# 泛函分析作业

**习题 1** 考虑空间 $C[a,b]$, 令 $\rho_1(x,y)=\max_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)|, \rho_2=\int_a^b|x(t)-y(t)|\,\mathrm{d}t$. 证明:$(C[a,b],\rho_1)$ 是完备的度量空间,$(C[a,b],\rho_2)$ 不是完备的度量空间.

**证明.** 先证明 $(C[a,b],\rho_1)$ 是完备的度量空间.

1. $\rho_1\geqslant 0$, 且 $\rho_1(x,y)=0\Leftrightarrow|x(t)-y(t)|=0,\forall t\in[a,b]\Leftrightarrow x=y.\rho_1$ 满足正定性.

2. $\rho_1(x,y)=\rho_1(y,x)$,$\rho_1$ 满足对称性.

3.

$$\begin{aligned}\rho_1(x,z)&=\max_{t\in[a,b]}|x(t)-z(t)|\\&\leqslant\max_{t\in[a,b]}(|x(t)-y(t)|+|y(t)-z(t)|)\\&\leqslant\max_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)|+\max_{t\in[a,b]}|y(t)-z(t)|\\&=\rho_1(x,y)+\rho_1(y,z).\end{aligned}$$

$\rho_1$ 满足三角不等式.$(C[a,b],\rho_1)$ 是度量空间.

下面证明 $(C[a,b],\rho_1)$ 完备. 设 $\{x_n(t)\}\subseteq C[a,b]$ 是 Cauchy 列, 那么对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $N$, 对任意的 $m,n>N$, $\rho_1(x_m,x_n)=\max_{t\in[a,b]}|x_m(t)-x_n(t)|<\varepsilon$, 则 $\{x_n(t)\}$ 一致收敛, 令极限函数是 $x(t)$, 则 $x(t)\in C[a,b]$, 那么 $\rho_1(x_n,x)=\max_{t\in[a,b]}\left|x_n(t)-x_(t)\right|\to 0,\quad n\to\infty$.$(C[a,b],\rho_1)$ 完备.

再证明 $(C[a,b],\rho_2)$ 不是完备的度量空间.

1. $\rho_2(x,y)\geqslant 0$, 且因为 $x(t),y(t)$ 连续,$\rho_2(x,y)=\int_a^b|x(t)-y(t)|\,\mathrm{d}t=0\Leftrightarrow$ $|x(t)-y(t)|\equiv 0\Leftrightarrow x=y.\rho_2$ 满足正定性.

2. $\rho_2(x,y)=\rho_2(y,x)$,$\rho_2$ 满足对称性.

3.

$$\begin{aligned}\rho_2(x,z)&=\int_a^b|x(t)-z(t)|\,\mathrm{d}t\\&\leqslant\int_a^b(|x(t)-y(t)|+|y(t)-z(t)|)\mathrm{d}t\\&=\rho_2(x,y)+\rho_2(y,z).\end{aligned}$$

$\rho_2$ 满足三角不等式.$(C[a,b],\rho_2)$ 是度量空间.

下面说明 $(C[a,b],\rho_2)$ 不完备. 反例: 不妨令 $a=0, b=1$, 再令

$$x_n = \begin{cases} -nx+1 & 0 \leqslant x \leqslant 1/n \\ 0 & 1/n < x \leqslant 1. \end{cases}$$

那么 $x_n \in C[0,1]$, 且 $\rho_2(x_m, x_n) \to 0, \quad m,n\to\infty$, 但是令

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} 1 & x=0 \\ 0 & 0<x\leqslant 1, \end{cases}$$

$x \notin C[0,1]$, 说明这个度量空间不完备. ■

**习题 2** 令 $\rho(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$, 证明 $(\mathbb{R},\rho)$ 是完备的度量空间.

**证明.** 1. $\rho(x,y)\geqslant 0$, 且 $\rho(x,y)=0 \Leftrightarrow |x-y|=0 \Leftrightarrow x=y$.

2. $\rho(x,y)=\rho(y,x)$.

3. 注意到 $\frac{x}{1+x}$ 当 $x\geqslant 0$ 时是单调递增函数.

$$\begin{aligned}
\rho(x,y)+\rho(y,z) &= \frac{|x-y|}{1+|x-y|}+\frac{|y-z|}{1+|y-z|} \\
&= \frac{|x-y|+|y-z|+2\,|x-y|\,|y-z|}{1+|x-y|\,|y-z|+|x-y|+|y-z|} \\
&\geqslant \frac{|x-y|+|y-z|+|x-y|\,|y-z|}{1+|x-y|\,|y-z|+|x-y|+|y-z|} \\
&\geqslant \frac{|x-y|+|y-z|}{1+|x-y|+|y-z|} \\
&\geqslant \frac{|x-z|}{1+|x-z|} = \rho(x,z). \qquad (|x-y|+|y-z|\geqslant|x-z|)
\end{aligned}$$

则 $(\mathbb{R},\rho)$ 是度量空间.

下面证明它完备.

设 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列, 那么对任意的 $\varepsilon$, 其中 $0<\varepsilon<1/2$, 存在 $N$ 对任意的 $m,n>N, \frac{|x_n-x_n|}{1+|x_m-x_n|}<\varepsilon$, 那么 $|x_m-x_n|<\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}<2\varepsilon$, 则存在 $x\in\mathbb{R}$,$\{x_n\}$ 收敛于 $x$,$\rho(x_n,x)\leqslant|x_n-x|\to 0, \quad n\to\infty$. ■

**习题 3** $S[a,b]$ 表示 $[a,b]$ 上几乎处处有界的可测函数全体.$\rho(f,g)=\int_a^b \frac{|f-g|}{1+|f-g|}\mathrm{d}\mu$, 证明 $(S[a,b],\rho)$ 是完备的度量空间.

**证明.**