未知目标函数数值积分公式 MATLAB 完备给出与实践

张雨浓，任成坤，金 龙，刘锦荣，殷勇华

（中山大学 信息科学与技术学院，广东 广州 510006）

摘 要： 对于未知的目标函数，在离散采样点上获取其对应的函数值后，由多项式插值理论，即可构造出用于逼近该目标函数的拉格朗日插值多项式，进而对该拉格朗日插值多项式求积分，就可得到该目标函数的多点数值积分近似公式. 基于上述方法，通过 MATLAB 快速求出数值积分公式后，完备地给出了一组等间距条件下的 2～16 个数据点的数值积分公式. 计算机数值实验结果表明，对于未知目标函数，该多点数值积分公式可取得较高的计算精度（如 10^{-16}）.

关键词： 未知目标函数；插值多项式；数值积分；数值实验；计算精度

中图分类号： O241.4 **文献标志码**： A **文章编号**：1004-0366(2013)02-0003-05

Complete Presentation and Practice Via MATLAB on Numerical Integration Formulas for Unknown Target Functions

ZHANG Yu-nong, REN Cheng-kun, JIN Long, LIU Jin-rong, YIN Yong-hua

(*School of Informational Science and Technology, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510006, China*)

Abstract: Via the polynomial-interpolation theory, the Lagrange interpolating polynomial of an unknown target function is constructed by using the corresponding discrete-time values. After that, the approximate numerical integration formulas could be derived by calculating the integration of the Lagrange interpolating polynomial. Based on the above method, MATLAB is applied to obtaining the numerical integration formulas. Then, the equally-spaced integration formulas involving two to sixteen sampling nodes are presented. Numerical experiment results verify that the relatively-high computational accuracy could be obtained by using these numerical integration formulas (e. g. 10^{-16}).

Key words: unknown target function; interpolating polynomial; numerical integration; numerical experiment; computational accuracy

数值积分是用于计算无法直接求得解析解之积分的主要工具[1]，随着计算机的发展，数值积分在大气科学[2]、科学计算[3]、自动控制[4]、人工神经网络[5-7]等应用科学领域发挥着越来越重要的作用.

如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且原函数为 $F(x)$，则可用牛顿 — 莱布尼兹公式[8,9]

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

求其定积分. 然而，在很多情况下，通过解析法找到原函数是很困难的，例如：$(2\int_0^m e^{-x^2}\mathrm{d}x)/\sqrt{\pi}$（$m$ 为有限

收稿日期：2012-12-03

基金项目：国家自然科学基金（61075121 和 60935001）；教育部高等学校博士学科点专项科研基金博导类课题（20100171110045）；国家大学生创新训练项目（201210558042）

作者简介：张雨浓（1973-），男，教授，博士生导师，主要从事科学计算、神经网络和机器人方面的研究工作. E-mail：ynzhang@ieee.org

数)[10]. 此外,即使被积函数能用基本初等函数的形式表示出来,但表达式往往会过于复杂而不便于使用. 特别是在实际问题中,更多的函数是用表格或图形方式表示的,对于此类函数,无法使用牛顿－莱布尼兹公式来求得积分. 因此,为了解决实际生产生活中的问题,有效的数值积分方法的研究是很有应用价值的. 同时,这种数值积分方法也是微分方程和积分方程的数值解法的基础[1,11]. 根据多项式插值理论,对于未知的目标函数,通过构造拉格朗日插值多项式以近似求得该未知函数的逼近表达式[1,12-14],进而可对该拉格朗日插值多项式求积分,从而得到该未知目标函数的多点数值积分近似公式. 基于这种数值积分方法,通过MATLAB快速求出数值积分公式后,完备地给出了一组等间距情况下的 2～16 个数据点的等间距数值积分公式. 计算机数值实验结果表明,通过上述方法得到的该未知目标函数的多点数值积分公式可以取得较高的计算精度,这对工程技术方面有着直接的应用价值.

1 MATLAB 数值积分公式

数值积分的基本思想是通过构造一个简单函数 $P_n(x)$ 来近似被积分函数 $f(x)$,然后通过求 $\int_a^b P_n(x)\mathrm{d}x$ 从而求得 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的近似值. 从多项式插值理论出发,通过构造拉格朗日插值多项式 $P_n(x)$ 可近似求得相应未知目标函数 $f(x)$ 的逼近表达式[1,12-14],即 $f(x)\approx P_n(x)$. 然后,再对 $P_n(x)$ 求积分,可近似得到未知目标函数 $f(x)$ 的数值积分公式,即[1]

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \int_a^b P_n(x)\mathrm{d}x,$$

在实际应用中,数字离散系统往往是等间距地采集数据,即 $x_{i+1}-x_i=h\ (i=0,1,2,\cdots,n)$,其中 $h>0$ 为采样间隔常数[12-14].

定义1 设未知目标函数 $f(x)$ 在等间距离散采样数据点 x_i 处的函数值为 $f(x_i)$, $i=0,1,2,\cdots,n$. 若存在 n 次多项式 $P_n(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 满足条件 $P_n(x_i)=f(x_i)$,则称 $P_n(x)$ 为未知目标函数 $f(x)$ 的 n 次插值多项式[12-14].

引理1 如果 $x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是采样区间 $[a,b]$ 上 $(n+1)$ 个互不相同的数据点,且未知目标函数 $f(x)$ 的 $(n+1)$ 阶导数连续 $(f\in C^{(n+1)}[a,b])$,则对于任一 $x\in[a,b]$,存在 $\zeta\in(a,b)$,使得[12-14]

$$f(x)=P_n(x)+R_{n+1}(x),$$

其中:$P_n(x)$ 为未知目标函数 $f(x)$ 的插值多项式,$R_{n+1}(x)$ 为余项且

$$R_{n+1}(x):=\frac{f^{(n+1)}(\zeta)(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!}.$$

由拉格朗日多项式逼近定理[1] 得

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_{n,k}(x)=\sum_{k=0}^{n} f(x_k)\frac{\prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}(x-x_i)}{\prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}(x_k-x_i)},$$

其中:$L_{n,k}(x)$ 为拉格朗日系数多项式. 根据定义1和引理1,用基于等间距数据点 $x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 $f(x)$ 拉格朗日多项式 $P_n(x)$ 近似被积函数 $f(x)$,令 $x=x_0+ht$, $t\in[0,n]$,则 $\mathrm{d}x=h\mathrm{d}t$,由 $x_i=x_0+hi$ 可得 $x_k-x_i=h(k-i)$ 和 $x-x_i=h(t-i)$,最后得到等间距多点数值积分公式(以下简记 $f(x_k)$ 为 f_k)[1]:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\mathrm{d}x \approx \int_{x_0}^{x_n} P_n(x)\mathrm{d}x=\int_{x_0}^{x_n}\Big(\sum_{k=0}^{n} f_k L_{n,k}(x)\Big)\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{n}\Big(\int_{x_0}^{x_n} L_{n,k}(x)\mathrm{d}x\Big)f_k=$$

$$\sum_{k=0}^{n}\left[\int_{x_0}^{x_n}\frac{\prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}(x-x_i)}{\prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}(x_k-x_i)}\mathrm{d}x\right]f_k=\sum_{k=0}^{n}\left[\int_0^n\frac{\prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}(t-i)}{\prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}(k-i)}\mathrm{d}t\right]hf_k.$$

由于拉格朗日系数多项式 $L_{n,k}(x)$ 的计算过于繁琐,基于以上公式,改变不同的 n 值,通过 MATLAB 程序,可以快速地算出 $\int_0^n \prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}(t-i)/\prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}(k-i)\mathrm{d}t\ (k=0,1,2,\cdots,n)$ 的值,MATLAB 的实现代码如下:

```
%输入:N 为公式所用的点数,此处 N=n+1
%输出:result 为上文 hf_k 的系数
% t 为变量
function result=integration(N)
result=ones(1,N);
syms t;
for k=0:N-1
    numerator=1;
    denominator=1;
    for i=0:N-1
      if k~=i
        numerator=numerator*(t-i);
        denominator=denominator*(k-i);
      end
    end
    result(k+1)=int(numerator,t,0,N-1)/denominator;
end
```

以下给出了2~16个等间距数据点的数值积分公式(更多数据点的数值积分公式也可由上述 MATLAB 程序运行而得),以方便其他理论研究者和工程应用者的各种尝试和探讨.

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\mathrm{d}x \approx h\left(\frac{1}{2}f_0+\frac{1}{2}f_1\right),$$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x \approx h\left(\frac{1}{3}f_0+\frac{4}{3}f_1+\frac{1}{3}f_2\right),$$

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)\mathrm{d}x \approx h\left(\frac{3}{8}f_0+\frac{9}{8}f_1+\frac{9}{8}f_2+\frac{3}{8}f_3\right),$$

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)\mathrm{d}x \approx h\left(\frac{14}{45}f_0+\frac{64}{45}f_1+\frac{8}{15}f_2+\frac{64}{45}f_3+\frac{14}{45}f_4\right),$$

$$\int_{x_0}^{x_5} f(x)\mathrm{d}x \approx h\left(\frac{95}{288}f_0+\frac{125}{96}f_1+\frac{125}{144}f_2+\frac{125}{144}f_3+\frac{125}{96}f_4+\frac{95}{288}f_5\right),$$

$$\int_{x_0}^{x_6} f(x)\mathrm{d}x \approx h\left(\frac{41}{140}f_0+\frac{54}{35}f_1+\frac{27}{140}f_2+\frac{68}{35}f_3+\frac{27}{140}f_4+\frac{54}{35}f_5+\frac{41}{140}f_6\right),$$

$$\int_{x_0}^{x_7} f(x)\mathrm{d}x \approx h\left(\frac{1\,073}{3\,527}f_0+\frac{810}{559}f_1+\frac{343}{640}f_2+\frac{649}{536}f_3+\frac{649}{536}f_4+\frac{343}{640}f_5+\frac{810}{559}f_6+\frac{1\,073}{3\,527}f_7\right),$$

$$\int_{x_0}^{x_8} f(x)\mathrm{d}x \approx h\left(\frac{499}{1\,788}f_0+\frac{1\,183}{712}f_1-\frac{353}{1\,348}f_2+\frac{388}{131}f_3-\frac{1\,317}{1\,028}f_4+\frac{388}{131}f_5-\frac{353}{1\,348}f_6+\frac{1\,183}{712}f_7+\frac{499}{1\,788}f_8\right),$$

$$\int_{x_0}^{x_9} f(x)\mathrm{d}x \approx h\left(\frac{130}{453}f_0+\frac{1\,374}{869}f_1+\frac{243}{2\,240}f_2+\frac{5\,287}{2\,721}f_3+\frac{704}{1\,213}f_4+\frac{704}{1\,213}f_5+\frac{5\,287}{2\,721}f_6+\frac{243}{2\,240}f_7+\right.$$
$$\left.\frac{1\,374}{869}f_8+\frac{130}{453}f_9\right),$$

$$\int_{x_0}^{x_{10}} f(x)\mathrm{d}x \approx h\left(\frac{267}{995}f_0+\frac{4\,323}{2\,435}f_1-\frac{1\,693}{2\,089}f_2+\frac{4\,231}{930}f_3-\frac{2\,946}{677}f_4+\frac{1\,763}{247}f_5-\frac{2\,946}{677}f_6+\frac{4\,231}{930}f_7-\right.$$
$$\left.\frac{1\,693}{2\,089}f_8+\frac{4\,232}{2\,435}f_9+\frac{267}{995}f_{10}\right),$$

$$\int_{x_0}^{x_{11}} f(x)\mathrm{d}x \approx h\left(\frac{308}{1\,123}f_0+\frac{1\,499}{880}f_1-\frac{729}{1\,783}f_2+\frac{1\,899}{596}f_3-\frac{2\,716}{2\,241}f_4+\frac{1\,998}{1\,021}f_5+\frac{1\,998}{1\,021}f_6-\frac{2\,716}{2\,241}f_7+\right.$$
$$\left.\frac{1\,899}{596}f_8-\frac{729}{1\,783}f_9+\frac{1\,499}{880}f_{10}+\frac{308}{1\,123}f_{11}\right),$$

$$\int_{x_0}^{x_{12}} f(x)\mathrm{d}x \approx h\Big(\frac{812}{3\,127}f_0+\frac{799}{424}f_1-\frac{553}{383}f_2+\frac{10\,129}{1\,490}f_3-\frac{1\,019}{104}f_4+\frac{6\,145}{369}f_5-\frac{4\,327}{259}f_6+\frac{6\,145}{369}f_7-\frac{1\,019}{104}f_8+\frac{10\,129}{1\,490}f_9-\frac{553}{383}f_{10}+\frac{799}{424}f_{11}+\frac{812}{3\,127}f_{12}\Big),$$

$$\int_{x_0}^{x_{13}} f(x)\mathrm{d}x \approx h\Big(\frac{373}{1\,411}f_0+\frac{791}{435}f_1-\frac{2\,463}{2\,438}f_2+\frac{1\,064}{211}f_3-\frac{50\,965}{10\,401}f_4+\frac{5\,803}{869}f_5-\frac{826}{593}f_6-\frac{826}{593}f_7+\frac{5\,803}{869}f_8-\frac{50\,965}{10\,401}f_9+\frac{1\,064}{211}f_{10}-\frac{2\,463}{2\,438}f_{11}+\frac{791}{435}f_{12}+\frac{373}{1\,411}f_{13}\Big),$$

$$\int_{x_0}^{x_{14}} f(x)\mathrm{d}x \approx h\Big(\frac{1\,017}{4\,028}f_0+\frac{1\,108}{557}f_1-\frac{2\,579}{1\,196}f_2+\frac{3\,899}{398}f_3-\frac{5\,153}{278}f_4+\frac{3\,145}{89}f_5-\frac{4\,654}{99}f_6+\frac{4\,427}{81}f_7-\frac{4\,654}{99}f_8+\frac{3\,145}{89}f_9-\frac{5\,153}{278}f_{10}+\frac{3\,899}{398}f_{11}-\frac{2\,579}{1\,196}f_{12}+\frac{1\,108}{557}f_{13}+\frac{1\,017}{4\,028}f_{14}\Big),$$

$$\int_{x_0}^{x_{15}} f(x)\mathrm{d}x \approx h\Big(\frac{457}{1\,783}f_0+\frac{1\,145}{594}f_1-\frac{1\,865}{1\,103}f_2+\frac{540}{71}f_3-\frac{2\,734}{241}f_4+\frac{9\,239}{517}f_5-\frac{7\,594}{523}f_6+\frac{318}{43}f_7+\frac{318}{43}f_8-\frac{7\,594}{523}f_9+\frac{9\,239}{517}f_{10}-\frac{2\,734}{241}f_{11}+\frac{540}{71}f_{12}-\frac{1\,865}{1\,103}f_{13}+\frac{1\,145}{594}f_{14}+\frac{457}{1783}f_{15}\Big).$$

2 计算机数值实验

分别选取目标函数 $f(x)=\cos(x)$和 $f(x)=\exp(x)\sin(x)$进行数值实验. 基于上述给出的 2～16 点数值积分公式,可以分别求出目标函数在 8 个不同积分区间上的数值积分值,通过比较和分析数值积分值与真实值之间的相对误差,从而验证数值积分公式的有效性和准确性,实验结果如表 1 和表 2 所列.

表 1　目标函数 $f(x)=\cos(x)$在不同积分区间内取 2～16 个数据点进行积分的相对误差

数据点	[0,0.01]	[0,0.02]	[0,0.05]	[0,0.1]	[0,0.2]	[0,0.5]	[0,1]	[0,2]
2	8.33×10^{-6}	3.33×10^{-5}	2.08×10^{-4}	8.33×10^{-4}	3.33×10^{-3}	2.09×10^{-2}	8.48×10^{-2}	3.58×10^{-1}
3	3.47×10^{-12}	5.56×10^{-11}	2.17×10^{-9}	3.47×10^{-8}	5.56×10^{-7}	2.19×10^{-5}	3.58×10^{-4}	6.29×10^{-3}
4	1.54×10^{-12}	2.46×10^{-11}	9.65×10^{-10}	1.54×10^{-8}	2.47×10^{-7}	9.70×10^{-6}	1.59×10^{-4}	2.76×10^{-3}
5	0	0	7.91×10^{-15}	5.17×10^{-13}	3.31×10^{-11}	8.14×10^{-9}	5.34×10^{-7}	3.79×10^{-5}
6	0	0	4.58×10^{-15}	2.91×10^{-13}	1.86×10^{-11}	4.58×10^{-9}	3.00×10^{-7}	2.13×10^{-5}
7	0	1.73×10^{-16}	1.39×10^{-15}	0	1.54×10^{-15}	2.51×10^{-12}	6.61×10^{-10}	1.89×10^{-7}
8	0	0	0	1.39×10^{-16}	1.11×10^{-16}	1.54×10^{-12}	4.05×10^{-10}	1.57×10^{-7}
9	0	1.73×10^{-16}	1.39×10^{-16}	0	1.39×10^{-16}	5.79×10^{-16}	6.12×10^{-13}	7.02×10^{-10}
10	0	0	1.39×10^{-16}	0	1.39×10^{-16}	4.63×10^{-16}	3.92×10^{-13}	4.49×10^{-10}
11	0	0	1.39×10^{-16}	0	1.39×10^{-16}	1.16×10^{-16}	5.28×10^{-16}	1.97×10^{-12}
12	1.73×10^{-16}	1.73×10^{-16}	1.39×10^{-16}	1.39×10^{-16}	1.39×10^{-16}	0	3.96×10^{-16}	1.30×10^{-12}
13	0	5.20×10^{-16}	4.17×10^{-16}	2.78×10^{-16}	1.39×10^{-16}	4.63×10^{-16}	0	4.27×10^{-15}
14	0	1.73×10^{-16}	0	1.39×10^{-16}	2.79×10^{-16}	1.15×10^{-16}	0	2.68×10^{-15}
15	6.94×10^{-16}	1.38×10^{-15}	1.39×10^{-16}	8.34×10^{-16}	2.09×10^{-15}	6.95×10^{-16}	9.24×10^{-16}	8.55×10^{-16}
16	1.73×10^{-16}	1.73×10^{-16}	2.78×10^{-16}	1.39×10^{-16}	0	3.47×10^{-16}	3.96×10^{-16}	3.66×10^{-16}

从表 1 的实验数据可以看出,目标函数 $f(x)=\cos(x)$在 9 个数据点的数值积分值与实际真实值的相对误差的数量级已经达到 10^{-10}. 值得指出的是,在 MATLAB 计算中,当数值实验区间的计算误差的数量级$<10^{-16}$时,MATLAB 的计算结果直接显示为 0. 尽管随着数据点的增多,误差会出现小范围的波动,但是在 13 个数据点以后,数值积分值与实际真实值的误差数量级都在 10^{-15} 到 10^{-16} 之间,部分数据点的相对误差的数量级因$<10^{-16}$而在 MATLAB 计算中直接显示为 0(表格中粗体表示相对误差最小值). 总而言之,随着等间距采样数据点的增多,数值计算精度会相应地提高.

从表 2 的实验数据可以看出,通过 2～16 点数值积分公式得到的结果具有较高的准确性,如在 10～16 个数据采样点所取得积分值的相对误差数量级在 $10^{-9}\sim10^{-16}$之间,而误差往往在 14～16 个等间距点之间

取得最小值,即随着采样数据点的增多,实验数值积分值的误差逐渐减小.上述结果表明,我们得到的等间距数据点的数值积分公式是有效的,即通过数值积分公式得到的结果具有较高的准确性.

表 2　目标函数 $f(x)=\exp(x)\sin(x)$ 在不同积分区间内取 2～16 个数据点进行积分的相对误差

数据点	[0,0.01]	[0,0.02]	[0,0.05]	[0,0.1]	[0,0.2]	[0,0.5]	[0,1]	[0,2]
2	3.33×10^{-3}	6.64×10^{-3}	1.65×10^{-2}	3.28×10^{-2}	6.42×10^{-2}	$1.50\times10-1$	$2.58\times10-1$	$2.44\times10-1$
3	1.54×10^{-11}	2.22×10^{-10}	8.63×10^{-9}	1.37×10^{-7}	2.17×10^{-6}	8.21×10^{-5}	1.25×10^{-3}	1.99×10^{-2}
4	7.65×10^{-12}	9.86×10^{-11}	3.84×10^{-9}	6.10×10^{-8}	9.67×10^{-7}	3.67×10^{-5}	5.66×10^{-4}	9.00×10^{-3}
5	1.49×10^{-12}	2.72×10^{-14}	2.54×10^{-12}	8.12×10^{-11}	2.55×10^{-9}	2.33×10^{-7}	6.51×10^{-6}	1.28×10^{-4}
6	1.49×10^{-12}	1.56×10^{-14}	1.42×10^{-12}	4.58×10^{-11}	1.43×10^{-9}	1.32×10^{-7}	3.66×10^{-6}	7.09×10^{-5}
7	1.49×10^{-12}	8.02×10^{-16}	2.08×10^{-14}	2.11×10^{-15}	2.51×10^{-14}	3.73×10^{-11}	9.08×10^{-9}	2.28×10^{-6}
8	1.49×10^{-12}	8.02×10^{-16}	2.08×10^{-14}	2.27×10^{-15}	1.54×10^{-14}	2.29×10^{-11}	5.58×10^{-9}	1.41×10^{-6}
9	1.49×10^{-12}	9.36×10^{-16}	2.10×10^{-14}	2.27×10^{-15}	3.04×10^{-16}	6.67×10^{-14}	2.98×10^{-11}	9.82×10^{-9}
10	1.49×10^{-12}	9.36×10^{-16}	2.11×10^{-14}	2.11×10^{-15}	1.52×10^{-16}	4.30×10^{-14}	1.91×10^{-11}	6.26×10^{-9}
11	1.49×10^{-12}	1.33×10^{-15}	2.08×10^{-14}	1.94×10^{-15}	3.04×10^{-16}	1.62×10^{-16}	2.30×10^{-14}	9.34×10^{-11}
12	1.49×10^{-12}	1.06×10^{-15}	2.08×10^{-14}	2.27×10^{-15}	3.04×10^{-16}	3.23×10^{-16}	1.51×10^{-14}	6.15×10^{-11}
13	1.49×10^{-12}	8.02×10^{-16}	2.00×10^{-14}	2.43×10^{-15}	6.08×10^{-16}	1.62×10^{-16}	4.88×10^{-16}	2.44×10^{-13}
14	1.49×10^{-12}	8.02×10^{-16}	2.08×10^{-14}	2.27×10^{-15}	3.04×10^{-16}	3.23×10^{-16}	1.22×10^{-16}	1.62×10^{-13}
15	1.49×10^{-12}	4.01×10^{-16}	2.06×10^{-14}	2.24×10^{-15}	3.04×10^{-16}	1.13×10^{-15}	1.22×10^{-16}	1.97×10^{-15}
16	1.49×10^{-12}	9.36×10^{-16}	2.13×10^{-14}	1.62×10^{-15}	0	1.61×10^{-16}	3.66×10^{-16}	1.32×10^{-15}

3　结论

等间距数值积分公式的运用已经渗透到科学计算与工程实践中的各个方面,由于采样数据点过少,传统意义上的梯形公式、辛普森公式和布尔公式[1,15]在实际工程领域(如观测采样点较多时)往往无法得到很好的应用,这给工程的进一步发展与实践带来不必要的限制.而多数据点的积分公式就是在此背景下面提出的,对等间距点的拉格朗日多项式进行积分得到了未知目标函数数值积分公式,并运用 MATLAB 软件准确求出各个积分公式多项式的系数.计算机数值实验表明,用于未知目标函数的多点数值积分公式可以取得较高的计算精度.

参考文献:

[1] Mathews J H, Fink K D. Numerical Methods Using MATLAB[M]. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2004.

[2] 辜旭赞,张兵,王明欢.基于三次插值函数算法的时间积分方案与二阶时空余差数值模式——以原始大气运动方程与理想全球模拟个例为例[J].热带气象学报,2011,27(5):669-678.

[3] 张雨浓,陈宇曦,付森波,等.牛顿方法的用导一致性[J].甘肃科学学报,2012,24(2):5-8.

[4] 富兰克林 G F,鲍威尔 J D,那诶尼 A E.自动控制原理与设计[M].李中华,张雨浓,译.第 5 版.北京:人民邮电出版社,2007.

[5] Zhang Y N, Jin L, Guo D S. Three Nonlinearly-Activated Discrete-Time ZNN Models for Time-Varying Matrix Inversion[C]//2012 8th International Conference on Natural Computation, Chongqing, China, 2012: 163-167.

[6] Zhang Y N, Yi C F, Guo D S, *et al*. Comparison on Zhang Neural Dynamics and Gradient-based Neural Dynamics for Online Solution of Nonlinear Time-varying Equation[J]. Neural Comput & Applic, 2011, 20: 1-7.

[7] 张雨浓,杨逸文,李巍.神经网络权值直接确定法[M].广州:中山大学出版社,2010.

[8] John Bird, Cmath. Higher Engineering Mathematics[M]. Netherlands: Elsevier Ltd, 2010.

[9] 李忠,周建莹.高等数学[M].北京:北京大学出版社,2009.

[10] 王伯年,王宏广.误差函数计算方法研究[J].上海理工大学学报,2004,24(6):529-532.

[11] 李炳钊.数学分析基础[M].上海:同济大学出版社,2002.

[12] 张雨浓,郭东生,徐思洪,等.未知函数之一阶数值微分公式验证与实践[J].甘肃科学学报,2009,21(1):13-18.

[13] 张雨浓,陈宇曦,陈锦浩,等.一点超前数值差分公式的提出、研究与实践[J].中山大学学报,2012,51(2):1-5.

[14] 张雨浓,侯占伟,郭东生.基于前向差分的一阶数值微分公式验证与实践[J].数学的实践与认识,2012,42(3):199-204.

[15] 易大义,陈道琦.数值分析引论[M].杭州:浙江大学出版社,1998.