作业

Homework2

庄镇华 502022370071

A Game Theory Homework Assignment

NANJING UNIVERSITY

2023 年 3 月 27 日

题目一

设 $G=\{\{1,2\},\{\{a_1,a_2\},\{b_1,b_2\}\},\{u_1,u_2\}\}$，试求解如下问题的纯策略纳什均衡 (PNE) 和混合策略纳什均衡 (MNE)。

		Player 2	
		b_1,π_2	$b_2,1-\pi_2$
Player 1	a_1,π_1	a　　c	e　　g
	$a_2,1-\pi_1$	b　　d	f　　h

图 1: 收益矩阵

解答： 首先求解纯策略纳什均衡，纯策略纳什均衡很容易通过检查矩阵的每个单元格找到。例如 (a_1,b_1) 是纳什均衡当且仅当 $a\geq b$，$c\geq g$。

接下来确定混合策略均衡，固定 1 号玩家，2 号玩家选择 b_1 的期望收益为 $\pi_1 c+(1-\pi_1)d$，2 号玩家选择 b_2 的期望收益为 $\pi_1 g+(1-\pi_1)h$；固定 2 号玩家，1 号玩家选择 a_1 的期望收益为 $\pi_2 a+(1-\pi_2)e$，1 号玩家选择 a_2 的期望收益为 $\pi_2 b+(1-\pi_2)f$。如果存在 MNE，则

$$\pi_1 c+(1-\pi_1)d=\pi_1 g+(1-\pi_1)h$$

$$\pi_2 a+(1-\pi_2)e=\pi_2 b+(1-\pi_2)f$$

第一种情况解得

$$\pi_1=\frac{h-d}{c-g+h-d}$$
$$\pi_2=\frac{f-e}{a-b+f-e}$$

且需要满足条件

$$0<\frac{h-d}{c-g+h-d}<1,\ c-g+h-d\neq 0$$
$$0<\frac{f-e}{a-b+f-e}<1,\ a-b+f-e\neq 0.$$

第二种情况解得 π_1,π_2 为区间 (0,1) 上的任意值，需要满足条件

$$h-d=0,\ c-g=0$$

$$f-e=0,\ a-b=0.$$

最后我们再给出一些用于理解混合策略均衡条件的命题，(i) 当 $a=b,e=f$ 时，无论玩家 2 行动如何，玩家 1 的两种策略无差异；当 $c=g,d=h$ 时，无论玩家 1 行动如何，玩家 2 的两种策略无差异；这些情况下 π_1,π_2 为区间 (0,1) 上的任意值，均满足混合策略均衡。(ii) 如果 $a>b,e>f$，则玩家 1 的 a_1 策略是严格优势策略，同理如果 $a<b,e<f$，则玩家 1 的 a_2 策略是严格优势策略；如果 $c>g,d>h$，则玩家 2 的 b_1 策略是严格优势策略，同

理如果 $c < g, d < h$，则玩家 2 的 b_2 策略是严格优势策略。(iii) 如果没有一个玩家具有严格优势策略，并且博弈具有唯一的均衡，那么该均衡必然是混合策略均衡，该命题可以利用反证法分情况讨论证明。

题目二

试求解如下零和博弈问题的纳什均衡。

	A	B	C
I	0	2	-1
II	-2	0	3
III	1	-3	0

图 2: 收益矩阵

解答： 首先考虑纯策略纳什均衡，$\max\limits_{a_1\in A_1}\min\limits_{a_2\in A_2} u(a_1,a_2) = -1$，$\min\limits_{a_2\in A_2}\max\limits_{a_1\in A_1} u(a_1,a_2) = 1$，$1 \neq -1$，因此不存在纯策略纳什均衡。

然后考虑混合策略纳什均衡，设玩家 1 的混合策略为 $p = (p_1, p_2, p_3)$，则优化问题 $\max\limits_{p\in\Delta_1}\min\limits_{q\in\Delta_2} pMq^{\mathsf{T}}$ 等价于线性规划问题

$$\max v \quad \text{s.t.}\, pM \geq v\mathbf{1},\, p \in \Delta_1$$

即

$$\max v \quad \text{s.t.} \begin{cases} -2p_2 + p_3 \geq v \\ 2p_1 - 3p_3 \geq v \\ -p_1 + 3p_2 \geq v \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ p_1, p_2, p_3 > 0 \end{cases}$$

解得 $p = (1/2, 1/6, 1/3)$，$v = 0$。

同理，设玩家 2 的混合策略为 $q = (q_1, q_2, q_3)$，则优化问题 $\min\limits_{q\in\Delta_2}\max\limits_{p\in\Delta_1} pMq^{\mathsf{T}}$ 等价于线性规划问题

$$\min v \quad \text{s.t.}\, Mq^T \leq v\mathbf{1}^T,\, q \in \Delta_2$$

即

$$\min v \quad \text{s.t.} \begin{cases} 2q_2 - q_3 \leq v \\ -2q_1 + 3q_3 \leq v \\ q_1 - 3q_2 \leq v \\ q_1 + q_2 + q_3 = 1 \\ q_1, q_2, q_3 > 0 \end{cases}$$

解得 $q = (1/2, 1/6, 1/3)$，$v = 0$。

综上所述，纯策略纳什均衡不存在，混合策略纳什均衡为 $((1/2, 1/6, 1/3), (1/2, 1/6, 1/3))$。

题目三

试求解如下零和博弈问题的纳什均衡。

	r	x	y	z
a	1	-2	6	-4
b	2	-7	2	4
c	-3	4	-4	-3
d	-8	3	-2	3

图 3: 收益矩阵

解答： 首先考虑纯策略纳什均衡，$\max\limits_{a_1\in A_1}\min\limits_{a_2\in A_2} u(a_1,a_2)=-4$，$\min\limits_{a_2\in A_2}\max\limits_{a_1\in A_1} u(a_1,a_2)=2$，$-4\neq 2$，因此不存在纯策略纳什均衡。

然后考虑混合策略纳什均衡，设玩家 1 的混合策略为 $p=(p_1,p_2,p_3,p_4)$，则优化问题 $\max\limits_{p\in\Delta_1}\min\limits_{q\in\Delta_2} pMq^{\mathsf{T}}$ 等价于线性规划问题

$$\max v \quad \text{s.t.}\, pM\geq v\mathbf{1},\, p\in\Delta_1$$

即

$$\max v \quad \text{s.t.} \begin{cases} p_1+2p_2-3p_3-8p_4\geq v \\ -2p_1-7p_2+4p_3+3p_4\geq v \\ 6p_1+2p_2-4p_3-2p_4\geq v \\ -4p_1+4p_2-3p_3+3p_4\geq v \\ p_1+p_2+p_3+p_4=1 \\ p_1,p_2,p_3,p_4>0 \end{cases}$$

解得 $p=(0.14,0.35,0.51,0.00)$，$v=-0.69$（保留两位小数）。

同理，设玩家 2 的混合策略为 $q=(q_1,q_2,q_3,q_4)$，则优化问题 $\min\limits_{q\in\Delta_2}\max\limits_{p\in\Delta_1} pMq^{\mathsf{T}}$ 等价于线性规划问题

$$\min v \quad \text{s.t.}\, Mq^T\leq v\mathbf{1}^T,\, q\in\Delta_2$$

即

$$\min v \quad \text{s.t.} \begin{cases} q_1 - 2q_2 + 6p_3 - 4q_4 \le v \\ 2q_1 - 7q_2 + 2p_3 + 4q_4 \le v \\ -3q_1 + 4q_2 - 4p_3 - 3q_4 \le v \\ -8q_1 + 3q_2 - 2p_3 + 3q_4 \le v \\ q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 1 \\ q_1, q_2, q_3, q_4 > 0 \end{cases}$$

解得 $q = (0.53, 0.33, 0.00, 0.14)$，$v = -0.69$（保留两位小数）。

综上所述，纯策略纳什均衡不存在，混合策略纳什均衡为 $((0.14, 0.35, 0.51, 0.00), (0.53, 0.33, 0.00, 0.14))$。

题目四 Proof of Nash Equilibrium

Theorem For two-player zero-sum finite game $G = \{\{1,2\}, \{A_1, A_2\}, u\}$, let player 1 select

$$p^* \in \operatorname*{argmax}_{p\in\Delta_1} \min_{q\in\Delta_2} U(p,q),$$

and let player 2 select

$$q^* \in \operatorname*{argmin}_{q\in\Delta_2} \max_{p\in\Delta_1} U(p,q).$$

The mixed strategy outcome (p^*, q^*) is a MNE if and only if

$$\max_{p\in\Delta_1} \min_{q\in\Delta_2} U(p,q) = \min_{q\in\Delta_2} \max_{p\in\Delta_1} U(p,q)$$

解答： (a) 首先证明如下**引理**：对于两人有限零和博弈 $G = \{\{1,2\}, \{A_1, A_2\}, u\}$，下式成立。

$$\min_{q\in\Delta_2} \max_{p\in\Delta_1} U(p,q) \ge \max_{p\in\Delta_1} \min_{q\in\Delta_2} U(p,q)$$

事实上，对于任意函数 $F(x,y)$，我们有

$$\forall y,\ F(x,y) \ge \min_y F(x,y)$$

$$\forall y,\ \max_x F(x,y) \ge \max_x \min_y F(x,y)$$

$$\min_y \max_x F(x,y) \ge \max_x \min_y F(x,y)$$

因而

$$\min_{q\in\Delta_2} \max_{p\in\Delta_1} U(p,q) \ge \max_{p\in\Delta_1} \min_{q\in\Delta_2} U(p,q).$$

(b) 接着，如果 (p^*, q^*) 是混合策略纳什均衡点，那么

$$\forall p \in \Delta_1,\ U(p^*, q^*) \ge U(p, q^*)$$

$$\forall q \in \Delta_2,\ U(p^*, q^*) \le U(p^*, q).$$

因此，我们得到当且仅当 $U(p,q^*) \le U(p^*,q^*) \le U(p^*,q)$ 也即 $U(p,q^*) \le U(p^*,q)$ 时，(p^*,q^*)

是混合策略纳什均衡点。

(c) **必要性**：如果 (p^*, q^*) 是混合策略纳什均衡点，我们有

$$U(p,q^*) \leq U(p^*,q) \to \max_{p\in\Delta_1} U(p,q^*) \leq \min_{q\in\Delta_2} U(p^*,q),$$

又因为

$$p^* \in \operatorname{argmax}_{p\in\Delta_1} \min_{q\in\Delta_2} U(p,q),\ q^* \in \operatorname{argmin}_{q\in\Delta_2} \max_{p\in\Delta_1} U(p,q),$$

所以

$$\min_{q\in\Delta_2} \max_{p\in\Delta_1} U(p,q) \leq \max_{p\in\Delta_1} \min_{q\in\Delta_2} U(p,q),$$

由引理，进而

$$\min_{q\in\Delta_2} \max_{p\in\Delta_1} U(p,q) = \max_{p\in\Delta_1} \min_{q\in\Delta_2} U(p,q).$$

(d) **充分性**：因为

$$U(p,q^*) \leq \max_{p\in\Delta_1} U(p,q^*) = \min_{q\in\Delta_2} \max_{p\in\Delta_1} U(p,q)$$

$$U(p^*,q) \geq \min_{q\in\Delta_2} U(p^*,q) = \max_{p\in\Delta_1} \min_{q\in\Delta_2} U(p,q)$$

$$\min_{q\in\Delta_2} \max_{p\in\Delta_1} U(p,q) = \max_{p\in\Delta_1} \min_{q\in\Delta_2} U(p,q)$$

所以

$$U(p,q^*) \leq U(p^*,q)$$

也即 (p^*, q^*) 是混合策略纳什均衡点。

题目五 Proof of Minimax Theorem

For two-player zero-sum finite game $G = \{\{1,2\}, \{A_1, A_2\}, u\}$, we have

$$\max_{p\in\Delta_1} \min_{q\in\Delta_2} pMq^{\mathrm{T}} = \min_{q\in\Delta_2} \max_{p\in\Delta_1} pMq^{\mathrm{T}}.$$

解答：

方法一

引理 1 设 $C \subset \mathbb{R}^n$ 是紧凸集且 $0 \notin C$，则 $\exists z \in \mathbb{R}^n$，s.t. $\forall x \in C, z \cdot x > 0$。

证明：首先，一定 $\exists z \in C$，s.t. $\forall x \in C, |z| \leq |x|$，即距离原点最近。由凸集定义，$\forall \alpha \in (0,1), x \in C$，有 $(1-\alpha)z + \alpha x \in C$，由 z 的定义，$|z|^2 \leq |(1-\alpha)z + \alpha x|^2$，展开整理有 $(\alpha-2)|z|^2 + \alpha|x|^2 + 2(1-\alpha)z \cdot x \geq 0$，取 $\alpha \to 0$ 的极限有 $|z|^2 \leq z \cdot x$，而 $|z| > 0$，故 $z \cdot x > 0$，得证。

引理 2 设 $A_{m\times n}$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的矩阵，则要么 (i)$\exists x \in \mathbb{R}^m, x \geq 0, x \neq 0$，s.t. $x^T A \geq 0$，要么 (ii)$\exists y \in \mathbb{R}^n, y \geq 0, y \neq 0$，s.t. $Ay \leq 0$。

证明：设 $e_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, \cdots, n$ 是单位向量，其第 i 维是 1，其余是 0，$a_j \in \mathbb{R}^n$ 是 A 的行向量，C 是 $\{-e_i, a_j | i = 1, \cdots, n; j = 1, \cdots, m\}$ 的凸包，下面证明当 $0 \in C$ 时有 (i) 成立，否

则 (ii) 成立。

若 $0 \in C$，根据凸包定义，$\exists \alpha_1, \cdots, \alpha_m, \beta_1, \cdots, \beta_n \in \mathbb{R}_+$，s.t. $\sum_{i=1}^n \beta_i + \sum_{j=1}^m \alpha_j = 1$ 且 $-\sum_{i=1}^n \beta_i e_i + \sum_{j=1}^m \alpha_j a_j = 0$。注意到，$\alpha_j$ 不全为 0，否则 β_i 也全为 0，这与和为 1 矛盾。取 $x = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m)^T$，则 $x^T A = \sum_{i=1}^n \beta_i e_i = (\beta_1, \cdots, \beta_n) \geq 0$，即 (i) 成立。

若 $0 \notin C$，则根据引理 1，$\exists z \in \mathbb{R}^n$，s.t. $\forall x \in C, z \cdot x > 0$。分别取 $x = -e_i$，有 $-z \cdot e_i > 0$，故 $z < 0$；再分别取 $x = a_j$，有 $z \cdot a_j > 0$，故 $Az > 0$。取 $y = -z$，有 $Ay < 0$ 成立，即 (ii) 成立。

引理 3 设 $A_{m\times n}$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的矩阵，则要么 $\max\limits_{x\in\Delta_1}\min\limits_{y\in\Delta_2} x^T A y \geq 0$，要么 $\min\limits_{y\in\Delta_2}\max\limits_{x\in\Delta_1} x^T A y \leq 0$。

证明：若引理 2 的情况 (i) 成立，即 $x \in \mathbb{R}^m \backslash \{0\}, x \geq 0, x \neq 0$ 使得 $x^T A \geq 0$，则记 $\overline{x} = \frac{x}{\sum_{i=1}^m x_i} \in \Delta_1$。由于 $x \geq 0$，故仍有 $\overline{x}^T A \geq 0$，故 $\forall y \in \Delta_2, \overline{x}^T A y \geq 0$，故 $\min\limits_{y\in\Delta_2} \overline{x}^T A y \geq 0$，故 $\max\limits_{x\in\Delta_1}\min\limits_{y\in\Delta_2} \overline{x}^T A y \geq 0$。

类似的，若情况 (ii) 成立，则设 $\overline{y} = \frac{y}{\sum_{i=1}^n y_i} \in \Delta_2$，则 $A\overline{y} \leq 0$，$\forall x \in \Delta_1, x^T A \overline{y} \leq 0$，$\max\limits_{x\in\Delta_1} x^T A \overline{y} \leq 0$，$\min\limits_{y\in\Delta_2}\max\limits_{x\in\Delta_1} x^T A \overline{y} \leq 0$。

根据以上三个引理有：

$\forall c \in \mathbb{R}$，设矩阵 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ 满足 $b_{ij} = a_{ij} - c$，则易证 $\max\limits_{x\in\Delta_1}\min\limits_{y\in\Delta_2} x^T B y = \max\limits_{x\in\Delta_1}\min\limits_{y\in\Delta_2} x^T A y - c \geq 0$，$\min\limits_{y\in\Delta_2}\max\limits_{x\in\Delta_1} x^T B y = \min\limits_{y\in\Delta_2}\max\limits_{x\in\Delta_1} x^T A y - c \leq 0$。这说明，要么有 $\max\limits_{x\in\Delta_1}\min\limits_{y\in\Delta_2} x^T A y \geq c$，要么有 $\min\limits_{y\in\Delta_2}\max\limits_{x\in\Delta_1} x^T A y \leq c$，而 $\max\limits_{x\in\Delta_1}\min\limits_{y\in\Delta_2} x^T A y \leq \min\limits_{y\in\Delta_2}\max\limits_{x\in\Delta_1} x^T A y$，由于 c 的任意性，因此只能有 $\max\limits_{x\in\Delta_1}\min\limits_{y\in\Delta_2} x^T A y = \min\limits_{y\in\Delta_2}\max\limits_{x\in\Delta_1} x^T A y$（若 $\max\limits_{x\in\Delta_1}\min\limits_{y\in\Delta_2} x^T A y < \min\limits_{y\in\Delta_2}\max\limits_{x\in\Delta_1} x^T A y$，取 $c \in \left(\max\limits_{x\in\Delta_1}\min\limits_{y\in\Delta_2} x^T A y, \min\limits_{y\in\Delta_2}\max\limits_{x\in\Delta_1} x^T A y\right)$，则此时无法满足要么有 $\max\limits_{x\in\Delta_1}\min\limits_{y\in\Delta_2} x^T A y \geq c$，要么有 $\min\limits_{y\in\Delta_2}\max\limits_{x\in\Delta_1} x^T A y \leq c$），也即 $\max\limits_{p\in\Delta_1}\min\limits_{q\in\Delta_2} pMq^{\mathrm{T}} = \min\limits_{q\in\Delta_2}\max\limits_{p\in\Delta_1} pMq^{\mathrm{T}}$，得证。

下面证明混合策略纳什均衡点的存在性。取 $x^* \in \Delta_1, y^* \in \Delta_2$ 满足 $\min\limits_{y\in\Delta_2} {x^*}^T A y = \max\limits_{x\in\Delta_1}\min\limits_{y\in\Delta_2} x^T A y$，$\max\limits_{x\in\Delta_1} x^T A y^* = \min\limits_{y\in\Delta_2}\max\limits_{x\in\Delta_1} x^T A y$（由于 Δ_1, Δ_2 均为凸集并且 $x^T A y$ 为双线性函数，因此一定可以取到），则 $\max\limits_{x\in\Delta_1}\min\limits_{y\in\Delta_2} x^T A y \leq {x^*}^T A y^* \leq \min\limits_{y\in\Delta_2}\max\limits_{x\in\Delta_1} x^T A y$，进而 $\max\limits_{x\in\Delta_1}\min\limits_{y\in\Delta_2} x^T A y = {x^*}^T A y^* = \min\limits_{y\in\Delta_2}\max\limits_{x\in\Delta_1} x^T A y$，进而 ${x^*}^T A y \geq {x^*}^T A y^* \geq x^T A y^*$，即 (x^*, y^*) 为混合策略纳什均衡点。

方法二

A. 令 $U(p,q) = pMq^T$，首先证明 $\min\limits_{q\in\Delta_2}\max\limits_{p\in\Delta_1} U(p,q) \geq \max\limits_{p\in\Delta_1}\min\limits_{q\in\Delta_2} U(p,q)$：

事实上，对于任意函数 $F(x,y)$，我们有

$$\forall y,\ F(x,y) \geq \min_y F(x,y)$$

$$\forall y,\ \max_x F(x,y) \geq \max_x \min_y F(x,y)$$

$$\min_y \max_x F(x,y) \geq \max_x \min_y F(x,y)$$

因而

$$\min_{q\in\Delta_2}\max_{p\in\Delta_1} U(p,q) \geq \max_{p\in\Delta_1}\min_{q\in\Delta_2} U(p,q).$$

B. 然后证明 $\min\limits_{q\in\Delta_2}\max\limits_{p\in\Delta_1} U(p,q) \leq \max\limits_{p\in\Delta_1}\min\limits_{q\in\Delta_2} U(p,q)$：

根据**方法**一我们知道一定存在一个混合策略纳什均衡点，设该点为 (p^*,q^*)，我们有

$$U(p,q^*) \le U(p^*,q) \to \max_{p\in\Delta_1} U(p,q^*) \le \min_{q\in\Delta_2} U(p^*,q),$$

注意到

$$\min_{q\in\Delta_2}\max_{p\in\Delta_1} U(p,q) \le \max_{p\in\Delta_1} U(p,q^*),\ \min_{q\in\Delta_2} U(p^*,q) \le \max_{p\in\Delta_1}\min_{q\in\Delta_2} U(p,q)$$

所以

$$\min_{q\in\Delta_2}\max_{p\in\Delta_1} U(p,q) \le \max_{p\in\Delta_1}\min_{q\in\Delta_2} U(p,q)$$

综上所述

$$\max_{p\in\Delta_1}\min_{q\in\Delta_2} pMq^{\mathrm{T}} = \min_{q\in\Delta_2}\max_{p\in\Delta_1} pMq^{\mathrm{T}}.$$