

泛函分析作业

习题 1 考虑空间 $C[a, b]$, 令 $\rho_1(x, y) = \max_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)|$, $\rho_2 = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt$. 证明: $(C[a, b], \rho_1)$ 是完备的度量空间, $(C[a, b], \rho_2)$ 不是完备的度量空间.

证明. 先证明 $(C[a, b], \rho_1)$ 是完备的度量空间.

1. $\rho_1 \geq 0$, 且 $\rho_1(x, y) = 0 \Leftrightarrow |x(t) - y(t)| = 0, \forall t \in [a, b] \Leftrightarrow x = y$. ρ_1 满足正定性.
2. $\rho_1(x, y) = \rho_1(y, x)$, ρ_1 满足对称性.
- 3.

$$\begin{aligned} \rho_1(x, z) &= \max_{t \in [a, b]} |x(t) - z(t)| \\ &\leq \max_{t \in [a, b]} (|x(t) - y(t)| + |y(t) - z(t)|) \\ &\leq \max_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)| + \max_{t \in [a, b]} |y(t) - z(t)| \\ &= \rho_1(x, y) + \rho_1(y, z). \end{aligned}$$

ρ_1 满足三角不等式. $(C[a, b], \rho_1)$ 是度量空间.

下面证明 $(C[a, b], \rho_1)$ 完备. 设 $\{x_n(t)\} \subseteq C[a, b]$ 是 Cauchy 列, 那么对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 N , 对任意的 $m, n > N$, $\rho_1(x_m, x_n) = \max_{t \in [a, b]} |x_m(t) - x_n(t)| < \varepsilon$, 则 $\{x_n(t)\}$ 一致收敛, 令极限函数是 $x(t)$, 则 $x(t) \in C[a, b]$, 那么 $\rho_1(x_n, x) = \max_{t \in [a, b]} |x_n(t) - x(t)| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. $(C[a, b], \rho_1)$ 完备.

再证明 $(C[a, b], \rho_2)$ 不是完备的度量空间.

1. $\rho_2(x, y) \geq 0$, 且因为 $x(t), y(t)$ 连续, $\rho_2(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt = 0 \Leftrightarrow |x(t) - y(t)| \equiv 0 \Leftrightarrow x = y$. ρ_2 满足正定性.
2. $\rho_2(x, y) = \rho_2(y, x)$, ρ_2 满足对称性.
- 3.

$$\begin{aligned} \rho_2(x, z) &= \int_a^b |x(t) - z(t)| dt \\ &\leq \int_a^b (|x(t) - y(t)| + |y(t) - z(t)|) dt \\ &= \rho_2(x, y) + \rho_2(y, z). \end{aligned}$$

ρ_2 满足三角不等式. $(C[a, b], \rho_2)$ 是度量空间.

下面说明 $(C[a, b], \rho_2)$ 不完备. 反例: 不妨令 $a = 0, b = 1$, 再令

$$x_n = \begin{cases} -nx + 1 & 0 \leq x \leq 1/n \\ 0 & 1/n < x \leq 1. \end{cases}$$

那么 $x_n \in C[0, 1]$, 且 $\rho_2(x_m, x_n) \rightarrow 0, \quad m, n \rightarrow \infty$, 但是令

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & 0 < x \leq 1, \end{cases}$$

$x \notin C[0, 1]$, 说明这个度量空间不完备. ■

习题 2 令 $\rho(x, y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$, 证明 (\mathbb{R}, ρ) 是完备的度量空间.

证明. 1. $\rho(x, y) \geq 0$, 且 $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow |x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y$.

2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$.

3. 注意到 $\frac{x}{1+x}$ 当 $x \geq 0$ 时是单调递增函数.

$$\begin{aligned} \rho(x, y) + \rho(y, z) &= \frac{|x-y|}{1+|x-y|} + \frac{|y-z|}{1+|y-z|} \\ &= \frac{|x-y| + |y-z| + 2|x-y||y-z|}{1+|x-y||y-z| + |x-y| + |y-z|} \\ &\geq \frac{|x-y| + |y-z| + |x-y||y-z|}{1+|x-y||y-z| + |x-y| + |y-z|} \\ &\geq \frac{|x-y| + |y-z|}{1+|x-y| + |y-z|} \\ &\geq \frac{|x-z|}{1+|x-z|} = \rho(x, z). \quad (|x-y| + |y-z| \geq |x-z|) \end{aligned}$$

则 (\mathbb{R}, ρ) 是度量空间.

下面证明它完备.

设 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列, 那么对任意的 ε , 其中 $0 < \varepsilon < 1/2$, 存在 N 对任意的 $m, n > N, \frac{|x_n - x_m|}{1+|x_n - x_m|} < \varepsilon$, 那么 $|x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} < 2\varepsilon$, 则存在 $x \in \mathbb{R}, \{x_n\}$ 收敛于 $x, \rho(x_n, x) \leq |x_n - x| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$. ■

习题 3 $S[a, b]$ 表示 $[a, b]$ 上几乎处处有界的可测函数全体. $\rho(f, g) = \int_a^b \frac{|f-g|}{1+|f-g|} d\mu$, 证明 $(S[a, b], \rho)$ 是完备的度量空间.

证明. 1. $\rho(f, g) \geq 0, \rho(f, g) = 0 \Leftrightarrow \int_a^b \frac{|f-g|}{1+|f-g|} d\mu = 0 \Leftrightarrow f = g \text{ a.e. } x \in [a, b]$.

$$2. \rho(f, g) = \rho(g, f)$$

3. 与题(2)中证明三角不等式的过程类似, 可以得到 $\frac{|f-g|}{1+|f-g|} + \frac{|g-h|}{1+|g-h|} \geq \frac{|f-h|}{1+|f-h|}$. 那么 $\rho(f, h) \leq \rho(f, g) + \rho(g, h)$. 综上, $(S[a, b], \rho)$ 是度量空间.

下面证明 $(S[a, b], \rho)$ 完备.

设 $\{f_n\} \subseteq S[a, b]$ 是 Cauchy 列, 即 $\rho(f_m, f_n) \rightarrow 0, m, n \rightarrow \infty$, 则 $\mu(|f_m - f_n| > \delta) \rightarrow 0, m, n \rightarrow \infty$, 那么存在 f 可测, $f_n \xrightarrow{\mu} f$. 存在子列 $\{f_{n_k}\}$, 使得 $\mu(|f_{n_k} - f| > 1) < \frac{1}{2^k}$, 令 $A_k = \{x : |f_{n_k}(x) - f(x)| > 1\}$, 则 $\mu(A_k) < \frac{1}{2^k}$, 且 $\mu(\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_k) = \mu(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=m}^{\infty} A_k) \leq \frac{1}{2^{m-1}}, \forall m \geq 1$. 则 $\mu(\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_k) = 0$. 而且存在 k_0 , 使任意的 $x \in [a, b] \setminus \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} A_k$ 有 $|f_{n_{k_0}}(x) - f(x)| \leq 1$, 又因为 $f_{n_{k_0}}$ 几乎处处有界, 那么 $f \in S[a, b]$.

$\rho(f_n, f) \leq \int_a^b |f_n - f| d\mu$, 又 $\mu([a, b]) < \infty$, 令 $E_0(n) = \{|f_n - f| \geq 1\}, E_1(n) = \{\frac{1}{2} \leq |f_n - f| < 1\}, E_2(n) = \{\frac{1}{2^2} \leq |f_n - f| < \frac{1}{2}\}, \dots$, 那么

$$\begin{aligned} \int_a^b |f_n - f| d\mu &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{E_k(n)} |f_n - f| d\mu \\ &< \int_{E_0(n)} |f_n - f| d\mu + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} \mu(E_k(n)). \end{aligned}$$

一方面, $\int_{E_0(n)} |f_n - f| d\mu \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, 另一方面, 因为 $\mu(E_k(n)) \leq \mu([a, b]) < \infty$, 那么级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} \mu(E_k(n))$ 一致收敛, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} \mu(E_k(n)) = 0$. 即

$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f_n - f| d\mu = 0. (S[a, b], \rho)$ 完备. ■

习题 4 $1 \leq p < \infty$, 令 $\rho(f, g) = \left(\int_a^b |f - g|^p dx \right)^{1/p}$, 证明 $(L^p[a, b], \rho)$ 是完备的度量空间.

证明. 1. $\rho(x, y) \geq 0$, 当 $1 \leq p < \infty$ 时, $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow \int_a^b |f - g|^p dx = 0 \Leftrightarrow f = g \text{ a.e. }$.

2. 对任意的 $1 \leq p < \infty, \rho(f, g) = \rho(g, f)$.

3. 当 $p = 1$ 时显然成立. 当 $1 < p < \infty$, 令 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 即 $p - 1 = \frac{p}{q}$, 那么

$$\begin{aligned} |f - h|^p &= |f - g + g - h|^p \\ &= |f - g + g - h| |f - h|^{p/q} \\ &\leq |f - g| |f - h|^{p/q} + |g - h| |f - h|^{p/q}. \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}
 \int_a^b |f-h|^p dx &\leq \int_a^b |f-g| |f-g+g-h|^{p/q} dx + \int_a^b |g-h| |f-g+g-h|^{p/q} dx \\
 &\leq \left(\int_a^b |f-g|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_a^b |f-h|^p dx \right)^{1/q} \\
 &\quad + \left(\int_a^b |g-h|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_a^b |f-h|^p dx \right)^{1/q} \\
 &= \left[\left(\int_a^b |f-g|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g-h|^p dx \right)^{1/p} \right] \left(\int_a^b |f-h|^p dx \right)^{1/q}.
 \end{aligned}$$

整理可得 $\rho(f-h) \leq \rho(f-g) + \rho(g-h)$.

下面证明它是完备的.

设 $\{f_n\} \subseteq L^p[a, b]$ 是 Cauchy 列. 存在子列 $\{f_{n_k}\}$, $\rho(f_{n_k}, f_{n_{k-1}}) < \frac{1}{2^k}$. 因为 $f_{n_k} = f_{n_1} + \sum_{j=2}^k (f_{n_j} - f_{n_{j-1}})$, 那么令

$$|f_{n_k}| \leq |f_{n_1}| + \sum_{j=2}^k |f_{n_j} - f_{n_{j-1}}| = g_k(x).$$

根据三角不等式,

$$\begin{aligned}
 \left(\int_a^b |g_k(x)|^p dx \right)^{1/p} &= \left(\int_a^b \left| |f_{n_1}| + \sum_{j=2}^k |f_{n_j} - f_{n_{j-1}}| \right|^p dx \right)^{1/p} \\
 &\leq \left(\int_a^b |f_{n_1}|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_a^b \left| \sum_{j=2}^k |f_{n_j} - f_{n_{j-1}}| \right|^p dx \right)^{1/p} \\
 &\leq \dots \leq \left(\int_a^b |f_{n_1}|^p dx \right)^{1/p} + \sum_{j=2}^k \left(\int_a^b |f_{n_j} - f_{n_{j-1}}|^p dx \right)^{1/p} \\
 &\leq \left(\int_a^b |f_{n_1}|^p dx \right)^{1/p} + \sum_{j=2}^k \frac{1}{2^j} \\
 &< \left(\int_a^b |f_{n_1}|^p dx \right)^{1/p} + \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

令 $g(x) = |f_{n_1}| + \sum_{j=2}^{\infty} |f_{n_j} - f_{n_{j-1}}|$, $f(x) = f_{n_1} + \sum_{j=2}^{\infty} (f_{n_j} - f_{n_{j-1}})$, $\{g_k(x)\}$ 单调递增, 则 $g(x) \in L^p[a, b]$, 又因为 $|f| \leq g$, 那么 $f \in L^p[a, b]$.

又

$$\rho(f_n, f) = \left(\int_a^b |f_{n_k} - f|^p dx \right)^{1/p}$$

$$\begin{aligned} &\leq \left(\int_a^b |f_{n_k}|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_a^b |f|^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq 2 \left(\int_a^b |g(x)|^p dx \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

那么 $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(f_{n_k}, f) = \left(\int_a^b \lim_{k \rightarrow \infty} |f_{n_k} - f|^p dx \right)^{1/p} = 0$. 则 $\rho(f_n, f) \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty$. $(L^p[a, b], \rho)$ 是完备的. ■

习题 5 (X, ρ) 是度量空间, $\forall \{x_n\} \subset A$, 那么由 $x_n \rightarrow x$ 得到 $x \in A$ 等价于 A 是 X 中的闭集.

证明. “ \Leftarrow ”. 若 A 是 X 中的闭集, 那么对 A 中的任意收敛列, 它的极限一定在 A 中.

“ \Rightarrow ”. 若对 A 中任意的收敛列 $\{x_n\}$, 它的极限在 A 中, 那么 $A' \subset A$, 即 $\overline{A} = A$, A 是闭集. ■

习题 6 (X, ρ) 是度量空间, $A \subset X$, 证明 $\text{diam } A = \text{diam } \overline{A}$.

证明. 一方面, $\text{diam } A = \sup_{x, y \in A} \rho(x, y) \leq \sup_{x, y \in \overline{A}} \rho(x, y) = \text{diam } \overline{A}$.

另一方面, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $x_0, y_0 \in \overline{A}$, 使得

$$\text{diam } \overline{A} < \rho(x_0, y_0) + \varepsilon.$$

又因为 $x_0, y_0 \in \overline{A}$, 那么存在 $x_1, y_1 \in A$, 使得 $\rho(x_1, x_0), \rho(y_1, y_0) < \varepsilon$, 那么

$$\begin{aligned} \rho(x_0, y_0) &\leq \rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, y_1) + \rho(y_1, y_0) \\ &< \rho(x_1, y_1) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

则

$$\text{diam } \overline{A} < \rho(x_1, y_1) + 3\varepsilon \leq \text{diam } A + 3\varepsilon.$$

根据 ε 的任意性, $\text{diam } \overline{A} \leq \text{diam } A$, 综上, $\text{diam } \overline{A} = \text{diam } A$. ■

习题 7 (X, ρ) 是度量空间, 设 $E \subset X$, 则 E 是疏集 \Leftrightarrow 对任意的 $\overline{B(x, r)}$, 必存在开球 $B(x', r') \subset B(x, r)$, 使得 $\overline{B(x', r')} \cap E = \emptyset$.

证明. “ \Rightarrow ”. 若存在 $B(x, r)$, 使得对任意的 $B(x', r') \subset B(x, r)$, $\overline{B(x', r')} \cap E \neq \emptyset$, 那么 E 在 $B(x, r)$ 稠密, 矛盾.

“ \Leftarrow ”. 对任意的 $B(x, r)$, 都存在 $B(x', r') \subset B(x, r)$, 使 $\overline{B(x', r')} \cap E = \emptyset$, 那么 E 无内点, E 是疏集. ■