

泛函分析作业

习题 1. 当 \mathcal{X} 是复 Hilbert 空间, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, $T^* = T \Leftrightarrow (Tx, x) \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{X}$.

习题 2. 设 \mathcal{X} 是 Hilbert 空间, $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, $T_1^* = T_1, T_2^* = T_2$, $T_1 T_2 = T_2 T_1 \Leftrightarrow (T_1 T_2)^* = T_1 T_2$.

习题 3. 设 \mathcal{X} 是 Hilbert 空间, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, 证明: $\text{Ker}(T^*) = R(T)^\perp = \left(\overline{R(T)}\right)^\perp$.

习题 4. 证明: ${}^\perp(M)^\perp = \overline{M}$.

习题 5. 设 \mathcal{X}, \mathcal{Y} 是 B^* 空间, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, 则 $\text{Ker}(T^*) = {}^\perp R(T)$, $\text{Ker}(T) = R(T^*)^\perp$.

习题 6. 设 $X = \{\xi = (x_1, x_2, \dots) \in l^2 : \sum_{n=1}^{\infty} |nx_n|^2 < \infty\}$, $\|\xi\|_X = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |nx_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.