作业

Homework6

庄镇华 502022370071

A Game Theory Homework Assignment

NANJING UNIVERSITY

2023 年 6 月 11 日

题目一

试求解如下非完美信息扩展式博弈的所有序贯均衡（sequential equilibrium）。

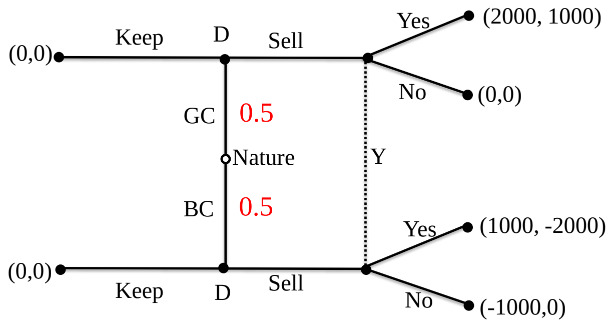

图 1: 博弈树

解答: 设行为策略 $\beta = (\beta_1, \beta_2) = (z, y; x)$，其中 $\beta_1(\{GC\})(Sell) = z$，$\beta_1(\{BC\})(Sell) = y$，$\beta_2(\{(GC, Sell), (BC, Sell)\})(Yes) = x$；信念 $\mu(\{(GC, Sell), (BC, Sell)\})(GC, Sell) = \mu$。

根据一致性可知，$\mu = \frac{0.5z}{0.5z+0.5y} = \frac{z}{z+y}$

- **消费者**：

  采取 Yes 行为的收益：$1000\mu - 2000(1-\mu) = 3000\mu - 2000$

  采取 No 行为的收益：0

  如果 $\mu < 2/3$，选择 No，$x = 0$；如果 $\mu > 2/3$，选择 Yes，且 $x = 1$；如果 $\mu = 2/3$，$x \in [0, 1]$。

- **GC 卖家**：

  采取 Sell 行为的收益：$2000x$

  采取 Keep 行为的收益：0

  如果 $x > 0$，选择 Sell，$z = 1$；如果 $x = 0$，$z \in [0, 1]$。

- **BC 卖家**：

  采取 Sell 行为的收益：$1000x - 1000(1-x) = 2000x - 1000$

  采取 Keep 行为的收益：0

  如果 $x > 1/2$，选择 Sell，$y = 1$；如果 $x < 1/2$，选择 Keep，$y = 0$；如果 $x = 1/2$，$y \in [0, 1]$。

综上所述，当 $x = 0$ 时，需要满足 $z \in [0, 1]$，$y = 0$，$\frac{z}{z+0} < 2/3$，显然不成立；当 $x = 1$ 时，需要满足 $z = 1$，$y = 1$，$\frac{1}{1+1} > 2/3$，显然不成立；当 $x \in (0, 1)$ 时，需要满足 $\frac{z}{z+y} = 2/3, z = 1$，则 $y = 1/2$，$x = 1/2$，因此最终的序贯均衡为 $x = 1/2, y = 1/2, z = 1, \mu = 2/3$。

题目二

试求解如下非完美信息扩展式博弈（Extensive Game with Imperfrect Information）的纳什均衡。

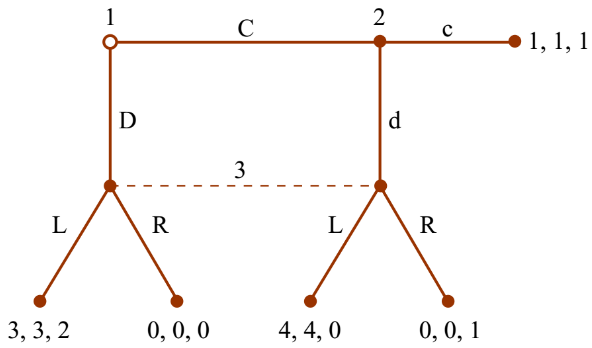

图 2: 博弈树

解答：每个玩家的纯策略为：1 玩家 $\{C, D\}$，2 玩家 $\{c, d\}$，3 玩家 $\{L, R\}$。将扩展式博弈转化为策略式博弈，诱导收益矩阵如下：

玩家 3 选择 L：

	c	d
C	1， 1， 1*	4*， 4*， 0
D	3*， 3*， 2*	3， 3*， 2*

玩家 3 选择 R：

	c	d
C	1*， 1*， 1*	0*， 0， 1*
D	0， 0*， 0	0*， 0*， 0

根据诱导收益矩阵，可以得到纳什均衡：(D, c, L)，(C, c, R)。

题目三

试求解如下非完美信息扩展式博弈的子博弈完美纳什均衡（SPNE）。

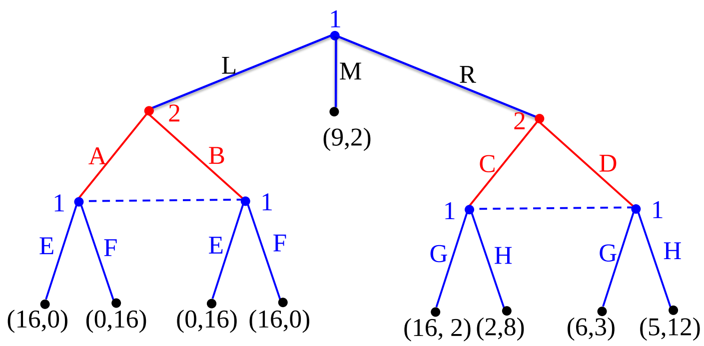

图 3: 博弈树

解答： 使用后向归纳法求解子博弈完美，其步骤为 1. 从最末端的非叶子结点开始 (从最后的子博弈开始)，计算纳什均衡 (此时对于这个非叶子结点的玩家，相当于寻找他的最优收益)，用这个收益，替代这个子博弈根结点。2. 重复第 1 步，直到根节点。

该博弈树的子博弈划分如图4所示：

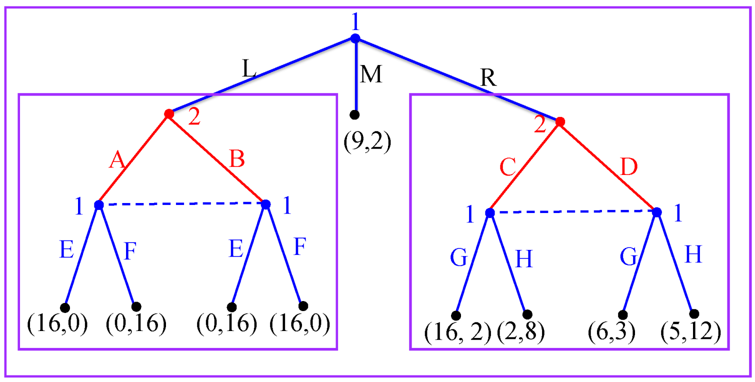

图 4: 子博弈划分

左子博弈树的诱导收益矩阵为：

	A	B
E	16*,0	0,16*
F	0,16*	16*,0

其没有纯策略纳什均衡，因此求解混合策略纳什均衡，设玩家 1 选择 E 的概率为 π_1，选择 F 的概率为 π_2，玩家 2 选择 A 的概率为 π_1，选择 B 的概率为 π_2。则固定玩家 1，玩家 2 选择 A、B 的期望收益分别为 $16(1-\pi_1)$,16π，令两者相等，得 $\pi_1 = 1/2$，同理，固定玩家 2，玩家 1 选择 E、F 的期望收益分别为 $16\pi_2$,$16(1-\pi_2)$，令两者相等，得 $\pi_2 = 1/2$，因此混合策略纳什均衡为 $((1/2, 1/2), (1/2, 1/2))$，期望收益为 $(8, 8)$。

右子博弈树的诱导收益矩阵为:

	C	D
G	16*,2	6*,3*
H	2,8	5,12*

易知其纯策略纳什均衡为 (G,D)，期望收益为 $(6,3)$，且不存在混合策略纳什均衡。因此子博弈完美要求玩家 1 在根节点处选择 M。进而得到子博弈完美纳什均衡 $((M,(1/2,1/2),G),((1/2,1/2),D))$。

题目四

试求解如下非完美信息扩展式博弈的序贯均衡（sequential equilibrium）。

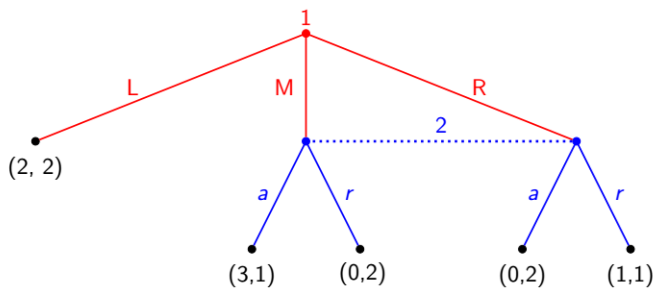

图 5: 博弈树

解答: 设行为策略 $\beta = (\beta_1,\beta_2) = (x_1,x_2;y)$，其中 $\beta_1(\emptyset)(L) = x_1$，$\beta_1(\emptyset)(M) = x_2$，$\beta_2(\{M,R\})(a) = y$；信念 $\mu(\{M,R\})(M) = \mu$。

根据一致性可知，$\mu = \frac{x_2}{1-x_1}$。

- **玩家 1**:

  采取 L 行为的收益：2

  采取 M 行为的收益：$3y$

  采取 R 行为的收益：$1-y$

- **玩家 2**:

  采取 a 行为的收益：$\mu + 2(1-\mu) = 2-\mu$

  采取 r 行为的收益：$2\mu + 1 - \mu = 1 + \mu$

  如果 $\mu < 1/2$，选择 a，$y = 1$；如果 $\mu > 1/2$，选择 r，$y = 0$；如果 $\mu = 1/2$，$y \in [0,1]$。

综上所述，当 $\mu < 1/2$ 时，需要满足 $y = 1$，此时玩家 1 会采取 M 行为，$\frac{x_2}{1-x_1} = \frac{1}{1-0} < 1/2$ 显然不成立；

当 $\mu > 1/2$ 时，需要满足 $y = 0$，此时玩家 1 会采取 L 行为，得到序贯均衡 L，其均衡评估为 $x_1 = 1$，$x_2 = 0$，$y = 0$，$\mu > 1/2$；

当 $\mu = 1/2$ 时，需要满足 $\frac{x_2}{1-x_1} = 1/2$, 即 $x_2 = x_3$，则要么 $3y = 1 - y = 2$（无法满足），要么 $3y < 2$ 且 $1 - y < 2$ 且 $3y = 1 - y$, 得到 $y < 2/3, y = 1/4$，此时玩家 1 会采取 L 行为，得到序贯均衡 L，其均衡评估为 $x_1 = 1$，$x_2 = 0$，$y = 1/4$，$\mu = 1/2$。