HSEA2022 **Fall 2022**

Homework 3

Instructor: Chao Qian *Name:* 庄镇华, *StudentId:* 502022370071

1 Problem 1: 求解LeadingOnes问题(20)

请用适应层分析法来分析(1+1)-EA找到LeadingOnes问题最优解的期望运行时间上界。

解：首先将解空间$\{0,1\}^n$划分为集合$S_0, S_1, \cdots, S_n$，其中$S_i = \{x \in \{0,1\}^n | LO(x) = i\}$
那么解从集合S_i转移到$\cup_{j=i+1}^n S_j$的概率下界为

$$P(\xi_{t+1} \in \cup_{j=i+1}^n S_j | \xi_t \in S_i) \geq 1 \cdot \frac{1}{n}(1-\frac{1}{n})^i = v_i$$

（此时仅翻转从左往右第一个为0的位，保持前i个1不变）

则该问题的期望运行时间上界为

$$\sum_{i=0}^{n-1} \pi_0(S_i) \sum_{j=i}^{n-1} \frac{1}{v_j} \leq \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{v_j} \leq \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n}{(1-\frac{1}{n})^j} \leq \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n}{(1-\frac{1}{n})^{n-1}} \leq \sum_{j=0}^{n-1} en = en^2 \in \mathcal{O}(n^2)$$

因此用适应层分析法来分析 (1+1)-EA 找到 LeadingOnes 问题最优解的期望运行时间上界为 $\mathcal{O}(n^2)$

2 Problem 2: 求解OneMax问题(40)

(1) 请用乘性漂移分析法求解(1+1)-EA算法找到OneMax问题最优解的期望运行时间上界(20)。

解：设计距离函数为$V(x) = n - O(x)$，其中$O(x) = \sum_{i=1}^n x_i$，从$O(x) = i$的解x出发的漂移期望为

$$E[V(\xi_t) - V(\xi_{t+1}) | \xi_t] \geq (n-i)\frac{1}{n}(1-\frac{1}{n})^{n-1} = \delta V(\xi_t) = \delta(n-i)$$

（此时翻转$n-i$个0中的任意一个，保持其他位不变），则$\delta = \frac{1}{n}(1-\frac{1}{n})^{n-1}$，进而得到该问题的期望运行时间上界为

$$\sum_{x \in \mathcal{X}} \pi_0(x) \frac{1 + ln(V(x)/V_{min})}{\delta} \leq \frac{1 + ln(n/1)}{\frac{1}{n}(1-\frac{1}{n})^{n-1}} \leq \frac{1 + ln(n/1)}{1/en} = en(1 + lnn) \in \mathcal{O}(n \log n)$$

因此用乘性漂移分析法求解(1+1)-EA 算法找到 OneMax 问题最优解的期望运行时间上界为 $\mathcal{O}(n \log n)$。

(2) 请用加性漂移分析法求解(1+1)-EA算法找到OneMax问题最优解的期望运行时间上界(20)。

解：设计距离函数为

$$U(x) = \begin{cases} 0 & V(x) = 0 \\ 1 + ln(V(x)/V_{min}) & V(x) \neq 0 \end{cases}$$

如果$\xi_{t+1} \in \mathcal{X}^\star$，那么$U(\xi_t) - U(\xi_{t+1}) = 1 + ln(V(\xi_t)/V_{min}) \geq 1 = \frac{V(\xi_t)-0}{V(\xi_t)} = \frac{V(\xi_t)-V(\xi_{t+1})}{V(\xi_t)}$；

如果$\xi_{t+1} \notin \mathcal{X}^\star$，那么$U(\xi_t) - U(\xi_{t+1}) = ln(V(\xi_t)/V_{\xi_{t+1}}) = -ln(V(\xi_{t+1})/V_{\xi_t}) = -ln(1 + \frac{V(\xi_{t+1})-V(\xi_t)}{V_{\xi_t}}) \geq -\frac{V(\xi_{t+1})-V(\xi_t)}{V(\xi_t)} = \frac{V(\xi_t)-V(\xi_{t+1})}{V(\xi_t)}$。

从$\xi_t \notin \mathcal{X}^\star$出发的漂移期望为

$$E[U(\xi_t) - U(\xi_{t+1}) | \xi_t] \geq \frac{E[V(\xi_t) - V(\xi_{t+1}) | \xi_t]}{V(\xi_t)} \geq \delta = \frac{1}{n}(1-\frac{1}{n})^{n-1} = c_l$$

进而得到该问题的期望运行时间上界为

$$\sum_{x \in \mathcal{X}} \pi_0(x) \frac{U(x)}{c_l} \leq \frac{1 + ln(n/1)}{\frac{1}{n}(1-\frac{1}{n})^{n-1}} \leq en(1 + lnn) \in \mathcal{O}(n \log n)$$

因此用加性漂移分析法来求解 (1+1)-EA 算法找到 OneMax 问题最优解的期望运行时间上界为 $\mathcal{O}(n \log n)$。

3 Problem 3: 求解COCZ问题(40)

试求解GSEMO算法找到COCZ问题的帕累托前沿的期望运行时间上界。

解：首先证明GSEMO算法中种群P的大小不超过$n/2+1$。易知目标向量空间可以划分为$n/2+1$个子集F_i，其中$i \in \{0,\cdots,n/2\}$表示解的前一半中1的数量，F_i包含$n/2+1$个不同的目标向量$(i+j, i+n/2-j)$，其中$j \in \{0,\cdots,n/2\}$表示解的后一半中1的数量，帕累托前沿即为集合$F_{n/2}$。

在种群P对应的目标向量集合中，对于任意的j，最多只能有一个i与之对应，因为两个有着相同j值不同i值的目标向量是可比的，而GSEMO算法只会保留占优的那一个目标向量。因此，种群P对应的目标向量集合最多含有$n/2+1$个元素。又因为GSEMO算法中的步骤7：$P=(P-\{\boldsymbol{z} \in P \mid \boldsymbol{s}' \succeq \boldsymbol{z}\}) \cup \{\boldsymbol{s}'\}$，只会保留一个相同目标向量对应的不同解，即种群$P$中的个体和目标向量集合的元素有着一对一的关系，因此GSEMO算法中种群P的大小不超过$n/2+1$。

接下来我们将算法过程分为两个阶段。第一阶段的目标是找到任意一个帕累托最优解，第二阶段的目标是找到帕累托前沿。

对于第一阶段，设$j \in \{0,\cdots,n/2\}$代表当前种群所有解中前一半包含1最多的数量，因为GSEMO算法保证了最优解不会变差，所以j不会减小。然后，在一次迭代中，因为选择到前一半包含j个1的解的概率至少为$\frac{1}{n/2+1}$（种群P的大小最多为$n/2+1$），翻转这个解前一半的任意一个0，保持其他位不变，则j在此次迭代中增加的概率至少为$\frac{1}{n/2+1}\frac{n/2-j}{n}(1-\frac{1}{n})^{n-1} \geq \frac{n-j}{en(n/2+1)}$。因为任意前一半中含有$n/2$个1的解都是帕累托最优解，因此$j$增加$n/2$次可以确保找到一个帕累托最优解，因而第一阶段的期望运行时间上界为$\sum_{j=0}^{n/2-1}\frac{en(n/2+1)}{n/2-j}$，即$\mathcal{O}(n^2\log n)$。

对于第二阶段，在找到帕累托前沿之前，至少存在一个帕累托最优解可以通过翻转其后一半中的0或1得到一个新的帕累托最优解，并且这个新的帕累托最优解对应新的目标向量，我们将这种帕累托最优解定义为边界帕累托最优解。然后，在一次迭代中，选择到边界帕累托最优解的概率至少为$\frac{1}{n/2+1}$（种群P的大小最多为$n/2+1$），翻转这个解后一半的任意一个0或者1，保持其他位不变，则在此次迭代中种群中帕累托最优解的数量增加1的概率至少为$\frac{1}{n/2+1}\frac{min\{i,n/2-i\}}{n}(1-\frac{1}{n})^{n-1} \geq \frac{min\{i,n/2-i\}}{en(n/2+1)}$，其中$i$为选择到的边界帕累托最优解的后一半中1的数量。因为种群中帕累托最优解的数量增加$n/2$次可以保证找到帕累托前沿，因此第二阶段的期望时间运行上界为$\sum_{i=1}^{\lceil n/4 \rceil} 2 \cdot \frac{en(n/2+1)}{i}$，即$\mathcal{O}(n^2\log n)$。

综合上述两个阶段可以得到结论，即GSEMO算法找到COCZ问题的帕累托前沿的期望运行时间上界为$\mathcal{O}(n^2\log n)$。

4 相关内容

作业相关伪布尔函数问题的定义如下:

定义 1 (LeadingOnes)**.** 一个规模为n的*LeadingOnes*问题旨在找到一个n位的*01*串，以最大化

$$f(\boldsymbol{s}) = \sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{i} s_j, \tag{1}$$

这里s_j指$\boldsymbol{s} \in \{0,1\}^n$的第$j$位。

定义 2 (OneMax)**.** 一个规模为n的*OneMax*问题旨在找到一个n位的*01*串，以最大化

$$f(\boldsymbol{s}) = \sum_{i=1}^{n} s_i, \tag{2}$$

这里s_i指$\boldsymbol{s} \in \{0,1\}^n$的第$i$位。

定义 3 (COCZ)**.** 一个规模为n的*COCZ:* $\{0,1\}^n \to \mathbb{N}^2$问题旨在找到一个$n$位的*01*串，以最大化

$$COCZ(\boldsymbol{s}) = \left(\sum_{i=1}^{n} s_i, \sum_{i=1}^{n/2} s_i + \sum_{i=n/2+1}^{n}(1-s_i)\right) \tag{3}$$

这里n为偶数，且s_i指$\boldsymbol{s} \in \{0,1\}^n$的第$i$位。

对于二目标优化问题COCZ，可通过占优规则来比较两个解的优劣，具体定义如下:

定义 4 (占优规则)**.** 对于具有两目标(f_1, f_2)的解$\boldsymbol{s}$和$\boldsymbol{s'}$来说，
1. 若 $\forall i: f_i(\boldsymbol{s}) \geq f_i(\boldsymbol{s'})$，则$\boldsymbol{s}$ 弱占优 $\boldsymbol{s'}$，即$\boldsymbol{s}$好于$\boldsymbol{s'}$，表示为$\boldsymbol{s} \succeq \boldsymbol{s'}$;
2. 若 $\boldsymbol{s} \succeq \boldsymbol{s'} \wedge \exists i: f_i(\boldsymbol{s}) > f_i(\boldsymbol{s'})$，则$\boldsymbol{s}$ 占优 $\boldsymbol{s'}$，即$\boldsymbol{s}$严格好于$\boldsymbol{s'}$，表示为$\boldsymbol{s} \succ \boldsymbol{s'}$;
3. 若既不满足$\boldsymbol{s} \succeq \boldsymbol{s'}$又不满足$\boldsymbol{s'} \succeq \boldsymbol{s}$，则$\boldsymbol{s}$ 和 $\boldsymbol{s'}$ 二者不可比.

帕累托前沿的定义如下：

定义 5 (帕累托前沿)**.** 令$\mathcal{X}$代表问题的解空间。若解空间中不存在解能优于$\boldsymbol{s}$，则称$\boldsymbol{s}$为帕累托最优解。所有帕累托最优解的目标向量集合称为帕累托前沿。

(1+1)-EA和GSEMO算法的基本流程如算法 1和算法 2所示：

Algorithm 1 (1+1)-EA

Input: 伪布尔函数$f: \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$
Output: $\{0,1\}^n$中的一个解
随机均匀地从$\{0,1\}^n$中选择一个解$\boldsymbol{s}$作为初始解
while 算法终止条件不满足 **do**
  $\boldsymbol{s'} \leftarrow$将$\boldsymbol{s}$的每一位独立地以$1/n$的概率翻转
  if $f(\boldsymbol{s'}) \geq f(\boldsymbol{s})$ **then**
    $\boldsymbol{s} \leftarrow \boldsymbol{s'}$
  end if
end while
return $\boldsymbol{s}$

Algorithm 2 GSEMO

随机均匀地从$\{0,1\}^n$中选择一个解$\boldsymbol{s}$作为初始解
将初始解放入种群$P \leftarrow \{\boldsymbol{s}\}$
while 算法终止条件不满足 **do**
  随机均匀地从种群P中挑选出解$\boldsymbol{s}$
  $\boldsymbol{s'} \leftarrow$将$\boldsymbol{s}$的每一位独立地以$1/n$的概率翻转
  if $\nexists \boldsymbol{z} \in P$ 使得$\boldsymbol{z} \succ \boldsymbol{s'}$ **then**
    $P = (P - \{\boldsymbol{z} \in P \mid \boldsymbol{s'} \succeq \boldsymbol{z}\}) \cup \{\boldsymbol{s'}\}$
  end if
end while

5 提交与评分

提交一份pdf文档，并发送到liudx@lamda.nju.edu.cn，**12月17日23:59**截止。延期提交的折扣为-10/天，即每延迟一天，本次作业得分减10。请合理分配时间。

- Pdf文档命名方式："学号-姓名.pdf"，例如"MG1937000-张三.pdf"；
- 邮件标题命名："HSEA第三次作业-学号-姓名"，例如"HSEA第三次作业-MG1937000-张三"。

注意，pdf可以用latex/word/markdown等方式生成，但是不要用手写证明的照片。
作业的评分主要参考以下几点：

1. 结论的紧致性。
2. 证明过程的完整性以及正确性。例如在使用分析工具时是否充分考虑了工具的条件，公式推导是否完整、以及是否有错误。
3. 文档的细节。例如是否出现符号错误，文档格式是否混乱。

若发现作业出现雷同的情况，会根据相关规定给予惩罚，详情请参考课程主页中"学术诚信"的相关内容。请同学们务必独立完成作业！