]{\substack{\text{③在每个阶梯上任取一列} \\ \text{（共秩r(A)列，即3列）}}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{设一个线性无关的系数}]{\text{④为每一个自由变量}} \xi_1=(\ \ ,\ \ ,1,\ 0,\ \ )^T \quad \xi_2=(\ \ ,\ \ ,0,\ 1,\ \ )^T$$

$$\xrightarrow{\text{⑤求出基础解系}} \xi_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \xi_2=\begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{则}\xi=k_1\xi_1+k_2\xi_2=k_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

（k_1和k_2为常数）

（2）齐非次方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2-3x_4-x_5=3 \\ x_1-x_2+2x_3-x_4=2 \\ 4x_1-2x_2+6x_3+3x_4-4x_5=6 \\ 2x_1+4x_2-2x_3+4x_4-7x_5=7 \end{cases} \xrightarrow{\text{①写出增广矩阵}} \tilde{A}=\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 & 6 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7 & 7 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{（只准行变换）}]{\text{②化行阶梯形矩阵}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -6 & 6 & 15 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -2 & 10 & -5 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\text{剩余n-r(A)列为自由变量} \\ \text{（即2列）}}]{\substack{\text{③在每个阶梯上任取一列} \\ \text{（共秩r(A)列，即3列）}}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{设一个线性无关的系数}]{\text{④为每一个自由变量}} \xi_1=(\quad,\quad,1,\ 0,\quad)^T \quad \xi_2=(\quad,\quad,0,\ 1,\quad)^T$$

$$\xrightarrow{\text{⑤求出基础解系}} \xi_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \xi_2=\begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad 则\xi=k_1\xi_1+k_2\xi_2=k_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

（k_1和k_2为常数）

$$\xrightarrow[\text{通过增广矩阵求得}]{\text{⑥加上一个特解}} \xi=(\quad,\quad,0,\ 0,\quad)^T \quad 则\xi=k_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

（3）快速求基础解系

$$\begin{cases} x_1+x_2-3x_4-x_5=0 \\ x_1-x_2+2x_3-x_4=0 \\ 4x_1-2x_2+6x_3+3x_4-4x_5=0 \\ 2x_1+4x_2-2x_3+4x_4-7x_5=0 \end{cases} \xrightarrow{\text{①写出系数矩阵}} A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{（只准行变换）}]{\text{②化行阶梯形矩阵}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 6 & 15 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 10 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{（只准行变换）}]{\text{②化为行最简矩阵}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{6} \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{6} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -\frac{5}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

把自由变量位于台阶上的数取反，并搬入解系中

$$\xrightarrow[\text{（同解方程组）}]{\text{④求出基础解系}} \begin{cases} x_1+x_3-\frac{7}{6}x_5 \\ x_2-x_3-\frac{5}{6}x_5 \\ x_4-\frac{1}{3}x_5 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} -x_3+\frac{7}{6}x_5 \\ x_3+\frac{5}{6}x_5 \\ x_3 \\ \frac{1}{3}x_5 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_3\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5\begin{pmatrix} \frac{7}{6} \\ \frac{5}{6} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

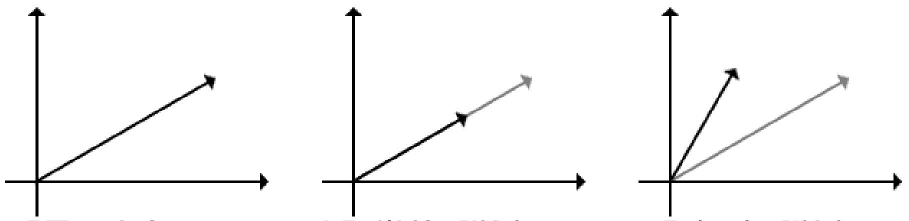
五、特征值

（1）特征值和特征向量

1.定义

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \Rightarrow A\xi = \lambda\xi \text{（λ为常数）}$$

特征值　特征向量



ξ是一个向量　　λξ: 常数乘以向量（只做伸缩变换）　　Aξ: 矩阵乘以向量（旋转和伸缩变换）

现在一不小心，Aξ = λξ，表示某矩阵只对某向量做了伸缩变换

2.计算（先求特征值，后根据特征方程求对应的特征向量）

$$A\xi=\lambda\xi\Rightarrow|A-\lambda E|=0$$

例：求$A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}$的特征值和特征向量

①求特征值

$$|A-\lambda E|=\left|\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}1-\lambda&-1&-1\\-1&1-\lambda&-1\\-1&-1&1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1-\lambda&-1&-1\\-1&1-\lambda&-1\\-1&-1&1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1&1&1\\1&\lambda-1&1\\1&1&\lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda+1&\lambda+1&\lambda+1\\1&\lambda-1&1\\1&1&\lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+1)\begin{vmatrix}1&1&1\\1&\lambda-1&1\\1&1&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+1)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&\lambda-2&0\\0&0&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-2)^2=0$$

$$\Rightarrow\lambda_1=-1,\ \lambda_2=\lambda_3=2$$

②求特征向量

$$\lambda_1=-1\text{代入}(A-\lambda E)X=0\Rightarrow\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2&1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&0&0\\0&-3&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\text{（行最简矩阵，直接求解系）}$$

$$\overset{\text{基础解系}}{\Rightarrow}\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad\lambda_2=\lambda_3=2\text{代入}(A-\lambda E)X=0$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\overset{\text{基础解系}}{\Rightarrow}\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\xi_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

则：特征值$\lambda=-1$对应的线性无关的特征向量$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

特征值$\lambda=2$对应的线性无关的特征向量$\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\xi_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

3.性质

特征值之和 = 迹（主对角线元素和）：$r_1+\ldots+r_n = a_{11}+\ldots+a_{nn} = tr(A)$

特征值之积 = 该矩阵的行列式：$r_1 r_2 \ldots r_n = |A|$

不同特征值的特征向量线性无关：$\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow (\xi_1 \ldots \xi_n)$与$(\eta_1 \ldots \eta_n)$线性无关

$$A\xi = \lambda\xi \Rightarrow \begin{cases} f(A)\xi = f(\lambda)\xi,\ \text{如}(A^2 - A + 2E)\xi = (\lambda^2 - \lambda + 2)\xi \\ A\text{可逆，则}\begin{cases} A^{-1}\xi = \frac{1}{\lambda}\xi\text{（}A\xi = \lambda\xi \Rightarrow \frac{1}{\lambda}\xi = A^{-1}\xi\text{）} \\ A^*\xi = \frac{|A|}{\lambda}\xi\text{（}A^*\xi = |A|A^{-1}\xi \Rightarrow A^*\xi = \frac{|A|}{\lambda}\xi\text{）} \end{cases} \\ \text{注：说明}A\ A^{-1}\ A^*\text{的特征向量相同} \end{cases}$$

（2）相似对角化的一些概念

1.什么叫矩阵相似（特征值相同）

若$\exists$可逆阵P，使$P^{-1}AP = B$，称A与B相似，记作$A \sim B$

$$\text{注：}\begin{cases} A \sim B\text{（}E^{-1}AE = A\text{）} \\ A \sim B \Leftrightarrow B \sim A\text{（}P^{-1}AP = B \Rightarrow PBP^{-1} = A \Rightarrow (P^{-1})^{-1}BP^{-1} = A\text{）} \\ A \sim B,\ B \sim C \Rightarrow A \sim C \\ \text{（}\begin{cases} P_1^{-1}AP_1 = B \\ P_2^{-1}BP_2 = C \end{cases} \Rightarrow P_2^{-1}P_1^{-1}AP_1P_2 = (P_2P_1)^{-1}A(P_1P_2) = C\text{）} \\ A \sim B \Rightarrow r(A) = r(B)\text{（}P^{-1}AP = B,\ \text{乘以可逆阵秩不变）} \\ A \sim B \Rightarrow |A - \lambda E| = |B - \lambda E| \\ \text{（}|P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P| = |P^{-1}(A - \lambda E)P| = |P^{-1}||A - \lambda E||P| = |A - \lambda E|\text{）} \\ A \sim B \Rightarrow A - \lambda E| = |B - \lambda E| \Rightarrow \text{特征值相同} \Rightarrow \begin{cases} tr(A) = tr(B) \\ |A| = |B| \end{cases} \end{cases}$$

2.什么叫矩阵合同（特征值正负个数相同）

若$\exists$可逆阵P，使$P^TAP = B$，称A与B合同，记作$A \cong B$

注：合同的前提，这两矩阵是实对称矩阵

3.什么时候合同，什么时候相似

$\mathrm{A} \cong \mathrm{B} \Leftrightarrow A^{\mathrm{T}} = A,\ \mathrm{B}^{\mathrm{T}} = \mathrm{B}$且 A 和 B 的特征值正负个数相同

$\mathrm{A} \sim \mathrm{B} \Leftrightarrow |\mathrm{A} - \lambda\mathrm{E}| = |\mathrm{B} - \lambda\mathrm{E}|$（特征值相同）且 A 和 B 都能对角化（特征向量够）

4.实对称矩阵（$\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \mathrm{A}$）

①不同特征值的特征向量一定正交（不单单是无关）

②特征值为实数

③一定能对角化

注：在《线性代数》中“实对称矩阵”重点在“对称”，因为线代里有没复数；如果在《高等代数》中，“实”字就有作用了，高代是有复数矩阵的（详情请见“酉空间”那一章）

（3）相似对角化的过程

前提：线性无关的特征向量的个数 = n（矩阵的维数） = 特征值的个数（二重根算两个，重点在重根，单根必定有一个特征向量，因为$|A-\lambda E|=0$）

（其实就是要求 P 可逆）

1.通过可逆阵 P 来对角化（低标准，满足对角化的前提即可）

例：求$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$的相似矩阵

①求特征值

$\lambda_1=-1,\ \lambda_2=\lambda_3=2$

②求特征向量

特征值$\lambda=-1$对应的线性无关的特征向量$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

特征值$\lambda=2$对应的线性无关的特征向量$\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\xi_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

③求相似矩阵$(A\xi_1\ A\xi_2\ A\xi_3)=(\lambda_1\xi_1\ \lambda_2\xi_2\ \lambda_3\xi_3)$

$$\Rightarrow A(\xi_1\ \xi_2\ \xi_3)=(\xi_1\ \xi_2\ \xi_3)\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (\xi_1\ \xi_2\ \xi_3)^TA(\xi_1\ \xi_2\ \xi_3)\overset{P=(\xi_1\ \xi_2\ \xi_3)}{\Rightarrow}P^TAP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

2.通过正交阵 Q 来对角化（高标准，必须是实对称矩阵）

例：用正交变换求$A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}$的相似矩阵

①求特征值

$\lambda_1=-1,\ \lambda_2=\lambda_3=2$

②求特征向量

特征值$\lambda=-1$对应的线性无关的特征向量$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

特征值$\lambda=2$对应的线性无关的特征向量$\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\xi_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

③正交化

$$\beta_1=\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\beta_2=\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\beta_3=\xi_3-\frac{(\xi_3,\ \beta_2)}{(\beta_2,\ \beta_2)}\beta_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$$

④规范化

$$\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\gamma_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\gamma_3=\frac{\sqrt{6}}{3}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

$$\overset{Q=(\gamma_1\ \gamma_2\ \gamma_3)}{\Rightarrow}Q^TAQ,\quad Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

⑤求相似矩阵

$$(A\gamma_1,\ A\gamma_1,\ A\gamma_1)=(-1\gamma_1,\ 2\gamma_1,\ 2\gamma_1)\Rightarrow AQ=Q\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Q^{-1}AQ=Q^{T}AQ=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$ （正交矩阵，$Q^TQ=E$）

六、二次型

（1）二次型的来由

（特征值的作用是相似对角化，相似对角化的作用是化二次型为标准型。）

1.什么是二次型（二次齐次多项式，每一项都是两个变量）

$$f(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)=\underline{a_{11}x_1^2}+\underline{2a_{12}x_1x_2}+\dots+\underline{2a_{1n}x_1x_2}$$
$$+\underline{a_{22}x_2^2}+\dots+\underline{2a_{2n}x_2x_n}$$
$$\dots\dots$$
$$+\underline{2a_{nn}x_n^2}$$

平方项　　混合项

平方项 + 混合项 = 一般项

2.如何描述二次型（平方项写主对角线，混合型拆至其他对应位置）

$$2x_1^2+6x_1x_2+2x_2^2=(x_1\quad x_2)\begin{pmatrix}2&3\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=X^TAX$$

（2）二次型标准化

1.配方法

把$f=(x_1,\ x_2)=x_1^2-4x_1x_2-x_2^2$标准化，用配方法

①矩阵化

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & -1\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix},\ f=X^TAX$$

②配方

$$f(x_1,\ x_2)=(x_1-2x_2)^2-5x_2^2$$

令$\begin{cases}x_1-2x_2=y_1\\ x_2=y_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=y_1+2y_2\\ x_2=y_2\end{cases}$

$\Rightarrow X=PY,\ P=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$可逆

③标准化

$$f=X^TAX\overset{X=PY}{\Rightarrow}Y^T(P^TAP)Y=y_1^2-5y_2^2$$

2.正交变换法

略，参考“特征值”这章里的“实对称矩阵的对角化”（就是那个高标准，低标准不行，因为只有正交矩阵才满足$A^TA=E\Rightarrow A^T=A^{-1}$这个特性，而二次型矩阵化后能被表示$\mathrm{P}^{\mathrm{T}}AP$）

补充：A 为正交矩阵，则 Y=AX 叫正交变换（保持向量内积不变，即向量长度和夹角不变）

（3）正定二次型（“正”表示大于 0，“定”表示确定）

1.什么是正定二次型（正定二次型，前提是二次型，所以一定对称）

例1：$f(x_1,\ x_2)=3x_1^2+5x_2^2=\begin{cases}f>0,\ X\neq 0\\ f=0,\ X=0\end{cases}$

例2：$f(x_1,\ x_2)=x_1^2-2x_1x_2+x_2^2=\begin{cases}f>0,\ X\neq 0\\ f=0,\ X=0\end{cases}$

例1是标准二次型，而例2是一般二次型，但是$=(x_1+x_2)^2$

例1矩阵化$=(x_1,\ x_2)\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$

例2矩阵化$=(x_1,\ x_2)\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$

其共同点，都是实对称矩阵

2.如何判断是不是正定二次型

①定义法

例：$A_{m\times n}, r(A)=n, B=A^TA,$ 证明B正定

证：$B^T=(A^TA)^T=A^TA=B$

$\forall x\neq 0, X^TBX=X^TA^TAX=(AX)^T(AX)$

若$AX=0\overset{r(A)=n}{\Rightarrow}X=0$矛盾

设$\alpha=AX\neq 0\Rightarrow X^TBX=\alpha^T\alpha=|\alpha|^2$

又$\because \alpha\neq 0\ \therefore |\alpha|^2>0\Rightarrow B$为正定二次型

②特征值法

定理：$A^T=A$且$\lambda_i>0$（特征值都大于0）$\Rightarrow A$为正定二次型

例：A正定，证明A^{-1}正定

证：$A^T=A, (A^{-1})^T=(A^T)^{-1}=A^{-1}$

设A的特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$

$\because A$正定 $\therefore \lambda_1>0, \ldots, \lambda_n>0$

又$\because A^{-1}$的特征值为$\dfrac{1}{\lambda_1}>0, \ldots, \dfrac{1}{\lambda_n}>0$

$\therefore A^{-1}$为正定二次型

③顺序主子式法（基本不用）

定理：$A^T=A$且$|a_{11}|>0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}>0,$

$\ldots, |A|>0,$ 则A为正定二次型