ODE中间点解法-数值实验报告

数据科学与计算机学院（软件工程） 郑卓民 18342138

实验内容：

给定常微分方程(ODE)，求解某处对应的原方程解。一阶常微分方程形式如下：

$$\begin{cases}\frac{dy}{dx}=f(x,y)\\ y\left(x_0\right)=y_0\end{cases}$$

实验原理：

1. 对于一阶方程初值问题的数值解法。它是寻求解曲线y(x)在一系列离散节点上的准确值的近似值。
2. 初值问题的数值解法有个基本特点，他们都是采用“步进式”，即求解过程顺着节点排列的次序一步一步地向前推进。也即是：只要给出已知信息前n个点的取值，就能计算出第n+1个点的取值（首先计算递推公式，后代入数值。）
3. ODE的典型解法有欧拉方法、休恩方法、中间点方法(RK2)和龙格库塔方法。

实验过程：

> 本实验主要讨论中间点方法。

首先我们可知道，中间点方法的数值计算通式为：

- $y_{i+1/2}=y_i+f\left(t_i, y_i\right) \frac{h}{2}$
- $y_{i+1/2}^{\prime}=f\left(t_{i+1/2}, y_{i+1/2}\right)$
- $y_{i+1}=y_i+f\left(t_{i+1/2}, y_{i+1/2}\right) h$

我们不妨利用一个实例来更好地理解中间点方法：

> 对于ODE为 $y^{\prime}=t^2-y$，初值为 $y(0)=1$，分别以步长为 $h=0.1$和 $h=0.2$，并用中间点方法求解 $y(0.4)$，得到递推值后与真实值比较，算得误差。（其中原方程为：$y(t)=-e^{-t}+t^2-2t+2$
> ）

首先对$h=0.2$的情况进行求解：

$y_0=y_{(0)}=1$

$y_{0+\frac{1}{2}}=y(0.1)=y_0+f\left(t_0, y_0\right) \frac{h}{2}=1+(0-1)\times 0.1=0.9$

$y_1=y(0.2)=y(0)+f\left(t_{\frac{1}{2}}, y_{\frac{1}{2}}\right)\cdot h=1+(0.01-0.9)\cdot 0.2=0.8220$

$y_{1+\frac{1}{2}}=y(0.3)=y_1+f\left(t_1, y_1\right) \frac{h}{2}=0.822+(0.04-0.822)\times 0.1=0.7438$

$y_2=y(0.4)=y(1)+f\left(t_{\frac{3}{2}}, y_{\frac{3}{2}}\right)\cdot h=0.822+(0.09-0.7438)\cdot 0.2=0.6912$

对于$y(0.4)$的真实值：

$y(0.4)=-e^{-0,4}+(0.4)^2-2\times 0.4+2=0.689679954$

计算误差得：

$E=|y_M-y_2|=|0.6912-0.6897|=0.0015$

结合作业中使用欧拉方法算得的结果误差（$E=0.0202$），中间点方法的误差小了很多。

对$h=0.1$的情况进行求解：

$y_0=y_{(0)}=1$

$y_{0+\frac{1}{2}}=y(0.05)=y_0+f\left(t_0,y_0\right)\frac{h}{2}=1+(0-1)\times 0.05=0.9500$

$y_1=y(0.1)=y_0+f\left(t_{\frac{1}{2}},y_{\frac{1}{2}}\right)\cdot h=1+\left(0.05^2-0.9500\right)\cdot 0.1=0.9052$

$y_{1+\frac{1}{2}}=y(0.15)=y_1+f\left(t_1,y_1\right)\frac{h}{2}=0.9052+(0.1^2-0.9052)\times 0.05=0.86044$

$y_2=y(0.2)=y_1+f\left(t_{\frac{3}{2}},y_{\frac{3}{2}}\right)\cdot h=0.9052+\left(0.15^2-0.86044\right)\cdot 0.1=0.821406$

$y_{2+\frac{1}{2}}=y(0.25)=y_2+f\left(t_2,y_2\right)\frac{h}{2}=0.821406+(0.2^2-0.821406)\times 0.05=0.7823357$

$y_3=y(0.3)=y_2+f\left(t_{\frac{5}{2}},y_{\frac{5}{2}}\right)\cdot h=0.821406+\left(0.25^2-0.7823357\right)\cdot 0.1=0.74942243$

$y_{3+\frac{1}{2}}=y(0.35)=y_3+f\left(t_3,y_3\right)\frac{h}{2}=0.74942243+(0.3^2-0.74942243)\times 0.05=0.7164513085$

$y_4=y(0.4)=y_3+f\left(t_{\frac{7}{2}},y_{\frac{7}{2}}\right)\cdot h=0.74942243+\left(0.35^2-0.7164513085\right)\cdot 0.1=0.69002729915$

计算误差得：

$E=|y_M-y_4|=|0.69002729915-0.689679954|=3.4734515E-04$

结合作业中使用欧拉方法算得的结果误差（$E=0.04168$），中间点方法的误差同样小了更多。

实验总结：

通过本次数值实验，对ODE的数值计算有了更深的理解，所有的计算解法都可归结为采用“步进式”的一个递推通式，随着阶数的提高，或者计算步长的缩短，预测同样点的计算次数相应会增加，相应的递推结果也更加贴近真实值。