处理 sl 坐标转换

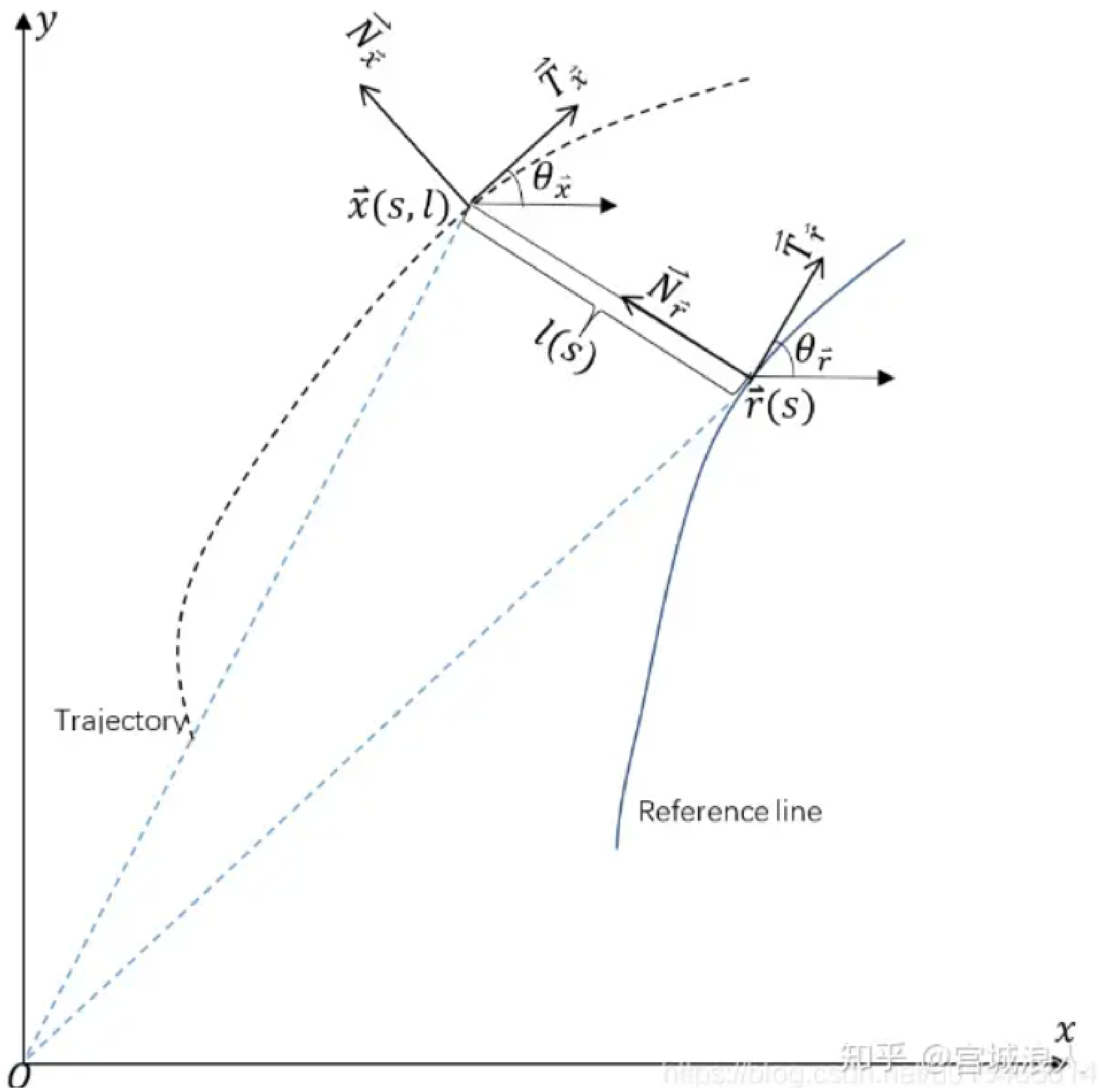
1.笛卡尔下的 x, y 转化成S-L下的 s, l

2.笛卡尔下的 $x, y, \theta_x, k_x, v, a$ 转化成S-L下的 $s, \dot{s}, \ddot{s}, l, l', l''$

3.S-L下的 $s, \dot{s}, \ddot{s}, l, l', l''$ 转化成笛卡尔下的 $x, y, \theta_x, k_x, v, a$

$x_r, y_r, \theta_r, k_r, dk_r, s$ 信息。x_r, y_r 为位置，θ_r 为切线方向，k_r 为曲率，dk_r 为曲率变化率即 dk_r/ds ，s 为曲线长度，有时也会加上曲率变化率的变化率即 ddk_r/ds 。

在笛卡尔坐标系下，车辆运动一般被描述为$x, y, \theta_x, k_x, v, a$ ，θ_x 为航向角，k_x 为曲率。在frenet坐标系（也称S-L坐标系）下，车辆运动用 $s, l, \dot{s}, \ddot{s}, l', l''$ 描述。



y
$\vec{N}_{\vec{x}}$
$\vec{T}_{\vec{x}}$
$\theta_{\vec{x}}$
$\vec{x}(s,l)$
$\vec{T}_{\vec{r}}$
$\vec{N}_{\vec{r}}$
$l(s)$
$\theta_{\vec{r}}$
$\vec{r}(s)$
Trajectory
Reference line
x
O
知乎 @官城浪人
https://blog.csdn.net/u0...

1.笛卡尔下的 x, y 转化成S-L下的 s, l

首先找到距离车辆 $\boldsymbol{x} = [x, y]$ 最近（一般是距离最小+方向判定）的参考点 $\boldsymbol{r} = [x_r, y_r]$，在笛卡尔坐标系下，根据向量关系，很容易得出：

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{r} + l\boldsymbol{N_r} \tag{1}$$

这个是我们做所有推导的基础。再回到这个问题，根据定义，参考点的 s 即为车辆的 s，图中的 l 为车辆 l，即两点之间的距离：

$$l = \sqrt{(x - x_r)^2 + (y - y_r)^2}$$

然后我们需要判断 l 的正负即方向。一般沿着参考线 s 增加方向的左边为正，右边为负。笛卡尔坐标系下 $\boldsymbol{N_r} = 1/l \cdot [x - x_r, y - y_r]$，$\boldsymbol{T_r} = [cos\theta_r, sin\theta_r]$，向量叉积$\boldsymbol{T_r} \times \boldsymbol{N_r}$ 在z方向的分量为：

$$(y - y_r)cos\theta_r - (x - x_r)sin\theta_r$$

l 的正负号与z分量的符号相同，即

$$l = sign((y - y_r)cos\theta_r - (x - x_r)sin\theta_r)\sqrt{(x - x_r)^2 + (y - y_r)^2}$$

2.笛卡尔下的 $x, y, \theta_x, k_x, v, a$ 转化成S-L下的 $s, \dot{s}, \ddot{s}, l, l', l''$

思路：通过车速 v 来建立 $\dot{s}, \dot{l}$ 二者之间的联系，然后通过如下关系式：

$$l' = \frac{dl}{ds} = \frac{dl/dt}{ds/dt} = \frac{\dot{l}}{\dot{s}}$$

来巧妙地得到 l'，再通过 l' 和车速正向推导 $\dot{s}$, $\ddot{s}$ 和 l'' 则通过定义直接推导。

由公式（1）：

$$l = \boldsymbol{N}_r^T(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}) = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r})^T \boldsymbol{N}_r$$

对时间求导可得

$$\dot{l} = (\dot{\boldsymbol{x}} - \dot{\boldsymbol{r}})^T \boldsymbol{N}_r + (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r})^T \dot{\boldsymbol{N}}_r = (\dot{\boldsymbol{x}} - \dot{\boldsymbol{r}})^T \boldsymbol{N}_r + (l\boldsymbol{N}_r)^T \dot{\boldsymbol{N}}_r \tag{2}$$

下面对这些项分别计算。由速度的定义可得:

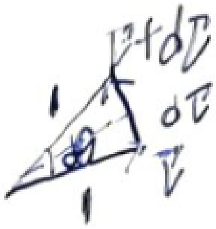
$$\dot{\boldsymbol{x}} = v\boldsymbol{T}_x, \dot{\boldsymbol{r}} = \dot{s}\boldsymbol{T}_r \tag{3}$$

根据链式求导法则:

$$\dot{\boldsymbol{N}}_r = \frac{d\boldsymbol{N}_r}{dt} = \frac{d\boldsymbol{N}_r}{ds}\frac{ds}{dt} = \dot{s}\frac{d\boldsymbol{N}_r}{ds}$$

根据frenet公式（这里可以类比于向心力公式）：

$$\frac{d\boldsymbol{N}_r}{ds} = -k\boldsymbol{T}_r$$



$|d\vec{\tau}| = 2\times 1\times \sin(\frac{d\theta}{2})$ ∴当 $ds\to 0$ 时 $d\vec{\tau}$ 的方向是垂直于 $\vec{\tau}$ 的方向的.

∴ $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ 方向 $\vec{n}$ 大小为 $\frac{|d\vec{\tau}|}{ds} = \frac{2\sin(\frac{d\theta}{2})}{ds} = \frac{d\theta}{ds} = K$

∴ $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = K\vec{n}$

同理 $\frac{d\vec{n}}{ds} = -K\vec{\tau}$

所以：

$$\dot{\boldsymbol{N}}_r = -k\dot{s}\boldsymbol{T}_r \tag{4}$$

将（3）（4）代入（2）可得：

$$\dot{l} = (v\boldsymbol{T}_x - \dot{s}\boldsymbol{T}_r)^T\boldsymbol{N}_r - (l\boldsymbol{N}_r)^T k\dot{s}\boldsymbol{T}_r$$

由于 $\boldsymbol{T}_r$ 和 $\boldsymbol{N}_r$ 正交，上式可化简为：

$$\dot{l} = v\boldsymbol{T}_x^T\boldsymbol{N}_r$$

将 $\boldsymbol{T}_x$ 和 $\boldsymbol{N}_r$ 的坐标代入进行计算，可得：

$$\dot{l} = vsin(\theta_x - \theta_r) \tag{5}$$

这样，我们将 $\dot{l}$ 和 v 关联起来。仔细观察示意图，我们其实可以发现上述公式能够通过几何关系直接推导出来。接着，我们通过式（1）直接推导 v，将式（1）对时间求导得：

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \frac{d(\boldsymbol{r} + l\boldsymbol{N}_r)}{dt} = \dot{\boldsymbol{r}} + \dot{l}\,\boldsymbol{N}_r + l\dot{\boldsymbol{N}}_r$$

同样将（3）（4）带入上式可得：

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \dot{s}(1 - k_r l)\boldsymbol{T}_r + \dot{l}\,\boldsymbol{N}_r$$

由于 $\boldsymbol{T}_r$ 和 $\boldsymbol{N}_r$ 正交，对两边求模可得：

$$v = \sqrt{\dot{s}^2(1 - k_r l)^2 + \dot{l}^2} \tag{6}$$

然后我们将式（6）和式（5）综合起来，把速度 v 约掉，可得：

$$(\frac{\dot{l}}{\dot{s}})^2 = tan^2(\theta_x - \theta_r)(1 - k_r l)^2 = l'^2$$

一般，我们认为参考线的曲率远远小于车辆的转弯极限（0.2m左右），车辆偏离参考线不会太远（小于车道宽即4m左右），因此可以认为 $1 - k_r l > 0$。然后我们还假设车辆与参考线的方向偏差不会超过 $\pi/2$ 即 $|\theta_x - \theta_r| < \pi/2$，由几何关系可得 l' 符号与 $\theta_x - \theta_r$ 符号相同，于是我们可以得出 l' 的表达式：

$$l' = tan(\theta_x - \theta_r)(1 - k_r l) \tag{7}$$

然后由式（5）（7）和 $l' = \dot{l}/\dot{s}$ 可得：

$$\dot{s} = \frac{v}{1 - k_r l} cos(\theta_x - \theta_r) \tag{8}$$

接下来，我们来求 l''。由于 $l'' = dl'/ds$，我们需要将这个二阶微分和笛卡尔坐标系中的曲率关联起来，由于 $k = d\theta/ds$，设笛卡尔坐标系下弧长为 s_x，S-L坐标系下对 s 的微分则为：

$$\frac{d}{ds} = \frac{ds_x}{ds} \frac{d}{ds_x}$$

由于 $v = ds_x/dt$，所以上式可简化为：

$$\frac{d}{ds} = \frac{v}{\dot{s}} \frac{d}{ds_x}$$

ds

联立 $\left.\begin{aligned} \dot{l} &= v\sin(\theta_x-\theta_r) \\ v &= \sqrt{\dot{s}^2(1-k_r l)^2+\dot{l}^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \dfrac{\dot{l}^2}{\sin^2(\theta_x-\theta_r)} = \dot{s}^2(1-k_r l)^2+\dot{l}^2$

$$\therefore \frac{\dot{l}^2}{\dot{s}^2(\sin^2(\theta_x-\theta_r))} = (1-k_r l)^2+\frac{\dot{l}^2}{\dot{s}^2} \qquad \frac{\dot{l}^2}{\dot{s}^2}\left(\frac{\cos^2(\theta_x-\theta_r)}{\sin^2(\theta_x-\theta_r)}\right) = (1-k_r l)^2$$

$$\therefore \left(\frac{\dot{l}}{\dot{s}}\right)^2 = \tan(\theta_x-\theta_r)(1-k_r l)^2 = l'^2$$

再将式（8）带入，可得：

$$\frac{d}{ds}=\frac{1-k_r l}{cos(\theta_x-\theta_r)}\frac{d}{ds_x} \tag{9}$$

利用式（9）我们直接求对式（7）的微分：

$$l''=\frac{dl'}{ds}=\frac{d(1-k_r l)}{ds}tan(\theta_x-\theta_r)+\frac{1-k_r l}{cos^2(\theta_x-\theta_r)}\frac{d(\theta_x-\theta_r)}{ds}$$

第一项，由参考点已知信息可得：

$$\frac{d(1-k_r l)}{ds}=-(dk_r l+k_r l')$$

第二项：

$$\frac{d(\theta_x-\theta_r)}{ds}=\frac{d\theta_x}{ds}-\frac{d\theta_r}{ds}=\frac{1-k_r l}{cos(\theta_x-\theta_r)}\frac{d\theta_x}{ds_x}-\frac{d\theta_r}{ds}$$

由曲率的定义可得 $d\theta_x/ds_x=k_x, d\theta_r/ds=k_r$ 。因此 l'' 的公式为：

$$l''=-(dk_r l+k_r l')tan(\theta_x-\theta_r)+\frac{1-k_r l}{cos^2(\theta_x-\theta_r)}(k_x\frac{1-k_r l}{cos(\theta_x-\theta_r)}-k_r) \tag{11}$$

再求 $\ddot{s}$ ，很明显 $\ddot{s}$ 是和加速度 a 相关联的，我们利用式（8）将 v 提出来，直接对时间微分可得：

$$a=\ddot{s}\frac{1-k_r l}{cos\Delta\theta}+\frac{\dot{s}^2}{cos\Delta\theta}((1-k_r l)tan\Delta\theta\frac{d\Delta\theta}{ds}-dk_r l-k_r l'),\Delta\theta=\theta_x-\theta_r \tag{12}$$

即为 $\ddot{s}$ 和 a 的关系式。

因此，式（7）（8）（11）（12）即为二阶微分量的转化公式。

$$l'' = \frac{dl'}{dy} = \frac{d(\tan(\theta_x-\theta_r)(1-k_r l))}{ds} = \frac{d(1-k_r l)}{ds}\tan(\theta_x-\theta_r)$$

$$= a'b + ab' \quad + \frac{1\cdot(1-k_r l)}{\cos^2(\theta_x-\theta_r)}\cdot\frac{d(\theta_x-\theta_r)}{ds}$$

又: $\frac{d(1-k_r l)}{ds} = -(dk_r l + k_r l')$

$$\frac{d(\theta_x-\theta_r)}{ds} = \frac{d\theta_x}{ds} - \frac{d\theta_r}{ds} = \frac{1-k_r l}{\cos(\theta_x-\theta_r)}\cdot\frac{d\theta_x}{dx} - \frac{d\theta_r}{ds}$$

∴ l'' 可求得

由式8转换得 $v = \frac{\dot s(1-k_r l)}{\cos(\theta_x-\theta_r)}$ $\quad \left(\frac{a}{b}\right)' = \frac{a'b-ab'}{b^2}$

求

$$a = \ddot s\frac{(1-k_r l)}{\cos(\theta_x-\theta_r)} + \dot s\frac{-(dk_r l + k_r l')\cos(\theta_x-\theta_r) + (1-k_r l)\sin(\theta_x-\theta_r)\cdot\frac{d(\theta_x-\theta_r)}{ds}}{\cos^2(\theta_x-\theta_r)}$$

$$= \ddot s\frac{(1-k_r l)}{\cos(\theta_x-\theta_r)} + \dot s\frac{-dk_r l - k_r l' + (1-k_r l)\tan(\theta_x-\theta_r)\cdot\frac{d(\theta_x-\theta_r)}{ds}}{\cos(\theta_x-\theta_r)}$$

3.S-L下的 $s, \dot{s}, \ddot{s}, l, l', l''$ 转化成笛卡尔下的 $x, y, \theta_x, k_x, v, a$

首先，需要在参考线上找到对应 s 的参考点记为 $x_r, y_r, \theta_r, k_r, dk_r$ ，由于车辆与参考点的连线垂直于切线方向，所以：

$$x = x_r - lsin\theta_r$$
$$y = y_r + lcos\theta_r$$