

Phương trình Lagrange loại 2

Nguyễn Thái Minh Tuấn
Bộ môn Cơ học ứng dụng
C3-307, 307B, 308
Đại học Bách khoa Hà nội

Phương trình Lagrange loại 2

Một số dạng của phương trình Lagrange loại 2

Một số dạng cần viết
từng phương trình

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + Q_i^*$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} + Q_i^{**}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i^* \quad L = T - \Pi$$

Một số dạng ma trận,
thích hợp tính bằng
phần mềm

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}$$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}^*(\dot{\mathbf{q}} \otimes \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{f}$$

Khi chưa thực sự thành thạo,
chỉ nên nhớ và dùng một công thức duy nhất.

Phương trình Lagrange loại 2

Các bước thiết lập phương trình Lagrange loại 2

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} + Q_i^{**} \quad (i = \overline{1, f})$$

Số bậc tự do f
 Tọa độ suy rộng q_i
 Lực sinh công

Động năng $T(q, \dot{q})$

Thế năng $\Pi(q)$

Hàm hao tán $\Phi(q, \dot{q})$

Các lực suy rộng không thế, không hao tán Q_i^{**}

Tính các đạo hàm

Phương trình Lagrange loại 2

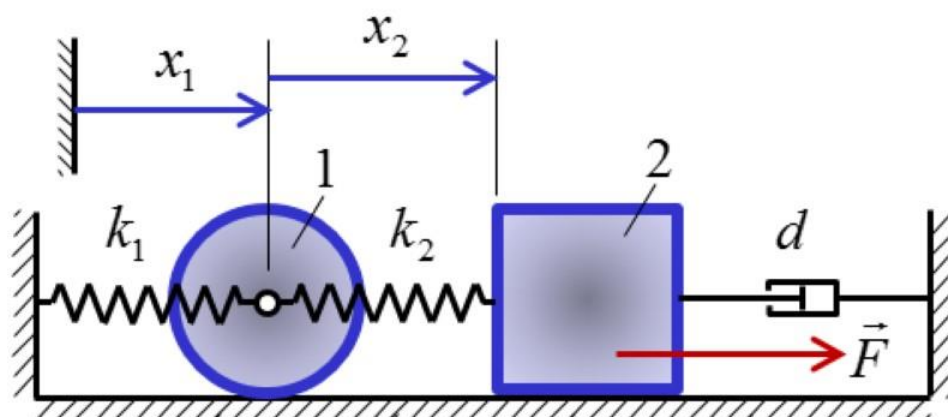
Ví dụ minh họa: DoF, Tọa độ suy rộng, Lực sinh công

Bỏ qua ma sát trượt giữa vật 2 (m_2) với nền.

Vật 1 (m_1) là trụ tròn đồng chất lăn không trượt trên nền.

Bỏ qua ma sát lăn.

Khi $x_1 = 0, x_2 = l$ các lò xo không biến dạng.



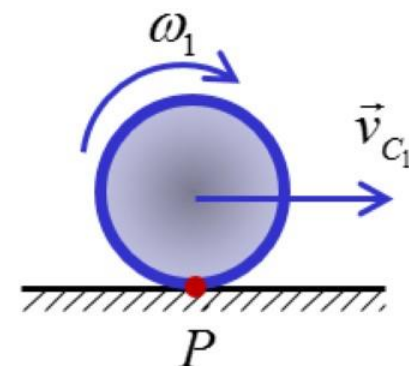
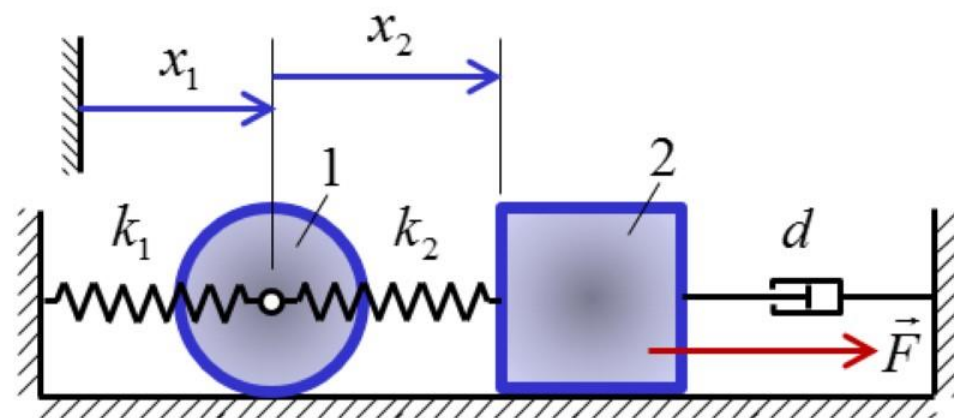
Số bậc tự do: 2

Tọa độ suy rộng đủ: x_1, x_2

Lực sinh công: các lực lò xo, lực cản nhớt và \vec{F}

Phương trình Lagrange loại 2

Ví dụ minh họa: Động năng



$$T = T_1 + T_2$$

$$= \frac{1}{2} m_1 v_{C_1}^2 + \frac{1}{2} I_{C_1} \omega_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

Quan hệ động học

$$v_{C_1} = \dot{x}_1$$

$$\omega_1 = \frac{\dot{x}_1}{r_1}$$

$$v_2 = \dot{x}_1 + \dot{x}_2$$

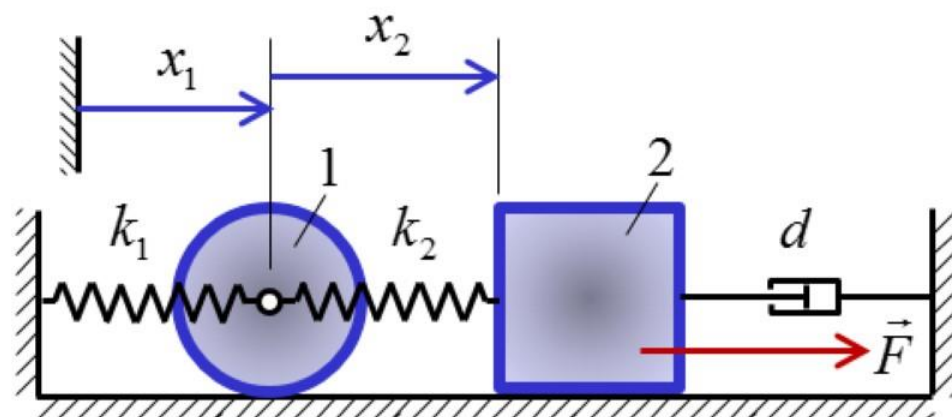
Suy ra

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 r_1^2}{2} \frac{\dot{x}_1^2}{r_1^2} + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} m_1 + m_2 \right) \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_1 \dot{x}_2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 \end{aligned}$$

(Nhóm các $\frac{1}{2} q_i^2$, $q_i q_j$, kiểm tra thứ nguyên)

Phương trình Lagrange loại 2

Ví dụ minh họa: Thế năng



Khi $x_1 = 0, x_2 = l$ các lò xo không biến dạng.

$$\Pi = \frac{1}{2}k_1\Delta l_1^2 + \frac{1}{2}k_2\Delta l_2^2$$

Đoạn biến dạng của các lò xo

$$\Delta l_1 = x_1$$

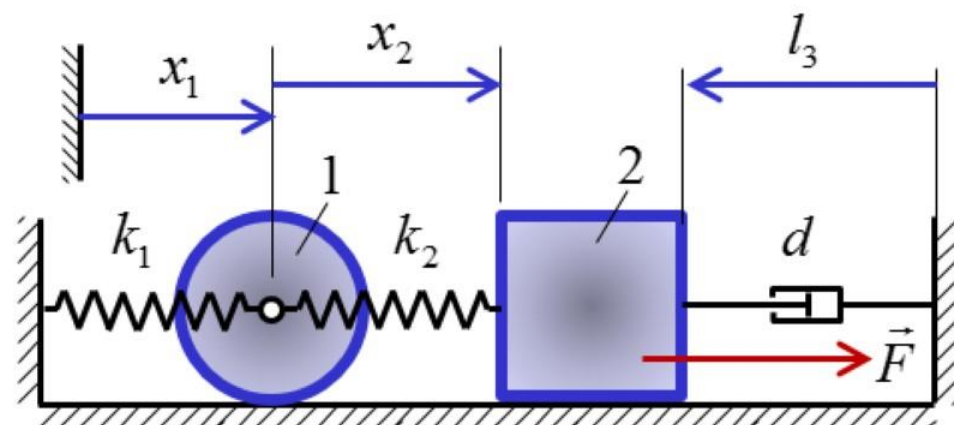
$$\Delta l_2 = x_2 - l$$

Suy ra

$$\Pi = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2 - l)^2 = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2x_2^2 - k_2lx_2 + \frac{1}{2}k_2l^2$$

Phương trình Lagrange loại 2

Ví dụ minh họa: Hàm hao tán



$$\Phi = \frac{1}{2} d \dot{l}_3^2$$

Chiều dài của cản nhớt

$$l_3 = \text{const} - x_1 - x_2$$

Tốc độ biến dạng của cản nhớt

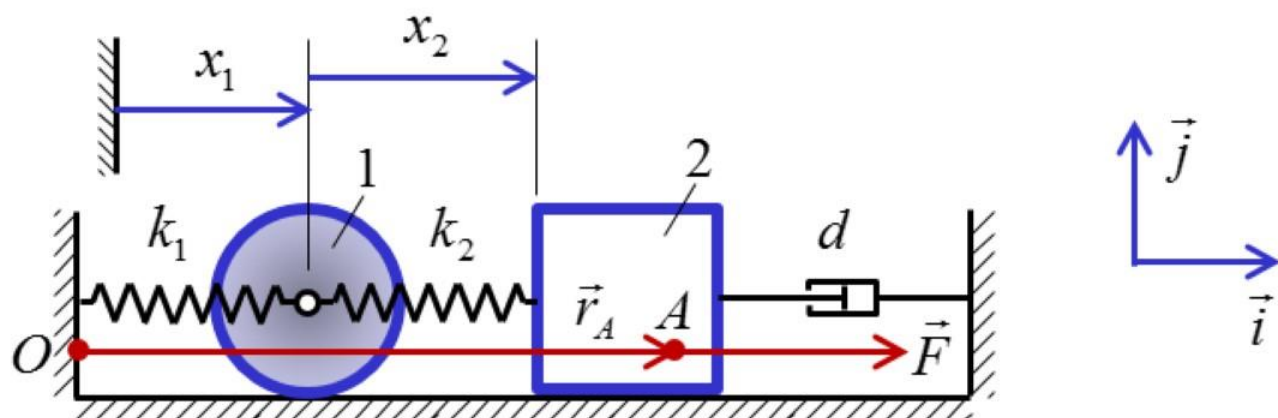
$$\dot{l}_3 = -\dot{x}_1 - \dot{x}_2$$

Suy ra

$$\Phi = \frac{1}{2} d (\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2 = \frac{1}{2} d \dot{x}_1^2 + d \dot{x}_1 \dot{x}_2 + \frac{1}{2} d \dot{x}_2^2$$

Phương trình Lagrange loại 2

Ví dụ minh họa: Lực suy rộng không thế, không hao tán



Công ảo của lực \vec{F} :

$$\delta A = \vec{F} \cdot \delta \vec{r}_A$$

Trong đó

$$\vec{r}_A = (x_1 + x_2 + \text{const})\vec{i}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \delta \vec{r}_A &= \frac{\partial \vec{r}_A}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial \vec{r}_A}{\partial x_2} \delta x_2 \\ &= (\delta x_1 + \delta x_2)\vec{i} \end{aligned}$$

Hay

$$\begin{aligned} \delta A &= F(\delta x_1 + \delta x_2) \\ &= \color{red}{F} \delta x_1 + \color{red}{F} \delta x_2 \end{aligned}$$

Như vậy

$$\begin{aligned} Q_1^{**} &= F \\ Q_2^{**} &= F \end{aligned}$$

Phương trình Lagrange loại 2

Ví dụ minh họa: Đạo hàm (1)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} + Q_i^{**} \quad (i = \overline{1, f})$$

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} m_1 + m_2 \right) \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_1 \dot{x}_2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$$

$$\Pi = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_2 - l)^2 = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 x_2^2 - k_2 l x_2 + \frac{1}{2} k_2 l^2$$

$$\Phi = \frac{1}{2} d (\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2 = \frac{1}{2} d \dot{x}_1^2 + d \dot{x}_1 \dot{x}_2 + \frac{1}{2} d \dot{x}_2^2$$

$$Q_1^{**} = F$$

$$Q_2^{**} = F$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = \left(\frac{3}{2} m_1 + m_2 \right) \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \right) = \left(\frac{3}{2} m_1 + m_2 \right) \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_1} = k_1 x_1$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}_1} = d \dot{x}_1 + d \dot{x}_2$$

Suy ra $\left(\frac{3}{2} m_1 + m_2 \right) \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 = -k_1 x_1 - d \dot{x}_1 - d \dot{x}_2 + F$

Phương trình Lagrange loại 2

Ví dụ minh họa: Đạo hàm (2)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} + Q_i^{**} \quad (i = \overline{1, f})$$

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} m_1 + m_2 \right) \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_1 \dot{x}_2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$$

$$\Pi = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_2 - l)^2 = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 x_2^2 - k_2 l x_2 + \frac{1}{2} k_2 l^2$$

$$\Phi = \frac{1}{2} d (\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2 = \frac{1}{2} d \dot{x}_1^2 + d \dot{x}_1 \dot{x}_2 + \frac{1}{2} d \dot{x}_2^2$$

$$Q_1^{**} = F$$

$$Q_2^{**} = F$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = m_2 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} \right) = m_2 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_2} = k_2 x_2 - k_2 l$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}_2} = d \dot{x}_1 + d \dot{x}_2$$

Suy ra

$$m_2 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 = -k_2 x_2 + k_2 l - d \dot{x}_1 - d \dot{x}_2 + F$$

Phương trình Lagrange loại 2

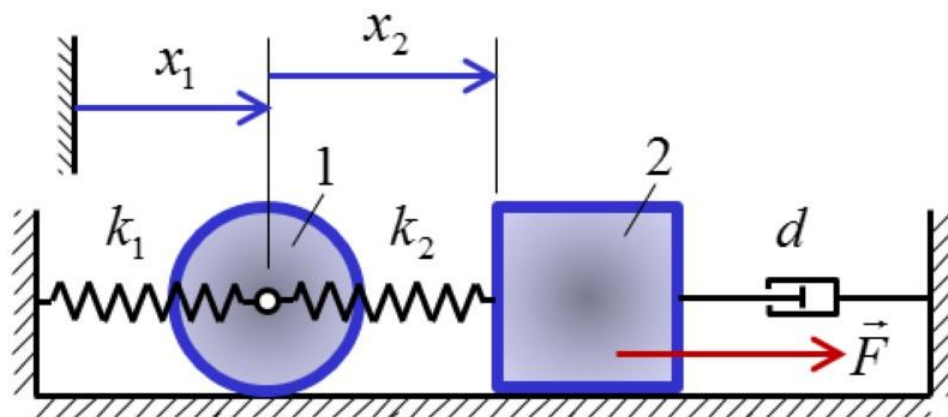
Ví dụ minh họa: Kết quả

Bỏ qua ma sát trượt giữa vật 2 (m_2) với nền.

Vật 1 (m_1) là trụ tròn đồng chất lăn không trượt trên nền.

Bỏ qua ma sát lăn.

Khi $x_1 = 0, x_2 = l$ các lò xo không biến dạng.



$$\left(\frac{3}{2} m_1 + m_2 \right) \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 + k_1 x_1 + d \dot{x}_1 + d \dot{x}_2 = F$$

$$m_2 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 + k_2 x_2 + d \dot{x}_1 + d \dot{x}_2 = k_2 l + F$$

Phương trình Lagrange loại 2

Các nội dung đã trình bày

Mở đầu

- Slide 2: Một số dạng của phương trình Lagrange loại 2
- Slide 3: Các bước thiết lập phương trình Lagrange loại 2

Ví dụ minh họa

- Slide 4: DoF, Tọa độ suy rộng, Lực sinh công
- Slide 5: Động năng
- Slide 6: Thế năng
- Slide 7: Hàm hao tán
- Slide 8: Lực suy rộng không thế, không hao tán
- Slide 9-10: Đạo hàm
- Slide 11: Kết quả