泛函分析作业

习题 1. 设 $\mathscr{X}$ 是 B 空间, $\mathscr{X}_0$ 是 $\mathscr{X}$ 的闭子空间. 映射 $\varphi\colon \mathscr{X} \to \mathscr{X}/\mathscr{X}_0$ 定义为

$$\varphi : x \mapsto [x] \quad (\forall x \in \mathscr{X}),$$

其中 $[x]$ 表示含 x 的商类. 求证 φ 是开映射.

证明. 因为 $\varphi(\alpha x+\beta y)=[\alpha x+\beta y]=\alpha[x]+\beta[y]=\alpha\varphi(x)+\beta\varphi(y)$, φ 是线性算子. 又因为 $\mathscr{X}$ 是 B 空间, $\mathscr{X}_0$ 是闭子空间, 则 $\mathscr{X}/\mathscr{X}_0$ 是 B 空间, 因此 $\mathscr{X}/\mathscr{X}_0$ 是第二纲的. 又因为 φ 是满射, 则 φ 是开映射. ■

习题 2. 设 $\mathscr{X},\mathscr{Y}$ 是 B 空间, 又设方程 $Ux=y$ 对 $\forall y\in\mathscr{Y}$ 有解 $x\in\mathscr{X}$, 其中 $U\in\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$, 并且 $\exists m>0$, 使得

$$\|Ux\| \geqslant m\|x\| \quad (\forall x \in \mathscr{X}).$$

求证:U 有连续逆 U^{-1}, 并且 $\|U^{-1}\|\leqslant 1/m$.

证明. 因为对任意的 $y\in\mathscr{Y}$, 方程 $Ux=y$ 有解, 那么 U 是满射, 又因为 $\forall x,y\in\mathscr{X}$, $x\neq y$, 有 $\|Ux-Uy\|\geqslant m\|x-y\|>0$, 则 U 是单射, 即 U 是双射. $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$ 是 B 空间, 那么 U 可逆且 U^{-1} 连续. 又因为

$$\|x\| = \big\|U(U^{-1}x)\big\| \geqslant m\big\|U^{-1}x\big\|,$$

则 $\|U^{-1}\|\leqslant \frac{1}{m}$. ■

习题 3. 设 H 是 Hilbert 空间, $A\in\mathscr{L}(H)$, 并且 $\exists m>0$, 使得

$$|(Ax,x)| \geqslant m\|x\|^2 \quad (\forall x \in H).$$

求证:$\exists A^{-1}\in\mathscr{L}(H)$.

证明. 因为 $R(A)$ 是闭子空间, 若 $R(A)\neq H$, 则 $R(A)^\perp\neq\{\theta\}$, 即存在 $y\in H$, $y\neq\theta$, 使得对 $\forall x\in H$, $(Ax,y)=0$. 那么 $0=|(Ay,y)|\geqslant m\|y\|^2>0$, 矛盾. 则 $R(A)=H$, A 是满射.

又因为

$$\|Ax\|\|x\| \geqslant |(Ax,x)| \geqslant m\|x\|^2,$$

则 $\|Ax\|\geqslant m\|x\|$, 那么 A 是单射, 则 A 是双射, 又 H 是 Hilbert 空间, 则 $A^{-1}\in\mathscr{L}(H)$.■

习题 4. 设 $\mathscr{X},\mathscr{Y}$ 是 B^* 空间, D 是 $\mathscr{X}$ 的线性子空间, 并且 $A: D \to \mathscr{Y}$ 是线性映射. 求证:

(1) 如果 A 连续且 D 是闭的, 那么 A 是闭算子;

(2) 如果 A 连续且是闭算子, 那么 $\mathscr{Y}$ 完备蕴含 D 闭;

(3) 如果 A 是单射的闭算子, 那么 A^{-1} 也是闭算子;

(4) 如果 $\mathscr{X}$ 完备, A 是单射的闭算子, $R(A)$ 在 $\mathscr{Y}$ 中稠密, 并且 A^{-1} 连续, 那么 $R(A) = \mathscr{Y}$.

证明. (1) 设 $x_n \to x, Ax_n \to y$, 那么 $x \in D$. 又因为 A 连续, $Ax_n \to Ax$, 则 $Ax = y$, 那么 A 是闭算子.

(2) 若 $\mathscr{Y}$ 完备. 若 $x_n \to x, x_n \in \mathscr{X}, \forall n$. 因为 A 连续, 则 A 有界, 那么

$$\|Ax_n - Ax_m\| \leqslant \|A\|\|x_n - x_m\|,$$

即 $\{Ax_n\}$ 是 Cauchy 列, 又因为 $\mathscr{Y}$ 完备, 则 $\{Ax_n\}$ 收敛, 记极限为 y. A 又是闭算子, 则 $x \in D, Ax = y$, D 是闭集.

(3) A 为闭算子, 则 $G_A = \{(x, Ax) \in \mathscr{X} \times \mathscr{Y} : x \in D\}$ 是闭集. 又因为 $G_{A^{-1}} = \{(y, A^{-1}y) \in \mathscr{Y} \times \mathscr{X} : y \in R(A)\}$, 对任意的 $(y_n, A^{-1}y_n) \in G_{A^{-1}}$, 若存在 $(y, z) \in \mathscr{Y} \times \mathscr{X}$, 使得 $(y_n, A^{-1}y_n) \to (y, z)$, 则 $\|(y_n, A^{-1}y_n)\| \to \|(y, z)\|$ 即

$$\|y_n\| + \left\|A^{-1}y_n\right\| \to \|y\| + \|z\|,$$

又因为存在 $x_n, Ax_n = y_n$, 则

$$\|x_n\| + \|Ax_n\| \to \|z\| + \|y\|,$$

即 $(x_n, Ax_n) \to (z, y)$, 则 $z \in \mathscr{X}, y = Az$, 那么 $z = A^{-1}y$ 且 $y \in R(A)$, $G_{A^{-1}}$ 是闭集, A^{-1} 是闭算子.

(4) 由 (3), A^{-1} 是闭算子. 根据 (2), $R(A)$ 是闭集, 即 $R(A) = \overline{R(A)} = \mathscr{Y}$. ■

习题 5. 用等价范数定理证明: $(C[0,1], \|\cdot\|_1)$ 不是 B 空间, 其中 $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t, \forall f \in C[0,1]$.

证明. 设 $\|f\|_2 = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |f(t)|$, 那么

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |f(t)| = \|f\|_2,$$

则 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 等价. 存在 $M > 0$, 使得对任意的 $f \in C[0,1]$, $\|f\|_2 \leqslant M\|f\|_1$.

令 $f(x)=\begin{cases}-n^2x+n & 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{n}\\ 0 & \frac{1}{n}<x\leqslant 1\end{cases}$, 则 $\|f\|_1=\int_0^1|f(t)|\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}$ 但 $\|f\|_2=n$, 矛盾.■

习题 6 (Gelfand 引理). 设 $\mathscr{X}$ 是 B 空间, $p:\mathscr{X}\to\mathbb{R}$ 满足

(1) $p(x)\geqslant 0\quad(\forall x\in\mathscr{X})$;

(2) $p(\lambda x)=\lambda p(x)\quad(\forall\lambda>0,\forall x\in\mathscr{X})$;

(3) $p(x_1+x_2)\leqslant p(x_1)+p(x_2)\quad(\forall x_1,x_2\in\mathscr{X})$;

(4) 当 $x_n\to x$ 时, $\underline{\lim}_{n\to\infty}p(x_n)\geqslant p(x)$.

求证: $\exists M>0$, 使得 $p(x)\leqslant M\|x\|,\forall x\in\mathscr{X}$.

证明.

习题 7. 设 $\mathscr{X}$ 和 $\mathscr{Y}$ 是 B 空间, $A_n\in\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})(n=1,2,\cdots)$, 又对 $\forall x\in\mathscr{X},\{A_nx\}$ 在 $\mathscr{Y}$ 中收敛. 求证: $\exists A\in\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$, 使得

$$A_nx\to Ax\quad(\forall x\in\mathscr{X}),\quad \text{并且}\quad \|A\|\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\|A_n\|.$$

证明. 令 $Ax:=\lim_{n\to\infty}A_nx$, 则 A 是线性算子. 又

$$\|Ax\|=\lim_{n\to\infty}\|A_nx\|\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\|A_n\|\|x\|,$$

则 $\|A\|\leqslant\underline{\lim}_{n\to\infty}\|A_n\|$. 下证 $A\in\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$.

因为对 $\forall x,\{A_nx\}$ 收敛, 那么 $\sup_n\|Ax\|<\infty,\forall x$, 由共鸣定理, 存在 M, 使得

$$\sup_n\|A_n\|\leqslant M,$$

则 $\|A\|\leqslant M$, 即 $A\in\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$. ■

习题 8. 设 $1<p<\infty$, 并且 $1/p+1/q=1$. 如果序列 $\{\alpha_k\}$ 使得对 $\forall x=\{\xi_k\}\in l^p$ 保证 $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\xi_k$ 收敛, 求证: $\{\alpha_k\}\in l^q$. 又若 $f:x\mapsto\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\xi_k$, 求证: f 作为 l^p 上的线性泛函, 有

$$\|f\|=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

证明. 令 $f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\xi_k$, 又因为 $\forall x\in l^p,\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\xi_k$ 收敛, 则 $\forall x\in l^p,\{f_n(x)\}$ 收敛, 那么存在 $f\in\mathbb{K}^*$ 使得 $f_n\xrightarrow{s}f$, 即 $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\xi_k$.

令 $x_n=\left(\alpha_1^{q-1}e^{-\mathrm{i}\theta_1},\cdots,\alpha_k^{q-1}e^{-\mathrm{i}\theta_n},0,\cdots\right)\in l^p$, 那么

$$f(x_n)=\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|^q\leqslant\|f\|\left(\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|^{(q-1)p}\right)^{\frac{1}{p}}=\|f\|\left(\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|^q\right)^{\frac{1}{p}},$$

上式对任意的 n 成立, 则 $\|\{\alpha_k\}\| \leqslant \|f\| < \infty$, 即 $\{\alpha_k\} \in l^q$. 又根据 Hölder 不等式,

$$|f(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k \xi_k| \leqslant \|\{\alpha_k\}\|\|x\|,$$

则 $\|f\| \leqslant \|\{\alpha_k\}\|$, 综上 $\|f\| = \|\{\alpha_k\}\|$. ■

习题 9. 如果序列 $\{\alpha_k\}$ 使得对 $\forall x = \{\xi_k\} \in l^1$, 保证 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \xi_k$ 收敛, 求证: $\{\alpha_k\} \in l^\infty$. 又若 $f : x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \xi_k$ 作为 l^1 上的线性泛函, 求证:

$$\|f\| = \sup_{k \geqslant 1} |\alpha_k|.$$

证明. 类似习题 (8), 令 $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \xi_k$, 则对 $\forall x \in l^1, \{f_n(x)\}$ 收敛, 则存在 $f \in \mathbb{K}^*$, 使得 $f_n \xrightarrow{s} f$, 即 $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \xi_k$. 令 $x_n = (\underbrace{0, \cdots, 0}_{n-1\text{个}}, \overline{\alpha_n}, 0 \cdots)$, 那么对 $\forall n$, 有

$$|\alpha_n| \leqslant \|f\|,$$

即 $\|\{\alpha_k\}\| \sup_n \alpha_n < \infty$, 那么 $\{\alpha_k\} \in l^\infty$. 又

$$|f(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k \xi_k| \leqslant \|\{\alpha_k\}\|\|x\|,$$

则 $\|f\| \leqslant \|\{\alpha_k\}\|$, 综上 $\|f\| = \|\{\alpha_k\}\|$. ■

习题 10. 用 Gelfand 引理证明共鸣定理.

证明. 已知 $\mathscr{X}, \mathscr{Y}$ 是 B 空间, $W \subset \mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, 且 $\sup_{A \in W} \|Ax\| < \infty$ $(\forall x)$, 下面证明存在 M 使得 $\sup_{A \in W} \|A\| \leqslant M$.

令 $p(x) = \sup_{A \in W} \|Ax\|$, 则 $p : \mathscr{X} \to \mathbb{R}$ 且

(1) $p(x) \geqslant 0$, 且 $\forall \lambda > 0, p(\lambda x) = \sup_{A \in W} \|A(\lambda x)\| = \lambda \sup_{A \in W} \|Ax\| = \lambda p(x)$.

(2) $p(x_1 + x_2) = \sup_{A \in W} \|A(x_1 + x_2)\| \leqslant \sup_{A \in W} \|Ax_1\| + \sup_{A \in W} \|Ax_2\| = p(x_1) + p(x_2)$.

(3) 若 $x_n \to x$, 对 $\forall A \in W, p(x_n) \geqslant \|Ax_n\| \geqslant \|Ax\| - \|Ax_n - Ax\|$, 则 $\underline{\lim}_{n\to\infty} p(x_n) \geqslant \|Ax\|$, 两边同时取上确界,

$$\varliminf_{n \to \infty} p(x_n) \geqslant \sup_{A \in W} \|Ax\| = p(x).$$

综上, 根据 Gelfand 引理, 存在 $M > 0$, 使得 $p(x) \leqslant M\|x\|$, 即 $\sup_{A \in W} \|Ax\| \leqslant M\|x\|$, 则

$$\sup_{A \in W} \|A\| \leqslant M. \quad ■$$

习题 11. 设 $\mathscr{X},\mathscr{Y}$ 是 B 空间, $A\in\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ 是满射的. 求证: 如果在 $\mathscr{Y}$ 中 $y_n\to y_0$, 则 $\exists C>0$ 与 $x_n\to x_0$, 使得 $Ax_n=y_n$, 且 $\|x_n\|\leqslant C\|y_n\|$.

证明. 考虑 $A_1:\mathscr{X}/\operatorname{Ker}A, A_1([x])=Ax$. 因为 A 是满射, A_1 也是满射, 对 $[x_1]\neq[x_2], A_1([x_1])=Ax_1\neq Ax_2=A_1([x_2])$, 则 A_1 是单射, A_1 是双射. 且 $A_1(\alpha[x_1]+\beta[x_2])=\alpha Ax_1+\beta Ax_2=\alpha A_1([x_1])+\beta A_1([x_2])$, A_1 是线性算子.

下面证明 $A_1\in\mathscr{L}(\mathscr{X}/\operatorname{Ker}A,\mathscr{Y})$, 因为

$$\|A_1[x']\|=\|Ay'\|\leqslant\|A\|\|y'\|\quad\forall y'\in[x']$$

且 $\|[x']\|=\rho(x',\operatorname{Ker}A)$, 那么存在 $\{z_n\}\subset\operatorname{Ker}A$, 使得 $\|x'-z_n\|\to[x']$, 令 $y_n'=x'-z_n$, $Ay_n'=Ax'$ 则 $y_n'\in[x']$, 且 $\|y_n'\|\to\|[x']\|$, 则

$$\|A_1[x']\|\leqslant\|A\|\lim_{n\to\infty}\|y_n'\|=\|A\|\|[x']\|,$$

即 A_1 是有界线性算子.

A 是满射, $\mathscr{X},\mathscr{Y}$ 是 B 空间, 存在 x_n,x_0, $Ax_n=y_n, Ax_0=y_0$ 且 $x_n\to x_0$, 根据逆算子定理, $A^{-1}\in\mathscr{L}(\mathscr{Y},\mathscr{X}/\operatorname{Ker}A)$, 又因为 $\|x\|=\rho(x,\operatorname{Ker}A)\leqslant\|x\|$, 则

$$\|x_n\|=\left\|A_1^{-1}y_n\right\|\leqslant\left\|A_1^{-1}\right\|\|[y_n]\|\leqslant\left\|A^{-1}\right\|\|y_n\|.\qquad\blacksquare$$

习题 12. 设 $\mathscr{X},\mathscr{Y}$ 是 B 空间, T 是闭线性算子, $D(T)\subset\mathscr{X}, R(T)\subset\mathscr{Y}, N(T)\triangleq\{x\in\mathscr{X}\mid Tx=\theta\}$.

(1) 求证: $N(T)$ 是 $\mathscr{X}$ 的闭线性子空间.

(2) 求证: $N(T)=\{\theta\}$, $R(T)$ 在 $\mathscr{Y}$ 中闭的充要条件是, $\exists\alpha>0$, 使得

$$\|x\|\leqslant\alpha\|Tx\|\quad(\forall x\in D(T)).$$

(3) 如果用 $d(x,N(T))$ 表示点 $x\in\mathscr{X}$ 到集合 $N(T)$ 的距离 $\left(\inf_{x\in N(T)}\|z-x\|\right)$. 求证: $R(T)$ 在 $\mathscr{Y}$ 中闭的充要条件是, $\exists\alpha>0$, 使得

$$d(x,N(T))\leqslant\alpha\|Tx\|\quad(\forall x\in D(T)).$$

证明. (1) 由闭图像定理, $T\in\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$, 则 $N(T)$ 是闭线性子空间.

(2) "$\Rightarrow$". 由 $N(T)=\{\theta\}$, T 是单射, 根据习题 (4), $D(T)$ 是闭子空间, 又 $R(T)$ 也是闭子空间, 那么 $R(T),D(T)$ 是 B 空间, T 是从 $D(T)$ 到 $R(T)$ 的双射, 则 $T^{-1}\in\mathscr{L}(R(T),D(T))$, $\|T^{-1}y\|\leqslant\|T^{-1}\|\|y\|$ 即

$$\|x\|\leqslant\left\|T^{-1}\right\|\|Tx\|.$$

"$\Leftarrow$". 同样有 $D(T)$ 是闭子空间, 又因为 $\|x\| \leqslant \alpha\|Tx\|, T$ 是单射即 $N(T)=\{\theta\}$. 设 $y_n \in R(T), y_n \to y$, 存在 $x_n, Tx_n = y_n$ 又因为 $\|x\| \leqslant \alpha\|Tx\|$ 和 $\mathscr{X}$ 是 B 空间, 则 $\{x_n\}$ 收敛, 设极限是 x, 则 $Tx_n \to Tx$ 那么 $Tx=y$, $R(T)$ 是闭集.

(3) 因为 $\mathscr{X}/\operatorname{Ker} A$ 是 B 闭空间, 令 $T_1 : \mathscr{X}/\operatorname{Ker} A \to \mathscr{Y}, T_1([x]) = Tx$, 类似于习题 (11), T_1 是有界线性算子且是单射. 那么第 (3) 问等价于 $R(T_1)$ 是闭集的充要条件是 $\exists \alpha > 0$, 使得

$$\|[x]\| \leqslant \alpha \|T_1([x])\|,$$

即第 (2) 问的结论. ■

习题 13. 设 $a(x,y)$ 是 Hilbert 空间 H 上的一个共轭双线性泛函, 满足:

(1) $\exists M > 0$, 使得 $|a(x,y)| \leqslant M\|x\|\|y\| \quad (\forall x, y \in H)$;

(2) $\exists \delta > 0$, 使得 $|a(x,x)| \geqslant \delta \|x\|^2 \quad (\forall x \in H)$.

求证: $\forall f \in H^*, \exists y_f \in H$, 使得

$$a(x, y_f) = f(x) \quad (\forall x \in H),$$

而且 y_f 连续地依赖于 f.

证明. 由 Lax-Milgram 定理, 存在唯一的 $A \in \mathscr{L}(H)$, 使得 $a(x,y) = (x, Ay)$, 且 $A^{-1} \in \mathscr{L}(H), \|A^{-1}\| \leqslant \frac{1}{\delta}$. 又由 Riesz 表示定理, 对任意的 $f \in H^*$, 存在唯一的 u, 使得 $f(x) = (x,u), \|f\| = \|u\|$, A 是满射, 则存在 $y_f, Ay_f = u$, 那么

$$a(x, y_f) = (x, Ay_f) = f(x),$$

且 $\|f\| = \|Ay_f\|$. 若 $f_n \to f$, $f_n - f \in H^*$ 且 $a(x, y_{f_n} - y_f) = (x, Ay_{f_n}) - (x, Ay_f) = f_n(x) - f(x)$, 则 $\|f_n - f\| = \|A(y_{f_n} - y_f)\| \to 0$, A 是双射, 则 $y_{f_n} \to y_f$. ■