作业

Homework4

庄镇华 502022370071

A Game Theory Homework Assignment

NANJING UNIVERSITY

2023 年 5 月 4 日

题目一

试求解如下主从博弈（Stackelberg Game）的最优策略。

Police \ Terrorist	School		Hospital	
School	5	-2	-1	1
Hospital	-5	5	2	-1

图 1: 收益矩阵

解答： 设警察关于去学校和去医院的混合策略 $x = (p, 1-p)$，考虑两种情况：恐怖分子去学校或者去医院。

a. 当恐怖分子去学校时，警察的最大收益为

$$\begin{aligned} \max_{p\in[0,1]} \quad & 5\cdot p - 5\cdot(1-p) \\ \text{s.t.} \quad & -2\cdot p + 5\cdot(1-p) \geq 1\cdot p - 1\cdot(1-p) \end{aligned}$$

此时解为 $p = 2/3$，警察的收益为 $5/3$。

b. 当恐怖分子去医院时，警察的最大收益为

$$\begin{aligned} \max_{p\in[0,1]} \quad & -1\cdot p + 2\cdot(1-p) \\ \text{s.t.} \quad & -2\cdot p + 5\cdot(1-p) \leq 1\cdot p - 1\cdot(1-p) \end{aligned}$$

此时解为 $p = 2/3$，警察的收益为 0。

因此，警察的最优策略为混合策略 $x = (2/3, 1/3)$。

题目二

试求解如下主从博弈的最优策略。

Follower

Leader		L		M		R	
	U	1	1	3	0	2	2
	M	0	0	2	1	1	1
	D	3	4	2	3	3	0

图 2: 收益矩阵

解答： 设领导者的混合策略 $x = (p_1, p_2, 1-p_1-p_2)$，考虑三种情况：追随者选择 L、M 或者 R。

a. 当追随者选择 L 时，领导者的最大收益为

$$\begin{aligned} \max_{p_1,p_2\in[0,1]} \quad & 1\cdot p_1 + 0\cdot p_2 + 3\cdot(1-p_1-p_2) \\ \text{s.t.} \quad & 1\cdot p_1 + 0\cdot p_2 + 4\cdot(1-p_1-p_2) \geq 0\cdot p_1 + 1\cdot p_2 + 3\cdot(1-p_1-p_2) \\ & 1\cdot p_1 + 0\cdot p_2 + 4\cdot(1-p_1-p_2) \geq 2\cdot p_1 + 1\cdot p_2 + 0\cdot(1-p_1-p_2) \end{aligned}$$

此时解为 $p_1 = 0, p_2 = 0$，领导者的收益为 3。

b. 当追随者选择 M 时，领导者的最大收益为

$$\begin{aligned} \max_{p_1,p_2\in[0,1]} \quad & 3\cdot p_1 + 2\cdot p_2 + 2\cdot(1-p_1-p_2) \\ \text{s.t.} \quad & 0\cdot p_1 + 1\cdot p_2 + 3\cdot(1-p_1-p_2) \geq 1\cdot p_1 + 0\cdot p_2 + 4\cdot(1-p_1-p_2) \\ & 0\cdot p_1 + 1\cdot p_2 + 3\cdot(1-p_1-p_2) \geq 2\cdot p_1 + 1\cdot p_2 + 0\cdot(1-p_1-p_2) \end{aligned}$$

此时解为 $p_1 = 0.3, p_2 = 0.5$，领导者的收益为 2.3。

c. 当追随者选择 R 时，领导者的最大收益为

$$\begin{aligned} \max_{p_1,p_2\in[0,1]} \quad & 2\cdot p_1 + 1\cdot p_2 + 3\cdot(1-p_1-p_2) \\ \text{s.t.} \quad & 2\cdot p_1 + 1\cdot p_2 + 0\cdot(1-p_1-p_2) \geq 1\cdot p_1 + 0\cdot p_2 + 4\cdot(1-p_1-p_2) \\ & 2\cdot p_1 + 1\cdot p_2 + 0\cdot(1-p_1-p_2) \geq 0\cdot p_1 + 1\cdot p_2 + 3\cdot(1-p_1-p_2) \end{aligned}$$

此时解为 $p_1 = 0.8, p_2 = 0$，领导者的收益为 2.2。

因此，领导者的最优策略为策略 $x = (0, 0, 1)$，即为纯策略 D。

题目三 第一价格拍卖的贝叶斯纳什均衡（N 参与人）

N 参与人的第一价格拍卖情景如下：
$N=\{1,...,N\}$：投标人集合
v_i：投标人 i 认为商品的价值，v_i 服从 $[0,1]$ 上的均匀分布
$b_i=b_i(v_i)=av_i \quad (a>0)$：投标人 i 的出价
投标人 i 的收益函数为

$$u_i(b_1,\dots,b_N)=\begin{cases} v_i-b_i & \text{if } b_i>\max_{j\neq i} b_j \\ v_i/2-b_i & \text{if } b_i=\max_{j\neq i} b_j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

试求解投标人 i 的期望收益函数 U_i 以及取得最大值对应的出价 b_i。

解答： 共有 N 个投标人，v_i 代表投标人 i 认为商品的价值，v_i 服从区间 $[0,1]$ 上的均匀分布，且投标人 i 的出价为 $b_i=b_i(v_i)=av_i$, $a>0$。

那么投标人 i 的收益可以分为三种情况，第一种情况，当投标人 i 的出价高于其他所有人时，其收益为 v_i-b_i；第二种情况，当投标人 i 出价高于等于其他人，并且还有另外 k 人和投标人 i 出价相同时，其收益为 $(v_i-b_i)/(k+1)$；第三种情况，当投标人 i 出价不是最高时，其收益为 0。

因而对于投标人 i，期望收益函数为 $U_i\left(b_i,b_j(v_j),v_i\right)=(v_i-b_i)\,Pr\left[b_i>\max_{j\neq i} b_j(v_j)\right]+0+0$，又因为 $Pr\left[b_i>\max_{j\neq i} b_j(v_j)\right]=Pr\left[b_i>\max_{j\neq i} av_j\right]=Pr\left[b_i/a>\max_{j\neq i} v_j\right]$，而 v_j 服从区间 $[0,1]$ 上的均匀分布，因此 $Pr\left[b_i>\max_{j\neq i} b_j(v_j)\right]=\left(\frac{b_i}{a}\right)^{N-1}$，因此 $U_i(b_i,b_j,v_i)=(v_i-b_i)\left(\frac{b_i}{a}\right)^{N-1}$。

最大化 $U_i(b_i,b_j,v_i)=(v_i-b_i)\left(\frac{b_i}{a}\right)^{N-1}$，即 $\frac{\partial U_i}{\partial b_i}=0$，$-\left(\frac{b_i}{a}\right)^{N-1}+\frac{v_i-b_i}{a}(N-1)(\frac{b_i}{a})^{N-2}=0$，即 $(\frac{b_i}{a})^{N-2}\frac{1}{a}\left[(N-1)(v_i-b_i)-b_i\right]=0$，可得 $b_i(v_i)=\frac{N-1}{N}v_i$。

可以发现，当投标人越多，卖者所得到的价格越高；当投标人趋于无穷时，卖者几乎得到买者价值的全部。因此让更多的人加入竞标是卖者的利益所在。