

# R 语言-5

郑泽靖 zzjstat2023@163.com

北京师范大学统计学院

2025 年 11 月 30 日

# 蒙特卡罗方法简介

## 定义

蒙特卡罗 (Monte Carlo) 方法是一种以概率统计理论为指导的数值计算方法。它使用随机数（或伪随机数）来解决计算问题。

- 核心思想：当所求解的问题是某随机事件出现的概率，或者是某随机变量的数学期望时，通过“实验”的方法得出频率，以此逼近概率或期望。
- 应用场景：数值积分，物理模拟等。

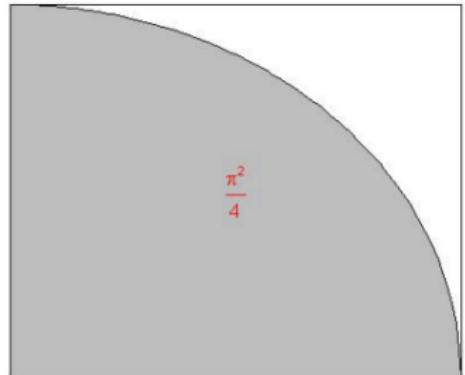
## 经典案例：计算圆周率 $\pi$

考虑单位正方形  $S$  和其内切圆  $C$  (第一象限)：

$$\begin{cases} 0 \leq X \leq 1 \\ 0 \leq Y \leq 1 \end{cases}$$

若  $X, Y \sim U(0, 1)$  独立同分布，则点落入圆内的概率为：

$$P(X^2 + Y^2 \leq 1) = \frac{\text{圆面积}/4}{\text{正方形面积}} = \frac{\pi/4}{1} = \frac{\pi}{4}$$



## R 代码实现：计算 $\pi$

基于大数定律，我们可以估计：

$$\pi \approx 4 \times \frac{\#\{X_i^2 + Y_i^2 \leq 1\}}{n}$$

```
1 p_est <- function(n) {
2   x <- runif(n); y <- runif(n)
3   k <- (x^2 + y^2 <= 1)
4   return(4 * sum(k) / n)
5 }
6
7 num <- c(1e3, 1e4, 1e5, 1e6) # 样本量
8 results <- c()
9 for (N in num) {
10   results <- c(results, p_est(N))
11 }
12
13 data.frame(N=num, Est=results,
14             Error=abs(results - pi))
```

## 理论基石：大数定律

### Kolmogorov 强大数定律

若  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是独立同分布 (i.i.d.) 的随机变量且  $E|X| < \infty$ ，则：

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k = E(X)\right) = 1$$

这意味着：只要样本量  $n$  足够大，样本均值将几乎处处收敛于理论期望。

## 应用 1：估计期望 $E(X)$

---

以  $X \sim U(0, 1)$  为例，理论值  $E(X) = 0.5$ 。

```
1 mean_unif <- function(n) {  
2     x <- runif(n, 0, 1)  
3     mean(x)  
4 }  
5 num <- c(10, 100, 1000, 10000, 100000)  
6 results <- c()  
7 for (N in num) {  
8     results <- c(results, mean_unif(N))  
9 }  
10 print(results)
```

随着  $n$  增加，样本均值迅速逼近 0.5。

## 应用 2：估计概率 $P(A)$

概率可以看作是示性函数  $I_A(X)$  的期望：

$$P(A) = E[I_A(X)] \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_A(X_i) = \text{频率}$$

以  $X \sim B(10, 0.5)$  为例，估计  $P(X = 4)$ ：

```
1 p_binom <- function(n) {
2     x <- rbinom(n, size = 10, prob = 0.5)
3     mean(x == 4) # 使用 mean() 计算逻辑向量的比例
4 }
5 results <- c()
6 for (N in num) {
7     results <- c(results, p_binom(N))
8 }
```

理论值：`'dbinom(4, 10, 0.5)'`  $\approx 0.205$ 。

## 应用 3：估计复杂函数的期望

假设  $X_1, X_2 \sim N(0, 1)$ ，估计  $\theta = E|X_1 - X_2|$ 。

此处解析解较复杂，但蒙特卡罗模拟非常简单：

```
1 m <- 100000
2 x1 <- rnorm(m); x2 <- rnorm(m) # 向量化操作效率更高
3 g_val <- abs(x1 - x2)
4 est <- mean(g_val)
5
6 cat("估计值:", est, "\n")
7 cat("理论值:", 2/sqrt(pi))
```

理论值  $\approx 1.128379$ 。这种方法在处理多维复杂分布时优势巨大。

## 蒙特卡罗估计方法小结

---

我们可以通过生成随机样本来估计以下各类统计量：

- 期望值  $E[X]$ : 直接计算样本均值  $\bar{x}$ 。
- 概率值  $P(A)$ : 计算事件发生的频率（示性函数的均值）。
- 分布函数  $F(x)$ : 计算  $X_i \leq x$  的经验比例（Glivenko-Cantelli 定理保证了收敛性）。
- 积分  $\int g(x) dx$ : 转化为期望形式进行估计。

## 蒙特卡罗积分：原理

---

目标：计算定积分  $\theta = \int_a^b g(x) dx$ 。

方法：引入在  $(a, b)$  上的均匀分布随机变量  $X \sim U(a, b)$ ，其概率密度函数为  $f(x) = \frac{1}{b-a}$ 。

我们可以将积分改写为期望的形式：

$$\theta = \int_a^b g(x) dx = (b - a) \int_a^b g(x) \underbrace{\frac{1}{b-a}}_{f(x)} dx = (b - a) E[g(X)]$$

估计量：

$$\hat{\theta} = \frac{b - a}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i), \quad X_i \sim U(a, b)$$

## 积分示例 1：区间 $[0, 1]$

---

计算  $\theta = \int_0^1 e^{-x} dx$ 。此时  $b - a = 1$ 。

```
1 m <- 10000
2 x <- runif(m)           # 默认 min=0, max=1
3 theta_hat <- mean(exp(-x))
4
5 print(paste("MC估计:", round(theta_hat, 5)))
6 print(paste("真实值:", round(1 - exp(-1), 5)))
```

## 积分示例 2：一般区间 [2, 4]

计算  $\theta = \int_2^4 e^{-x} dx$ 。注意这里要乘以区间长度  $(4 - 2) = 2$ 。

```
1 m <- 10000
2 x <- runif(m, min = 2, max = 4)
3 # 公式: (b-a) * mean(g(x))
4 theta_hat <- 2 * mean(exp(-x))
5
6 print(paste("MC估计:", round(theta_hat, 5)))
7 print(paste("真实值:", round(exp(-2) - exp(-4), 5)))
```

# 误差分析：中心极限定理 (CLT)

蒙特卡罗估计的误差服从什么分布？

## Lindeberg-Lévy CLT

若  $X_1, \dots, X_n$  独立同分布，期望  $\mu$ , 方差  $\sigma^2 < \infty$ , 则：

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$$

或者标准化形式：

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

这告诉我们，蒙特卡罗估计的误差收敛速度为  $O(1/\sqrt{n})$ 。

## CLT 验证：可视化

验证：当  $n$  较大时，标准化样本均值近似标准正态分布。以  $X \sim U(0, 1)$  为例， $\mu = 0.5, \sigma^2 = 1/12$ 。

```
1 verify_clt <- function(m, n) {  
2     # m: 模拟次数, n: 每次的样本量  
3     z_scores <- numeric(m)  
4     true_sd <- sqrt(1/12)  
5     for (i in 1:m) {  
6         x <- runif(n)  
7         # 构造标准化变量  
8         z_scores[i] <- (mean(x)-0.5)/(true_sd/sqrt(n))  
9     }  
10    return(z_scores)  
11}  
12 data <- verify_clt(m=2000, n=100)
```

## CLT 验证：绘图结果

接上页代码，绘制直方图与理论曲线对比：

```
1 # 绘制频率直方图
2 hist(data, prob = TRUE, breaks = 40,
3       main = "Standardized\u2225Mean\u2225vs\u2225N(0,1)",
4       col = "lightblue", border = "white")
5
6 # 添加标准正态分布密度曲线
7 curve(dnorm(x), add = TRUE, col = "red", lwd = 2)
```

- 蓝色直方图代表模拟数据的分布。
- 红色曲线代表标准正态分布  $N(0, 1)$ 。
- 两者高度重合说明了 CLT 的有效性。

## 练习题 1：定积分计算

---

利用蒙特卡罗方法计算如下定积分的近似值，并与真实值进行比较：

$$I = \int_1^5 \ln(x) dx$$

提示：

- 积分区间为  $[1, 5]$ ，长度为 4。
- 真实值计算公式： $\int \ln(x) dx = x \ln x - x$ 。
- 真实值结果约为  $5 \ln 5 - 5 - (1 \ln 1 - 1) \approx 4.047$ 。

## 练习题 2：多维随机变量概率估计

---

设  $X, Y, Z$  相互独立且均服从  $U(0, 1)$  分布。请编写 R 代码估计以下事件发生的概率：

$$P(X + Y + Z \leq 1)$$

思考：

- 理论上，这是三维单位立方体中被平面  $x + y + z = 1$  截出的四面体的体积。
- 理论值为  $\frac{1}{3!} = \frac{1}{6} \approx 0.16667$ 。

*Thanks!*