距离空间：构造

2019年1月15日 星期二　　下午1:33

n维 Euclid空间 $\mathbb{R}^n$ 可以定义若干互不相同的距离函数

(i) 无穷范数 $\rho^{(\infty)}(x, y) = \|x-y\|_\infty$. $\|x\|_\infty = \max\limits_{i=1,2,\cdots,n} |x_i|$.

(ii) 1-范数 $\rho^{(1)}(x, y) = \|x-y\|_1$. $\|x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$

(iii) 2-范数 $\rho^{(2)}(x, y) = \|x-y\|_2$. $\|x\|_2 = \left\{\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2\right\}^{1/2}$

(iv) p-范数 $\rho^{(p)}(x, y) = \|x-y\|_p$　$\|x\|_p = \left\{\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p\right\}^{1/p}$

Hölder不等式　$\left|\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \le \left\{\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p\right\}^{1/p} \left\{\sum\limits_{i=1}^{n} |y_i|^q\right\}^{1/q}$ $\left(p, q > 1,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$

Minkowski不等式　$\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right\}^{1/p} \le \left\{\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p\right\}^{1/p} + \left\{\sum\limits_{i=1}^{n} |y_i|^p\right\}^{1/p}$ $(1 \le p \le +\infty)$

Banach空间　X

(i) X中定义加法 $x+y$ 及数积 λx ($\lambda \in \mathbb{R}$). X是向量空间)

(ii) $\forall x$. $\exists$范数 $\|x\| \in \mathbb{R}$. 满足

(a) $\|x\| \ge 0$. $\|x\| = 0 \iff x = 0$

(b) $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$

(c) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.

取 $\rho(x, y) = \|x-y\|$. (X, ρ)为距离空间

(iii) (X, ρ)完备

Hilbert空间　X

(i) X为向量空间 ($\lambda \in \mathbb{R}$)

(ii) $x, y \in X$. 定义内积 $(x, y) \in \mathbb{R}$

(a) $(x, y) \ge 0$.　$(x, x) = 0 \iff x = 0$

(b) $(x, y) = (y, x)$

(c) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$

(d) $(\lambda x, y) = \lambda (x, y)$

取 $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.　$\rho(x, y) = \|x-y\|$

(iii) (X, ρ)完备