泛函分析作业

习题 1 考虑空间 $C[a,b]$, 令 $\rho_1(x,y)=\max_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)|,\rho_2=\int_a^b|x(t)-y(t)|\,\mathrm{d}t$. 证明:$(C[a,b],\rho_1)$ 是完备的度量空间,$(C[a,b],\rho_2)$ 不是完备的度量空间.

证明. 先证明 $(C[a,b],\rho_1)$ 是完备的度量空间.

1. $\rho_1\geqslant 0$, 且 $\rho_1(x,y)=0\Leftrightarrow|x(t)-y(t)|=0,\forall t\in[a,b]\Leftrightarrow x=y.\rho_1$ 满足正定性.

2. $\rho_1(x,y)=\rho_1(y,x)$,ρ_1 满足对称性.

3.

$$\begin{aligned}\rho_1(x,z)&=\max_{t\in[a,b]}|x(t)-z(t)|\\&\leqslant\max_{t\in[a,b]}(|x(t)-y(t)|+|y(t)-z(t)|)\\&\leqslant\max_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)|+\max_{t\in[a,b]}|y(t)-z(t)|\\&=\rho_1(x,y)+\rho_1(y,z).\end{aligned}$$

ρ_1 满足三角不等式.$(C[a,b],\rho_1)$ 是度量空间.

下面证明 $(C[a,b],\rho_1)$ 完备. 设 $\{x_n(t)\}\subseteq C[a,b]$ 是 Cauchy 列, 那么对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 N, 对任意的 $m,n>N$, $\rho_1(x_m,x_n)=\max_{t\in[a,b]}|x_m(t)-x_n(t)|<\varepsilon$, 则 $\{x_n(t)\}$ 一致收敛, 令极限函数是 $x(t)$, 则 $x(t)\in C[a,b]$, 那么 $\rho_1(x_n,x)=\max_{t\in[a,b]}\left|x_n(t)-x_(t)\right|\to 0,\quad n\to\infty$.$(C[a,b],\rho_1)$ 完备.

再证明 $(C[a,b],\rho_2)$ 不是完备的度量空间.

1. $\rho_2(x,y)\geqslant 0$, 且因为 $x(t),y(t)$ 连续,$\rho_2(x,y)=\int_a^b|x(t)-y(t)|\,\mathrm{d}t=0\Leftrightarrow$ $|x(t)-y(t)|\equiv 0\Leftrightarrow x=y.\rho_2$ 满足正定性.

2. $\rho_2(x,y)=\rho_2(y,x)$,ρ_2 满足对称性.

3.

$$\begin{aligned}\rho_2(x,z)&=\int_a^b|x(t)-z(t)|\,\mathrm{d}t\\&\leqslant\int_a^b(|x(t)-y(t)|+|y(t)-z(t)|)\mathrm{d}t\\&=\rho_2(x,y)+\rho_2(y,z).\end{aligned}$$

ρ_2 满足三角不等式.$(C[a,b],\rho_2)$ 是度量空间.

下面说明 $(C[a,b],\rho_2)$ 不完备. 反例: 不妨令 $a=0,b=1$, 再令

$$x_n=\begin{cases}-nx+1 & 0\leqslant x\leqslant 1/n\\ 0 & 1/n<x\leqslant 1.\end{cases}$$

那么 $x_n\in C[0,1]$, 且 $\rho_2(x_m,x_n)\to 0,\quad m,n\to\infty$, 但是令

$$x=\lim_{n\to\infty}x_n=\begin{cases}1 & x=0\\ 0 & 0<x\leqslant 1,\end{cases}$$

$x\notin C[0,1]$, 说明这个度量空间不完备. ∎

习题 2 令 $\rho(x,y)=\frac{|x-y|}{1+|x-y|}$, 证明 $(\mathbb{R},\rho)$ 是完备的度量空间.

证明. 1. $\rho(x,y)\geqslant 0$, 且 $\rho(x,y)=0\Leftrightarrow |x-y|=0\Leftrightarrow x=y$.

2. $\rho(x,y)=\rho(y,x)$.

3. 注意到 $\frac{x}{1+x}$ 当 $x\geqslant 0$ 时是单调递增函数.

$$\begin{aligned}\rho(x,y)+\rho(y,z)&=\frac{|x-y|}{1+|x-y|}+\frac{|y-z|}{1+|y-z|}\\&=\frac{|x-y|+|y-z|+2|x-y||y-z|}{1+|x-y||y-z|+|x-y|+|y-z|}\\&\geqslant\frac{|x-y|+|y-z|+|x-y||y-z|}{1+|x-y||y-z|+|x-y|+|y-z|}\\&\geqslant\frac{|x-y|+|y-z|}{1+|x-y|+|y-z|}\\&\geqslant\frac{|x-z|}{1+|x-z|}=\rho(x,z).\qquad(|x-y|+|y-z|\geqslant|x-z|)\end{aligned}$$

则 $(\mathbb{R},\rho)$ 是度量空间.

下面证明它完备.

设 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列, 那么对任意的 ε, 其中 $0<\varepsilon<1/2$, 存在 N 对任意的 $m,n>N$,$\frac{|x_n-x_n|}{1+|x_m-x_n|}<\varepsilon$, 那么 $|x_m-x_n|<\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}<2\varepsilon$, 则存在 $x\in\mathbb{R}$,$\{x_n\}$ 收敛于 x,$\rho(x_n,x)\leqslant|x_n-x|\to 0,\quad n\to\infty$. ∎

习题 3 $S[a,b]$ 表示 $[a,b]$ 上几乎处处有界的可测函数全体.$\rho(f,g)=\int_a^b\frac{|f-g|}{1+|f-g|}\mathrm{d}\mu$, 证明 $(S[a,b],\rho)$ 是完备的度量空间.

证明. 1. $\rho(f,g) \geqslant 0$,$\rho(f,g)=0 \Leftrightarrow \int_a^b \frac{|f-g|}{1+|f-g|}\mathrm{d}\mu = 0 \Leftrightarrow f=g$ a.e. $x\in[a,b]$.

2.$\rho(f,g)=\rho(g,f)$

3. 与题(2)中证明三角不等式的过程类似, 可以得到 $\frac{|f-g|}{1+|f-g|}+\frac{|g-h|}{1+|g-h|} \geqslant \frac{|f-h|}{1+|f-h|}$. 那么 $\rho(f,h)\leqslant\rho(f,g)+\rho(g,h)$. 综上,$(S[a,b],\rho)$ 是度量空间.

下面证明 $(S[a,b],\rho)$ 完备.

设 $\{f_n\}\subseteq S[a,b]$ 是 Cauchy 列, 即 $\rho(f_m,f_n)\to 0,\quad m,n\to\infty$, 则 $\mu(|f_m-f_n|>\delta)\to 0,\quad m,n\to\infty$, 那么存在 f 可测,$f_n \underset{\mu}{\Rightarrow} f$. 存在子列 $\{f_{n_k}\}$, 使得 $\mu(|f_{n_k}-f|>1)<\frac{1}{2^k}$, 令 $A_k=\{x: |f_{n_k}(x)-f(x)|>1\}$, 则 $\mu(A_k)<\frac{1}{2^k}$, 且 $\mu(\overline{\lim}_{k\to\infty}A_k)=\mu(\bigcap_{m=1}^\infty\bigcup_{k=m}^\infty A_k)\leqslant\frac{1}{2^{m-1}}$, $\forall m\geqslant 1$. 则 $\mu(\overline{\lim}_{k\to\infty}A_k)=0$. 而且存在 k_0, 使任意的 $x\in[a,b]\backslash\overline{\lim}_{k\to\infty}A_k$ 有 $\left|f_{n_{k_0}}(x)-f(x)\right|\leqslant 1$, 又因为 $f_{n_{k_0}}$ 几乎处处有界, 那么 $f\in S[a,b]$.

$\rho(f_n,f)\leqslant\int_a^b|f_n-f|\,\mathrm{d}\mu$, 又 $\mu([a,b])<\infty$, 令 $E_0(n)=\{|f_n-f|\geqslant 1\}, E_1(n)=\{\frac{1}{2}\leqslant|f_n-f|<1\}$, $E_2(n)=\{\frac{1}{2^2}\leqslant|f_n-f|<\frac{1}{2}\},\cdots$, 那么

$$
\begin{aligned}
\int_a^b|f_n-f|\,\mathrm{d}\mu &= \sum_{k=0}^\infty\int_{E_k(n)}|f_n-f|\,\mathrm{d}\mu \\
&< \int_{E_0(n)}|f_n-f|\,\mathrm{d}\mu+\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{2^{k-1}}\mu(E_k(n)).
\end{aligned}
$$

一方面,$\int_{E_0(n)}|f_n-f|\,\mathrm{d}\mu\to 0\quad n\to\infty$, 另一方面, 因为 $\mu(E_K(n))\leqslant\mu([a,b])<\infty$, 那么级数 $\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{2^{k-1}}\mu(E_k(n))$ 一致收敛,$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{2^{k-1}}\mu(E_k(n))=0$. 即 $\lim_{n\to\infty}\int_a^b|f_n-f|\,\mathrm{d}\mu=0$.$(S[a,b],\rho)$ 完备. ∎

习题 4 $1\leqslant p<\infty$, 令 $\rho(f,g)=\left(\int_a^b|f-g|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}$, 证明 $(L^p[a,b],\rho)$ 是完备的度量空间.

证明. 1. $\rho(x,y)\geqslant 0$, 当 $1\leqslant p<\infty$ 时,$\rho(x,y)=0\Leftrightarrow\int_a^b|f-g|^p\,\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow f=g$ a.e. .

2. 对任意的 $1\leqslant p<\infty$,$\rho(f,g)=\rho(g,f)$.

3. 当 $p=1$ 时显然成立. 当 $1<p<\infty$, 令 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 即 $p-1=\frac{p}{q}$, 那么

$$
\begin{aligned}
|f-h|^p &= |f-g+g-h|^p \\
&= |f-g+g-h|\,|f-h|^{p/q} \\
&\leqslant |f-g|\,|f-h|^{p/q}+|g-h|\,|f-h|^{p/q}.
\end{aligned}
$$

则

$$\begin{aligned}
\int_a^b |f-h|^p \,\mathrm{d}x &\leqslant \int_a^b |f-g|\,|f-g+g-h|^{p/q} \,\mathrm{d}x + \int_a^b |g-h|\,|f-g+g-h|^{p/q} \,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \left(\int_a^b |f-g|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p} \left(\int_a^b |f-h|^p\right)^{1/q} \\
&\quad + \left(\int_a^b |g-h|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p} \left(\int_a^b |f-h|^p\right)^{1/q} \\
&= \left[\left(\int_a^b |f-g|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g-h|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p}\right] \left(\int_a^b |f-h|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/q}.
\end{aligned}$$

整理可得 $\rho(f-h) \leqslant \rho(f-g)+\rho(g-h)$.

下面证明它是完备的.

设 $\{f_n\} \subseteq L^p[a,b]$ 是 Cauchy 列. 存在子列 $\{f_{n_k}\}, \rho(f_{n_k}, f_{n_{k-1}}) < \frac{1}{2^k}$. 因为 $k_{n_k} = f_{n_1} + \sum_{j=2}^k (f_{n_j} - f_{n_{j-1}})$, 那么令

$$|f_{n_k}| \leqslant |f_{n_k}| + \sum_{j=2}^k \left|f_{n_k} - f_{n_{j-1}}\right| = g_k(x).$$

根据三角不等式,

$$\begin{aligned}
\left(\int_a^b |g_k(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p} &= \left(\int_a^b \left||f_{n_1}| + \sum_{j=2}^k \left|f_{n_j} - f_{n_{j-1}}\right|\right|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} \\
&\leqslant \left(\int_a^b |f_{n_1}|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p} + \left(\int_a^b \left|\sum_{j=2}^k \left|f_{n_j} - f_{n_{j-1}}\right|\right|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} \\
&\leqslant \cdots \leqslant \left(\int_a^b |f_{n_1}|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p} + \sum_{j=2}^k \left(\int_a^b \left|f_{n_j} - f_{n_{j-1}}\right|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} \\
&\leqslant \left(\int_a^b |f_{n_1}|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p} + \sum_{j=2}^k \frac{1}{2^j} \\
&< \left(\int_a^b |f_{n_1}|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p} + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

令 $g(x) = |f_{n_1}| + \sum_{j=2}^\infty \left|f_{n_j} - f_{n_{j-1}}\right|, f(x) = f_{n_1} + \sum_{j=2}^\infty (f_{n_j} - f_{n_{j-1}})$,$\{g_k(x)\}$ 单调递增, 则 $g(x) \in L^p[a,b]$, 又因为 $|f| \leqslant g$, 那么 $f \in L^p[a,b]$.

又

$$\rho(f_n, f) = \left(\int_a^b |f_{n_k} - f|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \left(\int_a^b |f_{n_k}|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |f|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p} \\
&\leqslant 2\left(\int_a^b |g(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p}.
\end{aligned}
$$

那么 $\lim_{k\to\infty} \rho(f_{n_k}, f) = \left(\int_a^b \lim_{k\to\infty} |f_{n_k} - f|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p} = 0$. 则 $\rho(f_n, f) \to 0 \quad n \to \infty$.$(L^p[a,b], \rho)$ 是完备的. ■

习题 5 (X,ρ) 是度量空间,$\forall \{x_n\} \subset A$, 那么由 $x_n \to x$ 得到 $x \in A$ 等价于 A 是 X 中的闭集.

证明. "$\Leftarrow$". 若 A 是 X 中的闭集, 那么对 A 中的任意收敛列, 它的极限一定在 A 中.

"$\Rightarrow$". 若对 A 中任意的收敛列 $\{x_n\}$, 它的极限在 A 中, 那么 $A' \subset A$, 即 $\overline{A} = A$,A 是闭集. ■

习题 6 (X,ρ) 是度量空间,$A \subset X$, 证明 $\mathrm{diam}\ A = \mathrm{diam}\ \overline{A}$.

证明. 一方面,$\mathrm{diam}\ A = \sup_{x,y\in A} \rho(x,y) \leqslant \sup_{x,y\in \overline{A}} \rho(x,y) = \mathrm{diam}\ \overline{A}$.

另一方面, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $x_0, y_0 \in \overline{A}$, 使得

$$\mathrm{diam}\ \overline{A} < \rho(x_0, y_0) + \varepsilon.$$

又因为 $x_0, y_0 \in \overline{A}$, 那么存在 $x_1, y_1 \in A$, 使得 $\rho(x_1, x_0), \rho(y_1, y_0) < \varepsilon$, 那么

$$
\begin{aligned}
\rho(x_0, y_0) &\leqslant \rho(x_0, x_1) + \rho(x_1 + y_1) + \rho(y_1, y_0) \\
&< \rho(x_1, y_1) + 2\varepsilon.
\end{aligned}
$$

则

$$\mathrm{diam}\ \overline{A} < \rho(x_1, y_1) + 3\varepsilon \leqslant \mathrm{diam}\ A + 3\varepsilon.$$

根据 ε 的任意性,$\mathrm{diam}\ \overline{A} \leqslant \mathrm{diam}\ A$, 综上,$\mathrm{diam}\ \overline{A} = \mathrm{diam}\ A$. ■

习题 7 (X,ρ) 是度量空间, 设 $E \subset X$, 则 E 是疏集 $\Leftrightarrow$ 对任意的 $\overline{B(x,r)}$, 必存在开球 $B(x', r') \subset B(x,r)$, 使得 $\overline{B(x', r')} \cap E = \varnothing$.

证明. "$\Rightarrow$". 若存在 $B(x,r)$, 使得对任意的 $B(x',r') \subset B(x,r)$,$\overline{B(x',r')} \cap E \neq \varnothing$, 那么 E 在 $B(x,r)$ 稠密, 矛盾.

"$\Leftarrow$". 对任意的 $B(x,r)$, 都存在 $B(x',r') \subset B(x,r)$, 使 $\overline{B(x',r')} \cap E = \varnothing$, 那么 E 无内点,E 是疏集. ■