

Tọa độ suy rộng dư Phương trình liên kết (ràng buộc) Quan hệ động học

Nguyễn Thái Minh Tuấn
Bộ môn Cơ học ứng dụng
C3-307, 307B, 308
Đại học Bách khoa Hà nội

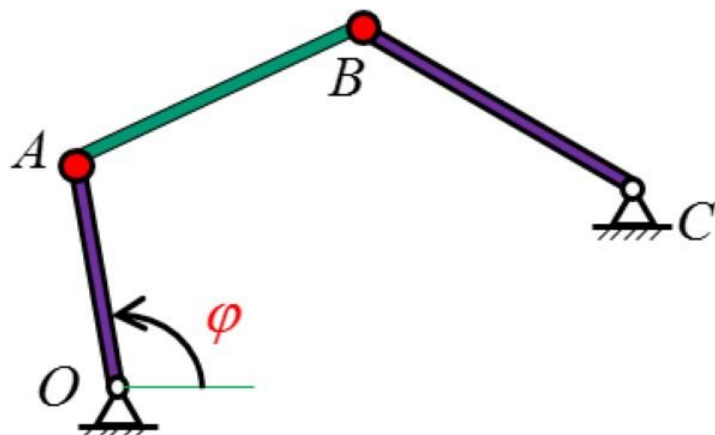
Tọa độ suy rộng dư – Phương trình liên kết – Quan hệ động học

Tọa độ suy rộng đủ – Tọa độ suy rộng dư – PT liên kết

Bậc tự do (degrees of freedom – DOF) là số các tham số **độc lập** và **cần thiết** để xác định cấu hình của một cơ hệ.

Tọa độ suy rộng: tham số xác định cấu hình (vị trí) của hệ.

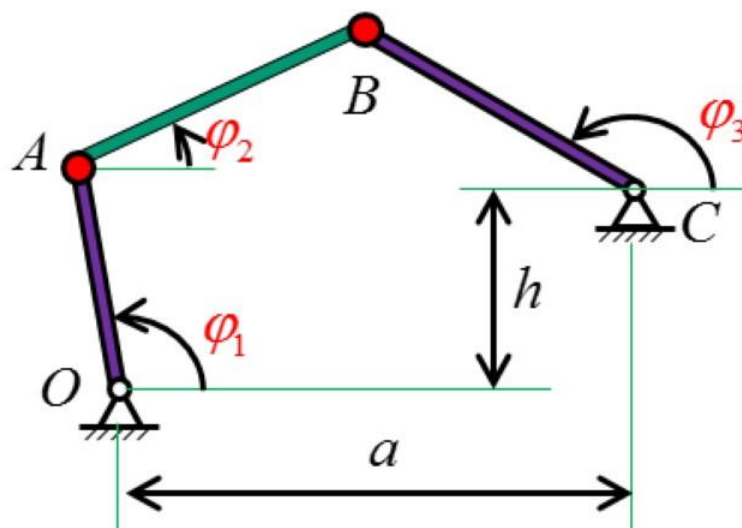
Tọa độ suy rộng đủ



Số tọa độ suy rộng đủ = số DOF

Các tọa độ suy rộng đủ độc lập với nhau

Tọa độ suy rộng dư



Số tọa độ suy rộng dư > số DOF

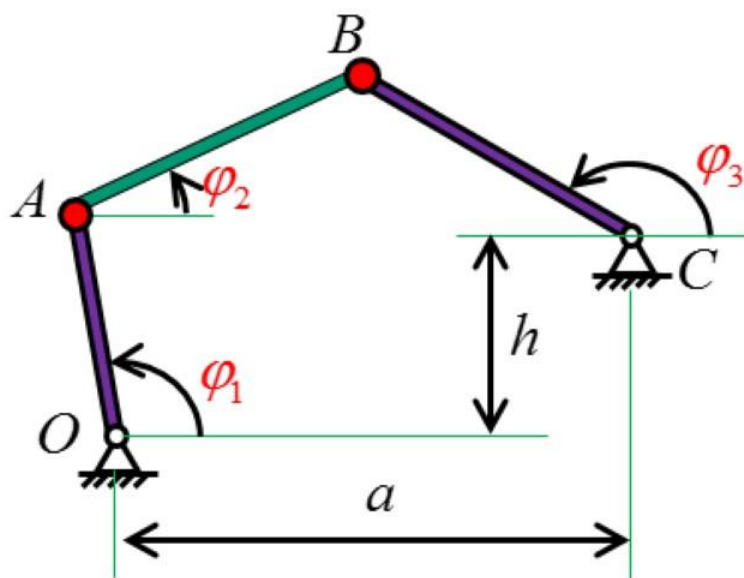
Các tọa độ suy rộng dư ràng buộc nhau bởi các **phương trình liên kết** (PT ràng buộc).

Số tọa độ suy rộng dư = số DOF + số PTLK

Tọa độ suy rộng – Vận tốc suy rộng

Các **tọa độ suy rộng** thường được sắp xếp vào một danh sách (vector) ký hiệu **\mathbf{q}** .

Đạo hàm của các tọa độ suy rộng theo thời gian được gọi là các **vận tốc suy rộng**.



$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{d\mathbf{q}}{dt} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_3 \end{bmatrix}$$

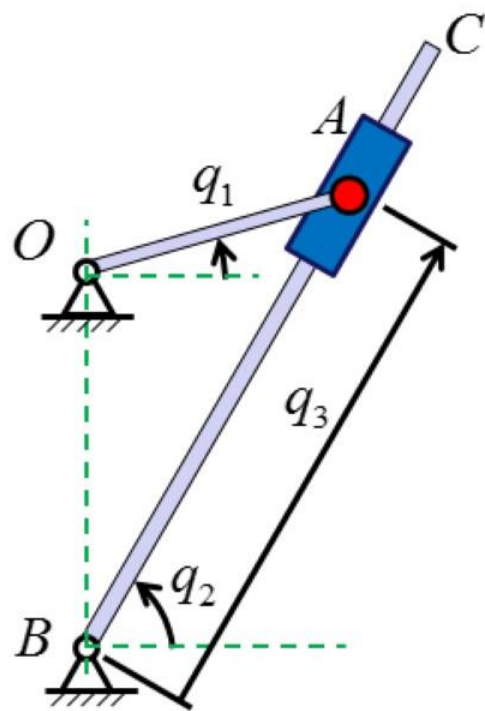
Tọa độ suy rộng dư – Phương trình liên kết – Quan hệ động học

Chọn tọa độ suy rộng ứng với các loại khớp / dạng chuyển động

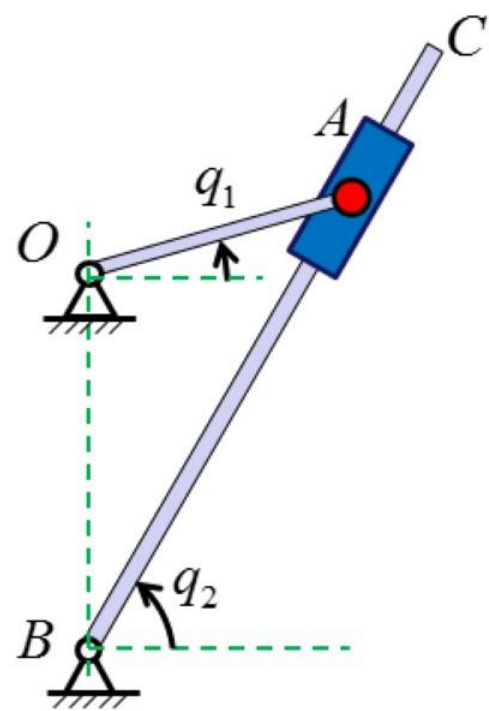
Khi chưa có lựa chọn nào tốt hơn, có thể dựa vào loại khớp hoặc dạng chuyển động để chọn tọa độ suy rộng.

Trường hợp	Tọa độ suy rộng
Khớp tịnh tiến Vật tịnh tiến thẳng	Dịch chuyển
Khớp quay Vật quay quanh trục cố định	Góc quay
Vật chuyển động song phẳng	x_C, y_C, φ
Trụ tròn lăn không trượt	Dịch chuyển và/hoặc Góc quay
Trụ vừa lăn vừa trượt	Dịch chuyển và Góc quay

Ví dụ 1: Tọa độ suy rộng dư của một cơ cấu Coulisse



$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$



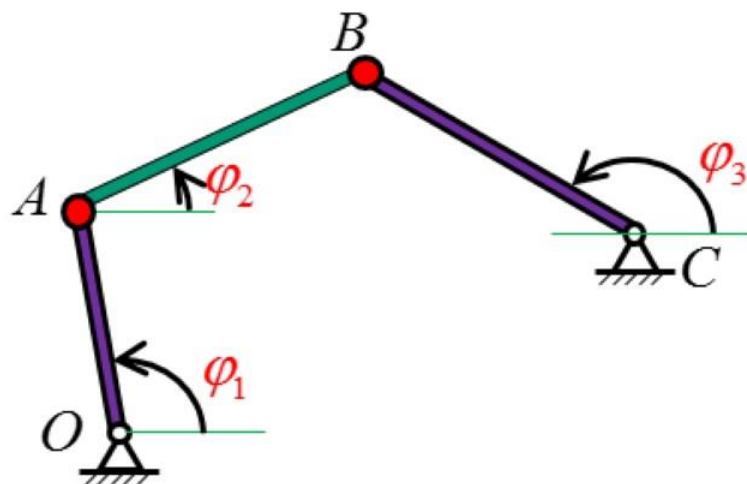
$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

Ràng buộc giữa các tọa độ suy rộng dư?

Tọa độ suy rộng dư – Phương trình liên kết – Quan hệ động học

Ví dụ 2: Cơ cấu bốn khâu bản lề – góc quay tuyệt đối và tương đối

φ_2 là góc quay tuyệt đối

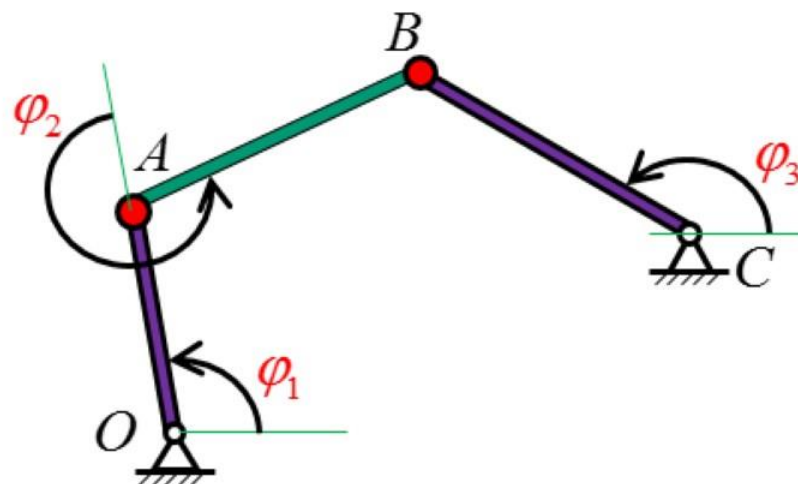


$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix}$$

Vận tốc góc của AB:

$$\omega_{AB} = \dot{\varphi}_2$$

φ_2 là góc quay tương đối



$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix}$$

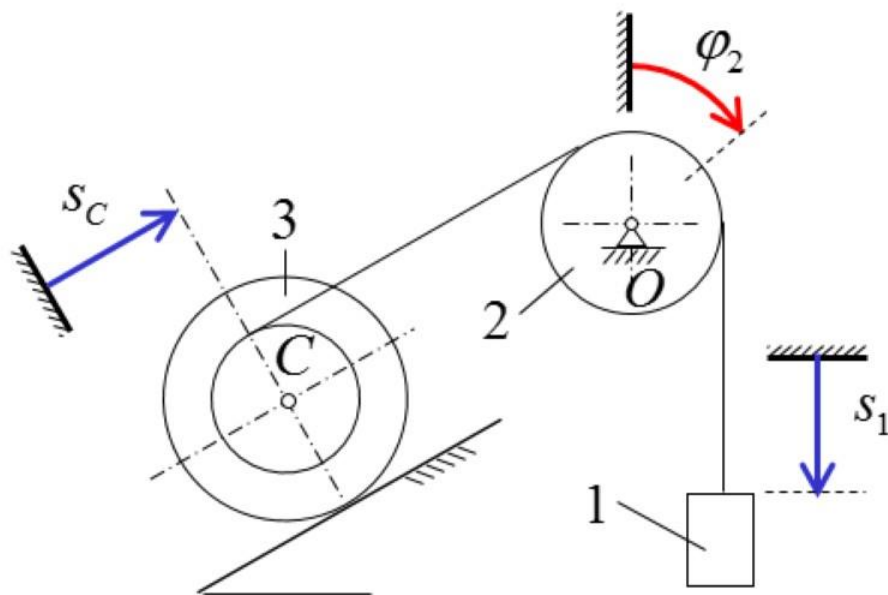
Vận tốc góc của AB:

$$\omega_{AB} = \dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2$$

Ràng buộc giữa các tọa độ suy rộng dư?

Tọa độ suy rộng dư – Phương trình liên kết – Quan hệ động học

Ví dụ 3: Một hệ có ròng rọc cố định và trụ hai tầng lăn không trượt



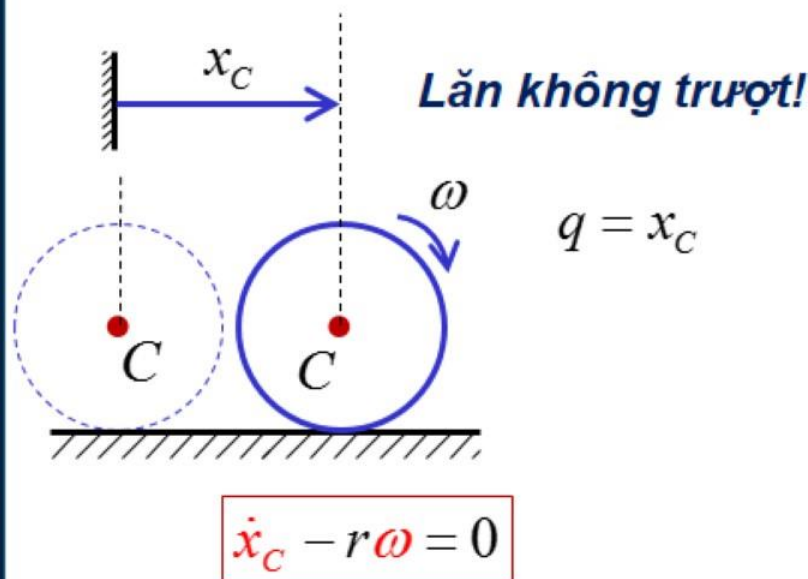
$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} s_1 \\ \varphi_2 \\ s_C \end{bmatrix}$$

Ràng buộc giữa các tọa độ suy rộng dư?
Vận tốc góc của vật 3?

Quan hệ động học – Phương trình liên kết

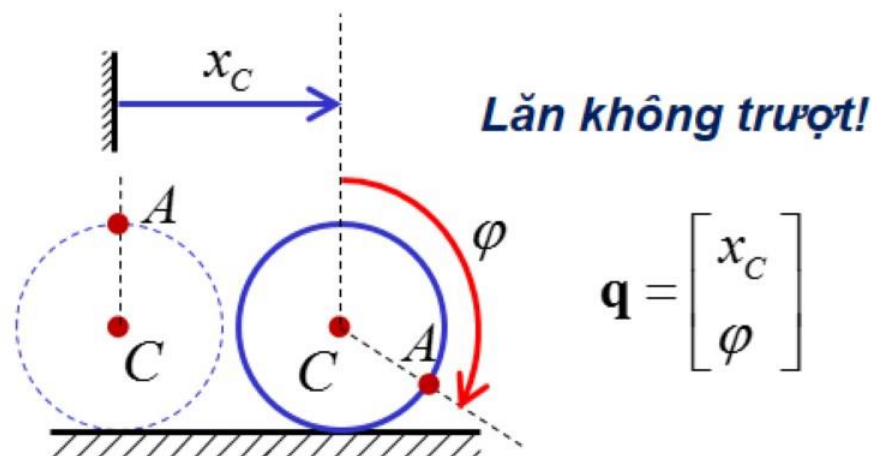
Quan hệ động học

- Tọa độ suy rộng (đủ hoặc dư)
- Vận tốc suy rộng
- Tọa độ, vận tốc của điểm
- Góc quay, vận tốc góc của vật
- Có thể chứa gia tốc, gia tốc góc



Phương trình liên kết

- Tọa độ suy rộng dư
- Vận tốc suy rộng
- Thường không chứa gia tốc, gia tốc góc



Phân loại liên kết (ràng buộc) – Lưu ý mở đầu

Phân loại liên kết (ràng buộc) là vấn đề phức tạp, nặng về lý thuyết và có nhiều ví dụ khó hình dung.

⇒ Sinh viên chỉ cần quan tâm đến

- Khái niệm **liên kết holonom**
- Ví dụ về **liên kết chương trình**
- Phương trình liên kết **tuyến tính** và **phi tuyến**

Lưu ý về thuật ngữ:

- “Liên kết” trong liên kết bản lề, liên kết ngàm:

Sự vật cụ thể

Tiếng Anh: **support, joint, connection**

- “Liên kết” (ràng buộc) đang xét:

Phương trình, bất phương trình có tính trừu tượng

Tiếng Anh: **constraint**

Liên kết (ràng buộc) holoônôm

Liên kết holoônôm là liên kết được biểu diễn bởi PT liên kết chỉ chứa **tọa độ suy rộng** và (có thể có) thời gian.

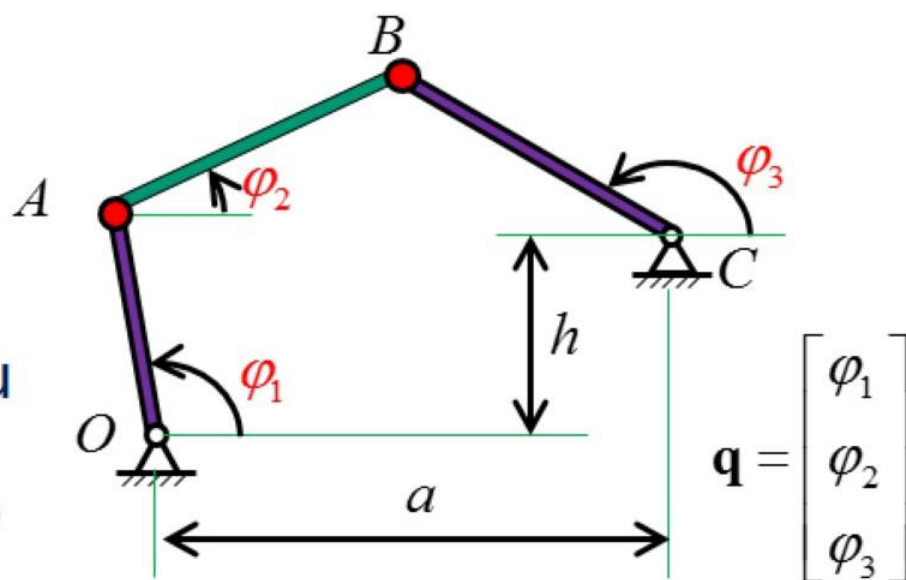
$$f(\mathbf{q}, t) = 0 \quad \text{hoặc} \quad f(\mathbf{q}) = 0$$

Ví dụ:

$$\vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CO} = \vec{0}$$

Suy ra phương trình hình chiếu

$$\begin{cases} l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 - l_3 \cos \varphi_3 - a = 0 \\ l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 - l_3 \sin \varphi_3 - h = 0 \end{cases}$$



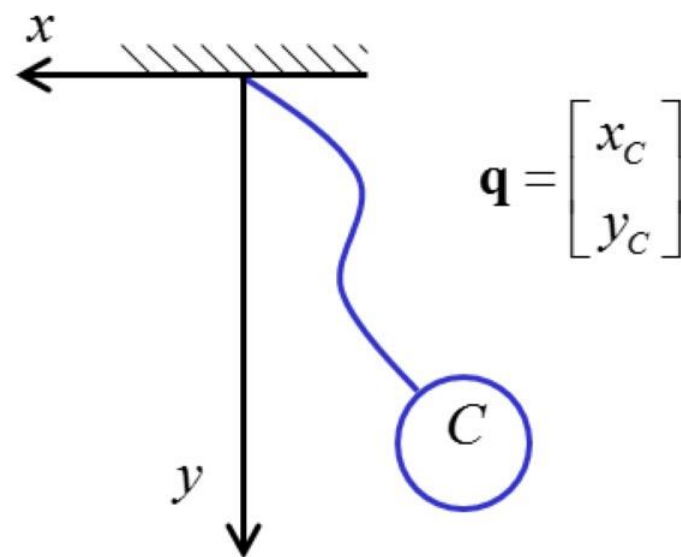
Hệ chỉ có các liên kết holoônôm là hệ holoônôm.

Ví dụ cho liên kết (ràng buộc) không holoônôm

Xét một con lắc đơn với một sợi dây không căng.
Ràng buộc được thể hiện bởi một **bất phương trình**.

$$x_C^2 + y_C^2 \leq l^2$$

=> Không phải liên kết holoônôm.

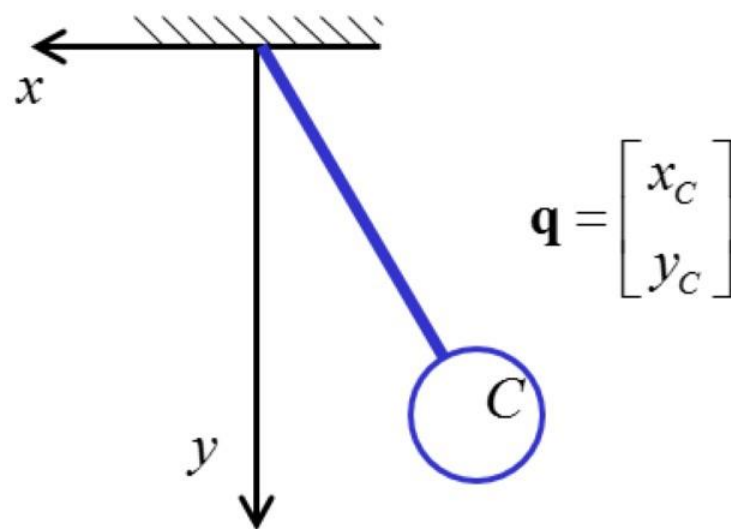


Trường hợp khác: PT liên kết có chứa **vận tốc suy rộng**

$$f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 0$$

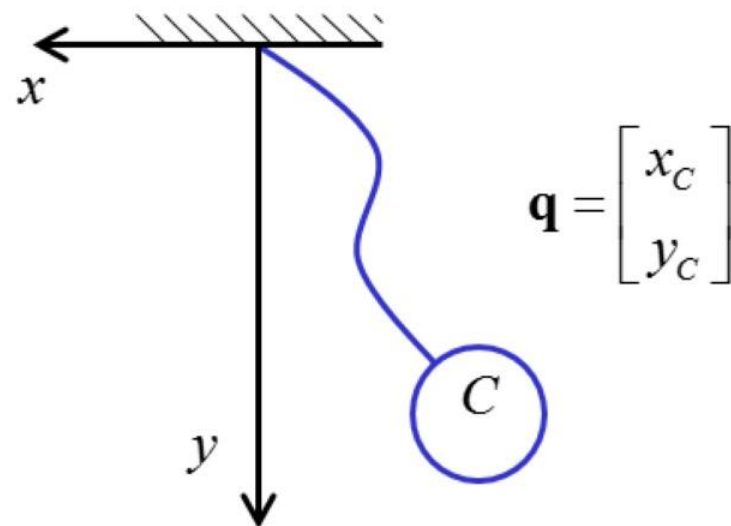
=> Thường không phải liên kết holoônôm.

Liên kết giữ và liên kết không giữ



$$x_C^2 + y_C^2 = l^2$$

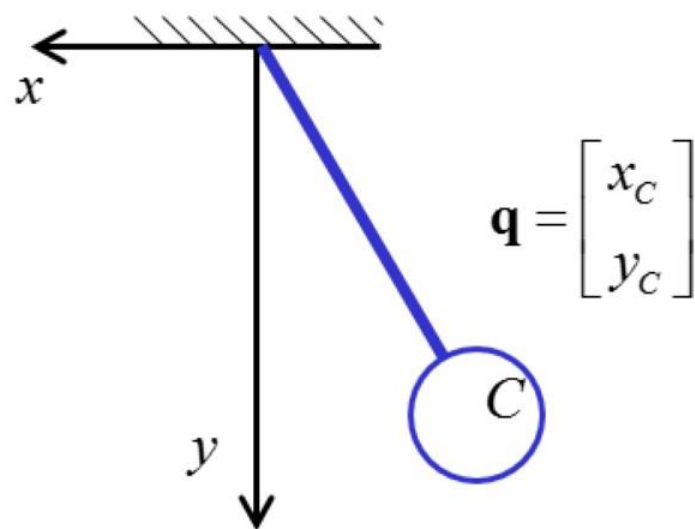
Liên kết giữ
(Liên kết hai phía)
thể hiện bởi
phương trình



$$x_C^2 + y_C^2 \leq l^2$$

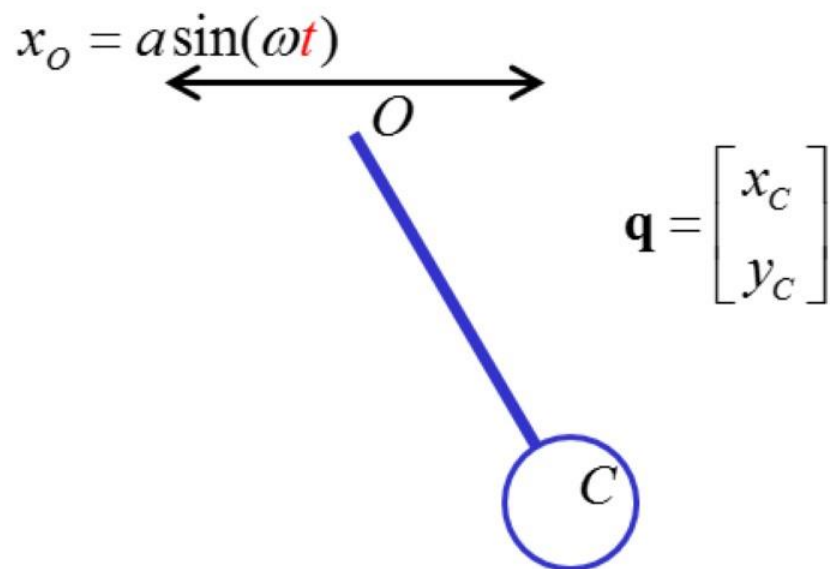
Liên kết không giữ
(Liên kết một phía)
thể hiện bởi
bất phương trình

Liên kết dừng và liên kết không dừng



$$f(\mathbf{q}) = x_C^2 + y_C^2 - l^2 = 0$$

Phương trình liên kết dừng
không chứa thời gian



$$f(\mathbf{q}, t) = (x_C - a \sin(\omega t))^2 + y_C^2 - l^2 = 0$$

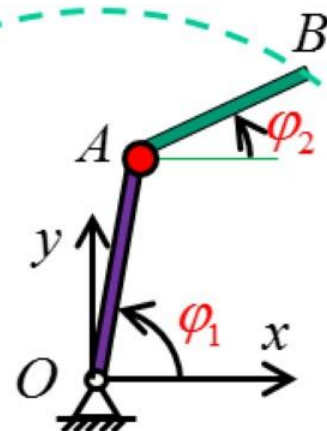
PT liên kết không dừng
có chứa thời gian

Liên kết (ràng buộc) chương trình

Ví dụ 1: Robot hai khâu được điều khiển để điểm B chuyển động trên một đường tròn.

$$(l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2)^2 + (l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2)^2 = R^2$$

- Dạng giống một PT liên kết.
- Không phụ thuộc ràng buộc cơ học mà phụ thuộc **lực điều khiển**.
- Không làm thay đổi số DOF cơ học của hệ.

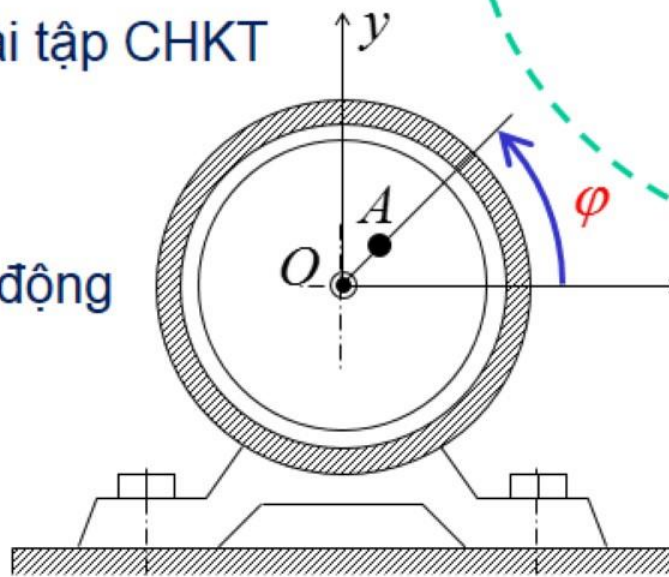


Ví dụ 2: Bài 12-5 sách bài tập CHKT

Liên kết chương trình:

$$\varphi = \omega t$$

sinh ra do moment phát động của động cơ điện.



Các nội dung đã trình bày

Tọa độ suy rộng đủ – Tọa độ suy rộng dư – PT liên kết

Slide 2: Minh họa

Slide 3: Tọa độ suy rộng – Vận tốc suy rộng

Chọn tọa độ suy rộng

Slide 4: Cách chọn

Slide 5-7: Các ví dụ

Quan hệ động học – Phương trình liên kết

Slide 8: Minh họa, so sánh

Slide 9: Phân loại liên kết – Lưu ý mở đầu

Slide 10: Liên kết (ràng buộc) holônôm

Slide 11: Liên kết (ràng buộc) không holônôm

Slide 12: Liên kết giữ và liên kết không giữ

Slide 13: Liên kết dừng và liên kết không dừng

Slide 14: Liên kết (ràng buộc) chương trình