高数选择、填空答案解析

一、单项选择题

题目 1.1. 当 $x \to 0$ 时, 与 $\ln(1+2\sin x)$ 等价的无穷小是 (　　).

A. $1+2\sin x$;　B. x　C. $2x^2$;　D. $2x$.

解答. 答案:D.

当 $x \to 0$ 时,$\ln(1+2\sin x) \sim 2\sin x \sim 2x$.

题目 1.2. 设 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|}\sin\frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 (　　).

A. 极限不存在;　B. 极限存在但不连续;　C. 连续;　D. 连续且可导.

解答. 答案:C.

当 $x \to 0$ 时,$|f(x)| = \sqrt{|x|}\left|\sin\frac{1}{x^2}\right| \leqslant \sqrt{|x|} \to 0$, 则 f 在 $x=0$ 处连续.

题目 1.3. 设 $f(x) = \frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}\arctan\frac{1}{x}$, 则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的 (　　).

A. 可去间断点;　B. 跳跃间断点;　C. 无穷间断点;　D. 震荡间断点.

解答. 答案:A.

因为 $f(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x}}-1}{e^{-\frac{1}{x}}+1}\arctan\frac{1}{x} \to -\frac{\pi}{2}, x \to 0^+$, 且 $f(x) = \frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}\arctan\frac{1}{x} \to -\frac{\pi}{2}, x \to 0^-$, 那么 $x=0$ 是可去间断点.

题目 1.4. 设 $f(x)$ 可导,$F(x) = f(x)(1+|\sin x|)$. 若 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 则必有 (　　).

A. $f'(0)=0$;　B. $f(0)=0$;　C. $f(0)+f'(0)=0$;　$f(0)-f'(0)=0$.

解答. 答案:B.

F 在 $x=0$ 处可导, 即

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)(1+|\sin x|)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$$

存在, 那么就有 $f(0)=0$.

题目 1.5. 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续, 且 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}-1}=2$. 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 (　　).

A. 不可导;　B. 可导且 $f'(0)\neq 0$;　C. 取得极小值;　D. 取得极大值.

解答. 答案:C.

因为

$$\frac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}-1}=\frac{f(x)(\sqrt{1+x^2}+1)}{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}=\frac{f(x)(\sqrt{1+x^2}+1)}{x^2},$$

那么有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=1.$$

首先有 $f(0)=0$, 则

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}\cdot x=0,$$

得到 $f'(0)=0$, 排除 A、B 选项. 又因为 $\frac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}-1}\to 2, x\to 0$ 且 $\sqrt{1+x^2}-1\geqslant 0$, 那么 $f(x)\geqslant 0$, 即选项 C.

二、填空题

题目 2.1. 设 $f(x)$ 可微,$y=f(\sqrt{x})e^{f(-x)}$, 则 $y'=$ ______________.

解答. 答案:$y'=e^{f(-x)}\left[f'(\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}-f(\sqrt{x})f'(-x)\right]$.

用函数相乘的求导和链式求导法则,

$$\begin{aligned}
y'&=[f(\sqrt{x})]'e^{f(-x)}+f(\sqrt{x})(e^{f(-x)})'\\
&=f'(\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{f(-x)}+f(\sqrt{x})e^{f(-x)}f'(-x)\cdot(-1)\\
&=e^{f(-x)}\left[f'(\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}-f(\sqrt{x})f'(-x)\right].
\end{aligned}$$

题目 2.2. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)=$ ______________.

解答. 答案:$\frac{1}{2}$.

考虑夹逼定理. 因为

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+n+n}\leqslant\frac{i}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+n+1},$$

上式左边等于 $\frac{n+1}{2(n+2)}$, 右边等于 $\frac{n^2+n}{2(n^2+n+1)}$, 令 $n\to\infty$, 得到极限为 $\frac{1}{2}$.

题目 2.3. 设 $y=\frac{x^4+x^2+x}{x^2-1}$, 则 $y'''(0)=$ ______________.

解答. 答案:-6.

两边同时乘 x^2-1,

$$y(x^2-1)=x^4+x^2+x. \tag{1}$$

首先, 式 (1) 两边同时求三阶导,

$$y'''(x^2-1)+6y''x+6y'=24x,$$

令 $x=0$,

$$y'''(0)=6y'(0).$$

在式 (1) 两边同时求导, 得到

$$y'(x^2-1)+2yx=4x^3+2x+1,$$

将 $x=0$ 代入,

$$y'(0)=-1,$$

那么 $y'''(0)=-6$.

题目 2.4. 函数 $y=-\frac{1}{2}x^2e^x$ 的一个极小值是______________.

解答. 答案:$-2e^{-2}$.

因为 $y'=-\frac{e^x}{2}(x^2+2x)$, 因为 $e^x>0$, 只需考虑函数 $g(x)=-x^2-2x$,g 有零点 $x_1=-2,x_2=0$, 结合 g 函数图像图 (1) 得到 y 的一个极小值为 $y(-2)=-2e^{-2}$.

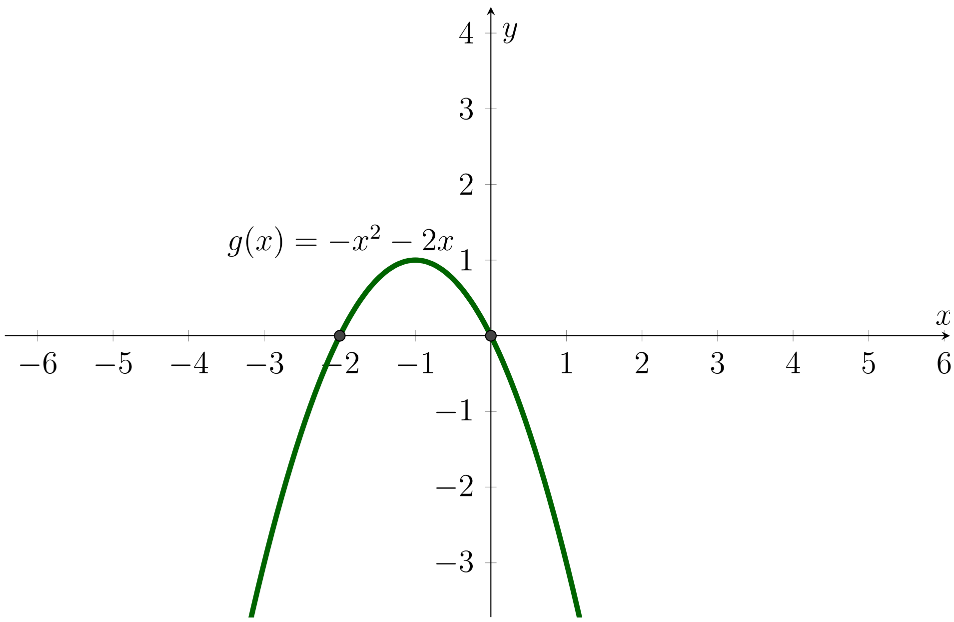

图 1: $g(x)$ 的函数图像

题目 2.5. 设 $y=y(x)$ 由方程 $xy+e^y=x+1$ 确定, 则 $\mathrm{d}y=$ ______________.

解答. 答案:$\mathrm{d}y=\frac{1-y}{x+e^y}\,\mathrm{d}x$.

因为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y'$, 对原方程两边求导,

$$y+xy'+e^y y'=1,$$

将 $y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 代入化简得到,

$$\mathrm{d}y=\frac{1-y}{x+e^y}\,\mathrm{d}x\,.$$