

算法设计与分析 (第五章) 作业

习题 1 (5-4). 试设计一个解最大团问题的迭代回溯法.

解. 图 G 的最大团问题可以看作是 G 的顶点集 V 的子集选取问题, 因此可以用子集树表示问题的解空间.

$x[i]$ 用来当前解,

$$x[i] = \begin{cases} 1 & \text{结点 } i \text{ 在当前解中,} \\ 0 & i \text{ 不在当前解中,} \end{cases}$$

n 表示图 G 的顶点数, cn 表示当前顶点数, $bestn$ 表示当前最大顶点数, $bestx[i]$ 用来记录最优解,

$$bestx[i] = \begin{cases} 1 & \text{结点 } i \text{ 在最优解中,} \\ 0 & i \text{ 不在最优解中,} \end{cases}$$

$bestn$ 表示当前最大顶点数, $a[i][j]$ 是 G 的邻接矩阵.

首先将 $x[i]$ 初始化, 令 $\forall i, x[i] = 0$. 若对任意的已经在团中的结点 $j < i, (i, j) \notin E$, 即 $x[j] > 0$ 且 $a[i][j] = 0$, 则 i 可以加入团中, 反之不能.

之后采用树的非递归深度优先遍历算法, 可以将回溯法表示为一个非递归迭代过程.

习题 2 (5-6). 设 G 是有 n 个顶点的有向图, 从顶点 i 发出的边的最小费用记为 $\min(i)$.

- (1) 证明图 G 的所有前缀为 $x[1:i]$ 的旅行售货员回路的费用至少为 $\sum_{j=2}^i a(x_{j-1}, x_j) + \sum_{j=i}^n \min(x_j)$, 其中 $a(u, v)$ 是边 (u, v) 的费用.
- (2) 利用上述结论设计一个高效的上界函数, 重写旅行售货员问题的回溯法, 并与教材中的算法进行比较.

解. (1) 前缀为 $x[i:i]$ 的旅行售货员回路任一旅行售货员回路可表示为 $(x[1], \dots, x[i], \pi(i+1), \dots, \pi(n))$.

费用为

$$h(\pi) = \sum_{j=2}^i a(x_{j-1}, x_j) + a(x_i, \pi(i+1)) + \sum_{j=i+1}^n a(\pi(j), \pi(j \bmod n + 1)),$$

那么

$$h(\pi) \geq \sum_{j=2}^i a(x_{j-1}, x_j) + \min(x_i) + \sum_{j=i+1}^n \min(\pi(j))$$

$$= \sum_{j=2}^i a(x_{j-1}, x_j) + \sum_{j=i}^n \min(x_j)$$

(2) 对图 G 进行简单遍历, 计算出 $\sum_{i=1}^n \min(i)$.