测度：Euclid空间上的测度

2019年1月17日 星期四　　下午5:01

$X=\mathbb{R}$ 时，在 $\mathcal{R}^1=K(\mathcal{F}^1)$ 上有Jordan测度 v_1

$X=\mathbb{R}^n$ 时，在 $\mathcal{R}^n=K(\mathcal{F}^n)$ 上有Jordan测度 v_n

若证明了它有完全加法性，那么Euclid空间可以构成特殊的Lebesgue测度

THM. $\mathbb{R}^n$ 的集合体 $\mathcal{R}^n=K(\mathcal{F}^n)$ 上的测度 v_n，在 $\mathcal{R}^n$ 上具有完全可加性

Pf. 为了简化起见，只讨论 $n=2$ 的情形

(a) 设有界区间 $I=[a_1,a_2;b_1,b_2)$，$I_r=[a_1^{(r)},a_2^{(r)};b_1^{(r)},b_2^{(r)})$

$$I=\bigcup_{r=1}^{\infty} I_r,\quad I_i\cap I_j=\phi,\quad \text{则有 } v(I)=\sum_{r=1}^{\infty} v(I_r)$$

这是由于 $\forall \varepsilon>0$，若令 $I^{\varepsilon}=[a_1,a_2;b_1-\varepsilon,b_2-\varepsilon)$，$I_r^{\varepsilon}=[a_1^{(r)}-\varepsilon/2^{r+2},a_2^{(r)}-\varepsilon/2^{r+2};b_1^{(r)},b_2^{(2)})$

则有 $v(I^{\varepsilon})\geq v(I)-4\varepsilon l\quad (l=\delta(I))$

$$v(I_r^{\varepsilon})\leq v(I_r)+\varepsilon l/2^r$$

另一方面，$\overline{I^{\varepsilon}}$ 是有界闭集合，从而紧，因 $(I_r^{\varepsilon})^{\circ}$ 开，且 $\overline{I^{\varepsilon}}\subset I=\bigcup_{r=1}^{\infty} I_r\subset\bigcup_{r=1}^{\infty}(I_r^{\varepsilon})^{\circ}$，

由紧性定义知，$\exists N<+\infty$，s.t. $I^{\varepsilon}\subset\bigcup_{r=1}^{N} I_r^{\varepsilon}$

$$\therefore\ v(I)-4\varepsilon l\leq v(I^{\varepsilon})\leq\sum_{r=1}^{N}v(I_r^{\varepsilon})\leq\sum_{r=1}^{\infty}v(I_r)+\varepsilon l\sum_{r=1}^{\infty}2^{-r}$$

$$\therefore\ v(I)\leq\sum_{r=1}^{\infty}v(I_r)\quad \varepsilon\to 0$$

$$v(I)\geq\sum_{r=1}^{\infty}v(I_r)\quad \text{明显}$$

$$\therefore\ v(I)=\sum_{r=1}^{\infty}v(I_r)$$

(b) 若 $A, A_1, A_2\cdots\in\mathcal{R}^n$，$A_i\cap A_j=\phi\ (i\neq j)$，$A=\sum_{r=1}^{\infty}A_r$

只要把 A 与 A_r 分解为区间的和。

\#

Def. 在Euclid空间中，称 v_n 在 $\overline{\mathcal{B}^n}$ 上扩充的唯一确定的测度为n维Lebesgue测度，今后用 m_n 表之。此外称 $E\in\overline{\mathcal{B}^n}$ 为Lebesgue可测集

(i) 开集合O能表示为 $O=\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k$，$I_k\in\mathcal{R}_n$，$I_k\cap I_j=\phi$

$$\text{定义}\quad m_n(O)=\sum_{k=1}^{\infty}v_n(I_k)$$

(ii) 有界闭集合F，取充分大N，使得 $F\subset I^{(N)}$，$I^{(N)}=(-N,\cdots,-N;N,\cdots,N)$.

$$\text{定义}\quad m_n(F)=m_n(I^{(N)})-m_n(I^{(N)}-F)$$

一般闭集合F，定义 $m_n(F)=\lim_{N\to\infty}m_n(I^{(N)}\cap F)$

更一般地

THM. $\forall E\subset\mathbb{R}^n$，令

$$m_e(E)=\inf\{m_n(O);\ E\subset O(\text{开集合})\}$$

$$m_i(E)=\sup\{m_n(F);\ E\supset F(\text{闭集合})\}$$

$m_e(E)$ 为E的Lebesgue外测度

$m_i(E)$ 为E的Lebesgue内测度