

Phương trình Lagrange loại 2: Kỹ thuật sử dụng đa giác vector

Nguyễn Thái Minh Tuấn
Bộ môn Cơ học ứng dụng
C3-307, 307B, 308
Đại học Bách khoa Hà nội

Phương trình Lagrange loại 2: Kỹ thuật sử dụng đa giác vector

Mở đầu

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} + Q_i^{**} \quad (i = \overline{1, f})$$

Mọi đại lượng phải tính theo $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$

Ví dụ, nếu có các công thức:

$$T = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} I_{cz} \omega^2$$

$$\Pi = mgh_c + \frac{1}{2} k \Delta l^2 + \frac{1}{2} c \Delta \varphi^2$$

$$\Phi = \frac{1}{2} d \dot{l}^2 + \frac{1}{2} b \dot{\varphi}^2$$

$$\Sigma Q_i^{**} \delta q_i = \Sigma (\vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k) + \Sigma (\bar{M}_k \delta \bar{\varphi}_k)$$

Sẽ cần tính:

$$v_c(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

$$h_c(\mathbf{q}) \quad \Delta l(\mathbf{q})$$

$$\dot{l}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

$$\delta \vec{r}_k(\mathbf{q}, \delta \mathbf{q})$$

$$\omega(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

$$\Delta \varphi(\mathbf{q})$$

$$\dot{\varphi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

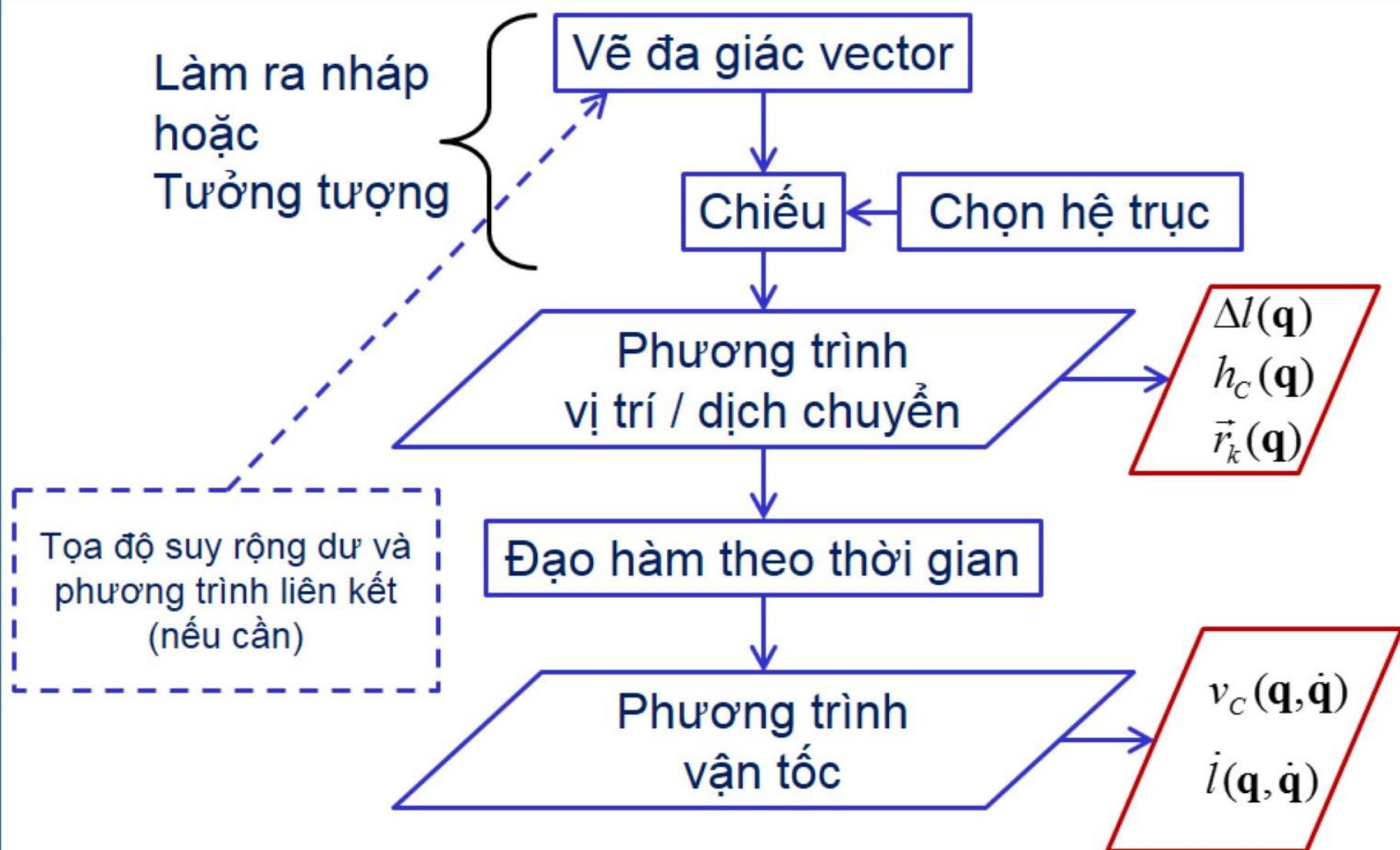
$$\varphi(\mathbf{q})$$

Một số kỹ thuật có thể dùng: Đa giác vector

Hệ quy chiếu động

Phương trình Lagrange loại 2: Kỹ thuật sử dụng đa giác vector

Sơ đồ khối quá trình



Phương trình Lagrange loại 2: Kỹ thuật sử dụng đa giác vector

Tìm vị trí và vận tốc điểm

Các điểm phải xuất hiện trong đa giác

- Gốc cố định
- Điểm cần tính vận tốc

Các điểm cần lựa chọn để hoàn thiện đa giác

- Hai đầu các tọa độ suy rộng dài
- Khớp quay / điểm nối hai vật

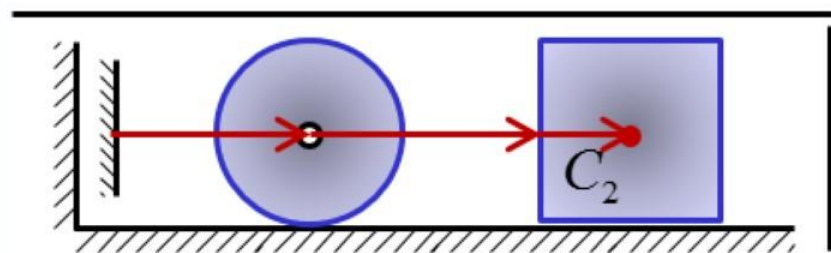
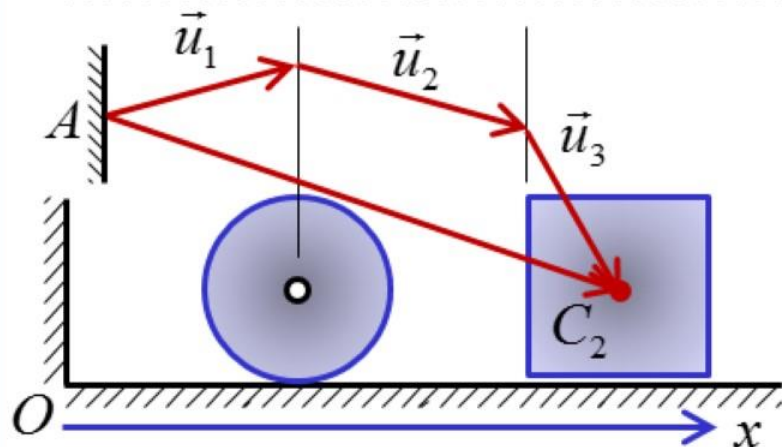
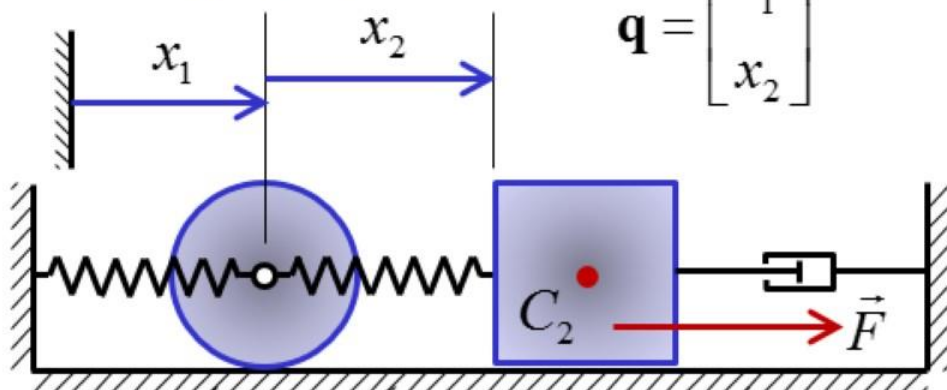
Chú ý chọn hệ trục cố định!
(so với hệ quy chiếu đang xét)

Phương trình Lagrange loại 2: Kỹ thuật sử dụng đa giác vector

Tìm vận tốc điểm – Ví dụ 1

Tính $v_{C_2}(q, \dot{q})$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



Phương trình vector:

$$\overrightarrow{AC_2} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3$$

Chiếu lên trục Ox:

$$x_{C_2} + const = x_1 + x_2 + const$$

Đạo hàm theo thời gian:

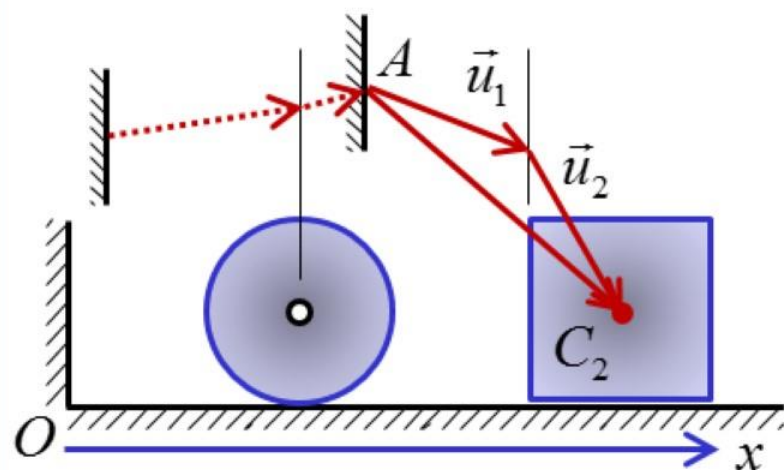
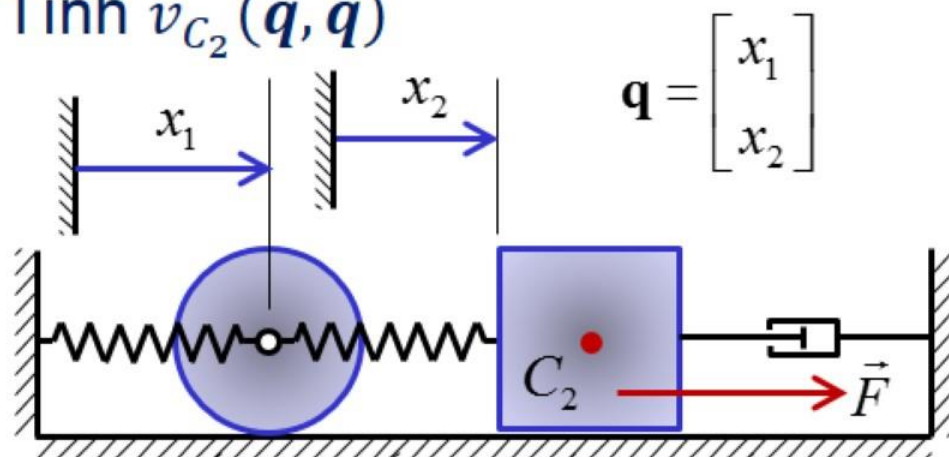
$$v_{C_2} = \dot{x}_{C_2} = \dot{x}_1 + \dot{x}_2$$

Chọn hệ trục **cố định!**

Phương trình Lagrange loại 2: Kỹ thuật sử dụng đa giác vector

Tìm vận tốc điểm – Ví dụ 2

Tính $v_{C_2}(q, \dot{q})$



Chọn hệ trục cố định!

Phương trình vector:

$$\overrightarrow{AC_2} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$$

Chiếu lên trục Ox:

$$x_{C_2} + const = \dot{x}_2 + const$$

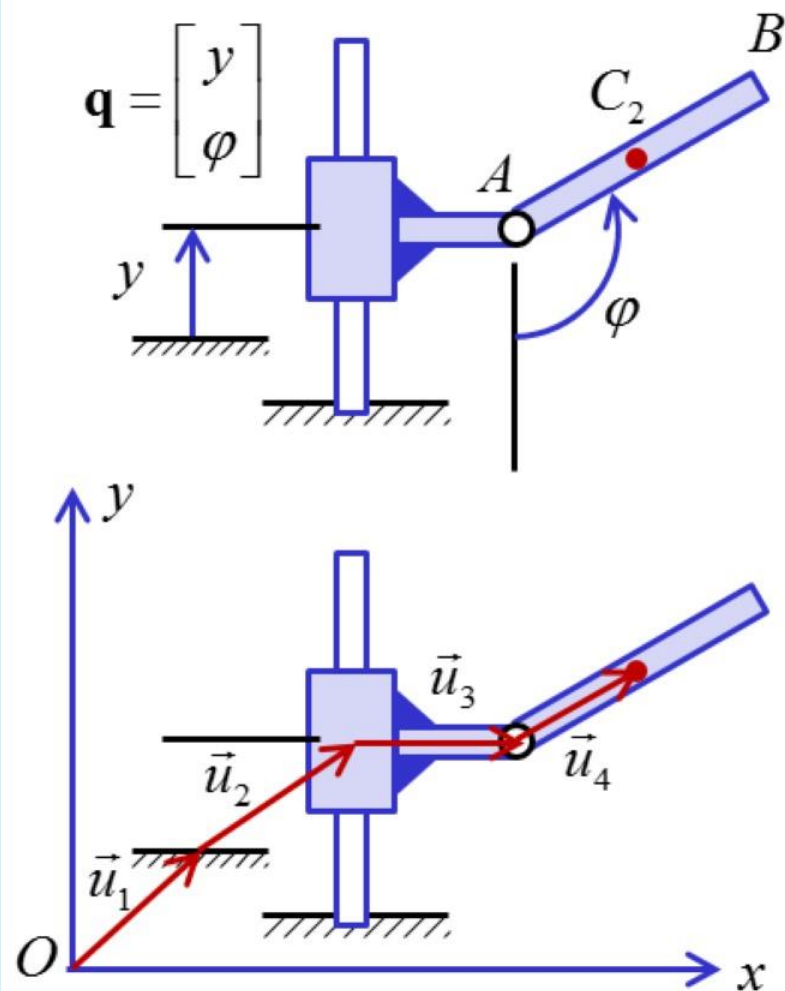
Đạo hàm theo thời gian:

$$v_{C_2} = \dot{x}_{C_2} = \dot{x}_2$$

Phương trình Lagrange loại 2: Kỹ thuật sử dụng đa giác vector

Tìm vận tốc điểm – Ví dụ 3

Tính $v_{C_2}^2(q, \dot{q})$ biết AC_2 bằng d



Phương trình vector:

$$\overrightarrow{OC_2} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3 + \vec{u}_4$$

Chiếu lên các trục Ox, Oy:

$$\begin{cases} x_{C_2} = d \sin \varphi + \text{const} \\ y_{C_2} = y - d \cos \varphi + \text{const} \end{cases}$$

Đạo hàm theo thời gian:

$$\begin{cases} \dot{x}_{C_2} = d \dot{\varphi} \cos \varphi \\ \dot{y}_{C_2} = \dot{y} + d \dot{\varphi} \sin \varphi \end{cases}$$

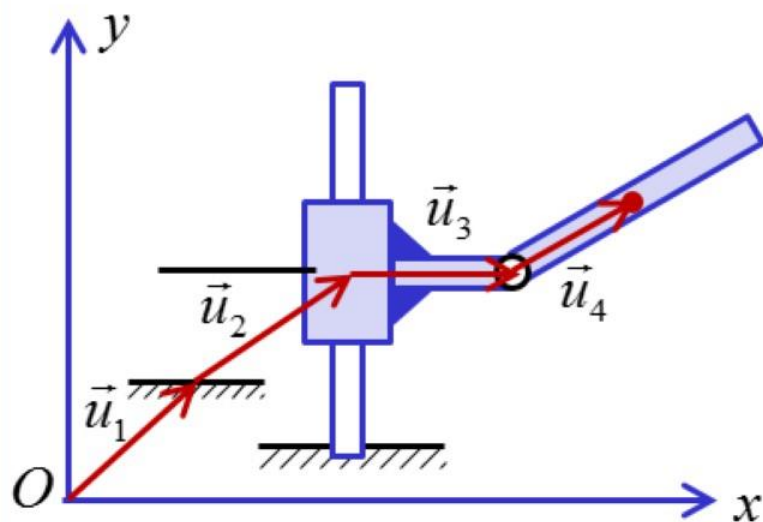
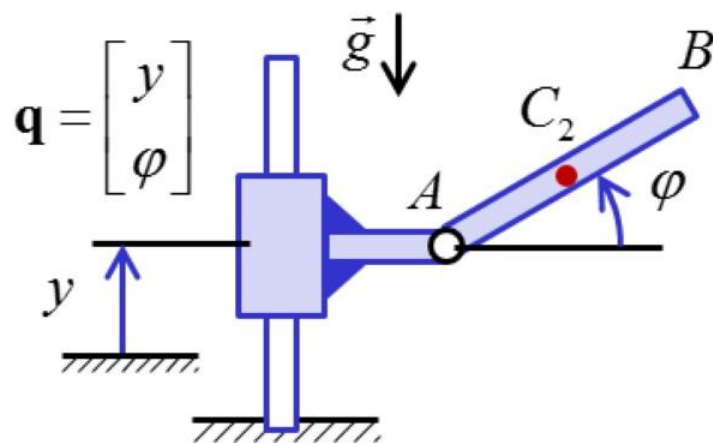
$$\begin{aligned} \text{Suy ra: } v_{C_2}^2 &= \dot{x}_{C_2}^2 + \dot{y}_{C_2}^2 \\ &= \dot{y}^2 + d^2 \dot{\varphi}^2 + 2d\dot{y}\dot{\varphi} \sin \varphi \end{aligned}$$

Chọn hệ trục cố định!

Phương trình Lagrange loại 2: Kỹ thuật sử dụng đa giác vector

Tìm cao độ của khối tâm – Ví dụ

Tính thế năng thanh đồng chất AB (m, l)



Phương trình vector:

$$\overrightarrow{OC_2} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3 + \vec{u}_4$$

Chiếu lên trục Oy:

$$y_{C_2} = y + \frac{l}{2} \sin \varphi + const$$

Suy ra:

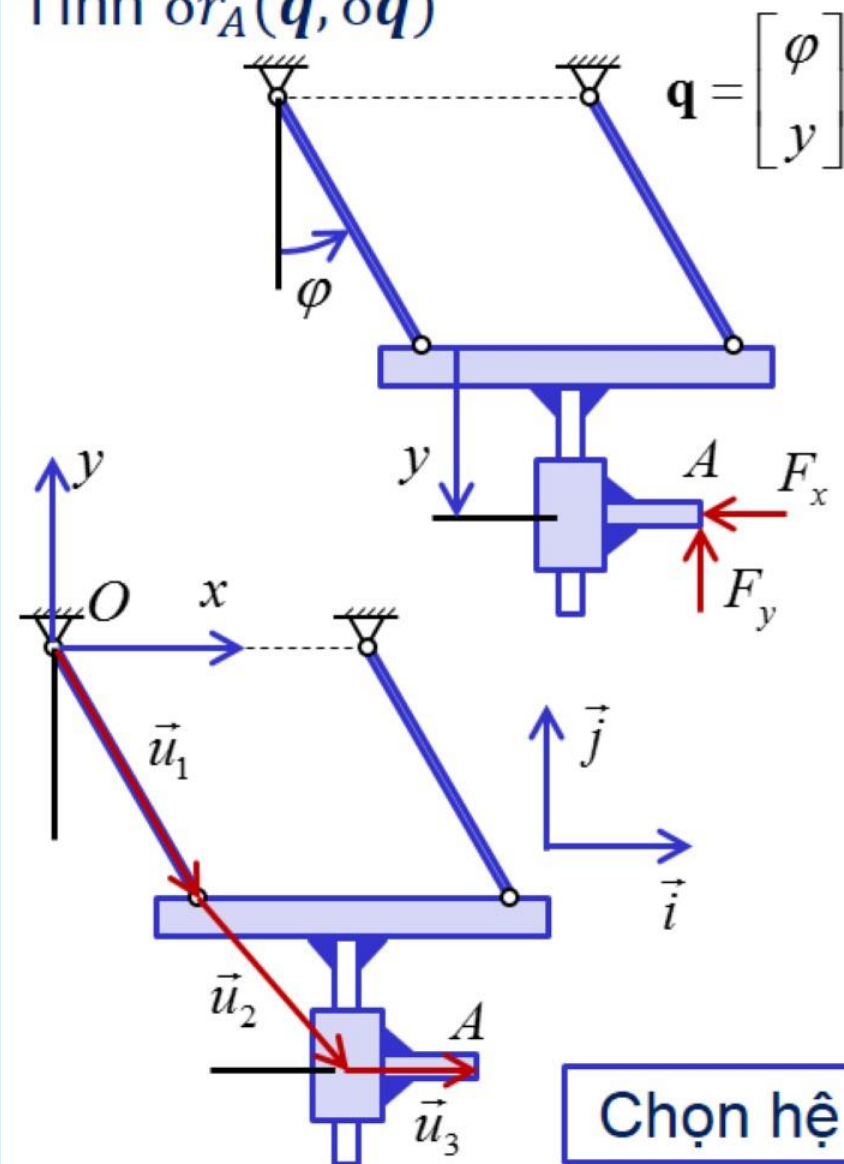
$$\begin{aligned} \Pi_2 &= mgy_{C_2} \\ &= mg \left(y + \frac{l}{2} \sin \varphi \right) + const \end{aligned}$$

Chọn Oy ngược hướng \vec{g}

Phương trình Lagrange loại 2: Kỹ thuật sử dụng đa giác vector

Tìm vector di chuyển ảo của điểm – Ví dụ

Tính $\delta \vec{r}_A(q, \delta q)$



Phương trình vector:

$$\vec{OA} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3$$

Chiếu lên trục Ox, Oy:

$$x_A = l \sin \varphi + \text{const}$$

$$y_A = -l \cos \varphi - y$$

Suy ra:

$$\vec{r}_A = (l \sin \varphi + \text{const}) \vec{i} + (-l \cos \varphi - y) \vec{j}$$

Vector dịch chuyển ảo của điểm A:

$$\begin{aligned} \delta \vec{r}_A &= \frac{\partial \vec{r}_A}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial \vec{r}_A}{\partial y} \delta y \\ &= l(\vec{i} \cos \varphi + \vec{j} \sin \varphi) \delta \varphi - \vec{j} \delta y \end{aligned}$$

Chọn hệ trục cố định!

Phương trình Lagrange loại 2: Kỹ thuật sử dụng đa giác vector

Tìm biến dạng / tốc độ biến dạng của lò xo, cản nhớt

Các điểm phải xuất hiện trong đa giác

- Hai đầu lò xo / cản nhớt

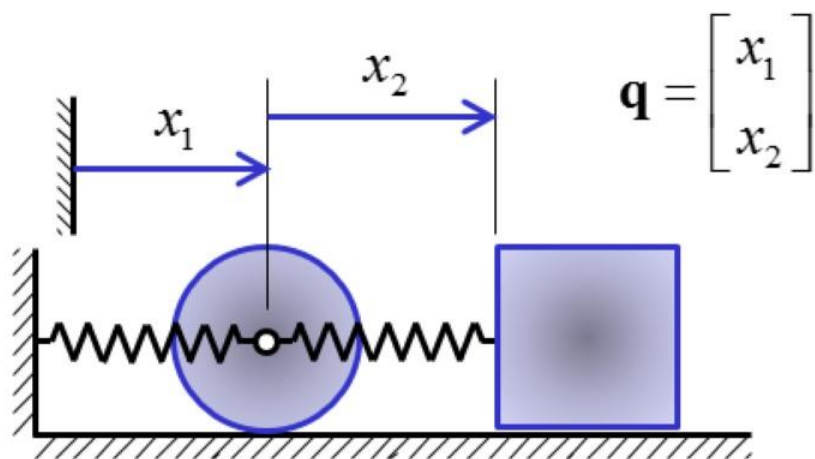
Các điểm cần lựa chọn để hoàn thiện đa giác

- Hai đầu các tọa độ suy rộng dài
- Khớp quay / điểm nối hai vật

Phương trình Lagrange loại 2: Kỹ thuật sử dụng đa giác vector

Tìm độ dẫn lò xo – Ví dụ 1

Tính $\Delta l_2(\mathbf{q})$ biết khi $x_1 = 0, x_2 = l_0$
các lò xo không biến dạng.



Phương trình vector:

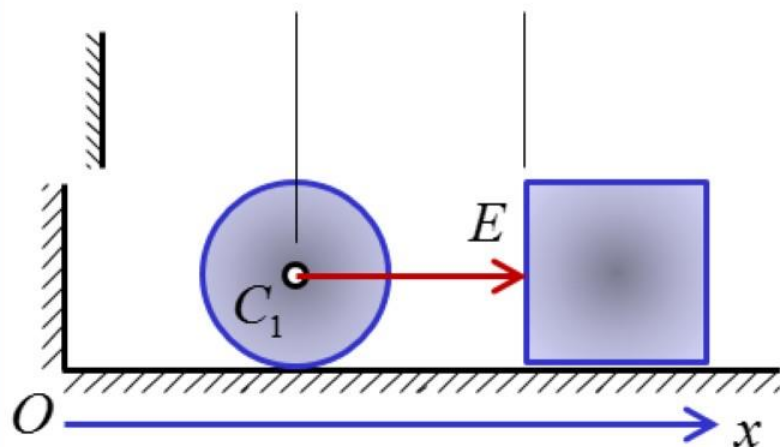
$$\overrightarrow{C_1 E} = \overrightarrow{C_1 E}$$

Chiếu lên trục Ox:

$$l_2 = \mathbf{x}_2$$

Độ dẫn của lò xo:

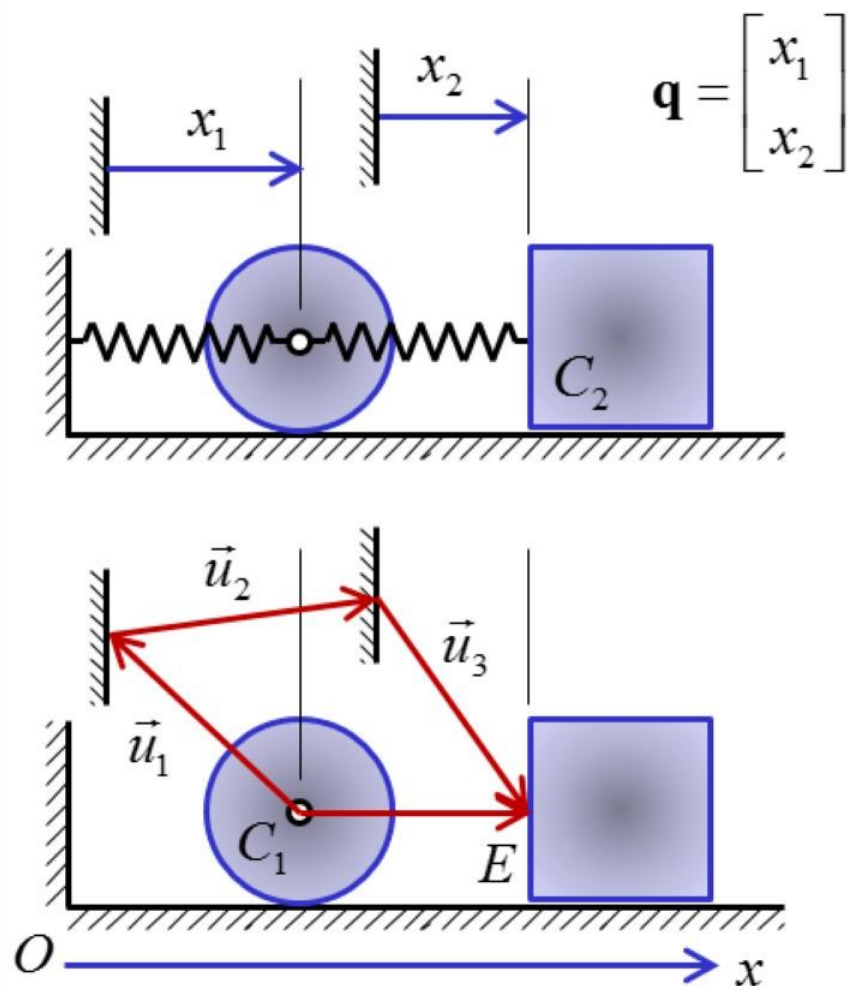
$$\begin{aligned} \Delta l_2 &= l_2 - l_2|_{x_1=0, x_2=l_0} \\ &= \mathbf{x}_2 - l_0 \end{aligned}$$



Phương trình Lagrange loại 2: Kỹ thuật sử dụng đa giác vector

Tìm độ dẫn lò xo – Ví dụ 2

Tính $\Delta l_2(\mathbf{q})$ biết khi $x_1 = 0, x_2 = 0$
các lò xo không biến dạng.



Phương trình vector:

$$\overrightarrow{C_1E} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3$$

Chiếu lên trục Ox:

$$l_2 = -x_1 + x_2 + const$$

Độ dẫn của lò xo:

$$\begin{aligned} \Delta l_2 &= l_2 - l_2|_{x_1=0, x_2=0} \\ &= x_2 - x_1 \end{aligned}$$

Tính $\Delta l(\mathbf{q})$ biết khi $x_1 = 0, x_2 = 0$ lò xo không biến dạng.



$$\overrightarrow{AB} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3$$

Chiều lên trục Ox:

$$l = \textcolor{red}{s} + \textcolor{red}{x}_2 + \textit{const}$$

$$= \frac{r}{R} \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \text{const}$$

Đồ dẫn của lò xo:

$$\Delta l = l - l|_{x_1=0, x_2=0}$$

$$= \frac{r}{R} \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$$

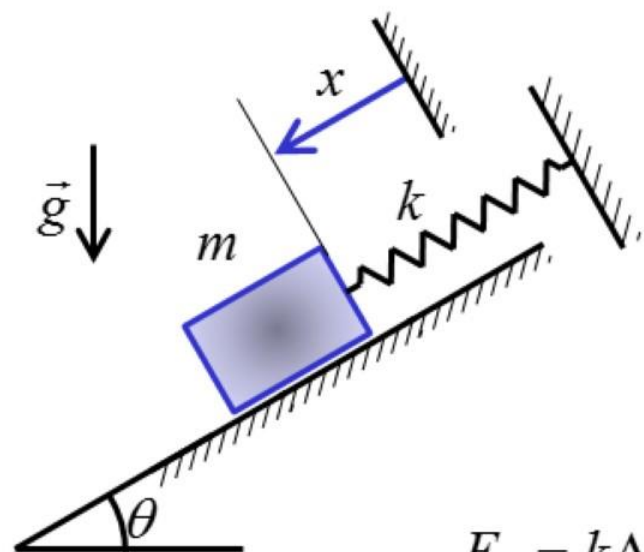
Thêm tọa độ
suy rộng dư s

$$s = \frac{r}{R} x_1$$

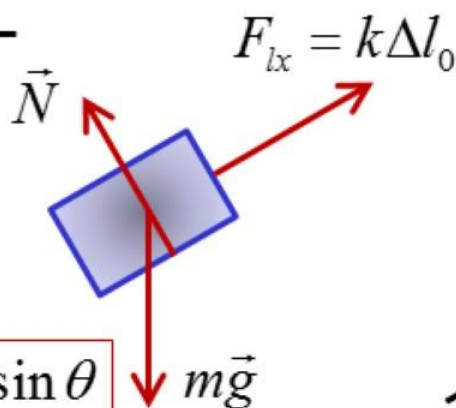
Phương trình Lagrange loại 2: Kỹ thuật sử dụng đa giác vector

Tìm độ dẫn lò xo – Ví dụ 4

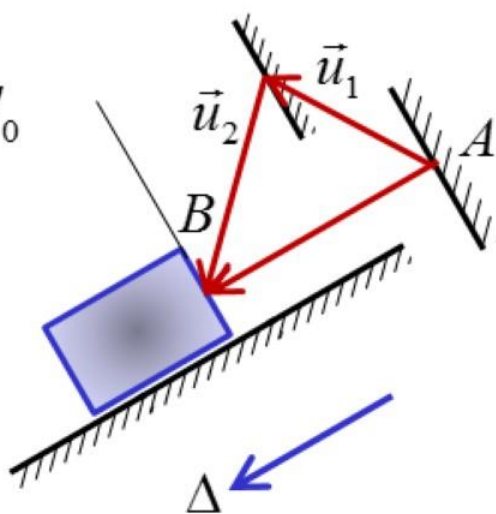
Tính $\Delta l(q)$ biết khi $x = 0$ hệ ở **trạng thái cân bằng**.



$$\mathbf{q} = [x]$$



$$\Delta l_0 = \frac{mg \sin \theta}{k}$$



Phương trình vector:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$$

Chiều lên trục Δ :

$$l = \mathbf{x} + \text{const}$$

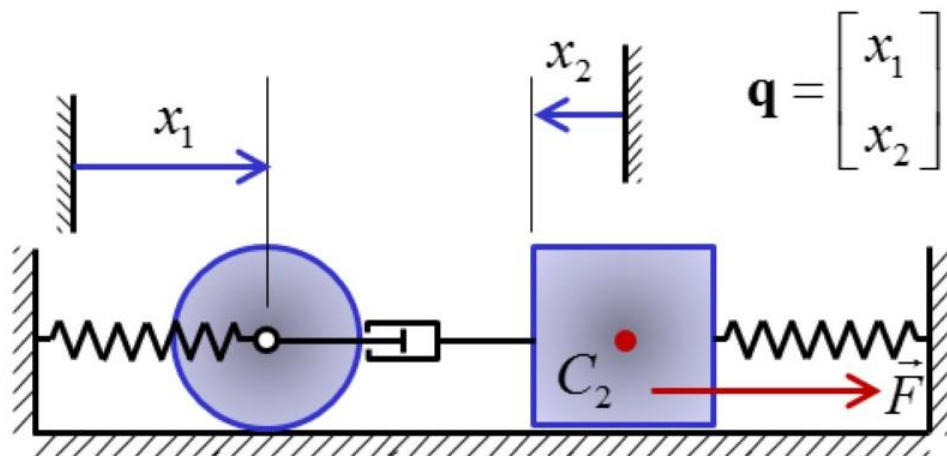
Độ dẫn của lò xo:

$$\begin{aligned} \Delta l &= l - (l|_{x=0} - \Delta l_0) \\ &= \mathbf{x} + \frac{mg \sin \theta}{k} \end{aligned}$$

Phương trình Lagrange loại 2: Kỹ thuật sử dụng đa giác vector

Tìm tốc độ biến dạng của cản nhớt – Ví dụ

Tính tốc độ biến dạng $\dot{l}(q, \dot{q})$ của cản nhớt.



Phương trình vector:

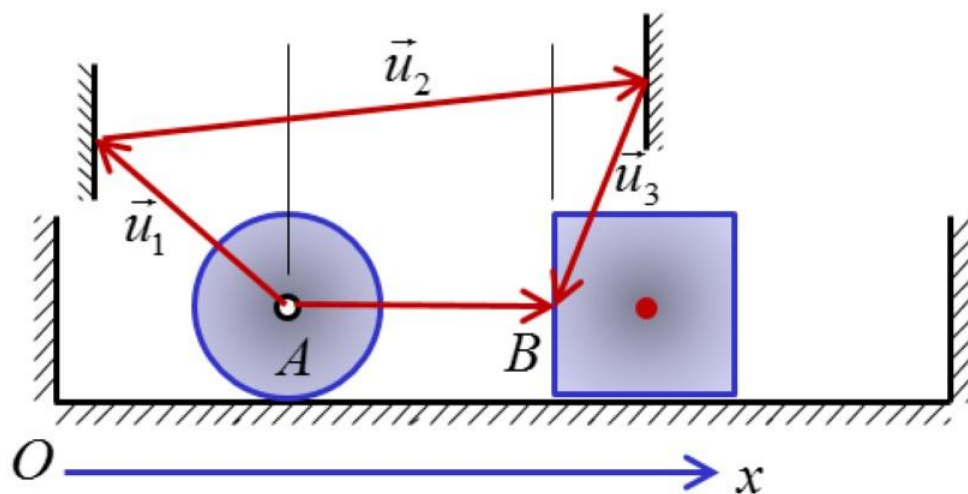
$$\overrightarrow{AB} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3$$

Chiếu lên trục Ox:

$$l = -x_1 - x_2 + const$$

Tốc độ biến dạng của cản nhớt:

$$\dot{l} = -\dot{x}_1 - \dot{x}_2$$



Phương trình Lagrange loại 2: Kỹ thuật sử dụng đa giác vector

Các nội dung đã trình bày

Slide 2: Mở đầu

Slide 3: Sơ đồ khối quá trình

Tìm vị trí và vận tốc điểm

Slide 4: Các điểm cần chọn khi vẽ đa giác vector

Slide 5-7: Tìm vận tốc điểm – Ví dụ

Slide 8: Tìm cao độ của khối tâm – Ví dụ

Slide 9: Tìm vector di chuyển ảo của điểm – Ví dụ

Tìm biến dạng / tốc độ biến dạng của lò xo, cản nhớt

Slide 10: Các điểm cần chọn khi vẽ đa giác vector

Slide 11-14: Tìm độ dẫn lò xo – Ví dụ

Slide 15: Tìm tốc độ biến dạng của cản nhớt – Ví dụ