距离空间：一致拓扑

2019年1月14日 星期一 下午10:30

Def. (X,ρ). (Y,ρ'). 所谓映象 $f: X\to Y$ 一致连续. 意指

$\forall \varepsilon>0.\ \exists \delta>0.\ \forall \rho(x,x')<\delta.\ \rho'(f(x), f(x'))<\varepsilon$

若 (X,ρ) 到 (Y,ρ') 的映象 $f: X\to Y$ 一致连续. 则关于 $(X,\mathcal{O}_\rho)$ 与 $(Y,\mathcal{O}_{\rho'})$ 来说. f 是连续的

Def (X,ρ). (Y,ρ'). 若 $f: X\to Y$ 为双射. f, f^{-1} 都一致连续

则 (X,ρ) 与 (Y,ρ') 一致同胚

Def. (X,ρ). (Y,ρ'). 若 (X,ρ) 紧. $f: X\to Y$ 连续. 则

$f: X\to Y$ 一致连续

Pf. f 连续. $\forall \varepsilon>0.\ \exists \delta=\delta(x,\varepsilon)>0.$ s.t.

$f(V_\rho(x,\delta))\subset V_{\rho'}(f(x), \varepsilon/2)$. 又因 X 紧.

$\therefore$ $\exists$ 有限个点 $x_1 \cdots x_n$. s.t. $X=\bigcup_{x\in X} V_\rho(x_i, \delta(\varepsilon, x_i)/2)$

$\therefore$ 取 $\delta=\min\{\delta(\varepsilon,x_1)/2, \cdots \delta(\varepsilon,x_n)/2\}$. 那么只要

$\rho(x,x')<\delta$. 就有 $\rho'(f(x), f(x'))<\varepsilon$ #

Def. $\{x_n\}\subset(X,\rho)$ 为基本点列. 意指

$\forall \varepsilon>0.\ \exists n_0.\ \forall m, n\geq n_0.\ \rho(x_m, x_n)<\varepsilon$

Def. 若 (X,ρ) 中的所有基本点列都收敛. 则

称 (X,ρ) 为完备的

THM. (X,ρ) 完全有界 $\Leftrightarrow$ X 的任意无限子集合至少有一个基本点列 $\{x_n\}$

THM. (X,ρ) 为紧 $\Leftrightarrow$ (X,ρ) 完全有界且完备

完备化定理 (X,ρ) 任意距离空间. $\exists$ 完备距离空间 (X^*, ρ^*):

(i) $\exists$ 单射 $\varphi: X\to X^*$. 且 $\rho(x,x')=\rho^*(\varphi(x), \varphi(x'))$

(ii) $\overline{\varphi(X)}=X^*$

(iii) (X^*, ρ^*) 唯一

这时称 (X^*, ρ^*) 为 (X,ρ) 的完备化空间

Pf. 仿照 Cantor 由 $\mathbb{Q}$ 构造 $\mathbb{R}$ 的方法

记 (X,ρ) 中所有基本点列全体 $\mathscr{X}$. 对于 $\xi=\{x_n\}, \eta=\{y_n\}$. 若 $\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n)=0$.

则命 $\xi\sim\eta$. $\mathscr{X}$ 的商集合记为 $X^*=\mathscr{X}/\sim$. $\rho^*(\tilde{\xi},\tilde{\eta})=\lim\rho(x_n,y_n)$.

可证 (X^*, ρ^*) 为完备距离空间

Baire THM 完备距离空间 $(X,\mathcal{O})$ 是 Baire 空间

Pf. 设 $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$. $\overline{E_n}^{\circ}=\phi\ (n=1,2\ldots)$ 为 X 的第1类集合. 现在要证 $X-E$ 处处稠密

只要证 $\forall x\in X$. $V(x,\varepsilon)$ 中必含有 $X-E$ 中的点 $(\varepsilon>0)$

$V(x,\varepsilon')$ $(0<\varepsilon'<\varepsilon)$ 必含 $\{E_n\}$ 中某一个集的点 (否则 $V(x,\varepsilon')$ 必含 $X-E$ 中点)

不妨设 $V(x,\varepsilon')$ 含有 E_1 的点. 设 $x_1\in V(x,\varepsilon')-\overline{E_1}$. 由于 E_1 疏.

$\exists \varepsilon_1>0.$ $\overline{V(x_1,\varepsilon_1)}\subset V(x,\varepsilon')-\overline{E_1}$, $\varepsilon_1<\frac{\varepsilon'}{2}$

同理. $\exists \varepsilon_2>0.$ $\overline{V(x_2,\varepsilon_2)}\subset V(x_1,\varepsilon_1)-\overline{E_2}$, $\varepsilon_2<\frac{\varepsilon_1}{2}$

$\cdots$ $\overline{V(x_n,\varepsilon_n)}\subset V(x_{n-1},\varepsilon_{n-1})-\overline{E_n}$ $\varepsilon_n<\frac{\varepsilon'}{2n}$

注意到 $x_1, x_2\cdots x_n\cdots$ 是基本列. $\lim_{n\to\infty}x_n=y$

$y\in\overline{V(x_n,\varepsilon_n)}\longrightarrow y\in X-E$