距离空间：收敛

2019年1月14日 星期一 下午7:55

Def. (X,ρ) 距离空间. $(x_1, x_2 \cdots x_n \cdots)$ 收敛于 x
意指 $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$. 记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$

Def. 在 X 中有两个距离函数 ρ, ρ'. 距离空间 (X,ρ), (X,ρ') 定义
同一拓扑空间的充要条件是
$\forall \varepsilon>0$, 必有 $\delta>0$ (及 $\delta'>0$). s.t. $\rho(x,y)<\delta \Rightarrow \rho'(x,y)<\varepsilon$
$(\rho'(x,y)<\delta' \Rightarrow \rho(x,y)<\varepsilon)$

THM. (X,ρ). $E\subset X$
(i) $x\in \overline{E} \iff \exists\{y_n\}\subset E$, $\lim y_n = x$
(ii) $x\in E^d \iff \exists\{y_n\}\subset E$ $(y_n\neq x)$ $\lim y_n = x$
(iii) $x\in E^r \iff x\in \overline{E}$ & $x\in \overline{X-E}$
(iv) $x\in E^o \iff$ 若 $\lim y_n = x$ $(y_n\in X)$. 则 $\exists n_0$, $\forall n>n_0$, $y_n\in E$

Def. (X,ρ). $\exists$ 处处稠密的可数集 A. 则 (X,ρ) 可分
THM. 在距离空间. 可分与满足第二可数公理等价
Pf. "$\Rightarrow$" $A=\{a_1, a_2 \cdots\}$. $\overline{A}=X$.
取 $O_{i,r} = V(a_i, r)$ $(r\in\mathbb{Q})$.
则 $\{O_{i,r};\ i=1,2\cdots,\ r\in\mathbb{Q}\}$ 是 $\mathcal{O}_\rho(X)$ 的可数基底

"$\Leftarrow$". $(X,\mathcal{O})$ 满足第二可数公理. $\mathcal{B}(\mathcal{O}) = \{O_n;\ n=1,2\cdots\}$.
取任意 $a_n\in O_n$. $A=\{a_1, a_2 \cdots a_n\}$. $\overline{A}=X$

Def. (X,ρ). $\forall\varepsilon>0$. $\exists$ 有限个 $x_1, \cdots x_n$
s.t. $X = V(x_1,\varepsilon)\cup\cdots\cup V(x_n,\varepsilon)$. 称 (X,ρ) 完全有界
或完全紧

THM. 紧距离空间为完全有界. 而完全有界的距离空间必可分
Pf. $X = \bigcup\limits_{x\in X} V(x,\varepsilon) = \bigcup\limits_{n=1}^{N} V(x_n,\varepsilon)$. 完全有界
(X,ρ) 完全有界. $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n_r} V(x_i^{(r)}, r)$. $(r\in\mathbb{Q})$.
$\therefore$ 对于可数集合 $A=\{x_i^{(r)};\ r\in\mathbb{Q},\ i=1,2,\cdots n\}$. $\overline{A}=X$

Fréchet THM 距离空间 (X,ρ) 为紧 $\iff$ 对于任意(可数)的无限集合 $A(\subset X)$
至少有一个聚点(在 X 中)

Pf. "$\Rightarrow$" (X,ρ) 紧空间. 设可数集合 $A=\{a_1,a_2\cdots\}$ 没有聚点. 则 $A_k=\{a_k, a_{k+1}\cdots\}$
都是闭集合. 且 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k = \phi$. 与 (X,ρ) 是紧矛盾!
"$\Leftarrow$" 设任意无限集合至少有一个聚点. 则 X 是完全有界的
[否则 $\exists\varepsilon>0$. 取出 $\{x_k;\ k=1,2\cdots\}$, s.t $\rho(x_i,x_j)>\varepsilon$, 无聚点]
因而 X 是可分的. 因而满足第二可数公理.
设 X 的任意开覆盖. $X=\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$. $\exists$ 可数开子覆盖
s.t. $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} O_{\lambda_m}$. 若 $X\neq \bigcup\limits_{n=1}^{k} O_{\lambda_m}$ $(k=1,2\cdots)$. 取 $a_k\in X$. 但
$a_k \overline{\in} \bigcup\limits_{n=1}^{k} O_{\lambda_m}$. 则 $A=\{a_k;\ k=1,2\cdots\}$ 无聚点. 矛盾

Bulzano-Weierstrass THM (i) $\mathbb{R}$ 的有界闭区间是紧的
(ii) $\mathbb{R}^n$ 的有界闭区间是紧的
(iii) $\mathbb{R}^n$ 的子集合 A 为紧 $\iff$ A 为有界闭集