PDE 作业

第二章第一次

习题 1. 用特征线求解下述 Cauchy 问题:

$$(2)\begin{cases} u_t+2u_x+u=xt, & t>0,-\infty<x<\infty, \\ u|_{t=0}=2-x, & -\infty<x<\infty. \end{cases}$$

解. 设 $x(t)$ 是解, 那么

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial u}{\partial t}.$$

令 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=xt-u, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2$, 那么

$$x(t)=2t+c,$$

则 $u|_{t=0}=2-c$, 且

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=(2t+c)t-u.$$

解, 得

$$u(x(t),t)=t^2+(c-2)(t-1)+c_1e^t.$$

综合上面两式可得

$$u(x,t)=t^2+(x-2t-2)(t-1).$$

习题 2. 试证明 Cauchy 问题

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=6(x+t), & -\infty<x<\infty, t>x, \\ u|_{t=x}=0, u_t|_{t=x}=u_1(x), & -\infty<x<\infty \end{cases}$$

有解的充要条件是 $u_1(x)-3x^2=\mathrm{const}$, 如有解, 解不唯一. 试问: 若把初值给定在直线 $t=ax$ 上, 为什么在 $a=\pm1$ 与 $a\neq\pm1$ 的情况, 关于存在唯一性的结论不一样?

证明. "$\Rightarrow$". 令 $\tilde{t}=t-x, \tilde{u}(x,\tilde{t})=u(x,t)$, 那么

$$u_x=\tilde{u}_x-\tilde{u}_{\tilde{t}},$$

$$u_t=\tilde{u}_{\tilde{t}},$$

$$u_{xx}=\tilde{u}_{xx}-2\tilde{u}_{x\tilde{t}}+\tilde{u}_{\tilde{t}\tilde{t}},$$

$$u_{tt} = \tilde{u}_{\tilde{t}\tilde{t}}.$$

得到关于 $\tilde{u}$ 的方程:

$$\begin{cases} 2\tilde{u}_{x\tilde{t}} - \tilde{u}_{xx} = 6(2x+\tilde{t}), \\ \tilde{u}|_{\tilde{t}=0} = 0, \\ \tilde{u}_{\tilde{t}}|_{\tilde{t}=0} = u_1(x). \end{cases}$$

那么 $2\tilde{u}_{\tilde{t}} - \tilde{u}_x = 6x^2 + 6\tilde{t}x + c$,$\tilde{t} = 0$ 代入, 又因为 $\tilde{u}(x,0) = 0$, 那么 $\tilde{u}_x|_{\tilde{t}=0} = 0$, 则

$$u_1(x) = 3x^2 + c/2.$$

"$\Leftarrow$". 根据上面的过程, 考虑方程

$$\begin{cases} 2\tilde{u}_{\tilde{t}} - \tilde{u}_x = 6x^2 + 6\tilde{t}x + c, \\ \tilde{u}|_{\tilde{t}=0} = 0, \\ \tilde{u}_{\tilde{t}}|_{\tilde{t}=0} = 3x^2 + c/2. \end{cases}$$

利用特征线法求解, 得到

$$x(\tilde{t}) = -\frac{1}{2}\tilde{t} + c_1,$$

且

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x,\tilde{t}) &= 2\left(-\frac{1}{2}\tilde{t} + c_1\right)^3 - 6c_1\left(-\frac{1}{2}t^2 + c_1\right)^2 + \frac{c}{2}\tilde{t} + 4c_1^3 \\ &= 2x^3 - 6\left(x + \frac{\tilde{t}}{2}\right)x^2 + \frac{c\tilde{t}}{2} + 4\left(x + \frac{t}{2}\right)^3 \\ &= 2x^3 - 6\left(\frac{x+t}{2}\right)x^2 + \frac{c(t-x)}{2} + 4\left(\frac{t+x}{2}\right)^3. \end{aligned}$$

代入原方程验证确实是解.

考虑方程

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & -\infty < x < \infty, t > x, \\ u|_{t=x} = 0, u_t|_{t=x} = 0, & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

经过相同的变换得到

$$\begin{cases} 2\tilde{u}_{\tilde{t}} - \tilde{u}_x = c, \\ \tilde{u}|_{\tilde{t}=0} = 0, \\ \tilde{u}_{\tilde{t}}|_{\tilde{t}=0} = c/2. \end{cases}$$

显然有非零解 $\tilde{u}(x,\tilde{t})=\frac{c\tilde{t}}{2}$, 则原方程解不唯一.

当 a 取值不同的时候, 解的唯一性不同的原因可能是 $t=ax$ 与特征线的交点不同. ■

习题 3. 若 $u=u(x,y,z,t)$ 是波动方程初值问题

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})=0, \\ u|_{t=0}=f(x)+g(y), \\ u|_{t=0}=\varphi(y)+\psi(z) \end{cases}$$

的解, 试求解的表达式.

解. 根据 Kirchoff 公式, 得到

$$\begin{aligned} u(x,y,z,t)=&\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint_{S_{at(x,y,z)}}(f(u)+g(v))\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w\right] \\ &+\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint_{S_{at(x,y,z)}}(\varphi(y)+\psi(z))\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w. \end{aligned}$$

进一步化简, 得到

$$\begin{aligned} u(x,y,z,t)=&\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\left[\iint_{\Sigma_{at(x,y)}}\frac{f(u)+g(v)}{\sqrt{a^2t^2-(u-x)^2-(v-y)^2}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\right] \\ &+\frac{1}{2\pi a}\iint_{\Sigma_{at(y,z)}}\frac{\varphi(y)+\psi(z)}{\sqrt{a^2t^2-(v-y)^2-(w-z)^2}}\mathrm{d}v\mathrm{d}w. \end{aligned}$$

习题 4. 试利用唯一性结果直接证明: 当初值 $\varphi(x),\psi(x)$ 是偶函数, 非齐次项 $f(x,t)$ 是 x 的偶函数时非齐次波动方程初值问题的解 $u(x,t)$ 关于 x 也是偶函数.

证明. 因为 $u(-x,t)$ 也是方程组的解, 如果 u 不是 x 的偶函数, 那么方程有两个相异的解, 矛盾. 即 u 是关于 x 的偶函数. ■

习题 5. 证明半无界问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t), & 0<x<\infty, t>0, \\ u|_{t=0}=\varphi(x), u_t|_{t=0}=\psi(x), & 0\leqslant x<\infty, \\ u|_{x=0}=\mu(t), & t\geqslant 0 \end{cases}$$

解的唯一性.

证明. 要证明解的唯一性, 只需证明

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f_1(x,t) = 0, & 0 < x < \infty, t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi_1(t) = 0, \, u_t|_{t=0} = \psi_1(t) = 0, & 0 \leqslant x < \infty, \\ u|_{x=0} = \mu_1(t) = 0, & t \geqslant 0 \end{cases}$$

只有零解.

考虑上面问题的奇延拓, 那么它在区域 $\{at - x_0 \leqslant x \leqslant x_0 - at, 0 \leqslant t \leqslant T\}, x_0 > 0, 0 < T \leqslant \frac{x_0}{a}$ 上满足能量不等式, 即

$$\int_{\Omega_\tau} u^2(x,\tau)\mathrm{d}x \leqslant M_1 \left[\int_{\Omega_0} (\varphi_1^2 + \psi_1^2 + a^2\varphi_{1x}^2)\mathrm{d}x + \iint_{K_\tau} f_1^2(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \right],$$
$$\iint_{K_\tau} u^2(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant M \left[\int_{\Omega_0} (\varphi_1^2 + \psi_1^2 + a^2\varphi_{1x}^2)\mathrm{d}x + \iint_{K\tau} f_1^2(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \right].$$

那么 u 在区域 $\{0 \leqslant x \leqslant x_0 - at, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ 内恒为 0, 根据 x_0 的任意性, 原方程只有零解. ■