

泛函分析作业

习题 1. 设 \mathcal{X} 是 B 空间, \mathcal{X}_0 是 \mathcal{X} 的闭子空间. 映射 $\varphi: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}/\mathcal{X}_0$ 定义为

$$\varphi: x \mapsto [x] \quad (\forall x \in \mathcal{X}),$$

其中 $[x]$ 表示含 x 的商类. 求证 φ 是开映射.

证明. 因为 $\varphi(\alpha x + \beta y) = [\alpha x + \beta y] = \alpha[x] + \beta[y] = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)$, φ 是线性算子. 又因为 \mathcal{X} 是 B 空间, \mathcal{X}_0 是闭子空间, 则 $\mathcal{X}/\mathcal{X}_0$ 是 B 空间, 因此 $\mathcal{X}/\mathcal{X}_0$ 是第二纲的. 又因为 φ 是满射, 则 φ 是开映射. ■

习题 2. 设 \mathcal{X}, \mathcal{Y} 是 B 空间, 又设方程 $Ux = y$ 对 $\forall y \in \mathcal{Y}$ 有解 $x \in \mathcal{X}$, 其中 $U \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, 并且 $\exists m > 0$, 使得

$$\|Ux\| \geq m\|x\| \quad (\forall x \in \mathcal{X}).$$

求证: U 有连续逆 U^{-1} , 并且 $\|U^{-1}\| \leq 1/m$.

证明. 因为对任意的 $y \in \mathcal{Y}$, 方程 $Ux = y$ 有解, 那么 U 是满射, 又因为 $\forall x, y \in \mathcal{X}$, $x \neq y$, 有 $\|Ux - Uy\| \geq m\|x - y\| > 0$, 则 U 是单射, 即 U 是双射. \mathcal{X}, \mathcal{Y} 是 B 空间, 那么 U 可逆且 U^{-1} 连续. 又因为

$$\|x\| = \|U(U^{-1}x)\| \geq m\|U^{-1}x\|,$$

则 $\|U^{-1}\| \leq \frac{1}{m}$. ■

习题 3. 设 H 是 Hilbert 空间, $A \in \mathcal{L}(H)$, 并且 $\exists m > 0$, 使得

$$|(Ax, x)| \geq m\|x\|^2 \quad (\forall x \in H).$$

求证: $\exists A^{-1} \in \mathcal{L}(H)$.

证明. 因为 $R(A)$ 是闭子空间, 若 $R(A) \neq H$, 则 $R(A)^\perp \neq \{\theta\}$, 即存在 $y \in H$, $y \neq \theta$, 使得对 $\forall x \in H$, $(Ax, y) = 0$. 那么 $0 = |(Ay, y)| \geq m\|y\|^2 > 0$, 矛盾. 则 $R(A) = H$, A 是满射.

又因为

$$\|Ax\|\|x\| \geq |(Ax, x)| \geq m\|x\|^2,$$

则 $\|Ax\| \geq m\|x\|$, 那么 A 是单射, 则 A 是双射, 又 H 是 Hilbert 空间, 则 $A^{-1} \in \mathcal{L}(H)$. ■

习题 4. 设 \mathcal{X}, \mathcal{Y} 是 B^* 空间, D 是 \mathcal{X} 的线性子空间, 并且 $A: D \rightarrow \mathcal{Y}$ 是线性映射. 求证:

- (1) 如果 A 连续且 D 是闭的, 那么 A 是闭算子;
- (2) 如果 A 连续且是闭算子, 那么 \mathcal{Y} 完备蕴含 D 闭;
- (3) 如果 A 是单射的闭算子, 那么 A^{-1} 也是闭算子;
- (4) 如果 \mathcal{X} 完备, A 是单射的闭算子, $R(A)$ 在 \mathcal{Y} 中稠密, 并且 A^{-1} 连续, 那么 $R(A) = \mathcal{Y}$.

证明. (1) 设 $x_n \rightarrow x, Ax_n \rightarrow y$, 那么 $x \in D$. 又因为 A 连续, $Ax_n \rightarrow Ax$, 则 $Ax = y$, 那么 A 是闭算子.

(2) 若 \mathcal{Y} 完备. 若 $x_n \rightarrow x, x_n \in \mathcal{X}, \forall n$. 因为 A 连续, 则 A 有界, 那么

$$\|Ax_n - Ax_m\| \leq \|A\| \|x_n - x_m\|,$$

即 $\{Ax_n\}$ 是 Cauchy 列, 又因为 \mathcal{Y} 完备, 则 $\{Ax_n\}$ 收敛, 记极限为 y . A 又是闭算子, 则 $x \in D, Ax = y, D$ 是闭集.

(3) A 为闭算子, 则 $G_A = \{(x, Ax) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} : x \in D\}$ 是闭集. 又因为 $G_{A^{-1}} = \{(y, A^{-1}y) \in \mathcal{Y} \times \mathcal{X} : y \in R(A)\}$, 对任意的 $(y_n, A^{-1}y_n) \in G_{A^{-1}}$, 若存在 $(y, z) \in \mathcal{Y} \times \mathcal{X}$, 使得 $(y_n, A^{-1}y_n) \rightarrow (y, z)$, 则 $\|(y_n, A^{-1}y_n)\| \rightarrow \|(y, z)\|$ 即

$$\|y_n\| + \|A^{-1}y_n\| \rightarrow \|y\| + \|z\|,$$

又因为存在 $x_n, Ax_n = y_n$, 则

$$\|x_n\| + \|Ax_n\| \rightarrow \|z\| + \|y\|,$$

即 $(x_n, Ax_n) \rightarrow (z, y)$, 则 $z \in \mathcal{X}, y = Az$, 那么 $z = A^{-1}y$ 且 $y \in R(A)$, $G_{A^{-1}}$ 是闭集, A^{-1} 是闭算子.

(4) 由 (3), A^{-1} 是闭算子. 根据 (2), $R(A)$ 是闭集, 即 $R(A) = \overline{R(A)} = \mathcal{Y}$. ■

习题 5. 用等价范数定理证明: $(C[0, 1], \|\cdot\|_1)$ 不是 B 空间, 其中 $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt, \forall f \in C[0, 1]$.

证明. 设 $\|f\|_2 = \max_{0 \leq t \leq 1} |f(t)|$, 那么

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt \leq \max_{0 \leq t \leq 1} |f(t)| = \|f\|_2,$$

则 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 等价. 存在 $M > 0$, 使得对任意的 $f \in C[0, 1], \|f\|_2 \leq M\|f\|_1$.

令 $f(x) = \begin{cases} -n^2x + n & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$, 则 $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt = \frac{1}{2}$ 但 $\|f\|_2 = n$, 矛盾. ■

习题 6 (Gelfand 引理). 设 \mathcal{X} 是 B 空间, $p: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ 满足

- (1) $p(x) \geq 0 \quad (\forall x \in \mathcal{X})$;
- (2) $p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad (\forall \lambda > 0, \forall x \in \mathcal{X})$;
- (3) $p(x_1 + x_2) \leq p(x_1) + p(x_2) \quad (\forall x_1, x_2 \in \mathcal{X})$;
- (4) 当 $x_n \rightarrow x$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n) \geq p(x)$.

求证: $\exists M > 0$, 使得 $p(x) \leq M\|x\|, \forall x \in \mathcal{X}$.

证明.

习题 7. 设 \mathcal{X} 和 \mathcal{Y} 是 B 空间, $A_n \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) (n = 1, 2, \dots)$, 又对 $\forall x \in \mathcal{X}, \{A_n x\}$ 在 \mathcal{Y} 中收敛. 求证: $\exists A \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, 使得

$$A_n x \rightarrow Ax \quad (\forall x \in \mathcal{X}), \quad \text{并且} \quad \|A\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n\|.$$

证明. 令 $Ax := \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x$, 则 A 是线性算子. 又

$$\|Ax\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n x\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n\| \|x\|,$$

则 $\|A\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n\|$. 下证 $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

因为对 $\forall x, \{A_n x\}$ 收敛, 那么 $\sup_n \|A_n x\| < \infty, \forall x$, 由共鸣定理, 存在 M , 使得

$$\sup_n \|A_n\| \leq M,$$

则 $\|A\| \leq M$, 即 $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. ■

习题 8. 设 $1 < p < \infty$, 并且 $1/p + 1/q = 1$. 如果序列 $\{\alpha_k\}$ 使得对 $\forall x = \{\xi_k\} \in l^p$ 保证 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \xi_k$ 收敛, 求证: $\{\alpha_k\} \in l^q$. 又若 $f: x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \xi_k$, 求证: f 作为 l^p 上的线性泛函, 有

$$\|f\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

证明. 令 $f_n(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \xi_k$, 又因为 $\forall x \in l^p, \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \xi_k$ 收敛, 则 $\forall x \in l^p, \{f_n(x)\}$ 收敛, 那么存在 $f \in \mathbb{K}^*$ 使得 $f_n \xrightarrow{s} f$, 即 $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \xi_k$.

令 $x_n = (\alpha_1^{q-1} e^{-i\theta_1}, \dots, \alpha_n^{q-1} e^{-i\theta_n}, 0, \dots) \in l^p$, 那么

$$f(x_n) = \sum_{k=1}^n |\alpha_k|^q \leq \|f\| \left(\sum_{k=1}^n |\alpha_k|^{(q-1)p} \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\| \left(\sum_{k=1}^n |\alpha_k|^q \right)^{\frac{1}{p}},$$

上式对任意的 n 成立, 则 $\|\{\alpha_k\}\| \leq \|f\| < \infty$, 即 $\{\alpha_k\} \in l^q$. 又根据 Hölder 不等式,

$$|f(x)| \leq \sum_{k=1}^n |\alpha_k \xi_k| \leq \|\{\alpha_k\}\| \|x\|,$$

则 $\|f\| \leq \|\{\alpha_k\}\|$, 综上 $\|f\| = \|\{\alpha_k\}\|$. ■

习题 9. 如果序列 $\{\alpha_k\}$ 使得对 $\forall x = \{\xi_k\} \in l^1$, 保证 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \xi_k$ 收敛, 求证: $\{\alpha_k\} \in l^{\infty}$. 又若 $f: x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \xi_k$ 作为 l^1 上的线性泛函, 求证:

$$\|f\| = \sup_{k \geq 1} |\alpha_k|.$$

证明. 类似习题 (8), 令 $f_n(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \xi_k$, 则对 $\forall x \in l^1, \{f_n(x)\}$ 收敛, 则存在 $f \in \mathbb{K}^*$, 使得 $f_n \xrightarrow{s} f$, 即 $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \xi_k$. 令 $x_n = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1 \text{ 个}}, \alpha_n, 0 \dots)$, 那么对 $\forall n$, 有

$$|\alpha_n| \leq \|f\|,$$

即 $\|\{\alpha_k\}\| \sup_n \alpha_n < \infty$, 那么 $\{\alpha_k\} \in l^{\infty}$. 又

$$|f(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k \xi_k| \leq \|\{\alpha_k\}\| \|x\|,$$

则 $\|f\| \leq \|\{\alpha_k\}\|$, 综上 $\|f\| = \|\{\alpha_k\}\|$. ■

习题 10. 用 Gelfand 引理证明共鸣定理.

证明. 已知 \mathcal{X}, \mathcal{Y} 是 B 空间, $W \subset \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, 且 $\sup_{A \in W} \|Ax\| < \infty$ ($\forall x$), 下面证明存在 M 使得 $\sup_{A \in W} \|A\| \leq M$.

令 $p(x) = \sup_{A \in W} \|Ax\|$, 则 $p: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ 且

(1) $p(x) \geq 0$, 且 $\forall \lambda > 0, p(\lambda x) = \sup_{A \in W} \|A(\lambda x)\| = \lambda \sup_{A \in W} \|Ax\| = \lambda p(x)$.

(2) $p(x_1 + x_2) = \sup_{A \in W} \|A(x_1 + x_2)\| \leq \sup_{A \in W} \|Ax_1\| + \sup_{A \in W} \|Ax_2\| = p(x_1) + p(x_2)$.

(3) 若 $x_n \rightarrow x$, 对 $\forall A \in W, p(x_n) \geq \|Ax_n\| \geq \|Ax\| - \|Ax_n - Ax\|$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n) \geq \|Ax\|$, 两边同时取上确界,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n) \geq \sup_{A \in W} \|Ax\| = p(x).$$

综上, 根据 Gelfand 引理, 存在 $M > 0$, 使得 $p(x) \leq M\|x\|$, 即 $\sup_{A \in W} \|Ax\| \leq M\|x\|$, 则

$$\sup_{A \in W} \|A\| \leq M. \quad \blacksquare$$

习题 11. 设 \mathcal{X}, \mathcal{Y} 是 B 空间, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 是满射的. 求证: 如果在 \mathcal{Y} 中 $y_n \rightarrow y_0$, 则 $\exists C > 0$ 与 $x_n \rightarrow x_0$, 使得 $Ax_n = y_n$, 且 $\|x_n\| \leq C\|y_n\|$.

证明. 考虑 $A_1 : \mathcal{X} / \text{Ker } A, A_1([x]) = Ax$. 因为 A 是满射, A_1 也是满射, 对 $[x_1] \neq [x_2], A_1([x_1]) = Ax_1 \neq Ax_2 = A_1([x_2])$, 则 A_1 是单射, A_1 是双射. 且 $A_1(\alpha[x_1] + \beta[x_2]) = \alpha Ax_1 + \beta Ax_2 = \alpha A_1([x_1]) + \beta A_1([x_2])$, A_1 是线性算子.

下面证明 $A_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X} / \text{Ker } A, \mathcal{Y})$, 因为

$$\|A_1[x']\| = \|Ay'\| \leq \|A\|\|y'\| \quad \forall y' \in [x']$$

且 $\|[x']\| = \rho(x', \text{Ker } A)$, 那么存在 $\{z_n\} \subset \text{Ker } A$, 使得 $\|x' - z_n\| \rightarrow [x']$, 令 $y'_n = x' - z_n$, $Ay'_n = Ax'$ 则 $y'_n \in [x']$, 且 $\|y'_n\| \rightarrow \|[x']\|$, 则

$$\|A_1[x']\| \leq \|A\| \lim_{n \rightarrow \infty} \|y'_n\| = \|A\|\|[x']\|,$$

即 A_1 是有界线性算子.

A 是满射, \mathcal{X}, \mathcal{Y} 是 B 空间, 存在 $x_n, x_0, Ax_n = y_n, Ax_0 = y_0$ 且 $x_n \rightarrow x_0$, 根据逆算子定理, $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{X} / \text{Ker } A)$, 又因为 $\|x\| = \rho(x, \text{Ker } A) \leq \|x\|$, 则

$$\|x_n\| = \|A_1^{-1}y_n\| \leq \|A_1^{-1}\|\|y_n\| \leq \|A^{-1}\|\|y_n\|. \quad \blacksquare$$

习题 12. 设 \mathcal{X}, \mathcal{Y} 是 B 空间, T 是闭线性算子, $D(T) \subset \mathcal{X}, R(T) \subset \mathcal{Y}, N(T) \triangleq \{x \in \mathcal{X} \mid Tx = \theta\}$.

(1) 求证: $N(T)$ 是 \mathcal{X} 的闭线性子空间.

(2) 求证: $N(T) = \{\theta\}$, $R(T)$ 在 \mathcal{Y} 中闭的充要条件是, $\exists \alpha > 0$, 使得

$$\|x\| \leq \alpha \|Tx\| \quad (\forall x \in D(T)).$$

(3) 如果用 $d(x, N(T))$ 表示点 $x \in \mathcal{X}$ 到集合 $N(T)$ 的距离 $(\inf_{z \in N(T)} \|z - x\|)$. 求证: $R(T)$ 在 \mathcal{Y} 中闭的充要条件是, $\exists \alpha > 0$, 使得

$$d(x, N(T)) \leq \alpha \|Tx\| \quad (\forall x \in D(T)).$$

证明. (1) 由闭图像定理, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, 则 $N(T)$ 是闭线性子空间.

(2) “ \Rightarrow ”. 由 $N(T) = \{\theta\}$, T 是单射, 根据习题 (4), $D(T)$ 是闭子空间, 又 $R(T)$ 也是闭子空间, 那么 $R(T), D(T)$ 是 B 空间, T 是从 $D(T)$ 到 $R(T)$ 的双射, 则 $T^{-1} \in \mathcal{L}(R(T), D(T))$, $\|T^{-1}y\| \leq \|T^{-1}\|\|y\|$ 即

$$\|x\| \leq \|T^{-1}\|\|Tx\|.$$

“ \Leftarrow ”. 同样有 $D(T)$ 是闭子空间, 又因为 $\|x\| \leq \alpha \|Tx\|$, T 是单射即 $N(T) = \{\theta\}$. 设 $y_n \in R(T)$, $y_n \rightarrow y$, 存在 $x_n, Tx_n = y_n$ 又因为 $\|x\| \leq \alpha \|Tx\|$ 和 \mathcal{X} 是 B 空间, 则 $\{x_n\}$ 收敛, 设极限是 x , 则 $Tx_n \rightarrow Tx$ 那么 $Tx = y$, $R(T)$ 是闭集.

(3) 因为 $\mathcal{X}/\text{Ker } A$ 是 B 闭空间, 令 $T_1: \mathcal{X}/\text{Ker } A \rightarrow \mathcal{Y}, T_1([x]) = Tx$, 类似于习题 (11), T_1 是有界线性算子且是单射. 那么第 (3) 问等价于 $R(T_1)$ 是闭集的充要条件是 $\exists \alpha > 0$, 使得

$$\|[x]\| \leq \alpha \|T_1([x])\|,$$

即第 (2) 问的结论. ■

习题 13. 设 $a(x, y)$ 是 Hilbert 空间 H 上的一个共轭双线性泛函, 满足:

(1) $\exists M > 0$, 使得 $|a(x, y)| \leq M\|x\|\|y\| \quad (\forall x, y \in H)$;

(2) $\exists \delta > 0$, 使得 $|a(x, x)| \geq \delta\|x\|^2 \quad (\forall x \in H)$.

求证: $\forall f \in H^*, \exists y_f \in H$, 使得

$$a(x, y_f) = f(x) \quad (\forall x \in H),$$

而且 y_f 连续地依赖于 f .

证明. 由 Lax-Milgram 定理, 存在唯一的 $A \in \mathcal{L}(H)$, 使得 $a(x, y) = (x, Ay)$, 且 $A^{-1} \in \mathcal{L}(H), \|A^{-1}\| \leq \frac{1}{\delta}$. 又由 Riesz 表示定理, 对任意的 $f \in H^*$, 存在唯一的 u , 使得 $f(x) = (x, u), \|f\| = \|u\|$, A 是满射, 则存在 $y_f, Ay_f = u$, 那么

$$a(x, y_f) = (x, Ay_f) = f(x),$$

且 $\|f\| = \|Ay_f\|$. 若 $f_n \rightarrow f, f_n - f \in H^*$ 且 $a(x, y_{f_n} - y_f) = (x, Ay_{f_n}) - (x, Ay_f) = f_n(x) - f(x)$, 则 $\|f_n - f\| = \|A(y_{f_n} - y_f)\| \rightarrow 0, A$ 是双射, 则 $y_{f_n} \rightarrow y_f$. ■