时间序列分析
作业三

502022370071, 庄镇华, zhuangzh@lamda.nju.edu.cn

2022 年 11 月 18 日

作业提交注意事项

(1) 请严格参照教学立方网站所述提交作业，文件命名统一为学号 _ 姓名.pdf;

(2) 未按照要求提交作业，或提交作业格式不正确，将会被扣除部分作业分数;

(3) 除非有特殊情况（如因病缓交），否则截止时间后不接收作业，本次作业记零分。

1. 考虑线性模型 $Y = \alpha + \beta X + \varepsilon$ ，其中 α 和 β 都是常量。X 和 ε 是互不相关的随机变量，均值和方差如下：$\mathrm{E}[X] = \mu_X, E[\varepsilon] = 0$, $\mathrm{Var}[X] = \sigma_X^2, \mathrm{Var}[\varepsilon] = \sigma_\varepsilon^2$ 。求:

   1) $\mathrm{E}[Y \mid X]$ 和 $\mathrm{Var}[Y \mid X]$

   2) $\mathrm{E}[Y]$ 和 $\mathrm{Var}[Y]$

   Solution. *1)*

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[Y \mid X] &= \mathrm{E}[\alpha + \beta X + \varepsilon | X] \\
&= \mathrm{E}[\alpha | X] + \mathrm{E}[\beta X | X] + \mathrm{E}[\varepsilon | X] \\
&= \alpha + \beta X
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}[Y \mid X] &= \mathrm{E}[(Y - \mathrm{E}[Y|X])(Y - \mathrm{E}[Y|X])^T | X] \\
&= \mathrm{E}[(Y - \alpha - \beta X)(Y - \alpha - \beta X)^T | X] \\
&= \mathrm{E}[\varepsilon \varepsilon^T | X] \\
&= \mathrm{E}[(\varepsilon - \mathrm{E}[\varepsilon])(\varepsilon - \mathrm{E}[\varepsilon])^T | X] \\
&= \mathrm{Var}[\varepsilon \mid X] \\
&= \sigma_\varepsilon^2
\end{aligned}
$$

   2)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[Y] &= \mathrm{E}[\mathrm{E}[Y|X]] \\
&= \mathrm{E}[\alpha + \beta X] \\
&= \alpha + \beta \mu_X
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}[Y] &= \mathrm{E}[\mathrm{Var}[Y|X]] + \mathrm{Var}[\mathrm{E}[Y|X]] \\
&= \mathrm{E}[\sigma_\varepsilon^2] + \mathrm{Var}[\alpha + \beta X] \\
&= \sigma_\varepsilon^2 + \beta^2 \sigma_X^2
\end{aligned}
$$

2. 1) 已知随机过程

$$X_t = \varepsilon_t + c\left(\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2} + \cdots\right)$$

其中 c 是一个常量, $\{\varepsilon_t\}$ 是白噪声, 证明这一随机过程是非平稳的。

2) 基于 X_t ，引入新的过程

$$Y_t = \nabla X_t$$

请证明 $\{Y_t\}$ 是一个 MA(1) 过程, 并说明 $\{Y_t\}$ 是否是平稳的。

3) 求 $\{Y_t\}$ 的 ACF 。

Solution. *1)* 将 X_t 写为以下形式的随机过程:

$$X_t = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i}$$

则 $\psi_0 = 1; \psi_i = c, i \geq 1$；当 $|z| > 1$ 时,

$$\psi(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i z^{-i} = 1 + c(z^{-1} + z^{-2} + \dots)] = 1 + c\frac{1 - (\frac{1}{z})^{\infty}}{z - 1}$$

不收敛，因此随机过程 X_t 是非平稳的。

2)

$$Y_t = \nabla X_t = X_t - X_{t-1} = \varepsilon_t - (1-c)\varepsilon_{t-1}$$

由 $\{\varepsilon_t\}$ 是白噪声，c 是一个常量，Y_t 具有如下结构:

$$
\begin{cases}
Y_t = 0 + \varepsilon_t - (1-c)\varepsilon_{t-1} \\
1 - c \neq 0 \\
\mathrm{E}[\varepsilon_t] = 0, \mathrm{Var}[\varepsilon_t] = \sigma_\varepsilon^2, \mathrm{E}[\varepsilon_s \varepsilon_t] = 0, s \neq t
\end{cases}
$$

根据定义，$q = 1$，$\mu = 0$，$\theta_1 = 1 - c$, $\{Y_t\}$ 是一个中心化 $MA(1)$ 过程，易知 $\{Y_t\}$ 是平稳过程，因为 $MA(q)$ 模型的统计性质是有限项级数求和，总是收敛，因此都是平稳过程。

3) 自相关系数 ACF

$$\rho_{YY}(k) = \frac{\mathrm{E}[(Y_t - \mu_Y)(Y_{t+k} - \mu_Y)]}{\sqrt{\mathrm{E}[(\mathrm{Y_t} - \mu_\mathrm{Y})^2]\mathrm{E}[(\mathrm{Y_{t+k}} - \mu_\mathrm{Y})^2]}}$$

易知 $\rho(0) = 1; \rho(k) = 0, k \geq 2$；当 $k = 1$ 时，由 $\mu_Y = 0; \mathrm{E}[\varepsilon_s \varepsilon_t] = 0, s \neq t$,

$$\rho_{YY}(1) = \frac{\mathrm{E}[Y_t Y_{t+1}]}{\sqrt{\mathrm{E}[\mathrm{Y_t^2}]\mathrm{E}[\mathrm{Y_{t+1}^2}]}} = \frac{\mathrm{E}[(\varepsilon_t - (1-c)\varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t+1} - (1-c)\varepsilon_t)]}{\sqrt{\mathrm{E}[(\varepsilon_\mathrm{t} - (1-\mathrm{c})\varepsilon_{\mathrm{t-1}})^2]\mathrm{E}[(\varepsilon_{\mathrm{t+1}} - (1-\mathrm{c})\varepsilon_\mathrm{t})^2]}} = -\frac{(1-c)}{1 + (1-c)^2}$$

综上，

$$\rho_{YY}(k)=\begin{cases}1 & ,k=0\\ \dfrac{c-1}{c^2-2c+2} & ,k=1\\ 0 & ,k\geq 2\end{cases}$$

3. 常数均值模型, $Y_t=\mu+\varepsilon_t \quad (t=1,\ldots,N) \quad \varepsilon_t$ 为 i.i.d., 均值为 0 , 常数方差 σ^2 (白噪声)。对于所有样本,

$$\hat{\mu}=\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}Y_t=\bar{y}$$

预测 $\hat{Y}_{N+\ell|N}=\hat{\mu}$。请证明: 预测误差的方差为

$$V\left[Y_{N+\ell}-\hat{Y}_{N+\ell|N}\right]=\sigma^2\left(1+\frac{1}{N}\right)$$

Solution. 证明：

易知 $\mathrm{E}[Y_{N+\ell}-\hat{Y}_{N+\ell|N}]=\mu-\mu=0$，则 $V[Y_{N+\ell}-\hat{Y}_{N+\ell|N}]=\mathrm{E}[(Y_{N+\ell}-\hat{Y}_{N+\ell|N})^2]=\mathrm{E}[(Y_{N+\ell}-\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}Y_t)^2]$，下面证明 $\mathrm{E}[(Y_{N+\ell}-\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}Y_t)^2]=\sigma^2\left(1+\frac{1}{N}\right)$：

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}[(Y_{N+\ell}-\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}Y_t)^2]\\
&=\mathrm{E}[Y_{N+\ell}^2]-\frac{2}{N}\mathrm{E}[Y_{N+\ell}\sum_{t=1}^{N}Y_t]+\frac{1}{N^2}\mathrm{E}[(\sum_{t=1}^{N}Y_t)^2]\\
&=\mathrm{E}[(\mu+\varepsilon_{N+\ell})^2]-\frac{2}{N}\mathrm{E}[(\mu+\varepsilon_{N+\ell})\sum_{t=1}^{N}(\mu+\varepsilon_t)]+\frac{1}{N^2}\mathrm{E}[(\sum_{t=1}^{N}(\mu+\varepsilon_t))^2]\\
&=\mathrm{E}[\mu^2+2\mu\varepsilon+\varepsilon_{N+\ell}^2]-\frac{2}{N}\sum_{t=1}^{N}\mathrm{E}[(\mu+\varepsilon_{N+\ell})(\mu+\varepsilon_t)]+\frac{1}{N^2}\mathrm{E}[(\sum_{t=1}^{N}(\mu+\varepsilon_t))^2]\\
&=\mu^2+\sigma^2-2\mu^2+\frac{1}{N^2}\mathrm{E}[(\sum_{t=1}^{N}(\mu+\varepsilon_t))^2]\\
&=\mu^2+\sigma^2-2\mu^2+\frac{1}{N^2}\mathrm{E}[\sum_{t=1}^{N}(\mu+\varepsilon_t)^2+\sum_{t=1}^{N}\sum_{s\neq t}^{N}(\mu+\varepsilon_t)(\mu+\varepsilon_s)]\\
&=\mu^2+\sigma^2-2\mu^2+\frac{1}{N^2}N(\mu^2+\sigma^2)+\frac{1}{N^2}(N^2-N)\mu^2\\
&=\sigma^2\left(1+\frac{1}{N}\right)
\end{aligned}$$

4. 证明平稳随机过程 $\{Y(t)\}$ 自协方差函数 $\gamma(k)$ 的性质

1) 【对称性】$\gamma(k)=\gamma(-k)$

2) 【规范性】$|\gamma(k)|\leq\gamma(0)$

3) 【非负定性】$\forall y,n,t$ ，二次型 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}y_iy_j\gamma(t_i-t_j)\geq 0$

Solution. *1)* $\because Cov[Y(t),Y(t+k)] = Cov\,[Y(t+k),Y(t)]$

$\therefore \gamma(k) = Cov[Y(t),Y(t+k)] = Cov[Y(t+k),Y(t)] = \gamma(-k)$

2) $\because V[\lambda_1 Y(t) + \lambda_2 Y(t+k)] \geq 0$

$\therefore (\lambda_1^2+\lambda_2^2)\gamma(0) + 2\lambda_1\lambda_2\gamma(k) \geq 0$

若 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$，有 $\gamma(k) \geq -\gamma(0)$，若 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$，则 $\gamma(k) \leq \gamma(0)$，综上，$|\gamma(k)| \leq \gamma(0)$。

3) 根据自协方差函数的定义和均值运算性质有：

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_i y_j \gamma(t_i - t_j) \\
&= \mathrm{E}[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_i y_j (Y_i-\mu)(Y_j-\mu)] \\
&= \mathrm{E}\left[[\sum_{i=1}^{n} y_i (Y_i-\mu)]^2\right] \\
&\geq 0
\end{aligned}
$$

5. 开放题：对课程的建议

Solution. *1)* 本课程中介绍时序分析思想在深度学习和机器学习中最新应用的部分特别精彩和实用，希望老师多多教授一些这方面的知识

2) 老师的理论证明也很精彩，希望也能多分享一些

3) 希望能多一些时序分析在当今工业界应用的案例