测度

2019年1月23日 星期三 下午9:49

Def.（可加性） $E \in \mathbb{E}$. $F \in \mathbb{E}$. $E \cup F \in \mathbb{E}$ 且 $E \cap F = \phi$

$\Rightarrow \mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F)$

Def.（有限可加性） μ 是定义在集类 $\mathbb{E}$ 上的广义实值集函数.

若对于 $\mathbb{E}$ 的任何不相交有限子类 $\{E_1, E_2 \cdots E_n\}$. 若它的并集也在 $\mathbb{E}$ 中.

有 $\mu(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i)$

则称 μ 具有有限可加性

Def.（可列可加性） μ 是定义在集类 $\mathbb{E}$ 上的广义实值集函数.

若对于 $\mathbb{E}$ 中之集的任何不相交序列 $\{E_n\}$. 若它的并集也在 $\mathbb{E}$ 中.

有 $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$

则称 μ 具有可列可加性

Def.（测度） 设 μ 是定义在环 R 上的非负广义实值集函数

如果它具有可列可加性，并且 $\mu(\phi) = 0$. 则称 μ 为测度

Def.（完全测度） μ 是一个测度. 若满足：

若 $E \in R$. $F \subset E$. 且 $\mu(E) = 0$. 则 $F \in R$.

则称 μ 为完全测度

Def.（单调） 设 μ 是定义在集类 $\mathbb{E}$ 上的广义实值集函数. 若满足：

若 $E \in \mathbb{E}$，$F \in \mathbb{E}$ 且 $E \subset F$. 则 $\mu(E) \le \mu(F)$

则称 μ 是单调的

Def.（可减性） 设 μ 是定义在集类 E 上的广义实值集函数，若满足：

若 $E \in \mathbb{E}$. $F \in \mathbb{E}$. $E \subset F$. $F - E \in \mathbb{E}$. 且 $|\mu(E)| < \infty$

则 $\mu(F - E) = \mu(F) - \mu(E)$

则称 μ 具有可减性

THM. μ 是环 R 上的测度. μ 具有单调性和可减性

THM. μ 是环 R 上的测度. $E \in R$. $\{E_i\}$ 是 R 中之集的有限或可列类.

并且 $E \subset \bigcup_i E_i$. 则 $\mu(E) \le \sum_i \mu(E_i)$

Pf. 事实：若 $\{F_i\}$ 是环 R 中之集的任意序列. 则存在 R 中不相交集的序列 $\{G_i\}$

使得 $G_i \subset F_i$. 且 $\bigcup_i G_i = \bigcup_i F_i$

（令 $G_i = F_i - \bigcup\{F_j : 1 \le j < i\}$）

对 $\{E \cap E_i\}$ 应用这个事实.

$E \subset \bigcup_i E_i$ $\quad E = \bigcup_i (E \cap E_i)$

$\exists \{G_i\}$. $G_i \subset E \cap E_i$. $\quad E = \bigcup_i G_i$

$\mu(E) = \sum_i \mu(G_i) \le \sum_i \mu(E \cap E_i) \le \sum_i \mu(E_i)$ #

THM. μ 是环 R 上的测度. $E \in R$. $\{E_i\}$ 是 R 中不相交集合的有限或可列类.

并且 $\bigcup_i E_i \subset E$. 则 $\sum_i \mu(E_i) \le \mu(E)$

Pf. $\bigcup_i E_i \in R$.

$\mu(\bigcup_i E_i) = \sum_i \mu(E_i) \le \mu(E)$ #

THM. μ 是环 R 上的测度. 如果 $\{E_n\}$ 是 R 中之集的增序列

并且 $\lim_n E_n \in R$. 则 $\mu(\lim_n E_n) = \lim_n \mu(E_n)$

Pf. 令 $E_0 = \phi$. 则

$\mu(\lim_n E_n) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i - E_{i-1}) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) - \mu(E_{i-1})$

$= \lim_n \mu(E_n)$ #

THM. μ 是环 R 上的测度. 如果 $\{E_n\}$ 是 R 中之集的减序列.

这个序列至少有一项具有有限测度. 并且 $\lim_n E_n \in R$. 则

$\mu(\lim_n E_n) = \lim_n \mu(E_n)$