算法设计与分析作业

习题 1. 若在 0-1 背包问题中, 各物品依重量递增排列时, 其价值恰好依递减序排列. 对这个特殊的 0-1 背包问题, 设计一个有效的算法找出最优解, 并说明算法的正确性.

解. 设所给的输入为 $W > 0, w_i > 0, v_i > 0, 1 \leqslant i \leqslant n$. 不妨设 $0 < w_1 \leqslant w_2 \leqslant \cdots \leqslant w_n$, 那么 $v_1 \geqslant v_2 \geqslant \cdots \geqslant v_n > 0$. 则 $\frac{v_i}{w_i} \geqslant \frac{v_{i+1}}{w_{i+1}}, 1 \leqslant i \leqslant n-1$. 且当 $w_1 > W$ 时问题无解, $w_1 \leqslant W$ 时, 存在 0-1 背包问题的一个最优解, 且 $1 \notin S$. 对 $\forall i \in S$, 取 $S_i = S \cup \{1\} - \{i\}$ 即为满足贪心性质的最优解.

习题 2. 试设计一个构造图 G 生成树的算法, 使得构造出的生成树的边的最大权值达到最小.

解. 首先证明最小生成树使得边的最大权值达到最小. 设 G 是一棵最小生成树, T' 是 G 的一颗使最大权值达到最小的生成树. e 是 T 中的最大权边, e' 是 T' 中的最大权边, 且 $w(e') < w(e)$. 将 e 从 T 中删去后, T 将分为两个连通分支. 则存在 T' 中的边 e'' 连接这两个分支. 将 e'' 加入 T 的这两个连通分支得到一棵新的生成树 $T'' = T - e + e''$, e' 是 T' 的最大权边, 故 $w(e'') \leqslant w(e') < w(e)$, 那么 $w(T'') = w(T) - w(e) + w(e'') < w(T)$, 与 T 是最小生成树矛盾.

综上, 可用 Kruscal 算法构造 G 的最大权值达到最小的生成树.

习题 3. 试举例说明如果允许带权有向图中某些边的权为负实数, 则 Dijkstra 算法不能正确求得从源到其他所有顶点的最短路径长度.

解. 对于如图 (1) 的有向图 G, 用 Dijkstra 算法找到顶点 1 到顶点 3 的最短路径是 1,3, 其长度是 1, 但是最短路径是 1,2,3, 长度是 0.

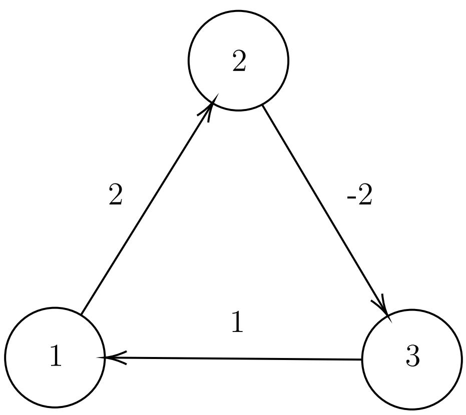

图 1: 负边权有向图