**第十一届“认证杯”数学中国**

**数学建模网络挑战赛**

**承 诺 书**

我们仔细阅读了第十届“认证杯”数学中国数学建模网络挑战赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的, 如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们接受相应处理结果。

我们允许数学中国网站([www.madio.net](http://www.madio.net))公布论文，以供网友之间学习交流，数学中国网站以非商业目的的论文交流不需要提前取得我们的同意。

**我们的参赛队号为：6192**

**参赛队员 (签名) ：**

队员1：

队员2：

队员3：

**参赛队教练员 (签名)：**

**参赛队伍组别（例如本科组）：本科组**

**第十一届“认证杯”数学中国**

**数学建模网络挑战赛**

**编 号 专 用 页**

参赛队伍的参赛队号：（请各个参赛队提前填写好）：

6192

竞赛统一编号（由竞赛组委会送至评委团前编号）：

竞赛评阅编号（由竞赛评委团评阅前进行编号）：

**2018年第十一届“认证杯”数学中国**

**数学建模网络挑战赛第一阶段论文**

题 目 避免海豚捕食的沙丁鱼游动模型

关 键 词 FLocking模型 数据聚类 虚拟领导 无监督学习

摘 要：

本文主要研究了沙丁鱼在遭遇海豚捕食时的运动规律，我们将整个捕食过程分为两个阶段来探究其运动规律：一是海豚在较远处利用回声定位发现沙丁鱼群时沙丁鱼原本的运动规律；二是沙丁鱼群发现了海豚的捕食后进行集体躲避的运动规律。

在第一阶段中，海豚在远处利用回声定位法判断鱼群的位置，此时的鱼群由于距离海豚较远，我们假设其游动方式不会受到海豚的影响，只会受到其周围的一个小邻域中的鱼的游动方式的影响。

在第二阶段中，我们假设当且仅当海豚出现在以沙丁鱼为球心，半径为R的球内时沙丁鱼可以检测到海豚的追捕，从而根据海豚的位置确定移动的方向和距离。由于沙丁鱼进行协同躲避的策略，不同沙丁鱼的运动方式会受到彼此之间的影响。所以我们采用具有**虚拟领导**的**flocking聚类算法**来模拟沙丁鱼的运动规律。

首先，我们建立了一个三维直角坐标系，在一个确定的球形范围内随机生成鱼群坐标，同时在一定范围内随机生成海豚的坐标。接着我们类比物理学中的电场，建立了鱼群形成的**局域势场**，利用**势函数**来描述鱼群运动规律之间的相互影响方式。

我们对海豚的运动模型进行了简化，假设其沿从起始的位置指向第一个球的球心的方向运动，则在海豚的运动过程中，沙丁鱼群会进行协同躲避，从而发生相应的位置变化。当沙丁鱼群到达各自的新位置后，我们可以确定这一新状态时沙丁鱼群的几何中心，并将此作为海豚的下一个目标终点。

关于沙丁鱼的位置坐标变化，我们采用具有虚拟领导的flocking聚类算法，然后在此基础上进行优化分析。我们将每条鱼看做一个节点，将代表每条鱼的节点与一个合理的感知半径内的鱼相连，生成一个**有权无向图**。并且从节点集中选取虚拟领导集合作为鱼群的领导集合。我们先确定了虚拟领导集合中鱼群的位置变化信息，对于其余沙丁鱼，我们需要分别确定其对应的领导集合。其中包括整体虚拟领导集合中度数最大的指定数量的鱼，同时还包括其周围邻域内的鱼。确定了各自的领导集合后，我们分别计算出每个点的总场之和，从而确定每个被领导点的变化方向与移动距离，得到新的沙丁鱼群位置坐标。

通过改变对单条沙丁鱼产生影响的鱼群的半径r，海豚在指定时间内捕捉到的沙丁鱼数目将发生变化，由此我们可以得到沙丁鱼被捕获的概率，以此作为衡量模型是否可行的指标。

参赛队号: 6192

参赛密码 

**（由组委会填写）**

所选题目: A 题

目录

[问题重述 1](#_Toc22442)

[问题分析 2](#_Toc25889)

[符号说明 3](#_Toc9903)

[模型一——海豚利用水声定位模型 4](#_Toc663)

[1.1模型假设 4](#_Toc20500)

[1.2模型的建立与求解 4](#_Toc15153)

[模型二——沙丁鱼群游动模型 6](#_Toc22925)

[2.1模型假设 6](#_Toc4109)

[2.2模型的建立与求解 6](#_Toc26052)

[xi处的总场之和为 7](#_Toc12073)

[模型三——虚拟领导躲避捕食模型 8](#_Toc4303)

[3.1 模型假设 8](#_Toc6666)

[3.2 模型的建立 8](#_Toc31938)

[3.3模型求解 10](#_Toc32403)

[模型优缺点 13](#_Toc19364)

[一、 优点 13](#_Toc15254)

[二、 缺点 13](#_Toc14914)

[附录——Matlab程序 14](#_Toc5859)

[参考文献 18](#_Toc27262)

# 问题重述

沙丁鱼群以聚成大群的方式对捕食者海豚进行防御，在了解海豚的捕食方式，以及沙丁鱼群的躲避方式之后，可以知道鱼群是协调性运动的，往往是根据周围鱼群的动向决定自身的动向，以此让捕食者无法追踪固定的单一目标，所以我们需要建立一个模型探究沙丁鱼群是如何根据海豚的捕杀进行协作运动的。由于沙丁鱼能感知到其他生物的范围有限，关于沙丁鱼群的移动方式应当分为两个阶段进行研究。

在第一阶段中，海豚在远处利用回声定位法判断鱼群的位置，此时的鱼群由于距离海豚较远，我们假设其游动方式不会受到海豚的影响，只会受到其周围的一个小邻域中的鱼的游动方式的影响。

在第二阶段中，我们假设当且仅当海豚出现在以沙丁鱼为球心，半径为R的球内时沙丁鱼可以检测到海豚的追捕，从而根据海豚的位置确定移动的方向和距离。

由此我们可以得到不同时刻不同沙丁鱼的游动路径，为了检验我们模型的准确度，我们引入了沙丁鱼在遭遇海豚袭击时被捕食的概率，概率越小说明模型的效果越好。

# 问题分析

海豚和沙丁鱼群的运动路线应该是互相影响的，鱼群作为一个几何球体，它的几何中心决定了海豚捕食的路径，海豚的进攻路线又影响鱼群的逃窜方式。但是关于海豚的运动，我们选择先简化其运动路线然后再进行优化的方法。假设他的运动一直是在寻找鱼群的中心点，然后我们会针对具体情况，对于海豚的运动路线进行优化，比如海豚会尽量让鱼群赶到水面附近，海豚会从沙丁鱼群的底部发动捕食等等。

关于沙丁鱼群的运动，我们会将距离海豚最近的某一小范围内的沙丁鱼作为虚拟领导，然后根据flocking聚类算法，求出相应的每个沙丁鱼的场，然后就可以计算出关于每个沙丁鱼运动的方向和距离，这样就会求得新的沙丁鱼群的坐标位置，也就可以得到最初的沙丁鱼遇到海豚捕食时的运动规律。

我们把在海豚与沙丁鱼距离小于r的范围内看作沙丁鱼可以被海豚捕食的条件，将沙丁鱼被捕食的概率作为衡量模型好坏的标准。

**符号说明**

|  |  |
| --- | --- |
| 符号 | 符号说明 |
| n | 沙丁鱼的总数 |
| t | 时间 |
|  | 第i条沙丁鱼在t时刻的坐标 |
| dolph | 海豚的坐标 |
| eat | 被捕沙丁鱼数 |
|  | 第i条沙丁鱼与第j条沙丁鱼之间的距离 |
|  | 第i条沙丁鱼与海豚之间的距离 |
|  | 在有权无向图中第i条沙丁鱼的度 |
| Vlead | 虚拟领导集合 |
| nnum | 虚拟领导的鱼群个数 |
|  | 第i个点的虚拟领导鱼群个数 |
|  | 第i个点的第j个虚拟领导点的序号 |
|  | 作为虚拟领导的第i条鱼坐标 |
|  | 非领导的第i条鱼的坐标 |

# 模型一——海豚利用水声定位模型

## 1.1模型假设

（1）、水下光线很暗，且距离较远的情况下，海豚只能使用回声定位方法来判断鱼群的整体位置。

（2）、海豚具有发射高频率声波的器官，通过接收声波的时间延迟，海豚可以判断鱼群方向。

（3）、按照1500米每秒的声速计算，海豚声波的双程距离的分辨率约为0.66厘米。

（4）、假设海豚总是沿着直线方向前行，以初始时刻鱼群的几何中心为目的点，并且在达到初始目的点前的路径不受鱼群的运动影响。直至达到初始目的点后选择下一个目的点（即该时刻的鱼群几何中心）。

## 1.2模型的建立与求解

根据问题分析，我们用海豚与沙丁鱼群的距离（d）、海豚声波感测器官上的间距（X）、海豚声波感测器官接受到信号的时间差（）作为参数建立数学模型并分析海豚如何定位沙丁鱼群。

海豚

沙丁鱼群

**A**

**B**

**C**

X

X

X

## 1.2.1 确定沙丁鱼群的方向

A点为海豚最早接收到声波的位置，A与声波探测器官表面的垂直方向即为鱼群方向，且通过鱼群的几何中心。

## 1.2.2 确定海豚与沙丁鱼群的距离

B和C为其后接收到声波且与前一点距离均为x的点，AB、AC收到声波的时间差分别为，海豚与鱼群的距离即为

公式 1

# 模型二——沙丁鱼群游动模型

## 2.1模型假设

（1）远处的海豚会对鱼群的游动产生一定影响，但由于海豚尚未达到对鱼群有着威胁的距离，故鱼群的内部游动不考虑海豚的影响。

（2）我们假设所有沙丁鱼都可以无障碍地自由游动且在游动的过程中不发生碰撞

（3）对于每一条沙丁鱼的游动方向及规律，我们只考虑其周围一定范围内的沙丁鱼对其产生的影响，而不考虑其余沙丁鱼产生的影响。

## 2.2模型的建立与求解

根据问题分析，我们选择使用具有虚拟领导的Flocking聚类算法，选定一个领导集合作为所有鱼群的总领导者。对于剩余的沙丁鱼我们对其进行聚类，可将每条鱼看作一个节点，设定一个合理的半径R，将以该节点为球心R为半径的球内的所有点与该节点相连，两条鱼之间的距离作为连接两个节点之间边的权值。由此我们便得到一个三维空间坐标系中的有权无向图G(X(t),E(t),d)。

类比物理学中的电场与磁场的性质，我们建立了一个鱼群之间相互影响的局域势场。每条鱼都会对其周围一定范围内的鱼的运动轨迹产生一个场，我们定义了势函数来描述这个场的大小。由此我们可以通过求和函数计算得每条鱼所在位置的总场之和。

设一个鱼群中有N条鱼，分别为,其中i、j是1到N之间的自然数。

以鱼群中的任意一条鱼作为圆心做单位球，单位球内所有其他的鱼作为的虚拟领导leadn，向引的向量之和是一个矢量，将其作为的总场和，在鱼群之中的游动方向以及速度便由所确定。

方向向量

公式 2

点j在点i处产生的势系数

公式 3

点j在点i处产生的势函数

公式 4

由于该势函数产生的运动趋势仅仅能使两条鱼分离，而现实中两条鱼是无法无限远离且会保持一定距离的，因此在势系数中考虑系数K的因式，使其控制鱼群的聚合。

公式 5

( ) 公式 6

公式 7

场

总场

Leadn

图 1 总场

图 2 **半径n以内虚拟领导的鱼群占比**

# 模型三——虚拟领导躲避捕食模型

## 3.1 模型假设

1. 我们假设海豚总是沿直线前进，并且能够自动寻找鱼群的几何中心点，从而将其为目标终点，直至到达上一时刻的目标终点后再寻找当前时刻的新的目标终点，该过程反复进行。
2. 我们建立假设海豚的初始坐标是随机的，沙丁鱼群在半径为r的球内随机分布。
3. 我们假设每条鱼都能自由游动并且在游动过程中不发生碰撞。
4. 我们假设假设鱼总是由于集群效应受周围鱼的运动规律影响，且不考虑鱼在水中受到的物理阻力。
5. 假设只有海豚这一种猎物的捕食，在本例中更特殊的选择其中一条海豚作为捕食者。

6.鱼群中最先受到海豚冲击的鱼作为其他不能第一时间发现海豚的鱼的虚拟领导，带领他们躲避海豚，躲避路线为他们与海豚连线的反方向。

7. 利用具有虚拟领导的Flocking聚类算法，可设鱼群中的任意鱼以单位球内的其余鱼作为虚拟领导并受其影响。

## 3.2 模型的建立

我们将原问题投影到三维直角坐标系中进行求解：

3.2.1 确定海豚的初始位置

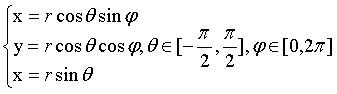
在三维直角坐标系中我们可以将海豚的位置以坐标的形式表示出来。在本模型中

我们随机生成了一个欧式空间中[-20,20]×[-20,20]×[-20,20]范围内的点作为海豚的初始位置。

3.2.2 确定每条沙丁鱼的初始位置

在三维直角坐标系中我们同样也可以把每条沙丁鱼的位置以坐标的形式表示出

来。由于在没有外部威胁或障碍物时，鱼群常常会聚成接近球形的形态，我们假设鱼群随机分布在半径为r的一个球内，利用球坐标可以表示出第i条鱼的初始位置(x,y,z)

公式 8

由此我们得到了一个初始的鱼群分布散点图：

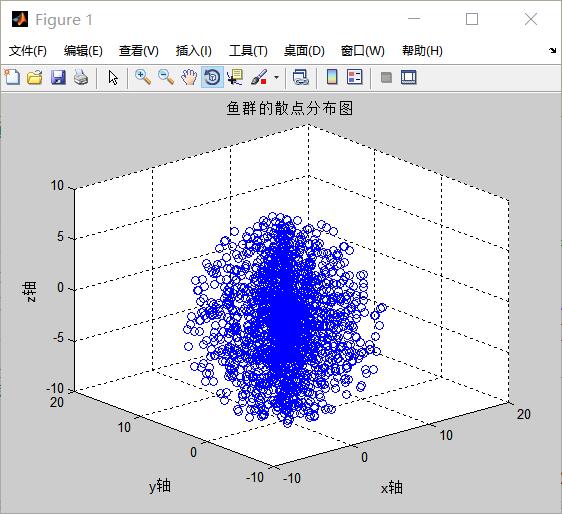


图 3

3.2.3 确定海豚的前行路线

我们假设海豚总是以鱼群的几何中心点作为目标终点，

则海豚的目标终点坐标为：

 公式 9

海豚与目标终点的距离为：

公式 10

海豚第一阶段的运动方向为：

 公式 11

其中(dx,dy,dz）表示海豚初始的位置坐标。

则海豚的位置关于时间的函数可以写为：

公式 12

3.2.4 确定虚拟领导鱼群的躲避方式

虚拟领导鱼群的躲避路线为他们与海豚连线的反方向。

V为鱼群游动速度、为三维坐标向量、为虚拟领导鱼群的坐标、为虚拟领导鱼群的厨初始坐标、为鱼群游动速度。

建立xyz为轴的三维坐标，则虚拟领导鱼群的坐标为

公式 13

鱼群

海豚

图 4

3.2.5 确定泯然众鱼的躲避方式

除了虚拟领导鱼群之外的鱼群由于距离海豚较远，无法第一时间发现海豚的袭击，只是本能地通过周围鱼群对自身的迫近做出保持距离的反应。我们用以下几个指标来衡量沙丁鱼对周围鱼群的影响：该条沙丁鱼与被影响的沙丁鱼之间的距离该条沙丁鱼的

在势函数中，两条鱼之间的距离变短，使得这一项式子变大，既能反映鱼群能整体迅速逃离海豚的行为。

## 

## 3.3模型求解

通过改变鱼群受到周围鱼群影响的邻域半径r，我们可以得到对应的沙丁鱼被捕食概率。我们考虑了分布在0.1-0.2区间内的情况。根据附件的Matlab程序，我们得到了r与p对应的关系，如下表所示

|  |  |
| --- | --- |
| **r/m** | **p** |
| **0.10** | 0.267 |
| **0.11** | 0.189 |
| **0.12** | 0.156 |
| **0.13** | 0.142 |
| **0.14** | 0.113 |
| **0.15** | 0.113 |
| **0.16** | 0.083 |
| **0.17** | 0.077 |
| **0.18** | 0.085 |
| **0.19** | 0.101 |
| **0.20** | 0.120 |
| **0.21** | 0.135 |
| **0.22** | 0.132 |
| **0.23** | 0.191 |
| **0.24** | 0.265 |

表格 1

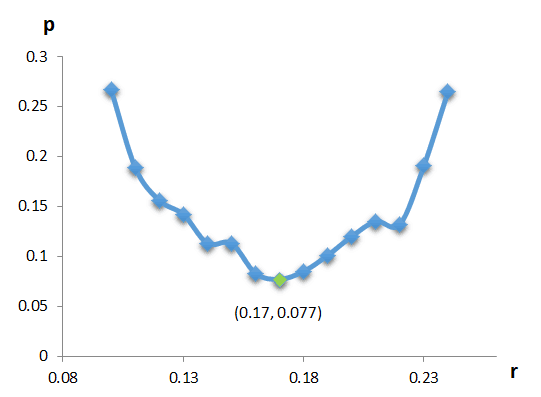


图 5

由上表可知，随着r的变化，p也呈现大致的趋势变化，我们可以看出在（0.17，0.077）附近是改率最低的分布，越远离此半径的r，相对应的概率呈现变大的趋势，所以我们有理由推测（0.17，0.077）是粗略所求得的最优的半径大小，按照上述模型则大致可以得到沙丁鱼群的最优位置变化方案。

# 模型优缺点

## 优点

1.充分考虑了自然环境下沙丁鱼协同躲避时，鱼群内部的互相影响。

2.利用了Flocking函数，建立了以势函数为核心的算法，并能通过改变势函数所取半径改变鱼群协同躲避的行动。

3.能通过被海豚捕食的沙丁鱼数量判断沙丁鱼躲避模型的好坏。

## 缺点

1.只能模拟一条海豚捕食时，沙丁鱼群的躲避模型。

2.没有足够多的现实数据支撑算法的运行。

# 附录——Matlab程序

%% 确定海豚及鱼群的坐标

clc,clear;

dolph\_=rand(1,3)\*5 %确定海豚初始坐标doph\_

dolph=dolph\_ %建立海豚坐标随时间变化的矩阵

n=600; %确定鱼群个数

r=rand(n,1)\*1; %随机生成鱼群球坐标（r,theta,fi)

theta=rand(n,1)\*2\*pi

fi=rand(n,1)\*pi-pi/2

x=r.\*cos(theta).\*sin(fi);

y=r.\*cos(theta);

z=r.\*sin(theta);

fish=[x,y,z]; %生成鱼群坐标矩阵

scatter3(x,y,z); %绘出三维散点图

xlabel('x轴');

xlabel('x轴')

ylabel('y轴')

zlabel('z轴')

grid on

title('鱼群的散点分布图');

hold on

plot3(dolph\_(1),dolph\_(2),dolph\_(3),'r','markersize',50);

Ox=mean(x);

Oy=mean(y);

Oz=mean(z);

% [Ox,Oy,Oz]=[mean(x),mean(y),mean(z)] %确定海豚终点：鱼群的中心

v\_dolph=0.5; %假设海豚速度

tmax=sqrt((Ox-dolph\_(1))^2+(Oy-dolph\_(2))^2+(Oz-dolph\_(3))^2)/v\_dolph;

for t=1:1:round(tmax)

dolph=[dolph;dolph(t,:)+v\_dolph\*[Ox-dolph(t,1),Oy-dolph(t,2),Oz-dolph(t,3)]...

/(sqrt((Ox-dolph(t,1))^2+(Oy-dolph(t,2))^2+(Oz-dolph(t,3))^2)\*t)];

% 确定海豚的目标终点

% 定义距离函数d

for i=1:n

for j=1:n

d(i,j)=sqrt((x(i)-x(j))^2+(y(i)-y(j))^2+(z(i)-z(j))^2); %利用欧氏距离

end

end

%定义鱼群与海豚初始位置之间的距离

for i=1:n df\_(i)=sqrt((x(i,1)-dolph\_(1))^2+(y(i,1)-dolph\_(2))^2+(z(i,1)-dolph\_(3))^2)';

end

%% 确定每个点的度

r=0.1 %设定半径为1

for i=1:n

deg1(i)=0; %设定点的初始度为0

deg2(i)=i;

for j=1:n

if d(i,j)<r

deg1(i)=deg1(i)+1;

deg=[deg1;deg2]';

end

end

end

%% 确定虚拟领导集合vlead

nnum=0;

R=3;

vlead=[];

for i=1:n

if df\_(i)<R

nnum=nnum+1; %确定虚拟领导的鱼群个数nnum

vlead=[vlead,i];

else nnum=nnum;

end

end

%% 确定每个点的虚拟领导

% 从虚拟领导集合中找出每个点的虚拟领导

p=0.4; %确定每个点所需虚拟领导占所有虚拟领导的百分比

num=nnum\*p; % 确定每个点的虚拟领导数

degn=sort(deg,'descend');

degnew=degn(1:num,1:2);

%对虚拟领导集合vlead中元素对应的度进行升序排序

for i=1:n

for j=1:num

lead(i,j)=degnew(j,1);

%lead(i,j)记第i个点的第j个虚拟领导点的度

leadn(i,j)=degnew(j,2);

%lead(i,j)记第i个点的第j个虚拟领导点的序号

end

end

% 确定每个点的邻集内产生的虚拟领导

count=0.05\*n

%每个点至多拥有邻集内的虚拟领导个数为count个（占总数的5%）

time=0 %初始虚拟领导个数为0

leadn=0; %每个点的领导序号leadn

for j=1:n

for i=1:n

if d(i,j)<r

plus(i)=j;

else plus=[];

leadn=[leadn,plus'];

time=time+1;

if time>count

break

end

end

end

end

%% 确定虚拟领导集合中点的运动轨迹

v\_fish=1 %设定鱼群游动速度

for i=1:size(vlead)

x\_lead(i)=x(vlead(i));

y\_lead(i)=y(vlead(i));

z\_lead(i)=z(vlead(i)); direct(i,:)=[x\_lead-dolph(1),y\_lead-dolph(2),z\_lead-dolph(3)]... /sqrt((x\_lead-dolph(1))^2+(y\_lead-dolph(2))^2+(z\_lead-dolph(3))^2);

x\_leadn(i)=x\_lead(i)+v\_fish\*direct(1)\*t;

y\_leadn(i)=y\_lead(i)+v\_fish\*direct(2)\*t;

z\_leadn(i)=z\_lead(i)+v\_fish\*direct(3)\*t;

%虚拟领导鱼群的位置关于时间的函数

end

%% 确定其余点的运动轨迹

% 定义势函数field

for i=1:n

for j=1:leadn

field(i,j)=deg(j)/(d(i,j))^3-7200000\*(d(i,j))^3;

end

end

%定义每个点的附近总场之和fields

fields=zeros(n,3); %初始值为n\*3的矩阵 行第几个 列xyz

for i=1:n

for j=1:leadn %乘以任意两点之间的方向向量

fields(i,:)=fields(i,:)+field(i,j)\*[x(j)-x(i),y(j)-y(i),z(j)-z(i)]...

/sqrt((x(j)-x(i))^2+(y(j)-y(i))^2+(z(j)-z(i))^2);

x=[x,x+v\_fish\*fields(:,1)\*t];

y=[y,y+v\_fish\*fields(:,2)\*t];

z=[z,z+v\_fish\*fields(:,3)\*t];

%xyz都是n\*1的矩阵表示 行表示第几个

% x=[x,[x\_n]'];

% y=[y,[y\_n]'];

% z=[z,[z\_n]'];

end

end

end

%任意点的位置等于原来的位置+运动速度\*运动方向\*时间

%% 计算鱼群的被捕概率

eat=0; %初始被捕鱼数eat

for i=1:n df(i)=sqrt((x(i)-dolph(t,1))^2+(y(i)-dolph(t,2))^2+(z(i)-dolph(t,3))^2);

eat=eat+1;

p\_eat=eat/n;

end

# 参考文献

[1]刘伟,王昌明,张自嘉, 等.水声定位系统中空间谱估计算法仿真分析[J].电子测量技术,2008,(11):47-49,62. DOI:10.3969/j.issn.1002-7300.2008.11.014.

[2]李强,何衍,蒋静坪.具有虚拟领导的Flocking聚类算法[J].电子与信息学报,2009,(8):1846-1851.