PDE 作业

1 第一章

习题 1.1 利用 Gauss-Green 公式证明

1. 若 $u, v \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, 则

$$\int_\Omega u_{x_i} v \mathrm{d}x = -\int_\Omega u v_{x_i} \mathrm{d}x + \int_\Omega u v n_i \mathrm{d}s.$$

2. 若 $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, 则

$$\int_\Omega \Delta u \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \mathrm{d}s.$$

3. 若 $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, 则

$$\int_\Omega u\Delta v - v\Delta u \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \mathrm{d}s.$$

习题 1.2 将下列方程化为标准型.

1. $\sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} + \sum_{1\leqslant j<j\leqslant n} u_{x_i x_j} = 0.$

2. $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} = 0.$

习题 1.3 设

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla v|^2 + v^2)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} \alpha(x) v^2 \mathrm{d}s - \int_\Omega f v \mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} g v \mathrm{d}s,$$

其中 $\alpha(x) \geqslant 0$. 考虑以下三个问题:

问题 I(变分问题): 求 $u \in M = C^1(\bar{\Omega})$, 使得

$$J(u) = \min_{v\in M} J(v).$$

问题 II: 求 $u \in M = C^1(\bar{\Omega})$, 使得它对于任意的 $v \in M$, 都满足

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + u \cdot v - f v)\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} (\alpha(x) u v - g v)\mathrm{d}s = 0.$$

问题 III(第三边值问题): 求 $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, 满足以下边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha(x) u = g, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

1. 证明问题 I 与问题 II 等价.

2. 当 $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ 时, 证明问题 I、II、III 等价.

习题 1.4 若 u 是 Laplace 方程 $\Delta u = 0$ 的解, 如果 $u(x)$ 只是向 jing 向径 $r = |x|$ 的函数, 即 $u(x) = \tilde{u}(r)$, 试写出 $\tilde{u}(r)$ 适合的常微分方程.

习题 1.5 1. 证明在自变量代换

$$\begin{cases} \xi = x - at, \\ \eta = x + at \end{cases}$$

下, 波动方程 $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ 具有形式

$$u_\tau = a^2 u_{\xi\xi}.$$