

PDE 作业

1 第一章

习题 1.1 利用 Gauss-Green 公式证明

1. 若 $u, v \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, 则

$$\int_{\Omega} u_{x_i} v dx = - \int_{\Omega} u v_{x_i} dx + \int_{\partial\Omega} u v n_i ds.$$

2. 若 $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, 则

$$\int_{\Omega} \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} ds.$$

3. 若 $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, 则

$$\int_{\Omega} u \Delta v - v \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} ds.$$

证明. 1. 令 $F = (0, 0, \dots, uv, \dots, 0)^T$, 根据 Gauss-Green 公式,

$$\int_{\Omega} u_{x_i} v dx = \int_{\Omega} \nabla \cdot F dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot n ds = \int_{\partial\Omega} u v n_i ds.$$

2. 注意到 $\Delta u = \nabla \cdot \nabla u$, 那么

$$\int_{\Omega} \Delta u dx = \int_{\Omega} \nabla \cdot \nabla u dx = \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot n ds = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} ds.$$

3. 根据第 1 问的结论,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u \Delta v - v \Delta u dx &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n (u v_{x_i x_i} - v u_{x_i x_i}) dx \\ &= - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n (u_{x_i} v_{x_i} - u_{x_i} v_{x_i}) dx + \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^n (u v_{x_i} n_i - v u_{x_i} n_i) ds \\ &= \int_{\partial\Omega} (u \nabla v \cdot n - v \nabla u \cdot n) ds = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} ds. \end{aligned}$$

■

习题 1.2 将下列方程化为标准型.

$$1. \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} + \sum_{1 \leq j < k \leq n} u_{x_i x_j} = 0.$$

$$2. u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} = 0.$$

习题 1.3 设

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla v|^2 + v^2) dx + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \alpha(x) v^2 ds - \int_{\Omega} f v dx - \int_{\partial\Omega} g v ds,$$

其中 $\alpha(x) \geq 0$. 考虑以下三个问题:

问题 I(变分问题): 求 $u \in M = C^1(\bar{\Omega})$, 使得

$$J(u) = \min_{v \in M} J(v).$$

问题 II: 求 $u \in M = C^1(\bar{\Omega})$, 使得它对于任意的 $v \in M$, 都满足

$$\int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + u \cdot v - f v) dx + \int_{\partial\Omega} (\alpha(x) u v - g v) ds = 0.$$

问题 III(第三边值问题): 求 $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, 满足以下边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha(x) u = g, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

1. 证明问题 I 与问题 II 等价.

2. 当 $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ 时, 证明问题 I、II、III 等价.

习题 1.4 若 u 是 Laplace 方程 $\Delta u = 0$ 的解, 如果 $u(x)$ 只是向径 $r = |x|$ 的函数, 即 $u(x) = \tilde{u}(r)$, 试写出 $\tilde{u}(r)$ 适合的常微分方程.

习题 1.5 1. 证明在自变量代换

$$\begin{cases} \xi = x - at, \\ \eta = x + at \end{cases}$$

下, 波动方程 $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ 具有形式

$$u_{\tau} = a^2 u_{\xi\xi}.$$