思路

第一问

假设:

1. 每辆货车完全相同.
2. 忽略货车长度.
3. 货车在 P 点和 D 点不耗电.
4. 货车匀速行驶, 忽略启动和停止的所需的时间.
5. 在换电站不装卸货.
6. 更换电池时 6 个电池同时更换.
7. 在换电站更换车辆不需要耗费时间.
8. ……

设换电站为 Q, 它到 P 的距离是 $s$km, 货车以 60km/h 在路上行驶的时间与 s 无关, 都是 $\frac{1}{3}$h. 设在公路上行驶的货车共 n 辆, 因为车距至少 0.2km, 那么

$$0.2n \leqslant 20. \tag{1}$$

为了极大化运货量, 这些货车都应该当前一辆车启动之后第一次与换电站距离至少 0.2km 出发. 按照最开始启动的顺序从 1 到 n 编号, 接下来假设在 1000h 中,1 号货车行驶过程中换电次数是 N 次. 令 $k \leqslant N$,$x_i(k)$ 表示第 i 辆车在第 $k-1$ 次换电之后,k 次换电之前与前车的间距,$1 \leqslant i \leqslant n$, 对第 1 辆车来说是与第 n 辆车的间距, 令

$x_{n+1}(k) = x_1(k)$,$x_i(N+1)$ 表示在第 N 次换电后 i 车与前车的间距. 记 i 车第 $k-1$ 次换电之后,k 次换电之前行驶的圈数是 $a_i(k)$,$a_i(N+1)$ 表示在第 N 次换电后行驶的圈数, 规定 $a_i(0) = 0$, 这里允许 $a_i(k)$ 是小数, 小数部分 $\{a_i(k)\}$ 表示在行进 $[a_i(k)]$ 圈之后又行驶了 $20\{a_i(k)\}$km. 那么可以得到

$$x_i(k) \geqslant 0.2, i = 1 \cdots, n, k = 1, \cdots, N+1. \tag{2}$$

$$x_1(k) + \cdots + x_n(k) = 20, k = 1, \cdots, N+1. \tag{3}$$

而且, 因为 n 车行驶到 1 车的位置所需时间最多不超过 $\frac{1}{3} + \frac{1}{30} = \frac{11}{30}$h, 小于电池充好电的时间 3h, 所以, 剩余没有使用的电池 (包括备用的车的电池) 要不少于车中的电池,

$$900 - 60n \cdot 2 \geqslant 0. \tag{4}$$

另外, 货车每次换电有几种选择:1. 当空载时, 可以选择更换车辆, 也可以选择更换电池;2. 当载着货物时, 只能选择更换电池. 所以用 $m(k)$ 表示所有在第 k 次换电时更换车辆的数目,$n - m(k)$ 表示所以在第 k 次换电时更换电池的车辆数.$m(k)$ 必须小于在换电站备用的货车数, 满足

$$m(k) \leqslant 125 - n, k = 1, 2, \cdots, N. \tag{5}$$

同样, 剩余的电池数不少于需要更换的电池数,

$$6(n - m(k)) \leqslant 150. \tag{6}$$

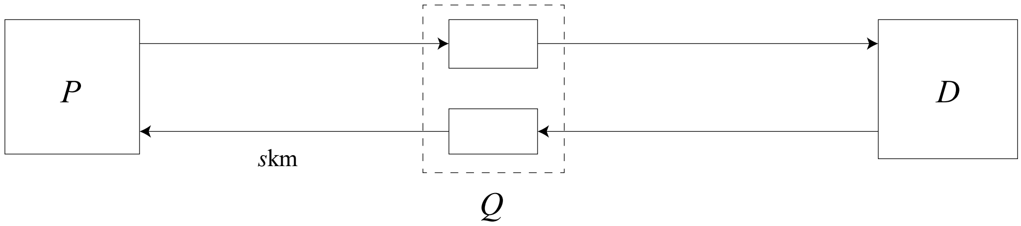

图 1: 第一问示意图

对每个 k,j 从 1 到 n 遍历, 当 j 车换电时, 要求电量在 $[10\%, 25\%]$,$a_j(k)$ 表示 j 车

第 $k-1$ 次换电之后,k 次换电之前走的圈数,

$$10 \leqslant 100 - \frac{25}{3} a_j(k) \leqslant 25, k = 1, \cdots, N. \tag{7}$$

$$10 \leqslant 100 - \frac{25}{3} a_j(N+1). \tag{8}$$

而且 $\{a_j(k)\}$ $(k = 1, \cdots, N)$ 取值可以确定, 当 $\{a_j(0) + \cdots + a_j(k-1)\} = 0$ 时,$\{a_j(k)\} = \frac{s}{10}$ 或 0, 当 $\{a_j(0) + \cdots + a_j(k-1)\} \neq 0$ 时,$\{a_j(k)\} = \frac{10-s}{10}$ 或 0.

这时,j 货车位置有两种情况:1. 在从 D 到 P 方向的换电站, 此时货车空载, 累计圈数是整数,

$$\{a_j(1) + \cdots + a_j(k)\} = 0. \tag{9}$$

这时可以选择换车还是换电池.2. 在从 P 到 D 方向的换电站, 这时货车载着货物, 累计圈数不是整数,

$$\{a_j(1) + \cdots + a_j(k)\} > 0. \tag{10}$$

这时只能换电池. 接下来引入变量 $y_i(k)$, 表示 i 车前车在第 k 次换电后与 i 车的车距. 令 $y_1(k) = x_1(k), y_{n+1}(k) = y_1(k)$.

对于第一种情况, 因为换车不消耗时间, 换电池消耗时间, 所以不同的操作可能会改变前后车的间距. 当 $y_j(k) \geqslant 0.2$, 可以换车, 这时车距变化是:

$$x_j(k+1) = y_j(k), \tag{11}$$

$$y_{j+1}(k) = x_{j+1}(k). \tag{12}$$

如果换电池的话,

$$x_j(k+1) = y_j(k) + 2, \tag{13}$$

$$y_{j+1}(k) = x_{j+1}(k) - 2. \tag{14}$$

当 $y_j(k) < 0.2$, 只能换电池,(13)和(14)成立.

对于第二种情况, 只能换电池, 同样(13)和(14)成立.

然后, 因为 k 次换电时候换车最多 $m(k)$ 辆, 用 $c_i(k)$ 表示 i 车第 k 次换电是否换电

池, 令

$$c_i(k)=\begin{cases}0 & \text{不换电池},\\ 1 & \text{换电池}.\end{cases} \tag{15}$$

和 $d_i(k)=1-c_i(k)$, 那么

$$d_1(k)+\cdots+d_n(k)=m(k). \tag{16}$$

接下来设 i $(i=1,\cdots,N+1)$ 车第 $k-1$ 次换电后, 第 k 次换电前到达 D 的次数是 $z_i(k)$, 其实就是运货量, 那么它和 $a_i(k)$ 有以下关系:

$$z_i(k)=\begin{cases}[a_i(k)]+1 & \{a_i(k)\}\geqslant\frac{10+s}{20},\\ [a_i(k)] & \{a_i(k)\}<\frac{10+s}{20}.\end{cases} \tag{17}$$

那么极大化的目标函数是

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{N}z_i(j). \tag{18}$$

记 1 车第 $k-1$ 次换电后,k 次换电前用时是 $t(k)$,$t(N+1)$ 表示第 N 次之后运行时间. 包括:1. 在公路上行驶的用时, 共 $\frac{a_1(k)}{3}$h.2. 装卸货用时, 当 $0\leqslant\{a_1(k)\}\leqslant\frac{s}{20}$ 或 $\frac{10+s}{20}\leqslant\{a_1(k)\}<1$ 时, 共用时 $\frac{z_1(k)}{30}$h, 当 $\frac{s}{20}\leqslant\{a_1(k)\}<\frac{10+s}{20}$ 时, 用时 $\frac{z_(k)}{30}+\frac{1}{60}$h. 所以

$$t(k)=\frac{a_1(k)}{3}+\begin{cases}\frac{z_1(k)}{30} & 0\leqslant\{a_1(k)\}\leqslant\frac{s}{20}\text{或}\frac{10+s}{20}\leqslant\{a_1(k)\}<1,\\ \frac{z_1(k)}{30}+\frac{1}{60} & \frac{s}{20}\leqslant\{a_1(k)\}<\frac{10+s}{20}.\end{cases} \tag{19}$$

换电池总时间 $\frac{1}{30}\sum_{j=1}^{N}c_1(j)$, 那么

$$t(1)+\cdots+t(N+1)+\frac{\sum_{j=1}^{N}c_1(j)}{30}\leqslant 1000. \tag{20}$$