1 四色猜想的证明

1.1 Kempe 在 1879 年给出的证明

对极大平面图 G 的顶点数 n 归纳证明。
$n \le 4$ 时，四色猜想成立；
设 $n \ge 4$ 时，四色猜想成立，考察 n 的情况。
由欧拉公式可知,对于任意极大平面图 G,有 $3 \le \delta \le 5$ 成立。故按 $\delta = 3, 4, 5$ 分类证明。

- $\delta = 3$，设 $x \in V(G), d(x) = 3, N(x) = \{v_1, v_2, v_3\}$。由归纳假设，$\exists f \in C_4^0(G-x), f(N(x)) = 1, 2, 3$，由此得到 G 的一个 4 -着色 f': 对于 $\forall u \in V(G)$,

$$f'(u) = \begin{cases} 4, u = x \\ f(u), otherwise \end{cases}$$

- 当 $\delta = 4$ 时，设 $x \in V(G), d(x) = 4, N(x) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$，由归纳假设，$\exists f \in C_4^0(G-x)$，使得 $|f(N(x))| = 2, 3, 4$。当 $|f(N(x))| = 2, 3$ 时，类似前者，可得到 G 的一个 4 -着色。故只考虑 $|f(N(x))| = 4$ 的情况。不妨设 $f(v_i) = i, i = 1, 2, 3, 4$，在导出子图 G_{13} 中，若顶点 v_1 与 v_3 不在同一个连通分支，将顶点 v_1 所在的 13-分支颜色互换，其他顶点颜色不变，得到 G 的一个 4-着色 f': 对于 $\forall u \in V(G)$,

$$f'(u) = \begin{cases} 1, u = x \ or \ u \in V(G_{13}^{v_1}), f(u) = 3 \\ 3, u \in V(G_{13}^{v_1}), f(u) = 1 \\ f(u), otherwise \end{cases}$$

  其中 $G_{13}^{v_1}$ 表示着色 f 下顶点 v_1 所在的 13-分支。
  故假设在 G_{13} 中，顶点 v_1 与 v_3 在同一个连通分支，则顶点 v_2 和顶点 v_4 不在同一个 24-分支，将顶点 v_2 所在的 24-分支颜色互换，其他

顶点颜色不变，得到 G 的一个 4-着色 f'：对于 $\forall u \in V(G)$,

$$f'(u) = \begin{cases} 2, u = x \ or \ u \in V(G_{24}^{v_2}), f(u) = 4 \\ 4, u \in V(G_{24}^{v_2}), f(u) = 2 \\ f(u), otherwise \end{cases}$$

故 $\delta = 4$ 时，结论成立。

- 当 $\delta = 5$ 时，设 $x \in V(G), d(x) = 5, N(x) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$，由归纳假设，$\exists f \in C_4^0(G-x)$，使得 $|f(N(x))| = 3, 4$。当 $|f(N(x))| = 3$ 时，类似前者，可得到 G 的一个 4 -着色。故只考虑 $|f(N(x))| = 4$ 的情况。不妨设 $f(v_i) = i, i = 1, 2, 3, 4, f(v_5) = 2$。在导出子图 G_{13} 中，若顶点 v_1 与 v_3 不在同一个连通分支 (或在 G_{14} 中，顶点 v_1 与顶点 v_4 不在同一个连通分支)，则将顶点 v_1 所在的 13(或 14)-分支颜色互换，其他顶点颜色不变，得到 G 的一个 4-着色 f': 对于 $\forall u \in V(G)$,

  $$f'(u) = \begin{cases} 1, u = x \ or \ u \ in V(G_{13}^{v_1})(V(G_{14}^{v_1})), f(u) = 3(4) \\ 3(4), u \in V(G_{13}^{v_1})(V(G_{14}^{v_1})), f(u) = 1 \\ f(u), otherwise \end{cases}$$

  从而结论成立。故设在 G_{13} 中，v_1 与 v_3 在同一个连通分支，且在 G_{14} 中，v_1 与 v_4 在同一个连通分支，则 v_2 与 v_4 不在同一个 24-分支，且 v_3 与 v_5 不在同一个 23-分支。将顶点 v_2 所在的 24-分支颜色互换，同时将顶点 v_5 所在的 23-分支颜色互换，其他顶点颜色不变，可得到 G 的一个 4-着色 f': 对于 $\forall u \in V(G)$,

  $$f'(u) = \begin{cases} 2, u = x \ oru \in V(G_{24}^{v_2}), f(u) = 4 \ or \ u \in V(G_{23}^{v_5}), f(u) = 3 \\ 3, u \in V(G_{23}^{v_5}), f(u) = 2 \\ 4, u \in V(G_{24}^{v_2}), f(u) = 2 \\ f(u), otherwise \end{cases}$$

  故 $\delta = 5$ 时，结论成立。

1.2 Kempe 证明的缺陷

1890 年，Heawood 发现 Kempe 证明过程中的缺陷：当 $\delta = 5$ 时，若 v_1 与 v_3 所在的 13-连通分支与 v_1 与 v_4 所在的 14-连通分支相交于颜色 1 的顶点数 ≥ 2 时，则 Kempe 的证明出现错误：将 v_2 所在的 24-分支颜色互换后，无法确定 v_3 与 v_5 在 G_{23} 中是否连通，因此也就无法进行第二次换色。Heawood 与 Kempe 都无法修正这个缺陷，但利用 Kempe "证明" 四色猜想的过程中，很容易得到" 五色定理 "。

1.3 Kempe 变换

基于 Kempe 的方法，很容易从图的一种着色到处另一种着色，后人称之为 Kempe 变换。利用 Kempe 变换可以大大降低求一个图所有着色的复杂度。

1.4 同阶极大平面图的构造

1936 年，Wagner 提出了边翻转算子的概念。设 G 是一个极大平面图，abcd 是 G 中以 ac 为腰的菱形。若在该菱形中删除边 ac 后添加边 bd，使所得的极大平面图仍是极大平面图，则称此运算为 G 中对 ac 的边翻转运算，并将 ac 成为可翻转的。显然，如果 G 本身含边 bd, 则对 ac 不能实施边翻转运算，即 ac 不是可翻转的。
定理：任意 n(> 4)-阶极大平面图 G 至少包含 n-2 条可翻转边，并且存在一类阶数为 n=3t-4 的极大平面图，恰好包含 n-2 条可翻转边，其中 $t \geq 3$.

1.5 异阶极大平面图的构造

纯弦圈的定义：设 G 是一个极大平面图，C 是 G 中的一个圈，若圈 C 内不含顶点，且 C 的每个面都是三角形，则把圈 C 成为图 G 的一个纯弦圈，并把 C 内每条边称为圈 C 的弦。极大平面图中的三角形也是为纯弦

圈。
1891 年，Eberhard 开展了对极大平面图构造问题的研究，给出了能够构造所有极大平面图的运算系统，并把这个运算系统记为 $\langle K_4; \Phi = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}\rangle$，其中 K_4 表示初始对象，Φ 为运算集，ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 是三种算子。
定理：任意 n($\geq$ 4)-阶极大平面图 G 可通过对 (n-1)-阶极大平面图实施运算 ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 得到

1.6 极大平面图的生成运算系统

扩 2-轮运算步骤：

- 在某条边 uv 的两端点之间再连接一条边，使其产生 2 重边，即产生 2-圈；
- 在该 2-圈内部添加一个新的顶点 x, 并令 x 与 2-圈的两顶点 u 与 v 相连边，产生一个 2-轮。

缩 2-轮运算步骤的作用对象子图是一个 2-轮，步骤为：

- 删除该 2-轮的轮心及相关联的两条边
- 删除 2 重边中的一条

扩 3-轮运算：在极大平面图的某一个面上加入一个顶点 x, 并让 x 与构成该面的 3 个顶点相连边。因此，扩 3-轮运算在极大平面图中的对象子图是一个三角形。
缩 3-轮运算：将某个 3 度顶点及与该顶点相关联的边删去。
扩 4-轮运算的步骤：

- 在极大平面图中某条 2-长路 $P_3 = v_1v_2v_3$ 上，从顶点 v_1 出发，沿着 $v_1 \to v_2 \to v_3$ 方向，从边-点-边的内部划开，即将边 v_1v_2，顶点 v_2 及边 v_2v_3 从中间划开，使得顶点 v_2 变成两个顶点，分别记作 v_2 与 v_2'；v_1v_2 与 v_2v_3 均变成了两条边，分别是 v_1v_2 和 v_1v_2', v_2v_3 和 $v_2'v_3$，原

来在 P_3 左侧与 v_2 关联的边变成了与 v_2 关联，原来在 P_3 右侧与 v_2 关联的边变成与 v_2' 关联，从而保持平面性。

- 在顶点 v_1, v_2', v_3, v_4 这 4 个顶点形成的 4-圈内增加一个新顶点 x, 并将 x 分别与其余 4 个顶点连接。

缩 4-轮运算的步骤：在极大平面图中，将某 4 度顶点以及与它关联的边均删去，并且对该顶点领域中的某一对不相邻的顶点实施收缩运算。
扩 5-轮运算的步骤:

- 对极大平面图中某漏斗子图 $L = v_1 - \Delta v_2v_3v_4$，从顶点 v_1 出发，沿着 $v_1 \rightarrow v_2$ 方向，从边-点内部划开，即将边 v_1v_2，顶点 v_2 从中间划开，使得顶点 v_2 变成两个顶点，分别记作 v_2 与 v_2';v_1v_2 变成了两条边，分别是 v_1v_2 与 v_1v_2'；原来在 L 左侧与 v_2 关联的边变成与 v_2 关联，原来在 L 右侧与 v_2 关联的边变成与 v_2' 关联，从而保持平面性。

- 在顶点 v_1, v_2', v_3, v_4, v_2 这 5 个顶点形成的 5-圈内增加一个新顶点 x，并将 x 分别与顶点 v_1, v_2', v_3, v_4, v_2 相连边。

缩 5-轮运算的步骤：在极大平面图中，将某 5 度顶点以及与它关联的边均删去，并且对该顶点领域中的某一对不相邻的顶点实施收缩运算。

定理：设 G 是一个 n-阶极大平面图，则可通过不断地试试缩 2-轮，缩 3-轮，缩 4-轮或缩 5-轮运算，使得改图最终收缩成 K_3。

1.7 纯树着色

猜想：若 G 是一个唯一 3-边可着色立方图，则 G 是平面图且汗一个三角形
GK-猜想：一个平面图 G 是唯一 4-可着色的充分必要条件是 G 为地柜极大平面图。
设 G 是一个 4-色极大平面图, 颜色集 $C(4) = \{1, 2, 3, 4\}, f \in C_4^0(G)$。若 G 中

友谊长度为 2m 的偶圈 $C_{2m}, V(C_{2m}) = v_1, v_2, ..., v_{2m}$，使得 $\{f(v_1), f(v_2), ..., f(v_{2m})\}$ 中只含有 2 种颜色，则称 C_{2m} 是 f 的一个 2-色圈，也成为 f 含有 2-色圈，并称 f 为圈着色，称 G 是可圈着色的。若 C_{2m} 上所含颜色为 i 和 t，则 C_{2m} 亦可记作 it-圈。否则，若 f 不含 2-色圈，则称 f 为图 G 的树着色，称 G 时可树着色的。在圈着色与树着色分类的基础上，相应地可将 G 分为 3 种类型：纯树着色型，即 $C_4^0(G)$ 每个着色均为树着色；纯圈着色型，即 $C_4^0(G)$ 中每个着色均为圈着色；混合着色型，即 $C_4^0(G)$ 中即含树着色，又含圈着色。

1.8 Kempe 变换与 Kempe 等价类

Kempe-等价：令 $f, f' \in C_4^0(G)$，若从 f 出发，通过若干次 Kempe 变换可获得 f'，则称 f 与 f' 是 K-等价的
Kempe 图：设 G 是一个 k-可着色图，若 G 的所有 k-着色是 K-等价的，则称 G 为 k-Kempe 图
Kempe 等价类：所有与 f 互为 K-等价的着色与 f 的并构成之集，记作 $F^f(G)$
2-色圈：设 G 是一个 4-色极大平面图，若 C 是 G 的一个偶圈，$|f(C)| = 2$，则称 C 是 f 的 2-色圈。C 上的两种颜色称为圈色。

树型 Kempe 等价类：若 f 是 G 的一个树着色，则 $C^2(f) = \phi$，即 f 中全部 6 个 2-色导出子图是连通的，因此，$F^f(G) = \{f\}$。我们把这种非 4-Kempe 图 G 的 Kempe 等价类成为树型 Kempe 等价类，并把 G 成为树型极大平面图。
定理：设 G 是一个非唯一 4-色的可树着色极大平面图，则 $K(G, 4) \geq 2$；若 G 时纯树着色的，则 $K(G, 4) = |C_4^0(G)|$；若 G 是混合型着色，且含树着色的数目为 t 个，则 $K(G, 4) \geq t + 1$。

2-色不变圈：一个 Kempe 等价类中全部为 2-色圈