泛函分析作业

习题 1 考虑度量空间 ℓ^2, 证明:$A := \{\xi = \{x_n\} \in \ell^2 : n|x_n| \leqslant 1\}$ 是 ℓ^2 中的紧集.

证明. 设 $\{\xi_k\} \subset A$,$\xi_k = \{x_n^{(k)}\}$, 且有极限 $\xi = \{x_n\}$, 即 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|x_n^{(k)} - x_n\right| \to 0, n \to \infty$, 那么 $x_n^{(k)} \to x_n, n \to \infty$, 即 $n|x_n| \leqslant 1$,$\xi \in A$, 即 A 是闭集.

又对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 使得 $\sum_{n>N}\frac{1}{n^2} < \varepsilon$. 令 $B = \{(x_1, x_2, \cdots, x_N, 0, \cdots) : \{x_n\} \in A\}, B^* = \{(x_1, \cdots, x_N) : \{x_n\} \in A\} \subset \mathbb{R}^N$. 又因为 $|x_k| \leqslant \frac{1}{k}$, 那么 B^* 有界. 存在 $\eta_1, \cdots, \eta_{n_\varepsilon} \in B$ 对任意的 $\xi \in B$, 存在 j, 使得 $\xi \in B(\eta_j, \varepsilon)$, 又因为 B 的定义可知,

$$A \subset \bigcup_{\xi \in B} B(\xi, \varepsilon),$$

即对任意的 $x \in A$, 存在 $\xi \in B$,$\rho(x, \xi) < \varepsilon$, 又存在 η_j,$\rho(\xi, \eta_j) < \varepsilon$, 则 $\rho(x, \eta_j) < 2\varepsilon$, 则

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{n_\varepsilon} B(n_j, 2\varepsilon).$$

又 ℓ^2 空间完备, 在 ℓ^2 中任意一个球中的点列总存在收敛子列, 若有一个球 $B(\xi_0, r_0)$, $B(\xi_0, r_0) \cap A \subset B(\xi_0, r_0)$ 不能被有限个以 A 中的点为球心, r_0 为半径的球覆盖, 那么存在点列 $\{y_n\}$ 其中任意点的距离大于 r_0, 则它没有收敛子列, 矛盾. 则 A 有有穷的 ε-网, 即 A 完全有界, 那么 A 列紧, 又 A 是闭集, 则 A 自列紧, 即 A 是紧集. ■

习题 2 用完备度量空间的充要条件证明 Banach 不动点定理.

证明. 令 $A_n = \{x \in X : \rho(x, Tx) \leqslant \frac{1}{n}\}$, 则 A_n 递降.

设 $\{x_k\}$ 是 A_n 中的收敛点列, 设 $x_k \to x$, 那么 $\rho(x_n, Tx_n) \to \rho(x, Tx) \leqslant \frac{1}{n}$, 即 A_n 是闭集.

若存在 n_0,$A_{n_0} = \varnothing$, 即对任意的 $x \in X$,$\rho(x, Tx) > \frac{1}{n_0}$. 又因为 T 是压缩映射, 存在 $0 < \alpha < 1$, 使得 $\rho(Tx, Ty) \leqslant \alpha\rho(x, y)$, $\rho(T^k x, T^{k+1}x) \leqslant \alpha^k \rho(x, Tx) \to 0, k \to \infty$, 则 $A_{n_0} \neq \varnothing$, 矛盾. 则 $\{A_n\}$ 均非空.

下证 diam $A_n \to 0, n \to \infty$.

$$\begin{aligned}\text{diam } A_n = \sup_{x,y \in A_n} &< \rho(x_0, y_0) + \frac{1}{n} \\ &\leqslant \rho(x_0, Tx_0) + \rho(Tx_0, Ty_0) + \rho(Ty_0, y_0) + \frac{1}{n}\end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{1}{n} + \alpha\rho(x_0, y_0) + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$$
$$\leqslant \frac{3}{n} + \alpha \text{diam } A_n.$$

即 diam $A_n \leqslant \frac{3}{(1-\alpha)n} \to 0, n \to \infty$.

存在 $x \in X, \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x\}$, 即存在唯一的 x 使得 $Tx = x$. ■

习题 3 设 $K(\cdot,\cdot) \in L^2([a,b] \times [a,b])$, 对于 $f \in L^2[a,b]$, 证明当 λ 充分小时,

$$x(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t,s)x(s)\mathrm{d}s$$

在 $L^2[a,b]$ 中存在唯一解.

证明. 令 $Tx = f(t) + \lambda \int_a^b K(t,s)x(s)\mathrm{d}s$, 那么 T 是从 $L^2[a,b]$ 到 $L^2[a,b]$ 的映射.

$$\begin{aligned}
\rho(Tx,Ty) &= \left(\int_a^b \left(\lambda \int_a^b K(t,s)(x(s) - y(S))\mathrm{d}s\right)^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2} \\
&= \lambda \left(\int_a^b \left(\int_a^b K(t,s)(x(s) - y(s))\mathrm{d}s\right)^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2} \\
&= \rho(x,y)\lambda \left(\int_a^b \frac{\left(\int_a^b K(t,s)(x(s) - y(s))\mathrm{d}s\right)^2}{\int_a^b (x(s) - y(s))^2 \mathrm{d}s} \mathrm{d}t\right)^{1/2} \\
&\leqslant \rho(x,y)\lambda \left(\int_a^b \left(\int_a^b K^2(t,s)\mathrm{d}s\right) \mathrm{d}t\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

令 $\lambda < \frac{1}{\sqrt{\int_{[a,b]^2} K^2(t,s)\mathrm{d}t\mathrm{d}s + 1}}$, 则 $\lambda \left(\int_{[a,b]^2} K^2(t,s)\mathrm{d}t\mathrm{d}s\right)^{1/2} < 1$, 即 T 是压缩映射, 又 $L^2[a,b]$ 完备, 那么存在唯一解. ■

习题 4 设 $K(\cdot,\cdot) \in C([a,b] \times [a,b])$,$f \in C[a,b]$, 证明:$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$x(t) = f(t) + \lambda \int_a^t K(t,s)x(s)\mathrm{d}s$$

在 $C[a,b]$ 中存在唯一解.

证明. 令 $Tx = f(t) + \lambda \int_a^t K(t,s)x(s)\mathrm{d}s$, 那么 T 是从 $C[a,b]$ 到自身的映射.

又因为

$$T^n x - T^n y = \lambda \int_a^t K(t,s_1)(T^{n-1}x - T^{n-1}y)\mathrm{d}s_1$$

$$
\begin{aligned}
&= \cdots\cdots \\
&= \lambda^n \int\limits_{\substack{a\leqslant s_1\leqslant t\\ a\leqslant s_2\leqslant s_1\\ \cdots \\ a\leqslant s_n\leqslant s_{n-1}}} K(t,s_1)K(s_1,s_2)\cdots,K(s_{n-1},s_n)(x(s_n)-y(s_n))\mathrm{d}s_n\cdots\mathrm{d}s_1.
\end{aligned}
$$

那么

$$
\rho(T^n x, T^n y) \leqslant \lambda^n I \rho(x,y),
$$

其中

$$
\begin{aligned}
I &= \int\limits_{a\leqslant s_n\leqslant s_{n-1}\leqslant\cdots\leqslant s_1\leqslant t} |K(t,s_1)K(s_1,s_2)\cdots K(s_{n-1},s_n)|\,\mathrm{d}s_n\mathrm{d}s_{n-1}\cdots\mathrm{d}s_1 \\
&\leqslant \frac{M}{n!}\int_{[a,t]^n} |K(s_1,s_2)\cdots K(s_{n-1},s_n)|\,\mathrm{d}s_n\cdots\mathrm{d}s_1, \quad (|K(t,s)|\leqslant M,(t,s)\in[a,b]^2) \\
&\leqslant \frac{M^n(b-a)^n}{n!}.
\end{aligned}
$$

即

$$
\rho(T^n x, T^n y) \leqslant \frac{\lambda^n M^n (b-a)^n}{n!}\rho(x,y),
$$

当 n 充分大时,$\frac{\lambda^n M^n(b-a)^n}{n!} < 1$, 此时 T^n 是压缩映射, 则存在唯一解. ■

习题 5 $(X,\|\cdot\|)$, 若 $\dim X<\infty$, 则 X 是 B 空间.

证明. 设 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列, 即 $\|x_m-x_n\|\to 0, m,n\to\infty$, 设 $\dim X = l<\infty$,$e_1,\cdots,e_l$ 是它的基, 令 $x_n=\sum_{i=1}^l x_i^{(n)}e_i$. 那么存在 $c>0$, 使得

$$
c\left(\sum_{i=1}^{l}\left|x_i^{(m)}-x_i^{(n)}\right|^2\right)^{1/2} \leqslant \left\|\sum_{i=1}^{l}(x_i^{(m)}-x_i^{(n)})e_i\right\| \to 0,
$$

即 $\sum_{i=1}^l \left|x_i^{(m)}-x_i^{(n)}\right|^2\to 0$, 那么 $\{x_i^{(n)}\}$ 是 Cauchy 列,$\{x_i^{(n)}\}$ 收敛, 即 $\{x_n\}$ 收敛,X 是 B 空间. ■

习题 6 $(X,\|\cdot\|)$,X 的任何有限维子空间是闭的.

证明. 设 $(X_0,\|\cdot\|)$ 是 X 的有限维子空间, 那么它也是线性赋范空间, 又因为它是有限维的, 则它是 B 空间, 若它不是闭的, 那么存在收敛列 $\{x_n\}\subset X_0$, 极限为 $x\notin X_0$, 即 $\{x_n\}$ 在 X_0 内不收敛, 又因为它是 X_0 内的 Cauchy 列, 与它是 B 空间矛盾. 则 X_0 是闭的.■

习题 7 $(X, \|\cdot\|).\dim X < \infty$,$X$ 中的有界集是列紧集.

证明. 设 $\dim X = n < \infty$,$e_1, \cdots, e_n$ 是一组基,$A \subset X$ 有界. 对任意的 $x \in A$,$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, 那么存在 $c > 0, M > 0$, 使得

$$c \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} \leqslant \|x\| \leqslant M.$$

即 $(x_1, \cdots, x_n)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中有界, 那么若 $\{x_n\}$ 是 A 中的点列, 它们在基 $e_1, \cdots, e_n$ 下的坐标在 $\mathbb{R}^n$ 均位于球 $B(0, M/c)$ 中, 即存在收敛子列, 那么对应 $\{x_n\}$ 也存在收敛子列,A 列紧. ■

习题 8 $X := \{f \in C[0,1] : f(0) = 0\}$,$\|f\| = \max_{t \in [0,1]} |f(t)|$,$X$ 是 Banach 空间.$X_0 := \{f \in X : \int_0^1 f(t) \mathrm{d}t = 0\}$, 证明:$\dim X_0 = \infty$.

证明. 假设 $\dim X_0 = n < \infty$, 考虑如下函数:

$$\sin 2\pi x, \sin 4\pi x, \cdots, \sin 2\pi(n+1)x.$$

对任意的 k,$\sin 2\pi kx \in X_0$, 且 $\{\sin 2\pi kx\}_{k=1}^{n+1}$ 线性无关, 则 $\dim X_0 \geqslant n+1 > n$, 矛盾, 则 $\dim X_0 = \infty$. ■