拓扑空间：映象,同胚,连通

2019年1月13日 星期日 下午8:45

X，给出一个集合族 $\mathcal{O}(X)$ $(\subset \mathcal{P}(X))$，满足 OI. OII. OIII
满足 $x\in O\subset U$ （$O\in\mathcal{O}(X)$）的所有 U $(\subset X)$
的全体 $\mathcal{U}(x)$

$\mathcal{U}(x)$ 满足 UI. UII. UIII. UIV. 且 $\mathcal{U}(x)$ 导出的开集族与 $\mathcal{O}(X)$ 一致
$\therefore$ X 的拓扑由给出 $\mathcal{O}(X)$ 给定（邻域系公理 $\Rightarrow$ 开集公理）

Def. $(X,\mathcal{U})$，$(Y,\mathcal{U}')$。 $f: X\to Y$ 在点 x 连续指
$$f^{-1}(\mathcal{U}(f(x)))\subset\mathcal{U}(x)$$

THM $(X,\mathcal{O}(X))$，$(Y,\mathcal{O}(Y))$。
$f: X\to Y$ 连续 $\Leftrightarrow f^{-1}(\mathcal{O}(Y))\subset\mathcal{O}(X)$

Pf. "$\Rightarrow$" $O'\in\mathcal{O}(Y)$， $O=f^{-1}(O')$
$\forall x\in O$， $f(x)\in O'$， $O'\in\mathcal{U}(f(x))$
$O=f^{-1}(O')\in\mathcal{U}(x)$
$\therefore$ $O\in\mathcal{O}(X)$

"$\Leftarrow$". $\forall x\in X$， $U'\in\mathcal{U}(f(x))$， $f(x)\in O'\subset U'$
$f^{-1}(f(x))\in f^{-1}(O')\subset f^{-1}(U')$
$x\in f^{-1}(O')\subset U$
$f^{-1}(O')\in\mathcal{O}(X)$， $U\in\mathcal{U}(x)$
$\therefore$ $f: X\to Y$ 是连续映射 #

Def. 在两拓扑空间 $(X,\mathcal{O}(X))$，$(Y,\mathcal{O}(Y))$ 中，
若存在双射 $f: X\to Y$， f，f^{-1} 连续，
则称 $(X,\mathcal{O}(X))$ 与 $(Y,\mathcal{O}(Y))$ 为同胚

Def. $(X,\mathcal{O})$，$(X,\mathcal{O}')$
$1_X: (X\to\mathcal{O})\to(X,\mathcal{O}')$ 连续 $\triangleq$ $(X,\mathcal{O})$ 比 $(X,\mathcal{O}')$ 强

拓扑空间的构成

Def. X. $(Y,\mathcal{O}(Y))$， $f: X\to Y$。
令 $\mathcal{O}(X)=f^{-1}(\mathcal{O}(Y))$， 那么 $\mathcal{O}(X)$ 必满足 OI. OII. OIII.
$(X,\mathcal{O}(X))$ 称为从 $(Y,\mathcal{O}(Y))$ 由 f 诱导的连续映象
此时 $f: X\to Y$ 为连续映象

Def. $(Y,\mathcal{O}(Y))$. $X\subset Y$. $\iota: X\to Y$ 恒等映象
$\mathcal{O}(X)=\iota^{-1}\mathcal{O}(Y)=\{X\cap O;\ O\in\mathcal{O}(Y)\}$
$(X,\mathcal{O}(X))$ 称为 $(Y,\mathcal{O}(Y))$ 的拓扑子空间

Def. $(X,\mathcal{O}(X))$，$(Y,\mathcal{O}(Y))$， $Z=X\times Y$
令 $\mathcal{O}^*(Z)=\{pr_X^{-1}(A)\cap pr_Y^{-1}(B)=A\times B;\ A\in\mathcal{O}(X),\ B\in\mathcal{O}(Y)\}$
$\mathcal{O}(Z)=\{\bigcup_{\lambda\in\Lambda}O_\lambda^*;\ O_\lambda^*\in\mathcal{O}^*(Z)\}$
$(Z,\mathcal{O}(Z))$ 称为 $(X,\mathcal{O}(X))$ 与 $(Y,\mathcal{O}(Y))$ 的直积拓扑空间
$pr_X: Z\to X$ 及 $pr_Y: Z\to Y$ 为连续映射

Def. $(X,\mathcal{O}(X))$， $f: X\to Y$， $f(X)=Y$
$\mathcal{O}(Y)=\{B;\ B\subset Y,\ f^{-1}(B)\in\mathcal{O}(X)\}$
$(Y,\mathcal{O}(Y))$ 为商拓扑空间

连通

Def. $(X,\mathcal{O}(X))$ 连通意指
$\nexists O_1,O_2\in\mathcal{O}(X)$， 满足 $X=O_1\cup O_2$， $O_1\cap O_2=\phi$

Def. $A\subset X$， $(X,\mathcal{O}(X))$。若 $(A,\mathcal{O}(A))$ 连通，则称 A 连通

THM (i) $A_1,A_2\subset(X,\mathcal{O}(X))$， A_1，A_2 连通，
$A_1\cap A_2\neq\phi$， 则 $A_1\cup A_2$ 连通

(ii) A_λ $(\lambda\in\Lambda)$ 连通， $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ 连通

(iii) A 连通， $\bar{A}$ 连通

Def. $(X,\mathcal{O}(X))$， 所有含点 x 的连通集的并集一定是含 x 的最大连通集，称之为含 x 的成分
$(X,\mathcal{O}(X))$ 中任两个成分或者重合，或者不相交

Def. $(X,\mathcal{O}(X))$， $I=[0,1]$ 的连续映象 $f: I\to X$ 的象 $f(I)$ 称为 X 上的弧。
若 X 中任意两点都可以连成弧，则称 X 为弧状连结