高等代数 Higher Algebra

Ch. 1. 经典课题

§1 预备知识

一. 复数 $\mathbb{C}$

$$\underset{\substack{+\\ \cdot}}{\overset{\text{半群}}{\mathbb{N}}} \to \underset{\substack{+\,-\\ \cdot}}{\overset{\text{数环}}{\mathbb{Z}}} \to \underbrace{\mathbb{Q} \to \mathbb{R} \xrightarrow{\text{数域(field)}} \mathbb{C}}_{\substack{+\,-\\ \cdot\,\div}} \qquad \mathbb{C} := \{a+bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

$\mathbb{C}$ 关于 $+, -, \times, \div$ 封闭 (closed)

共轭运算：$a+bi \longmapsto a-bi$

性质：① $\overline{c_1+c_2} = \overline{c_1}+\overline{c_2} \Rightarrow \overline{\sum_{j=1}^{n} c_j d_j} = \sum_{j=1}^{n} \overline{c_j}\cdot\overline{d_j}$

② $\overline{c_1 c_2} = \overline{c_1}\cdot\overline{c_2}$

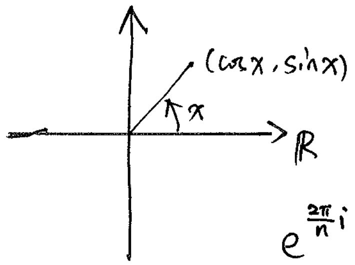
③ 若 $(c\in\mathbb{C})$, $c\neq 0$. 则有 $c\bar{c}\neq 0$ 且 $c\bar{c}\in\mathbb{R}$

记 $|c| = \sqrt{c\bar{c}} = \sqrt{a^2+b^2}$ 称为 c 的模长

$|c_1c_2| = |c_1||c_2|$, $\left|\frac{c_1}{c_2}\right| = \frac{|c_1|}{|c_2|}$

欧拉公式 $e^{ix} = \cos x + i\sin x \quad (x\in\mathbb{R})$

$e^{ix} \xmapsto{\text{实平面表示}} (\cos x, \sin x)$



当 x 遍历 $\mathbb{R}$ 中数时，e^{ix} 遍历复平面上单位圆周上的所有点.

（可验证 $e^{ix}\cdot e^{iy} = e^{i(x+y)}$）

注意到. 对于 $\theta = \frac{2\pi}{n}$

$e^{\frac{2\pi}{n}i} = e^{\theta i}$, $e^{\frac{4\pi}{n}i} = e^{2\theta i} = (e^{\theta i})^2 \Rightarrow e^{n\theta i} = (e^{\theta i})^n$

$\Rightarrow \left(e^{\frac{2k\pi}{n}\cdot i}\right)^n = 1 \quad \forall 1\leq k\leq n$

$[0, 2\pi] \xmapsto{1-1}$ 单位圆周上的点.

$x \longmapsto e^{ix} = \cos x + i\sin x$

$\therefore$ 若令 $\zeta = e^{\frac{2\pi}{n}i} \in \mathbb{C}$. 则 $\zeta, \zeta^2, \cdots \zeta^n = 1$ 均为多项式 ~~x^n~~ x^n-1 的根

n 次多项式至多有 n 个根（重根按重数计入）

$x^n-1 = (x-\zeta)(x-\zeta^2)\cdots(x-\zeta^n)$. 其中 $\zeta = e^{\frac{2\pi}{n}i}$

$c = a+bi \quad a, b\in\mathbb{R}$

$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}i\right) = |c|\cdot e^{i\theta}$

$= |c|(\cos\theta + i\sin\theta)$

二. 数域 (number field)

定义1. 若 $\mathbb{F}\subseteq\mathbb{C}$，$0,1\in\mathbb{F}$，且 $\mathbb{F}$ 关于数的加、减、乘、除法都封闭，则称 $\mathbb{F}$ 是一个数域

e.g 1. $\underset{\substack{\uparrow\\ \text{最小的数域}}}{\mathbb{Q}} \subseteq \mathbb{F} \subseteq \underset{\substack{\uparrow\\ \text{最大的数域}}}{\mathbb{C}}$

e.g 2. 记 $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbb{Q}\}$ 是一个数域

↳ $\mathbb{F}[x]=\left\{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n \,\middle|\, \begin{array}{l} n\geq 0\\ a_i\in\mathbb{F}\end{array}\right\}$

规定 ① $=$: $\sum_{j=0}^{n}a_jx^j=\sum_{k=0}^{m}b_kx^k$

$\Leftrightarrow n=m$ 且 $a_j=b_j\ \forall 0\leq j\leq n$

② $+$: $\sum_{i=0}^{n}a_ix^i+\sum_{j=0}^{m}b_jx^j=\sum_{i=0}^{\max\{n,m\}}(a_i+b_i)x^i$

③ $\times$: $\left(\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\right)\left(\sum_{j=0}^{m}b_jx^j\right)=\sum_{i=0}^{n+m}C_ix^i$

其中 $C_k=\sum_{l=0}^{k}a_lb_{k-l}=\sum_{\substack{i\geq 0,j\geq 0\\ i+j=k}}a_ib_j$

称 $\mathbb{F}[x]$ 为一元多项式环

e.g 2中 $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ 是将一元多项式环 $\mathbb{Q}[x]$ 中 x 赋值 $\sqrt{2}$ (令 $x=\sqrt{2}$)

↑ $\sqrt{2}$ 是一个代数数

$\mathbb{Q}[x]$ 是一个数域，$\forall x$，x 是一个代数数 → 实二次域

定义：$\mathbb{Q}[x]$ 是包含 $\mathbb{Q}$ 与 x 的最小数域

(i) $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ 是含 $\mathbb{Q}$ 与 $\sqrt{2}$ 的数域

(ii) 若 $\mathbb{F}$ 是数域，且 $\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{F}$，$\sqrt{2}\in\mathbb{F}$，则显然 $a+b\sqrt{2}\in\mathbb{F}\ \forall a,b\in\mathbb{F}$

$\therefore\ \mathbb{Q}[\sqrt{2}]\subseteq\mathbb{F}$ #

e.g 3. 虚二次域 $\mathbb{Q}[\sqrt{-p}]$，p 为素数或为 1　$\mathbb{Q}[i]$ → Gauss有理数域

e.g 4. $\mathbb{Q}[2^{\frac{1}{3}}]=\{a_0+a_12^{\frac{1}{3}}+a_22^{\frac{2}{3}}\mid a_i\in\mathbb{Q}\}$ 是一个数域

三. 集合论 $A=B \Leftrightarrow A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$

$A\subseteq B$: $\forall a\in A,\ a\in B$ "$a\in A\Rightarrow a\in B.\ \forall a$"

集合 (set)　类 (class)　族 (family)

类 (class) ↓ {所有集合的全体} $=T$. 若 T 是集合, 则 $T\in T$

四. 充分必要条件

命题 1. 设 A 不是空集合. 则 A 是有限集 当且仅当 ($\Leftrightarrow$) A 到自身的单映射均为满射

条件 (i): $|A|<\infty$

条件 (ii): $\forall A \xrightarrow{\sigma} A$. σ 必为满射 (从而为满射)

证明 Proof (Pf): "$\Leftarrow$" 充分性; "$\Rightarrow$" 必要性

方法 1°. 设 (ii) 成立, 推 (i)

方法 2°. 设 (i) 不成立. 推 (ii) 也不成立

五. $\sum$ 的性质

设 $c_1, c_2 \cdots c_n\in\mathbb{F}$ 已给定. 记 $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i = c_1+c_2+\cdots+c_n$

若 $c_1=\sum\limits_{j=1}^{m} a_{1j}$, $c_2=\sum\limits_{j=1}^{m}a_{2j}$ ……, 即 $c_i=\sum\limits_{j=1}^{m} c_{ij}$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i=\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\Big)\overset{\text{记成}}{=\!=}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}$$

可证 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}a_{ij}=\sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}$

e.g.
$$\begin{aligned}&a_{12}+a_{13}+\cdots+a_{1n}\\&\quad+a_{23}+\cdots+a_{2n}\\&\qquad+\cdots\\&\qquad\quad+a_{n-1,n}\end{aligned} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}=\sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1}a_{ij}$$

§2. 方程与根

命题 1. 设 $\mathbb{F}$ 是数域 $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i\in\mathbb{F}[x]$, 即 $a_i\in\mathbb{F}$. 其中 $a_n\neq 0$

则对于 $\forall b\in\mathbb{F}$, $\exists\mathbb{F}[x]$ 中唯一一个 $n-1$ 次多项式 $g(x)$ 使得.

$$f(x)=\underbrace{(x-b)}_{\text{除式}}\underbrace{g(x)}_{\text{商}}+\underbrace{f(b)}_{\text{余式}}$$

Pf: $f(x)$ 次数为 n. $\Rightarrow deg(f)=n$. 零多项式 $deg(0)=-\infty$
$deg(C)=0 \quad (C\neq 0)$

不妨设 $g(x)=\sum_{m=0}^{r} b_m x^m$ ($b_m\in\mathbb{F}$. 待定)

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i=(x-b)\sum_{j=0}^{m} b_j x^j+f(b)$$

$$=\sum_{j=0}^{m} b_j x^{j+1}-\sum_{j=0}^{m} b b_j x^j+f(b)$$

$$=b_m x^{m+1}+\sum_{j=1}^{m}(b_{j-1}-bb_j)x^j-bb_0+f(b)$$

根据 $\mathbb{F}[x]$ 中 "=" 的定义有
$$\begin{cases} m+1=n \\ b_m=a_n \\ b_{m-1}-bb_m=a_{n-1} \\ \vdots \\ b_0-bb_1=a_1 \\ f(b)=-bb_0+a_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=n-1 \\ b_m=a_n \\ b_{m-1}=a_{n-1}+bb_m \\ \vdots \\ b_0=a_1+bb_1 \\ f(b)=-bb_0+a_0 \end{cases}$$

#

定义1. 若 $f(x)$ 是 $\mathbb{F}[x]$ 中 n 次多项式. 而 $b\in\mathbb{F}$ 使 $f(b)=0$. 则称 b 是 $f(x)$ 在 $\mathbb{F}$ 中的一个根

Cor 1.1 b 是 n 次多项式 $f(x)$ 的根当且仅当 $\exists$ $n-1$ 次多项式 $g(x)\in\mathbb{F}[x]$
s.t. $f(x)=(x-b)g(x)$. 此时称 $(x-b)$ 整除 $f(x)$. 记为 $(x-b)\mid f(x)$

Pf: "$\Leftarrow$" 充分性. 设 $f(x)=(x-b)g(x)$. 则有 $f(b)=(b-b)g(b)=0$
"$\Rightarrow$" 必要性. 由命题1. 得证.

Cor 1.2 设 $f(x)\in\mathbb{F}[x]$ 且 $deg(f)=n\geq 1$. 则 $f(x)$ 在 $\mathbb{F}$ 中至多有 n 个根
(重根按重数计)

Pf: 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{F}$ 中有根 b_1, 由 Cor 1.1. 知存在 $\mathbb{F}[x]$ 中 $n-1$ 次多项式
多项式 $g(x)$ 使 $f(x)=(x-b_1)g(x)$. 由归纳假设. $g(x)$ 在 $\mathbb{F}$ 中有 $n-1$ 个根(至多). $\therefore f(x)$ 在 $\mathbb{F}$ 中至多有 n 个根

高等代数基本定理 (Gauss): 在 $\mathbb{C}$ 上. 任一 n 次多项式, 恰好有 n 个根
$\forall f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\in\mathbb{C}[x]$. 其中 $a_n\neq 0$. $\exists C_1, C_2\cdots C_n\in\mathbb{C}$
s.t. $f(x)=a_n(x-C_1)(x-C_2)\cdots(x-C_n)$

韦达定理(根与系数的关系)

设 $f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\ (a_n\neq 0)$，设 $b_1, b_2 \cdots b_n$ 是 $f(x)$ 在 $\mathbb{C}$ 中全部的根

则有

$$a_n = a_n$$
$$a_{n-1} = -a_n\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)$$
$$a_{n-2} = (-1)^2 a_n\left(\sum_{1\le i<j\le n} b_i b_j\right)$$
$$\vdots$$
$$a_1 = (-1)^{n-1} a_n \sum_{i=1}^{n} b_1\cdots \hat{b_i}\, b_n$$
$$a_0 = (-1)^n a_n \prod_{i=1}^{n} b_i$$

特别地 $n=1$ 时牢记

Pf: $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

$\underline{\underline{假设}}\ a_n(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_n)$

$$= a_n\left[x^n - \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)x^{n-1} + \sum_{1\le i<j\le n} b_i b_j x^{n-2} - \sum_{1\le i<j<k\le n} b_i b_j b_k x^{n-3} + b_1 b_2\cdots b_n(-1)^n\right]$$

比较两边对应项系数可得 #

带余除法(Division Algorithm)

设 $\mathbb{F}$ 是数域，设 $f(x)\in\mathbb{F}[x]$，$0\neq g(x)\in\mathbb{F}[x]$。则在 $\mathbb{F}[x]$ 中存在唯一的一对 $q(x)$，$r(x)$，s.t.

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x).$$

其中 $\deg(r) < \deg(g)$

Pf: ① 唯一性，设还有 $q_1(x)g(x) + r_1(x) = f(x)$，其中 $\deg(r_1) < \deg(g)$

$$\Rightarrow r(x) - r_1(x) = g(x)\left[q_1(x) - q(x)\right]$$

其中 $\deg(g) > \deg(r) \ge \deg(r(x) - r_1(x))$，矛盾

② 存在性：Euclidean Algorithm

辗转相除法 $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{F}[x]$

Eucleadian Algorithm

① 公因式 $(d \neq 0)$，$d(x)$ 与 $h(x)$ 均在 $\mathbb{F}[x]$ 中．若 $f(x) = d(x)h(x)$．则称 $d(x)$ 是 $f(x)$ 的一个因式（在 $\mathbb{F}[x]$ 中）

② $\gcd(f(x), g(x)) = d(x)$：
- ① $d(x)$ 首项系数为 1
- ② $d(x) \mid f(x)$ 且 $d(x) \mid g(x)$
- ③ 若 $d_1(x) \mid f(x)$ 且 $d_1(x) \mid g(x)$，$d_1 \mid d$

（若存在 $d(x) \in \mathbb{F}[x]$ 使满足条件．则称 $d(x)$ 是 f 与 g 的一个 gcd）

命题 1．$\forall f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$．若它们在 $\mathbb{F}[x]$ 中有 gcd．则 gcd 唯一．记为 $(f, g) \overset{\triangle}{=} \gcd(f, g)$

Pf：若 d_1 与 d_2 均为 f 与 g 的 gcd，则 $d_1 \mid d_2$，$d_2 \mid d_1$

$\exists\, h_i(x) \in \mathbb{F}[x]$．s.t. $d_1 = d_2 h_2$，$d_2 = h_1 d_1$

$$\Rightarrow d_2 = d_2(h_1 h_2)$$

$$\Rightarrow \deg(d_2) = \deg(d_2) + \deg(h_1 h_2)$$

$\because d_2$ 首 1．$\deg(d_2) \geq 0$ $\therefore \deg(h_1 h_2) = 0$

$$= \deg(h_1) + \deg(h_2) = 0$$

$\Rightarrow \deg(h_1) = \deg(h_2) = 0$，$h_i$ 是 $\mathbb{F}$ 中非零常数

$$d_2 = d_1 \cdot k \overset{\text{首}1}{\Longrightarrow} k = 1$$

#

定理：$\forall f(x), g(x) \in K[x]$，$f(x), g(x) \neq 0$．都 $\exists!\, d(x) = (f, g) \in K[x]$．且 $\exists\, u(x), v(x) \in K[x]$．s.t. $(f, g) = f(x)u(x) + g(x)v(x)$

Pf：唯一性已证

存在性：不妨假设 $\partial f \geq \partial g$．反复用带余除法得到 $q_i(x)$，$r_i(x)$

$$f(x) = q_0(x)g(x) + r_0(x) \qquad \partial r_0 < \partial g$$

$$g(x) = q_1(x)r_0(x) + r_1(x) \qquad \partial r_1 < \partial r_0$$

$$r_0(x) = q_2(x)r_1(x) + r_2(x) \qquad \partial r_2 < \partial r_1$$

$$r_1(x) = q_3(x)r_2(x) + r_3(x) \qquad \partial r_3 < \partial r_2$$

$$\vdots$$

$$r_m(x) = q_{m+2}(x)r_{m+1}(x) + r_{m+2}(x) \qquad \partial r_{m+2} < \partial r_{m+1}$$

$$r_{m+1}(x) = q_{m+3}(x)r_{m+2}(x)$$

引理：若 $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$，其中 $f(x)$、$g(x)$、$r(x)$ 均 $\neq 0$，且 (g,r) 存在，则 (f,g) 也存在且 $(f,g)=(g,r)$

Pf：设 $d(x)=(g,r)\in \mathbb{K}[x]$

事实上，有 (1) $d(x)$ 首 1

(2) $d\mid g$，且 $d\mid f$（$\because d\mid qg$ 且 $d\mid r$）

(3) 设 $d_1\mid f$ 且 $d_1\mid g$，则 $d_1\mid f-qg$，即 $d_1\mid r$

又 $\because d(x)=(g,r)$

$\therefore d_1(x)\mid d(x)$

$\therefore d(x)=(f,g)$ #

由辗转相除法 $(r_{m+1},r_{m+2})=(r_m,r_{m+1})=\cdots=(r_0,r_1)=(g,r_0)=(f,g)$ #

若 $(f,g)=1$，则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素

推论 $\forall f(x),g(x)\in\mathbb{K}[x]$，$(f(x),g(x))=1 \Leftrightarrow \exists u(x),v(x)\in\mathbb{K}[x]$，s.t. $f(x)u(x)+g(x)v(x)=1$

Bonus：$\mathbb{Q}[\alpha]$ 是数域（其中 $\exists f(x)\neq 0 \in\mathbb{Q}[x]$，s.t. $f(\alpha)=0$）

Pf：定义 1：$\mathbb{K}[x]$ 中一个正次数多项式 $p(x)$ 称为不可分解，是指在 $\mathbb{K}[x]$ 中，$p(x)$ 不可写成两个低次数的多项式之积

即，若 $p(x)=f(x)g(x)$，其中 $f(x),g(x)\in\mathbb{K}[x]$，则必有 $\partial f=0$ 或 $\partial g=0$

定义 2：素多项式 $p(x)$（$\mathbb{K}[x]$ 中）：

(1) $\partial p>0$

(2) 若在 $\mathbb{K}[x]$ 中，$p(x)\mid f(x)g(x)$（$f,g\in\mathbb{K}[x]$）

则必有或 $p\mid f$ 或 $p\mid g$

（称满足以上二条件的 $p(x)$ 为 $\mathbb{K}[x]$ 中的素多项式

命题：设 $\mathbb{K}$ 为数域，而 $p(x)\in\mathbb{K}[x]$，则 $p(x)$ 为 $\mathbb{K}[x]$ 中素多项式 $\Leftrightarrow p(x)$ 在 $\mathbb{K}[x]$ 中不可分解

Pf："$\Rightarrow$"，设 $p(x)\in\mathbb{K}[x]$ 是素多项式，$p(x)=f(x)g(x)$，$f,g\in\mathbb{K}[x]$

$\therefore$ 不妨设 $p\mid f$，设 $f=pu$

$\Rightarrow p=p(ug)$

$\Rightarrow 0<\partial(p)=\partial(p)+\partial(u)+\partial(g)$

$\Rightarrow \partial(u)=\partial(g)=0$

"$\Leftarrow$" 设 $p(x)\mid fg$. 但是 $p\nmid f$ ，考虑 (f,p).

记 $d(x)=(f(x),p(x)) \Rightarrow d(x)\mid p(x)$

$\because$ $p(x)$ 不可分解且 $p\nmid f \Rightarrow d(x)=1$

$\because (f,p)=1$ 且 $p\mid fg$ $\therefore p\mid g$ #

(1) 是数环

(2) $\forall\, 0\neq f(\alpha)\in \mathbb{Q}[\alpha]$ $\because \alpha$ 是代数数. $\exists$ $\mathbb{Q}[x]$ 中正次数多项式 $p(x)$.
使 $p(\alpha)=0$. 不妨假设 $p(x)$ 是 $\mathbb{Q}[x]$ 中使 $p(\alpha)=0$
的次数最小的(正次数)多项式
则 $p(x)$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中不可分解. 从而是 $\mathbb{Q}[x]$ 中
的素多项式.

则 $(p(x),f(x))=1 \Leftrightarrow p(x)u(x)+f(x)v(x)=1$ $\exists\, u,v\in\mathbb{Q}[x]$

$\Rightarrow p(\alpha)u(\alpha)+f(\alpha)v(\alpha)=1$

$\Rightarrow f(\alpha)\cdot v(\alpha)=1$

$\therefore$ $\mathbb{Q}[\alpha]$ 是数域 #

§3. 用消元法解线性方程组

Gaussian Elimination: 反复用以下三种初等(方程)的变换. 将方程组变为同解的方程组

1° 交换两个方程的位置

2° 用一个非零的数乘以某方程两端

3° 将某方程两端同乘以某一个数加到另外一个方程的对应两端

另解: 构造一个矩阵 (Matrix)

$$\begin{cases} 2x_2-x_3=1 \\ x_1-x_2+x_3=0 \\ 2x_1+x_2-x_3=-2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0, & 2, & -1, & 1 \\ 1, & -1, & 1, & 0 \\ 2, & 1, & -1, & -2 \end{pmatrix}$$

Augamented Matrix
方程组的增广矩阵 $\widetilde{A}$

Step 1: 写出增广矩阵

Step 2: 用一系列如下的(矩阵)初等行变换, 将 $\widetilde{A}$ 化为标准阶梯形 $\longrightarrow \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & -\frac{2}{3} \\ 0, & 1, & 0, & \frac{5}{3} \\ 0, & 0, & 1, & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$ 矩阵 $\widetilde{A}$ 的标准型

Step 3: 写出解 (有解 $\Leftrightarrow$ 最后一个主元不出现在最后一列 $\Leftrightarrow r(A)=r(\widetilde{A})$)

HA-8

行标准阶梯形

$\begin{cases} 1^\circ \text{ 每行从左向右第一个非零的数为1} \\ 2^\circ \text{ 主元的下方、右方、上方全为0} \end{cases}$

主元(pivot)

命题1. 任一 $m\times n$ 矩阵都经一系列的初等行变换化为标准阶梯形.

(标准阶梯形)是唯一的

齐次线性方程组(system of homogeneous linear equations)

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases} (*) \longrightarrow \text{系数矩阵 } A=\begin{bmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13}\cdots a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23}\cdots a_{2n} \\ \vdots \\ a_{m1}, a_{m2}, a_{m3}\cdots a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

命题2. 齐次线性方程组(*)有非零解 $\Longleftrightarrow$ 主元个数 < 未知元个数 n

Proof: 易见主元个数 $\le \min\{m,n\}$ $\Longleftrightarrow r(A)<n$

"$\Longrightarrow$" 若主元个数 $\ge n$, 则必有 n 个主元. A的标准阶梯形为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & - & - & 0 \\ 0 & 1 & - & - & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & 0 \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & - & - & 1 \end{pmatrix}$$

此时只有零解

"$\Longleftarrow$" 显然 #

Cor: 若 $m<n$, 则齐次线性方程组(*)有非零解

Ch. 2. 向量空间与矩阵运算 (Vector Space)

§1. 矩阵的运算 (1) 加法和数乘

设$\mathbb{F}$是数域, 令 $\mathbb{F}^{m\times n}=\{A=(a_{ij})_{m\times n} \mid a_{ij}\in\mathbb{F}\}$

在 $\mathbb{F}^{m\times n}$ 中引进 (1). 加法 $+$: $\forall A=(a_{ij})_{m\times n}\in\mathbb{F}^{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{m\times n}\in\mathbb{F}^{m\times n}$

定义 $A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}\in\mathbb{F}^{m\times n}$

(2) 数乘 $\cdot$: $\forall A=(a_{ij})_{m\times n}\in\mathbb{F}^{m\times n}$, $k\in\mathbb{F}$

定义 $kA \overset{\triangle}{=} k\cdot A=(k\cdot a_{ij})\in\mathbb{F}^{m\times n}$

矩阵的相等. 若 $A_{m\times n}$, $B_{s,t}$

则 $A=B \Longleftrightarrow$ ① $m=s$ 且 $n=t$ (同型) ② $a_{ij}=b_{ij}$ $\forall i,j$

运算律　+. (1)交换律　$A+B=B+A$

(2)结合律　$(A+B)+C=A+(B+C)$　　$\forall A,B,C\in\mathbb{F}^{m\times n}$ $\overset{\shortparallel}{V}$

(3) ∃零元 0:　$0+A=A+0=A$

结论1: 零元若存在则唯一

Proof: 设 0_1 与 0_2 均为 $\mathbb{F}^{m\times n}$ 中的零元. 则有

$$0_1=0_1+0_2=0_2$$

\#

群

$\forall\mathbb{F}\subseteq\mathbb{C}$ 令 $\mathbb{F}^*=\mathbb{F}\setminus\{0\}$

则

$\mathbb{F}$是数域 $\Longleftrightarrow$ $(\mathbb{F},+)$ 与 $(\mathbb{F}^*,\cdot)$ 成为群

(4) $\forall A\in\mathbb{F}^{m\times n}$, $\exists B\in\mathbb{F}^{m\times n}$.　$A+B=B+A=0$

结论2: A的负元若存在则必唯一 (性质(2). (3)成立)

Proof: 设 B_1 与 B_2 均为 A的负元

$$B_1=0+B_1=(B_2+A)+B_1=B_2+(A+B_1)$$
$$=B_2+0=B_2$$

\#

· (5)　$1\cdot A=A$

(6)　$(kl)\cdot A=k(lA)$

(7)　$(k+l)\cdot A=kA+lA$

(8)　$k\cdot(A+B)=kA+kB$

§2. 向量空间 $\mathbb{F}^{m\times1}$ 与 $\mathbb{F}^{1\times n}$

$$\mathbb{F}^{m\times1}=\left\{\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_m\end{pmatrix}\middle|\ a_i\in\mathbb{F}\right\}\qquad \mathbb{F}^{1\times m}=\{(a_1,a_2,\cdots,a_m)\mid a_i\in\mathbb{F}\}$$

列向量　　　　行向量

形为 $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_m\end{pmatrix}$ $(a_i\in\mathbb{F})$的矩阵叫一个m维列向量, 而 $\mathbb{F}^{m\times1}$ 称为 $\mathbb{F}$ 上的 m维列向量空间

定义1. (向量组的线性关系)

设 $\alpha_1,\cdots\alpha_r\in\mathbb{F}^{n\times1}$, 若存在 $k_1,k_2\cdots,k_r\in\mathbb{F}$ (不全为0). s.t. $0=\sum_{i=1}^{r}k_ia_i$　(1)

则称向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_r$ 线性相关 (linearly dependent)

否则, 则称 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_r$ 线性无关 (linearly independant)

线性表示 $\overset{\ell}{\Longrightarrow}$ 是 $\mathbb{F}^{m\times1}$ 中向量组之间的一个二元关系. 性质:

性质1. $(I)\overset{\ell}{\Longrightarrow}(I)$ 反身性

性质2 若 $(I)\overset{\ell}{\Longrightarrow}(II)$ 且 $(II)\overset{\ell}{\Longrightarrow}(III)$. 则 $(I)\overset{\ell}{\Longrightarrow}(III)$ 传递性

Pf: 设 $(I)=\{\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_r\}$. $(II)=\{\beta_1,\beta_2\cdots\beta_s\}$. $(III)=\{\gamma_1,\gamma_2\cdots\gamma_t\}$

均为 $\mathbb{F}^{m\times1}$ 的子集 $\because (I)\overset{\ell}{\Longrightarrow}(II)$ $\therefore \forall 1\le i\le s$. $\exists k_{ij}\in\mathbb{F}$

$$\text{s.t.}\quad \beta_i=\sum_{j=1}^{r}k_{ij}\alpha_j$$

又 $\because (II)\overset{\ell}{\Longrightarrow}(III)$ $\therefore \exists\, l_{ui}\in\mathbb{F}$. s.t. $\gamma_u=\sum_{i=1}^{s}l_{ui}\beta_i$

$$\therefore \gamma_u=\sum_{i=1}^{s}l_{ui}\Big(\sum_{j=1}^{r}k_{ij}\alpha_j\Big)$$
$$=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{r}(l_{ui}k_{ij})\alpha_j$$
$$=\sum_{j=1}^{r}\Big(\sum_{i=1}^{s}l_{ui}k_{ij}\Big)\alpha_j$$

定义2 (极大无关组).

设 $\phi\ne(I)\subseteq(II)\subseteq\mathbb{F}^{m\times1}$. 若以下三条件同时成立. 则称子集合 (I) 为向量组 (II) 的一个极大无关向量组:

(1) 向量组 (I) 线性无关 (3) $(I)\subseteq(II)$

(2) $(I)\overset{\ell}{\Longrightarrow}(II)$

注1. 根据命题2. 一个极大无关组若存在. 则至多含 m 个向量

注2. 向量组 $\alpha_1\dots\alpha_r$ 有极大无关组 $\Longleftrightarrow$ $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_r$ 至少有1个 $\ne0$. 即只有一个向量组. 即0. 不含极大无关组

引理1. 设 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_r\overset{\ell}{\Longrightarrow}\beta_1,\beta_2\cdots\beta_s$ 且 $\beta_1,\beta_2\cdots\beta_s$ 线性无关. 有 $r\ge s$

Pf: 反证法. 假设 $r<s$, 设 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_r\overset{\ell}{\Longrightarrow}\beta_1,\beta_2\cdots\beta_s$. 下证后者线性相关

即证 $\sum x_i\beta_i=0$ 有非零解

事实上. 设 $\beta_i=\sum_{j=1}^{r}k_{ji}\alpha_j$. 代入上式

$$\sum_{i=1}^{s}x_i\Big(\sum_{j=1}^{r}k_{ji}\alpha_j\Big)=0$$

推论

$(I)\overset{\ell}{\Longleftarrow}(II)$

则 $r(I)<r(II)$

若 $\alpha_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$，则 (1) 等价于如右齐次线性方程组 $\begin{cases} a_{11}k_1 + \cdots + a_{1r}k_r = 0 \\ a_{21}k_1 + \cdots + a_{2r}k_r = 0 \\ \cdots \\ a_{m1}k_1 + \cdots + a_{mr}k_r = 0 \end{cases}$ (2)

<u>命题1</u>：$\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_r$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组 (2) 有非零解

($\Leftrightarrow$ (2) $\xrightarrow{\text{初等行变换}}$ 标准阶梯形，主元个数 $< r$)

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 & r=1 \text{ 时} \\ \alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_r \text{ 中有一个向量可写成其余向量的线性组合} & r>1 \text{ 时} \end{cases}$

e.g 1. 在 $\mathbb{R}^{3\times1}$ 中，有

(1) α_1 线性相关 $\Leftrightarrow \alpha_1 = 0$

(2) α_1, α_2 线性相关 $\Leftrightarrow \alpha_1$ 与 α_2 成比例

(3) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关 $\Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 共面

(4) 任四个或四个以上向量必线性相关

<u>命题2</u>，设 $n>m$，在 $\mathbb{F}^{m\times1}$ 中，n 个向量组成的向量组必定线性相关

Pf：考虑线性方程组 $\begin{cases} \sum_{i=1}^{r} a_{1i}x_i = 0 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{r} a_{mi}x_i = 0 \end{cases}$，其中 $r = n$.

$\because$ (3) 中含 m 个方程，n 个未知元，而 $m<n$

$\therefore$ 齐次方程组必有非零解，从而 $\alpha_1 \cdots \alpha_n \in \mathbb{F}^{m\times1}$ 必定线性相关

#

e.g 2. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，且 $\beta_1 = \alpha_1+\alpha_2$，$\beta_2 = \alpha_2+\alpha_3$，$\beta_3 = \alpha_3+\alpha_1$.

求证：$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关

Pf：考虑 $x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 = 0$ 下导出 $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

事实上，有 $0 = x_1(\alpha_1+\alpha_2) + x_2(\alpha_2+\alpha_3) + x_3(\alpha_3+\alpha_1)$

$= (x_1+x_3)\alpha_1 + (x_1+x_2)\alpha_2 + (x_2+x_3)\alpha_3$

$\because \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关 $\therefore \begin{cases} x_1+x_3=0 \\ x_2+x_3=0 \\ x_1+x_2=0 \end{cases}$ $\therefore x_1 = x_2 = x_3 = 0$

Cor. 设 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_r$ 线性无关，并 $\beta_1 = \alpha_1+\alpha_2$，$\beta_2 = \alpha_2+\alpha_3 \cdots \beta_{r-1} = \alpha_{r-1}+\alpha_r$，$\beta_r = \alpha_r+\alpha_1$. 则 $\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_r$ 线性无关 当且仅当 $2 \nmid r$

$$\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{r} x_i k_{ji}\alpha_j = \sum_{j=1}^{r}\alpha_j\left(\sum_{i=1}^{s} k_{ji}x_i\right)=0$$

只需 $\begin{cases} \sum_{i=1}^{s} k_{1i}x_i=0 \\ \sum_{i=1}^{s} k_{2i}x_i=0 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{s} k_{ri}x_i=0 \end{cases}$ (3)有非零解. 而 $r<s$. (3)有非零解

#

推论1. 设向量组(I)含非零向量. 则(I)有极大无关组且任意两个极大无关组所含向量个数相等. 称此数为向量组(I)的秩

记为 $r(\mathrm{I}) \overset{\triangle}{=} r\{\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_r\}$

证: 设(II)与(III)是(I)的两个极大无关组. 则有 $(\mathrm{II}) \overset{\ell}{\Longrightarrow} (\mathrm{I}) \overset{\ell}{\Longrightarrow} (\mathrm{III})$

$\therefore (\mathrm{II}) \overset{\ell}{\Longrightarrow} (\mathrm{III})$. 而(III)线性无关

$\therefore$ 由引理1. 知 $\#(\mathrm{II}) \geq \#(\mathrm{III})$

同理. 有 $\#(\mathrm{III}) \geq \#(\mathrm{II})$

$\therefore \#(\mathrm{III}) = \#(\mathrm{II})$ #

性质1. $r(\mathbb{F}^{m\times 1}) = m$

性质2. $\forall (\mathrm{I}) \subseteq \mathbb{F}^{m\times 1}$, $(\mathrm{I}) \neq \phi$. 有 $r(\mathrm{I}) \leq m$

$r(\mathrm{I})=0 \Longleftrightarrow r=\{0\}$

§3. 矩阵的秩

$\forall A \in \mathbb{F}^{m\times n}$. 则有 $A=(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n)$. $\alpha_i\in\mathbb{F}^{m\times 1}$. 称 $r\{\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n\}$ 为A的列秩

$A=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_m\end{pmatrix}$, $\beta_j\in\mathbb{F}^{1\times n}$. 称 $r\{\beta_1,\beta_2\cdots\beta_m\}$ 为A的行秩

定理2. 对于 $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$. 以下相等

① A的列秩 ② A的阶梯形中非零行的行数(即主元个数) ③ A的行秩

为了证明定理2. 分步骤证明如下若干的小结果

引理2. 对于A作一次初等行变换得矩阵B. 则A的行向量组与B的行向量组等价. 从而A的行秩等于B的行秩

推论 2.1　A的行秩等于其行标准阶梯形的行秩

引理 3．若 A 是标准阶梯形，则 A 的极大无关组只有一个（所有非零行），且 A 的行秩 = 主元个数

额外的结果　命题　设 $\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_m$ $\mathbb{F}^{1\times n}$．若对于矩阵 $\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots \\ \beta_m\end{pmatrix}$ 增加一列得 $m\times(n+1)$ 的矩阵，设为 $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_m\end{pmatrix}$．若 $\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_m$ 线性无关，则 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m$ 线性无关

引理4．在行标准阶梯形A中，其主元个数若为 r，则 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_r$ 是 A 的一个极大无关组．从而A的列秩等于A的主元个数

引理5．设 $A = (\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n) \in \mathbb{F}^{m\times n}$．对A做一次初等行变换，得矩阵 $B = (\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_n)$．则对一组数 $k_1, k_2 \cdots k_n \in \mathbb{F}$．等式 $\sum_{i=1}^{n} k_i\alpha_i = 0$ 成立 $\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} k_i\beta_i = 0$

Pf．按三种行变换分三种情形验证

推论1．$\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_r$ 线性无关当且仅当 $\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_r$ 线性无关

推论2．对于 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_r$．"$\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_r \overset{\ell}{\Longrightarrow} \alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n$"
$\Longleftrightarrow$ "$\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_r \overset{\ell}{\Longrightarrow} \beta_1, \beta_2 \cdots \beta_n$"

推论3．$\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_r$ 是极大无关组当且仅当 $\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_r$ 是极大无关组

e.g 1．若列向量组 $(\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_r)$ 无关，而 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_r, \beta$ 相关，则有 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_r \overset{\ell}{\Longrightarrow} \beta$

Pf：$\exists$ 不全为 0 的 $k_1, k_2 \cdots k_r, k \in \mathbb{F}$．s.t. $\sum_{i=1}^{r} k_i\alpha_i + k\beta = 0$．断言 $k \neq 0$．否则 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_r$ 线性相关　$\therefore \alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_r \overset{\ell}{\Longrightarrow} \beta$　#

e.g.2．用 $A(1)$ 表示A的第一列（列向量）．用 $(1)A$ 表示A的第一行（行向量）

求证：$r(A+B) \leq r(A) + r(B)$

Pf：$A + B = (A(1) + B(1), A(2) + B(2), \cdots, A(n) + B(n))$

假设 (I)，(II) 分别是 A．B 列向量组的极大无关组

$(\mathrm{I}) \overset{\ell}{\Longrightarrow} A(1), \cdots, A(n)$ 且 $\#(\mathrm{I}) = r(A)$

$(\mathrm{II}) \overset{\ell}{\Longrightarrow} B(1), \cdots B(n)$．且 $\#(\mathrm{II}) = r(B)$

易见　$(\mathrm{I}) \cup (\mathrm{II}) \overset{\ell}{\Longrightarrow} A_{(1)}, \cdots A_{(n)}, B_{(1)} \cdots B_{(n)} \Rightarrow A_{(1)} + B_{(1)} \cdots A(n) + B(n)$

§4. 基础解系基本定理

命题1. 线性方程组 $x_1\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{bmatrix}+\cdots+x_n\begin{bmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{bmatrix}$ 有解

$$\Longleftrightarrow \text{“} A(1), A(2)\cdots A(n) \xRightarrow{l} \beta$$

$$\Longleftrightarrow r(A)=r(\widetilde{A})$$

设方程组 $x_1A(1)+x_2A(2)+\cdots+x_nA(n)=\beta$ (3) 有解

如何求理论解？

命题2. 设 $\alpha_0=\begin{pmatrix}k_1\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}$ 是(3)的一个特解，则(3)的一切解形为 $\gamma=\alpha+\alpha_0$

其中 α 是齐次线性方程组 $x_1A(1)+\cdots+x_nA(n)=0$ (4) 的解

Pf: (1) 设 α 是(4)的一个解，则可设 $\alpha=\begin{pmatrix}l_1\\\vdots\\l_n\end{pmatrix}$ $l_i\in\mathbb{F}$

则有 $\begin{cases}l_1A(1)+l_2A(2)+\cdots+l_nA(n)=0\\k_1A(1)+k_2A(2)+\cdots+k_nA(n)=\beta\end{cases}$

则有 $(l_1+k_1)A(1)+(l_2+k_2)A(2)+\cdots+(l_n+k_n)A(n)=\beta$

即 $\alpha+\alpha_0=\begin{pmatrix}k_1+l_1\\k_2+l_2\\\vdots\\k_n+l_n\end{pmatrix}$ 是(3)的解 $\therefore$ 解集合(3) $\supseteq$ 解集合(4)

(2) 设 α 是(3)的一个解，则可设 $\alpha=\begin{pmatrix}l_1\\\vdots\\l_n\end{pmatrix}$，$l_i\in\mathbb{F}$

$\begin{cases}l_1A(1)+l_2A(2)+\cdots+l_nA(n)=\beta\\k_1A(1)+k_2A(2)+\cdots+k_nA(n)=\beta\end{cases}$

$\therefore (l_1-k_1)A(1)+(l_2+k_2)A_2+\cdots+(l_n-k_n)A_n=0$

即 $\alpha-\alpha_0=\begin{pmatrix}l_1-k_1\\\vdots\\l_n-k_n\end{pmatrix}$ 是(4)的解 $\therefore$ 解集合(4) $\supseteq$ 解集合(3)

$\therefore$ 解集合(3) = 解集合(4)

齐次 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_iA(i)=0$ 的解集合 T 有如下性质

(1) $0\in T$

(2) 若 $\alpha_i\in T$，则 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2\in T$，$\forall k_i\in\mathbb{F}$

求 T 归结为求 T 的一个极大无关组 $\alpha_1, \alpha_2\cdots\alpha_r$，称为齐次线性方程组的一个基础解系

定理(基础解系基本定理) 齐次线性方程组 $x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n=0$ (3)

的一个基础解系含有 $n-r(A)$ 个向量，其中

$A=(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n)$，即 $PA(i)=\alpha_i$

Pf: $A=(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n)\xrightarrow{\text{初等行变换}}B$，其中 B 为标准阶梯形

则 $r(A)$ 为 B 中主元个数(非零行的行数)，$B=(\beta_1,\beta_2\cdots\beta_n)$

e.g. $B=\begin{pmatrix}1&2&3&0&1&4&0\\0&0&0&1&2&5&0\\0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5,\beta_6,\beta_7)$

$\xrightarrow{\text{列}}(\beta_1,\beta_4,\beta_7,\beta_2,\beta_3,\beta_5,\beta_6)=\begin{pmatrix}1&0&0&\boxed{2}&\boxed{3}&\boxed{1}&\boxed{4}\\0&1&0&\boxed{0}&\boxed{0}&\boxed{2}&\boxed{5}\\0&0&1&\boxed{0}&\boxed{0}&\boxed{0}&\boxed{0}\\0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}=C$

$$\longrightarrow\begin{cases}y_1\qquad\qquad+2y_4+3y_5+y_6+4y_7=0\\ \quad y_2\qquad\qquad\qquad+2y_6+5y_7=0\\ \qquad y_3\qquad\qquad\qquad\qquad=0\end{cases}\qquad(4)$$

易见 $\begin{pmatrix}2\\0\\0\\-1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}3\\0\\0\\0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\\0\\-1\\0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}4\\5\\0\\0\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$ 线性无关(基础解系包含向量数 $\geq n-r(A)$)

$\quad\ \|\qquad\ \ \|\qquad\ \ \|\qquad\ \ \|$

$\quad\delta_1\qquad\delta_2\qquad\delta_3\qquad\delta_4$

下证：$\delta_1\sim\delta_4\xrightarrow{l}$ (3)即(4)的所有解，从而 $\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4$ 是(3)的一个基础解系。

设 $\delta=\begin{pmatrix}k_1\\\vdots\\k_7\end{pmatrix}$ 是方程组(4)的解，要证 $\exists\, l_1,l_2,l_3,l_4\in\mathbb{F}$ s.t.

$\delta=\sum_{i=1}^{4}l_i\delta_i$，事实上 $\delta=\begin{pmatrix}k_1\\\vdots\\k_7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\\-1\\0\\0\\0\end{pmatrix}l_1+\begin{pmatrix}3\\0\\0\\0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}l_2+\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\\0\\-1\\0\end{pmatrix}l_3+\begin{pmatrix}4\\5\\0\\0\\0\\0\\-1\end{pmatrix}l_4$

$$=\begin{pmatrix}2l_1+3l_2+l_3+4l_4\\2l_3+5l_4\\0\\-l_1\\-l_2\\-l_3\\-l_4\end{pmatrix}$$

比较两端向量，
$$\begin{cases} k_1 = 2l_1+3l_2+l_3+l_4 \\ k_2 = 2l_3+5l_4 \\ k_3=0 \\ k_4=-l_1 \\ k_5=-l_2 \\ k_6=-l_3 \\ k_7=-l_4 \end{cases} \quad (5) \qquad \begin{cases} k_1+2k_4+3k_5+k_6+4k_7=0 \\ k_2+2k_6+5k_7=0 \\ k_3=0 \end{cases} \quad (6)$$

有(5)和(6)，有 $\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_4 \\ -k_5 \\ -k_6 \\ -k_7 \end{pmatrix}$ #

总结： 定理： 设 $\widetilde{A}=(A,\beta)$，其中 $A_{m\times n}=(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n)$

则：① 方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$ 有解 $\Leftrightarrow r(A)=r(\widetilde{A})$

(~~***~~) ② $r(A)=r(\widetilde{A})$ 时，$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=0$ 的基础解系含 $n-r(A)$ 个向量

③ 若 $\beta_1,\beta_2\cdots\beta_{n-r(A)}$ 是 $\sum_{i=1}^{n}x_i\alpha_i=0$ 的一个基础解系，则 $\sum_{i=1}^{n}x_i\alpha_i=\beta$ 的通解为 $Z=\sum_{i=1}^{n-r(A)}t_i\beta_i+\beta_0$ $(t_i\in\mathbb{F})$

其中 β_0 是 $\sum_{i=1}^{n}x_i\alpha_i=\beta$ 的特解

§5. 矩阵的转置和乘法

一. 转置 (transpose)

设 $A_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n}$，定义 $A' \xlongequal{\text{记}} A^T$ 为 $n\times m$ 阵，其中 $(A^T)(i,j)=a_{ji}$

<u>性质 1.</u> $(A^T)^T=A$

<u>性质 2.</u> $(A+B)^T=A^T+B^T$

<u>性质 3.</u> $(kA)^T=k\cdot A^T$

二. 乘法

<u>定义</u> 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{jk})_{n\times s}$ $AB=C_{m\times s}=(C_{ik})_{m\times s}$

其中 $C_{ik}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk} \overset{\text{记}}{=} \boxed{(i)A\cdot B(j)} \rightarrow \boxed{\begin{array}{l}(AB)(j)=A\cdot(j)\\(AB)(i)=(i)A\cdot B\end{array}}$

<u>性质1.</u> $(AB)C=A(BC)$，其中 AB，BC 都有意义

<u>性质2.</u> $(AB)^T=B^TA^T$

2的证明：　① 是同型矩阵（都是 $s\times m$ 阵）

② $\forall\ 1\le i\le s,\quad 1\le j\le m$

$$(AB)^T(ij) = (AB)(ji) = (j)A\cdot B(i)$$

$$(B^TA^T)(ij) = (i)B^T\cdot A^T(j)$$
$$= (j)A\cdot B(i)$$
$$= (AB)^T(ij)$$

\#

<u>性质3</u>　$(kA)\cdot B = k(AB) = A(kB)$

<u>性质4.</u>　$A(B+D) = AB+AD$

$(A+F)B = AB+FB$

4的证明：　① 左右同型

② $(A(B+D))_{ij} = (i)A\cdot(B+D)(j)$
$= (i)A(B(j)+D(j))$
$= (i)A\cdot B(j) + (i)A\cdot D(j)$

$(AB+AD)_{ij} = (i)A\cdot B(j) + (i)A\cdot D(j)$ \#

交换律不成立．消去律不成立

<u>性质5.</u>　$A0=0,\quad 0A=0$

<u>性质6.</u>　$\left.\begin{array}{l} E_mA_{m\times n} = A \\ A_{m\times n}E_n = A\end{array}\right\}\ \forall A$．其中 $E_m = \begin{pmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{pmatrix}_{m\times m}$

称为 m 阶单位矩阵

<u>性质1的证明</u>：　设 $A_{m\times n},\ B_{n\times s},\ C_{s\times t}$

方法1°：$\left(\left(A\times B\right)C\right)(i,j) = (i)(AB)\cdot(C)(j)$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{k1},\cdots,\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ks}\right)\begin{pmatrix} c_{1j}\\ c_{2j}\\ \vdots \\ c_{sj}\end{pmatrix}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{k1}c_{1j} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{k2}c_{2j} + \cdots + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ks}c_{sj}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\left(\sum_{l=1}^{s}\left(b_{k1}c_{1j} + b_{k2}c_{2j} + \cdots + b_{ks}c_{sj}\right)\right)$$

$$= (a_{i1}, a_{i2} \cdots a_{in}) \begin{pmatrix} \sum_{l=1}^{s} b_{1l} c_{lj} \\ \vdots \\ \sum_{l=1}^{s} b_{nl} c_{lj} \end{pmatrix} = (i)A \times (BC)(j)$$

$$= (A(BC))(ij)$$

方法 2°：

$$\{A(BC)\} = \begin{bmatrix} (1)A \cdot (BC(1)) & \cdots & (1)A \cdot (BC(t)) \\ \vdots & & \vdots \\ (m)A \cdot (BC(1)) & \cdots & (m)A \cdot (BC(t)) \end{bmatrix}$$

$$(AB) \cdot C = \begin{bmatrix} ((1)A \cdot B) \cdot C(1) & \cdots & ((1)(A \cdot B)) \cdot C(t) \\ \vdots & & \vdots \\ ((m)(AB)) \cdot C(1) & \cdots & ((m)(AB)) \cdot C(t) \end{bmatrix}$$

问题归结为证明 $(\alpha^T B)\beta = \alpha^T (B\beta)$. $\alpha\beta$ 为列向量

线性方程组的三种表述

1. $\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$

2. $x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$. 其中 $A = (\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n)$ 是系数矩阵.

$\tilde{A} = (A, \beta)$ 是增广矩阵

3. $AZ = \beta$. 其中 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$. $Z = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

结论 1. $r(A+B) \le r(A) + r(B)$

结论 2. 若 $AC = 0$. 其中 $A_{m\times n}$，则有 $r(A) + r(C) \le n$

结论 3. $r(A) + r(C) - n \le r(AC) \le \min\{r(A), r(C)\}$. $A_{m\times n}$. $C_{n\times s}$

结论 2 的证明：命 $C_{n\times s} = (\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_s)$. 已知

$$AC = A \cdot (\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_s) = (A\beta_1 \ A\beta_2 \cdots A\beta_s)$$

$$\therefore A\beta_1 = 0, \quad A\beta_2 = 0 \cdots A\beta_s = 0$$

即 $\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_s$ 是齐次线性方程组 $AZ=0$ 的解.

即 $\{\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_s\} \subseteq$ " $AZ=0$ 的解空间 "

$\therefore r(C) = r\{\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_s\} \leq n - r(A)$

即 $r(A) + r(C) \leq n$ #

e.g 2. 设 A 是 n 阶方阵. 求证 $A^2 = A \iff r(A) + r(E-A) = n$

Pf: " $\Rightarrow$ " $r(A) + r(E-A) \geq r(A + (E-A)) = n$

又 $\because$ $A(E-A) = 0$

$\therefore$ $r(A) + r(E-A) \leq n$

$\therefore$ $r(A) + r(E-A) = n$

" $\Leftarrow$ " 根据基础解系基本定理. 只须说明 $(A^2 - A)Z = 0$ 的基础解系中含 n 个向量

事实上: $\because r(A) = n - r(E-A)$

$\therefore (E-A)Z = 0$ 的基础解系中有 $r(A)$ 个向量

设为 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_{r(A)}$. 即有:

$\alpha_1, \cdots \alpha_{r(A)}$ 线性无关. 且 $A\alpha_i = \alpha_i$, $1 \leq i \leq r(A)$

同理. 由 $r(E-A) = n - r(A)$. 知有 $r(E-A)$ 个向量

$\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_{r(E-A)}$. 使 $A\beta_j = 0$

注意到 $\alpha_1, \cdots \alpha_{r(A)}, \beta_1 \cdots \beta_{r(E-A)}$ 中含有 n 个向量

且均为 $(A^2 - A)Z = 0$ 的解

设 $\sum_{i=1}^{r(A)} k_i\alpha_i + \sum_{j=1}^{r(E-A)} l_j\beta_j = 0$

两端左乘以 A. 得 $\sum_{i=1}^{r(A)} k_i\alpha_i = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = \cdots k_{r(A)} = 0$

回代. $l_1 = l_2 = \cdots = l_{r(E-A)} = 0$

$\therefore$ $k_i = l_j = 0 \quad \forall i, j$

$\therefore$ $\alpha_1, \cdots \alpha_{r(A)}, \beta_1, \cdots \beta_{r(E-A)}$ 无关

且都为 $(A^2 - A)Z = 0$ 的解 #

类似可得 若 $a \neq b$. 则 $A^2 - (a+b)A + abE = 0$

$\iff r(aE - A) + r(bE - A) = n$

结论3的证明: 令 $(\delta_1, \delta_2 \cdots \delta_s) = B_{m\times s} = A_{m\times n} C_{n\times s}$

$$= (\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n)_{m\times n} \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1s} \\ \vdots & & \\ C_{n1} & \cdots & C_{ns} \end{pmatrix}_{n\times s}$$

$$= \left(C_{11}\alpha_1 + \cdots + C_{n1}\alpha_n, \cdots, \sum_{i=1}^{n} C_{is}\alpha_i \right)$$

$\therefore \alpha_1, \alpha_n \overset{\ell}{\Longrightarrow} \delta_1 \cdots \delta_s$

$\therefore r(A) = r\{\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n\} \geq r\{\delta_1, \cdots \delta_s\} = r(B) = r(AC)$ #

结论3第二部分的证明: 求证 $r(AB) \geq r(A) + r(B) - n$, 其中 n 是 A 的列数

思路: ① $BZ=0$ 的基础解系中含 $n-r(A)$ 个向量

② "$(\mathrm{I}) \overset{\ell}{\Longrightarrow} (\mathrm{II})$" $\longrightarrow r(\mathrm{I}) \geq r(\mathrm{II})$

Pf: 令 $AB = C = (C(1)\, C(2) \cdots C(s))$

取定 $C(1), C(2) \cdots C(s)$ 一个极大无关组. 不妨设为 $C(1), C(2) \cdots C(r)$

其中 $r = r(C) = r(AB)$, $B = (B(1), B(2) \cdots B(s))$

设 $C(i) = \sum_{j=1}^{r} k_j C(j)$

则有 $AB(i) = C(i)$ $\forall i$, $1 \leq i \leq s$

$$\therefore C(i) = \sum_{j=1}^{r} k_j C(j) = \sum_{j=1}^{r} k_j A \cdot B(j)$$

$$= A\left(\sum_{j=1}^{r} k_j B(j)\right)$$

$$\therefore 0 = A\left[B(i) - \sum_{j=1}^{r} k_j B(j)\right]$$

$\therefore B(i) - \sum_{j=1}^{r} k_j B(j)$ 是 $AZ=0$ 的解

设 $AZ=0$ 的一个基础解系为 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_{n-r(A)}$

则 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_{n-r(A)} \overset{\ell}{\Longrightarrow} B(i) - \sum_{j=1}^{r} k_j \cdot B(j)$

$\therefore \alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_{n-r(A)}, B(1), B(2) \cdots B(r) \overset{\ell}{\Longrightarrow} B(1) \cdots B(s)$

$$\therefore n - r(A) + r(AB) \geq r\{\alpha_1 \cdots \alpha_{n-r(A)}, B(1) \cdots B(r)\}$$

$$\geq r\{B(1) \cdots B(s)\} = r(B)$$

$\therefore r(AB) \geq r(A) + r(B) - n$ #

§5. 矩阵代数 $M_n(\mathbb{F})$

记 $E_{ij} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (i) \\ (j) \end{array} \in \mathbb{F}^{m\times n}$ （(i,j)位置为1，其余位置为0）

则有 $A_{m\times n} = (a_{ij})_{m\times n} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}$ (表达式唯一)．且有

$$A+B = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+b_{ij})E_{ij}, \qquad kA = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(ka_{ij})E_{ij}$$

易于验证：
$$\boxed{E_{ij}E_{kl} = \begin{cases} 0 & \text{if } j\neq k \\ E_{il} & \text{if } j=k \end{cases}}$$

$$A\cdot B = \left(\sum_{i,j} a_{ij}E_{ij}\right)\left(\sum_{k,l} b_{kl}E_{kl}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{s} a_{ij}b_{jl}E_{il}$$

$M_n(\mathbb{F})$：

$$\left(\sum_{i,j} a_{ij}E_{ij}\right)\left(\sum_{k,l} b_{kl}E_{kl}\right) = \sum_{i,j,l} a_{ij}b_{jl}E_{il}$$

$(M_n(\mathbb{F}), +, \text{数乘}, \text{乘法})$

运算律 $\longrightarrow$ $\mathbb{F}$－代数

三种初等行变换

① $i \leftarrow j$
② $k\cdot(i)$
③ $(j)+k(i)$

$\Big\} \longrightarrow$ 对单位矩阵施以相同变换

<u>结论1</u>．对于A作一次初等行变换，$A\longrightarrow B$，不改变矩阵的秩，即 $r(A)=r(B)$

<u>结论2</u> (1) 对 $\underset{m\times n}{A}$ 作一次初等行变换，相当于对于A左乘以一个 $m\times m$ 的相应初等矩阵

(2) 对 $A_{m\times n}$ 作一次初等列变换，结果矩阵等于对A右乘一个 $n\times n$ 的相应初等矩阵

中间结果．对于初等阵 $P_1,\cdots P_r$，$Q_1\cdots Q_s$ 有 $r(P_rP_{r-1}\cdots P_1AQ_1Q_2\cdots Q_s) = r(A)$

<u>定义1</u> 若对于 $A\in\mathbb{F}^{n\times n} = M_n(\mathbb{F})$，若 $\exists B, C\in\mathbb{F}^{n\times n}$，s.t

$AB = E_n = CA$，则称 A是可逆矩阵．称 B是 A的右逆元．C是A的左逆元

命题 1. 若 A 是可逆的，则 A 的左右逆元都唯一且相等，称为 A 的逆元 A^{-1}

Pf: 设 $AB = E_n = CA$

$$B = E_n B = (CA)\cdot B = C\cdot(A\cdot B) = C \qquad \#$$

命题 2: 对于 $A \in M_n(\mathbb{F})$，以下三条件等价

① A 可逆 ② $r(A) = n$ ③ $\exists$ 初等阵 $P_1 \cdots P_s$, s.t. $A = P_1 \cdots P_s$

（$2n^2$ 个方程的方程组）（行向量组无关）（结构）

初等阵是可逆的

Pf: "①⇒②" 设 A 可逆，那么有 $AB = E \Rightarrow n = r(E) = r(AB)$

$\leq \min\{r(A), r(B)\}$

$\therefore \quad n \leq r(A) \leq n \quad \therefore \ r(A) = n$

"②⇒③" 设 $r(A) = n$，则由消元法过程知，A 可经过一系列的初等行变换化为 E_n，由结论2，知有初等阵 $Q_1, Q_2 \cdots Q_r$, s.t. $Q_r \cdots Q_1 A = E$，而 Q_i 为可逆矩阵且 Q_i^{-1} 与 Q_i 同一类型的初等阵，令 $P_i = Q_i^{-1}$，则有 $A = P_1 \cdots P_r$

"③⇒①" 命 $B = P_r^{-1} \cdots P_2^{-1} P_1^{-1}$

则 $AB = E$ $\qquad \#$

Cor 2.1 对于 $A \in M_n(\mathbb{F})$，A 可逆 $\Leftrightarrow$ A 右可逆 $\Leftrightarrow$ A 左可逆

Cor 2.2 用 $GL_n(\mathbb{F})$ 表示 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶可逆矩阵的集合，则 $GL_n(\mathbb{F})$ 关于矩阵的乘法作成一个（非交换）群

(1) 结合律成立

(2) 存在单位元 $E \in GL_n(\mathbb{F})$

(3) $\forall A \in GL_n(\mathbb{F})$，$A$ 在 $GL_n(\mathbb{F})$ 中有逆元

$GL_n(\mathbb{F})$ 叫 $\mathbb{F}$ 上的第 n 个一般线性群，$GL_n(\mathbb{F})$ 是典型群的一种

(The n'th general linearly group over $\mathbb{F}$)

命题 3: $A(B_1, \cdots B_u) = (AB_1, \cdots AB_u)$

同理 $\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_v \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} A_1 B \\ \vdots \\ A_v B \end{pmatrix}$

求逆矩阵. 设 A_n 可逆（$A \in GL_n(\mathbb{F})$）

构造 $B=(A,E_n)_{n\times 2n}$.

令 $A=P_1\cdots P_s$. 其中 P_i 是初等阵

令 $Q_i=P_i^{-1}$. 则 Q_i 也是初等阵且与 P_i 同型. $A^{-1}=P_s^{-1}\cdots P_1^{-1}=Q_s\cdots Q_1$

$$Q_s\cdots Q_1B=(Q_s\cdots Q_1A,\ Q_s\cdots Q_1E)$$
$$=(E,\ A^{-1}E)=(E,\ A^{-1})$$

Algorithm: (1) 构造 $(A,E_n)_{n\times 2n}=B$

(2) 用初等行变换将 B 化成 (E,D). 则 $D=A^{-1}$

$A^{-1}(A,B)=(E,\ A^{-1}B)$. $AZ=B$ 的解为 $Z=A^{-1}B$. (A 可逆)

$\begin{pmatrix}A\\C\end{pmatrix}A^{-1}=\begin{pmatrix}E\\CA^{-1}\end{pmatrix}$ $YA=C$ 的解为 $Y=CA^{-1}$ (A 可逆)

trace (迹) $tr(A_{n\times n})\overset{def}{=}\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$

① $tr(A+B)=tr(A)+tr(B)$

② $tr(kA)=k\,tr(A)$

③ $tr(A_nB_n)\neq tr(A)\cdot tr(B)$

④ $tr(A^T)=tr(A)$

§6. 矩阵分块与堆块

分块与堆块

$$A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s}\\ \vdots & & & \vdots\\ A_{t1} & A_{t2} & \cdots & A_{ts}\end{pmatrix}$$

运算. +. 数乘. 转置

乘法 (重要!!!)

设 $A_{m\times n}$. $B_{n\times s}$. ① 若 $B=(B_1,B_2)$. 则已有 $A(B_1,B_2)=(AB_1,AB_2)$

② 若 $A=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}B=\begin{pmatrix}A_1B\\A_2B\end{pmatrix}$

③ $A=(C_1,C_2)_{m\times n}$. $B=\begin{pmatrix}D_1\\D_2\end{pmatrix}_{n\times s}$ 其中 C_1 的列数 $=D_1$ 的行数 即 C_1D_1 有意义. 从而 C_2D_2 也有意义

则可验证 $AB=C_1D_1+C_2D_2$

Pf: 1° $A_{1\times n}$, $B_{n\times 1}$ 情形

不妨设 $C_1=(a_{11},\cdots a_{1m})$ $(1\le m<n)$

此时 $(C_1,C_2)\begin{pmatrix}D_1\\D_2\end{pmatrix}=(a_{11}\cdots a_{1m},a_{1,m+1}\cdots a_{1n})\begin{pmatrix}b_{11}\\ \vdots\\ b_{m1}\\ b_{m+1,1}\\ \vdots\\ b_{n}\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$

$=\sum_{i=1}^{m}a_ib_i+\sum_{i=m+1}^{n}a_ib_i$

$=C_1D_1+C_2D_2$

2° 一般情形

$(1)A = ((1)C_1,\ (1)C_2)$ ， $(m)A = ((m)C_1,\ (m)C_2)$

此时有 $(C_1\ C_2)\begin{pmatrix} C_2 \\ D_2 \end{pmatrix} = AB = \begin{pmatrix} (1)C_1, & (1)C_2 \\ \vdots & \vdots \\ (m)C_1, & (m)C_2 \end{pmatrix} B$

而 $((1)C_1,\ (2)C_2)B = ((1)C_1,\ (2)C_2)(B(1),\ B(2),\ \cdots B(s))$

$= (\_\ B(1),\ \_\ B(2),\ \_\ \cdots\ \_\ B(s))$

其中 $((1)C_1,\ (1)C_2)\cdot B(1) = ((1)C_1,\ (1)C_2)\begin{pmatrix} D_1(1) \\ D_2(1) \end{pmatrix}$

$= (1)C_1D_1(1) + (1)C_2D_2(1)$

$$\therefore (C_1, C_2)\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1)C_1D_1(1)+(1)C_2D_2(1), & \cdots\cdots & (1)C_1D_1(s)+(1)C_2D_2(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (m)C_1D_1(1)+(m)C_2D_2(1) & \cdots & (m)C_1D_1(s)+(m)C_2D_2(s) \end{pmatrix}$$

$= C_1D_1 + C_2D_2$ #

e.g. ① 求证. 分块阵 $\begin{pmatrix} 0 & A_n \\ B_m & 0 \end{pmatrix}$ 可逆 $\Leftrightarrow$ A与B均可逆

② 可逆时. 求 $\begin{pmatrix} 0 & A_n \\ B_m & 0 \end{pmatrix}$ 的逆

Pf: ① "$\Leftarrow$" 设A与B均可逆. 则可设

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & E_m \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} Z = A^{-1} \\ Y = B^{-1} \\ T = X = 0 \end{cases}$$

$\therefore$ 逆 $\begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$

"$\Rightarrow$" 显然.

② $\begin{pmatrix} 0 & A_n \\ B_m & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & B_m^{-1} \\ A_n^{-1} & 0 \end{pmatrix}$

注 $\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r^{-1} \end{pmatrix}$

准对角阵

HA-25

$$\begin{pmatrix} O & & B_1 \\ & B_2 & \\ B_t & & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & & B_t^{-1} \\ & & \\ B_1^{-1} & & O \end{pmatrix}$$

三种初等块矩阵

1. $\begin{pmatrix} A & & \\ & E & \\ & & E \end{pmatrix}$. 其中A可逆 $\begin{pmatrix} E & & & \\ & E_A & & \\ & & E & \\ & & & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & & & \\ & E_{P_s} & & \\ & & E & \\ & & & E \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} E & & & \\ & E_{P_1} & & \\ & & E & \\ & & & E \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} & E_n & \\ E_m & & \\ & & E_s \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} E_m & & \\ & E_n & \\ & B & E_s \end{pmatrix}$

命题1　左(右)乘以分块矩阵A以一个合适的初等块矩阵，相当于对于A作了一次相应的初等行(列)块变换

e.g 1　设 A_m 可逆，B_n 可逆，设 $C_{m\times n}$. 求证 $\begin{pmatrix} A_{m\times n} & C \\ 0 & B_{n\times n} \end{pmatrix}$ 可逆，并求其逆

Pf: $\left(\begin{array}{cc|cc} A & C & E & 0 \\ 0 & B & 0 & E \end{array}\right) \xrightarrow{行} \left(\begin{array}{cc|cc} A & 0 & E & -CB^{-1} \\ 0 & B & 0 & E \end{array}\right)$

$\xrightarrow{行} \left(\begin{array}{cc|cc} E & 0 & A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B & 0 & E \end{array}\right) \xrightarrow{行} \left(\begin{array}{cc|cc} E & 0 & A^{-1} & -A^{-1}CB \\ 0 & E & 0 & B^{-1} \end{array}\right)$

$\therefore$ D可逆. 其逆 $D^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$

e.g 2. 设 A_m 可逆，$B_{m\times n}$, $C_{n\times m}$, D_n 已给. 考虑 $H = \begin{pmatrix} A_{m\times m} & B_{m\times n} \\ C_{n\times m} & D_{n\times n} \end{pmatrix}$，求H可逆的条件. 并在H可逆时. 求 H^{-1}

Pf. $(H, E) = \left(\begin{array}{cc|cc} A & B & E & 0 \\ C & D & 0 & E \end{array}\right) \xrightarrow{行} \begin{pmatrix} A & B & E & 0 \\ 0 & D-CA^{-1}B & -CA^{-1} & E \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 可逆 $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} E & 0 \\ -CA^{-1} & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 可逆，即 $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D-(CA^{-1})B \end{pmatrix}$ 可逆

又: $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & -A^{-1}B \\ 0 & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$　$\therefore$ H可逆 $\Leftrightarrow$ $D-CA^{-1}B$ 可逆

下设 $D-CA^{-1}B=L$ 可逆. 继续消元

$$\begin{pmatrix} A & B & E & 0 \\ 0 & L & -CA^{-1} & E \end{pmatrix} \xrightarrow{行} \begin{pmatrix} A & 0 & E+BL^{-1}CA^{-1} & -BL^{-1} \\ 0 & L & -CA^{-1} & E \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{行} \left(\begin{array}{cc|cc} E & 0 & A^{-1}+A^{-1}BL^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BL^{-1} \\ 0 & E & -L^{-1}CA^{-1} & L^{-1} \end{array}\right)$$

#

求证: $A^2=A \Leftrightarrow n=r(A)+r(E-A)$

Pf: $$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & E-A \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} A & 0 \\ A & E-A \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} A & A \\ A & E \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} A-A^2 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

#

e.g.3. 设 $\lambda \in \mathbb{F}$. $\lambda \neq 0$. 设 $A_{m\times n}$ 与 $B_{n\times m}$ 是 $\mathbb{F}$ 上矩阵. 求证:

$\lambda E_m - AB$ 可逆 $\Leftrightarrow$ $\lambda E_n - BA$ 可逆

Pf: $$\begin{pmatrix} \lambda E_m - AB & 0 \\ 0 & E_n \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \lambda E_m - AB & A \\ 0 & E_n \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \lambda E_m & A \\ B & E \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} E_m & \frac{1}{\lambda}A \\ B & E \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} E_m & A \\ B & \lambda E_n \end{pmatrix} \xrightarrow{两步} \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ 0 & \lambda E_n - BA \end{pmatrix}$$

#

$\therefore$ $\lambda E - AB$ 可逆 $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda E_m - AB & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$ 可逆 $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ 0 & \lambda E - BA \end{pmatrix}$ 可逆

$\Leftrightarrow$ $\lambda E - BA$ 可逆

命题 A_n 可逆 $\Leftrightarrow$ $\exists$ 初等阵 $P_1 \cdots P_s$, s.t. $A=P_s \cdots P_1$

1. $\forall A_{m\times n}$ ($\mathbb{F}$ 上矩阵), $\exists$ 可逆 P 使 PA 为标准(行)阶梯形
2. $\forall A_{m\times n} \in \mathbb{F}^{m\times n}$. $\exists$ 可逆 P_m. Q_n. s.t. $P_m A Q_n = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   其中 $r=r(A)$

基础解系基本定理 $\forall A \in \mathbb{F}^{m\times n}$. 命 $Z^T=(x_1, x_2 \cdots x_n)$

$AZ=0$ 的基础解系中含 $n-r(A)$ 个向量

Pf: 不妨设可逆 P. s.t. $PA = \left(\begin{array}{c|c|c|c} E_r & \beta_1 & \beta_2 & \cdots \beta_{n-r} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

令 $\delta_1 = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots \delta_{n-r}\begin{pmatrix} \beta_{n-r} \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. 易见 $\delta_1, \cdots \delta_r$ 线性无关且是 $PAZ=0$ 的解.

再证 $\delta_1, \delta_2 \cdots \delta_{n-r}$ 线性表示所有解

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} E_r & \beta_1 & \cdots & \beta_{n-r} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right)\begin{pmatrix} \delta \\ k_1 \\ \vdots \\ k_{n-r} \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow \delta = -\sum_{i=1}^{n-r} k_i\beta_i$$

取 $l_i = -k_i$. 则 $\delta = \sum_{i=1}^{n-r} l_i\delta_i$ #

e.g. 设 $A_{m\times n}$. $B_{n\times s}$ 已给. 求证: $r(AB) \geq r(A) + r(B) - n$

Pf: 法二: 设 $PAQ = \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$. $r = r(A)$

$$r(PAB) = r(AB)$$
$$\| $$
$$r(PAQQ^{-1}B).$$ 令 $B_1 = Q^{-1}B$. 满足 $r(B_1) = r(B)$

令 $B_1 = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$. 则 $PAB = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$r(AB) = r(PAB) = r(B_1) \geq r - (n - r(B))$$

易见 $r(AB) + r(B_2) \leq r(AB) + (n-r)$ #

法三:

$$\begin{pmatrix} B & E \\ 0 & A \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} B & E \\ -AB & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & E \\ -AB & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad n + r(AB) = r\begin{pmatrix} B & E \\ 0 & A \end{pmatrix} \geq r(B) + r(A)$$ #

e.g 求证. $r\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \geq r(A) + r(C)$

Pf. 设可逆 P_i. Q_i. 使 $P_1AQ_1 = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 且 $P_2CQ_2 = \begin{pmatrix} E_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

则 $\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix}$ 均可逆且

$$\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1A & P_1B \\ 0 & P_2C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1AQ_1 & P_1BQ_2 \\ 0 & P_2CQ_2 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{matrix} \\ \hline 0 & \begin{matrix} E_s & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} E_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_4 \\ 0 & 0 & E_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \therefore\ r\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = r(E_r) + r(E_s) + r(B_4)$$

$$\geqslant r + s = r(A) + r(B)$$

#

推广. 设 ABC 有意义

$$\begin{pmatrix} B & E \\ 0 & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BC & B \\ 0 & AB \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} BC & B \\ 0 & AB \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & B \\ -ABC & AB \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & B \\ -ABC & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore \quad r(B) + r(ABC) \geqslant r(AB) + r(BC)$

即 $\quad r(ABC) \geqslant r(AB) + r(BC) - r(B)$

e.g. 设 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$. 求证. $r(A) = r \iff \exists$ 列满秩的 $B_{m\times r}$, $\exists$ 行满秩的 $C_{r\times n}$. 使 $A = BC$

Pf: "$\Rightarrow$" 设 $r(A) = r$. 则有 可逆 P 与 Q. s.t. $PAQ = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\therefore A = P^{-1}\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}$$

$$= \left[P^{-1}\begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}\right]\left[\begin{pmatrix} E_r & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}\right]$$

$$\stackrel{\text{记}}{=} B \cdot C$$

"$\Leftarrow$" 设 $A = B_{m\times r} C_{r\times n}$

$r(B) = r = r(C)$.

$\exists$ 可逆 $P \cdot Q$. 使 $PB = \begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}$. $CQ = (E_r \ \ 0)$

$$\therefore \quad PBCQ = PAQ = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$r(A) = r(PAQ) = r$$

#

Ch 3. 行列式 (Determinant)

$\vec{\alpha_1} \times \vec{\alpha_2}$ 叉积

性质: $\vec{\alpha_1} \times \vec{\alpha_2} = -\vec{\alpha_2} \times \vec{\alpha_1}$

$\vec{\alpha_1} \times (\vec{\beta_1} + \vec{\beta_2}) = \vec{\alpha_1} \times \vec{\beta_1} + \vec{\alpha_1} \times \vec{\beta_2}$

命题: 用 V 表示可由 $\vec{\alpha_1}, \vec{\alpha_2}, \vec{\alpha_3}$ 确定的平行六面体的体积. 则

$$HA-?\ (\vec{\alpha_1}, \vec{\alpha_2}, \vec{\alpha_3}) = \begin{cases} V & \vec{\alpha_1}, \vec{\alpha_2}, \vec{\alpha_3} \text{ 成右手系} \\ -V & \vec{\alpha_1}, \vec{\alpha_2}, \vec{\alpha_3} \text{ 成左手系} \end{cases}$$

注：若 $\vec{\alpha_1}.\vec{\alpha_2}.\vec{\alpha_3}$ 成右手系．则 $\vec{\alpha_2}.\vec{\alpha_1}.\vec{\alpha_3}$ 成左手系

而 $\vec{\alpha_2}.\vec{\alpha_3}.\vec{\alpha_1}$ 成右手系

$$(\vec{\alpha_1}\times\vec{\alpha_2})\cdot\vec{\alpha_3} = \{(a_{11}\vec{i}+a_{12}\vec{j}+a_{13}\vec{k})\times(a_{21}\vec{i}+a_{22}\vec{j}+a_{23}\vec{k})\}\cdot\vec{a_3}$$

$$= \vec{\alpha_3}\cdot\left[(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\vec{k}+(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})\vec{i}+(a_{13}a_{21}-a_{11}a_{23})\vec{j}\right]$$

$$= \vec{\alpha_3}\cdot\left\{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\vec{k}+\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23}\end{vmatrix}\vec{j}\right\}$$

$$= \vec{a_3}\cdot\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}$$

$$= a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23}\end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$$

$$(\vec{\alpha_1}.\vec{\alpha_2}.\vec{\alpha_3}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

三阶行列式性质

<u>性质1</u>．交换两行．行列式变号

<u>性质2</u>．将某行的若干倍加到另外一行．行列式不变

排列中的 $\begin{cases}\text{逆序对：2341中．21；31；41：共三对} \\ \text{逆序数：}\tau(2341)=3\end{cases}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} \qquad a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}$$

其中 $\tau(123)=0$．$\tau(312)=2$．$\tau(231)=2$．$\tau(321)=3$．$\tau(213)=1$．$\tau(132)=1$

其中 $M_{12} \overset{def}{=} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$ 称为 a_{12} 在矩阵A中的余子式．而 $(-1)^{1+2}M_{12} \overset{记}{=} -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}$

称为 a_{12} 在A中的代数余子式

子式（minor）

余子式（cominor）

推广：$\forall A=(a_{ij})\in\mathbb{F}^{m\times n}$. A的行列式定义为

定义 ① $|A|=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}M_{1j}\cdot a_{1j}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}$

② $|A|=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots\cdots a_{ni_n}$

（组合定义，$n!$项的代数和）

③ 若存在映射 $\varphi: M_n(\mathbb{F})\longrightarrow\mathbb{F}$. 满足三条件：

① $\varphi(E)=1$

② φ关于矩阵的每一行具有线性性. e.g

反对称
行线性函数

$$\varphi\begin{pmatrix}k_1\alpha_1+k_2\beta_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=k_1\varphi\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}+k_2\varphi\begin{pmatrix}\beta_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$$ （行线性函数）

③ 若交换A中某两行位置得B，则 $\varphi(B)=-\varphi(A)$
（反对称）

则称φ是 $M_n(\mathbb{F})$上的一个行列式映射、简称行列式

以下设φ是行列式映射

性质1. 若矩阵A_n中有两行成比例. 则 $\varphi(A)=0$

e.g $$\varphi\begin{pmatrix}\alpha_1\\ 2\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=2\varphi\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=-2\varphi\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=0$$

性质2. 将A的某一行若干倍加到另外一行得B. $\varphi(B)=\varphi(A)$

e.g $$\varphi\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2+2\alpha_1\\ \alpha_3\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=\varphi\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}+2\varphi\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_1\\ \alpha_3\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=\varphi\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$$

性质3 $\varphi(A)=0\Leftrightarrow r(A)<n$（即A不可逆）

Pf：消元法，$\exists$第二、三种初等阵 $P_1\cdots P_s$, s.t.

$P_s\cdots P_1A$成为行阶梯形B，则 $\varphi(B)=(-1)^r\varphi(A)$

其中 r为 $P_s\cdots P_1$中第二种初等阵的个数

而 $r(A)<n\iff r(B)<n\iff$ B中有0行

(1) 若 $r(A)<n$. 则B中有零行. 此时. 由性质1. 知 $\varphi(B)=0$

$\therefore \varphi(A)=0$

(2) 若 $\varphi(A)=0$. 则 $\varphi(B)=0$. 此时B中必须有零行. 否则

$$B=\begin{pmatrix} k_1 & & & * \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & & & 0 \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & k_n \end{pmatrix} = k_1k_2\cdots k_n\varphi(E)$$
$$=k_1k_2\cdots k_n\neq 0$$

#

命题1. $M_n(\mathbb{F})$ 上的行列式映射若存在则唯一. 记det

Pf. 设 $\varphi, \psi: M_n(\mathbb{F})\to\mathbb{F}$ 均满足定义3中条件①～③. 要求 $\varphi=\psi$

只要验证 $\varphi(A)=\psi(A)\quad \forall A\in M_n(\mathbb{F})$

若 $r(A)<n$. 则 $\varphi(A)=0=\psi(A)$

若 $r(A)=n$. 则 $\exists$ 第二、三种初等阵 $P_1\cdots P_s$. s.t

$$P_s\cdots P_1A=k_1k_2\cdots k_nE$$

此时 $\varphi(A)=(-1)^r k_1\cdots k_n\varphi(E)$
$=(-1)^r k_1\cdots k_n\psi(E)$
$=\psi(A)$. 其中 r 为第二种初等阵

$\therefore \varphi=\psi$ #

性质4. $\det(A^T)=\det(A)$

Pf. 若 $r(A)<n$. 则 $r(A^T)=r(A)<n$. 此时 $\det(A^T)=0=\det(A)$

若 $r(A)=n$. 则 $\exists$ 初等阵 $P_1\cdots P_s$, 使 $P_s\cdots P_1A=E$

此时有 $\det(A)=(-1)^r\frac{1}{k_1}\cdots\frac{1}{k_t}$. 其中 r 是 $P_1\cdots P_s$ 中第二种初等阵的个数. 而 $k_1, k_2\cdots k_t$ 分别为 $P_1\cdots P_s$ 中 t 个第一种初等阵涉及的倍数

$\Rightarrow A^TP_1^TP_2^T\cdots P_s^T=E$

$\Rightarrow A^T=(P_s^T)^{-1}\cdots(P_1^T)^{-1}$

$\Rightarrow P_1^TP_2^T\cdots P_s^TA^T=E$, 其中 P_i^T 是与 P_i 同型的初等阵.

且若 P_i^T 是第一种初等阵, 则 $P_i^T=P_i$

$\therefore \det(A^T)=(-1)^r\frac{1}{k_1}\cdots\frac{1}{k_t}$ #

性质5　$\det(A\cdot B)=\det(A)\cdot\det(B)$

$(|A\cdot B|=|A|\cdot|B|)$

Pf:　$r(AB)<n \iff r(A)<n$ 或 $r(B)<n$.

此时 $r(AB)=0=\det(A)\cdot\det(B)$

$r(AB)=n$ 时. $r(A)=n=r(B)$ 　　　　$\in\mathbb{F}$.

此时 $\exists$ 二、三种初等阵 $P_1\cdots P_s$, $Q_1\cdots Q_t$. 使 $k_i, l_i\neq 0$

s.t. $P_s\cdots P_1A=\mathrm{diag}\{k_1\cdots k_n\}$

$BQ_1\cdots Q_t=\mathrm{diag}\{l_1\cdots l_n\}$

此时. $\det(A)=(-1)^r k_1\cdots k_n$

$\det(B)=(-1)^u l_1\cdots l_n$

$\Rightarrow$ $P_1\cdots P_s(AB)Q_1\cdots Q_t=\mathrm{diag}\{k_1l_1\cdots k_nl_n\}$

$\therefore$ 依性质4. 知 $\det(AB)=(-1)^{r+u}\cdot k_1l_1\cdots k_nl_n$

$=\det(A)\cdot\det(B)$ 　　#

Hadamard 哈达玛矩阵 H_n ① $(-1,1)$矩阵 ② $H_n\cdot H_n^T=nE$

行列式存在!

Pf: $\varphi(A)=|(a_{ij})_{n\times n}|=\sum\limits_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$

(是 $n!$ 项的代数和. 每一项由取自不同行. 不同列的元素的乘积·(±1)构成

正负号由排列的逆序数 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$ 的偶奇性决定)

验证: ① $\varphi(E)=(-1)^{\tau(123\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=1$

② 显然

③ 验证: 若 $B=\begin{pmatrix}\alpha_i\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_{i-1}\\ \alpha_1\\ \alpha_{i+1}\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$, 则 $\varphi(B)=-\varphi\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$

某排列交换两项逆序数奇偶性改变

#

e.g. 若 A n 阶数 n 是奇数，且 $A^T=-A$（反对称），则 $|A|=0$

Pf: $|A^T|=|A|=(-1)^n|A|=-|A|$

$\Rightarrow |A|=0$ #

e.g. $A_{m\times n}$. $B_{n\times m}$. 求证：$|xE-AB|=x^{m-n}|xE-BA|$

Pf: $\det\begin{bmatrix} E & A \\ B & xE \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} E & A \\ 0 & xE-BA \end{bmatrix} = \det(E)\cdot\det(xE-BA) = \det(xE-BA)$

$\parallel$

$x^n\det\begin{bmatrix} E_m & A \\ \frac{1}{x}B & E \end{bmatrix} = x^{n-m}\det\begin{bmatrix} xE_m & xA \\ \frac{1}{x}B & E \end{bmatrix}$

<u>Laplace 展开式</u>：

降维计算

$$|A| = a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \xlongequal{\text{第}i\text{行}} \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij} \xlongequal{\text{第}j\text{列}} \sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ij}$$

Pf:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1\,2} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+\cdots+0 & \cdots & 0+\cdots+0+a_{in} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1\,2} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n \begin{vmatrix} & * & \\ 0\cdots 0 & a_{ij} & 0\cdots 0 \\ & \boxed{} & \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^n a_{ij} \begin{vmatrix} * & 0 & ** \\ 0\cdots 0 & 1 & 0\cdots 0 \\ \Delta & 0 & \Delta\Delta \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(-1)^{(i-1)+(j-1)} \begin{vmatrix} 1 & 0\cdots 0 & 0\cdots 0 \\ 0 & * & ** \\ 0 & \Delta & \Delta\Delta \end{vmatrix}$$

问题归结为验证 $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix} = |B|$，显然成立 #

<u>命题1</u>：(1) $\sum_{j=1}^n a_{ij}A_{kj} = \begin{cases} |A| & i=k \\ 0 & i\neq k \end{cases}$，其中 $A=(a_{ij})_{n\times n}$

(2) $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik} = \begin{cases} |A| & j=k \\ 0 & j\neq k \end{cases}$

引进 A 的伴随矩阵 $A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$

<u>命题 1'</u>. $AA^* = A^*A = |A|E$

<u>Cor 2</u>. 对于 $A \in \mathbb{F}^{n\times n} \Leftrightarrow |A| \neq 0$. 且 $|A| \neq 0$ 时. 有 $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^*$

<u>e.g.</u> 计算 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & 1 & \cdots & 2 & n-1 \end{vmatrix}$

Solution:

$$D_n = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & & & \\ n-1 & n & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 1 & 1 & 1 & & & \\ 1 & 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -n & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}_n$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -n \\ & 0 & & & \\ & & & 0 & \\ 0 & -n & & & \end{vmatrix}_{n-1} = \frac{(n+1)n^{n-1}}{2} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{n^{n-1}(n+1)}{2}$$

e.g 2. 求证：Vandermonde行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j)$$

Pf: 归纳法：$n=2$时，显然

下设 $n>2$，并设 $n-1$情形

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-3} & a_2^{n-3} & \cdots & a_n^{n-3} \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2-a_1 & \cdots & a_n-a_1 \\ 0 & a_2(a_2-a_1) & \cdots & a_n(a_n-a_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2^{n-3}(a_2-a_1) & \cdots & a_n^{n-3}(a_n-a_1) \\ 0 & a_2^{n-2}(a_2-a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n-a_1) \end{vmatrix}$$

$$= (a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & \cdots & a_n \\ a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2^{n-3} & \cdots & a_n^{n-3} \\ a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= (a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)\prod_{2\le j<i\le n}(a_i-a_j)$$

$$= \prod_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j)$$

#

Cramer's Rule

若 A_n可逆，则 $Az=\beta$有唯一的解 $x_i = \dfrac{D_i}{D}$

其中 D_t为将 A 的第t列换为β后的阵的行列式，而 $D=|A|$

Pf. $AZ=\beta$ 的解为 $Z=A^{-1}\beta=\frac{1}{|A|}A^*\beta$

$\therefore$ $x_i=\frac{1}{|A|}(i)A^*\beta$

$=\frac{1}{|A|}\sum_{j=1}^{n}b_jA_{ji}$

$$=\frac{1}{|A|}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc} & & (i)列 & & \end{array}\\ \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1\,i-1} & b_1 & a_{1\,i+1} \cdots & a_{1n} \\ \vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n1} \cdots a_{n\,i-1} & b_n & a_{n\,i+1} \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}\end{array}$$

$=\frac{1}{|A|}D_i$ #

$\underline{A_{m\times n} 的 r 阶子矩阵}$ $\forall r\le\min\{m,n\}$

$\underline{定义}$ $\forall 1\le i_1<i_2<\cdots<i_r\le m$. $\forall 1\le j_1<j_2<\cdots<j_r\le n$

$A(i_1,\cdots i_r;j_1\cdots j_r)$. 其位置 (k,l) 为 $a_{i_k j_l}$

$\underline{A的r阶子式}$ $\det[A(i_1,\cdots i_r;j_1\cdots j_r)]$

$\boxed{余子式}$ M 划去 A 的第 $i_1,\cdots i_r$ 行, $j_1\cdots j_r$ 列所得 $n-r$ 阶阵的行列式.

其$\underline{代数余子式}$为 $(-1)^{(i_1+\cdots+i_r)+(j_1+\cdots+j_r)}M$

$\underline{秩与行列式的关系}$

对于 $A_{m\times n}$. 有 $r(A)=r$ <=> A 有一个 r 阶子式不为 0. 而所有 $r+1$ 阶子式全为 0

$\underline{Pf}$: "$\Longrightarrow$". 设 $r(A)\le r$. 此时 A 的行秩 $\le r$

$\therefore$ A 的任意 $r+1$ 个行向量线性相关

$\forall 1\le i_1<\cdots<i_{r+1}\le m$. $1\le j_1<\cdots<j_{r+1}\le n$

可设 $(i_{r+1})A=\sum_{t=1}^{r}k_t\cdot(i_t)A$ $(*)$

此时 $A(i_1,i_2\cdots i_{r+1};j_1,j_2\cdots j_{r+1})$ 仍然保持线性关系 $(*)$

因此. 若 $r(A)\le r$. 则 A 的任一 $r+1$ 阶子式全为 0.

"$\Longleftarrow$"

若 $r(A)=s>r$. 则有 A 有 $r+1$ 个行向量线性无关. 设为 $1\le i_1<\cdots<i_{r+1}\le m$ 行. 记 $B=\begin{pmatrix}(i_1)A\\(i_2)A\\\vdots\\(i_{r+1})A\end{pmatrix}$, B的行秩 = B的列秩

∴ 任取B的列向量组的一个极大线性无关部分组 $(j_1, j_2 \cdots j_{r+1})$.

$\det(A(i_1, i_2\cdots i_{r+1}; j_1, j_2\cdots j_{r+1}))\neq 0$. 矛盾! #

Laplace按多行展开

取定A_n的r行. $1\le i_1<i_2<\cdots<i_r\le n$. 设其中所有的$r$阶子式为

$M_1, M_2\cdots M_{C_n^r}$. 设M_i在A中的代数余子式为N_i

则 $A=\sum_{i=1}^{C_n^r} M_i N_i$

Binet-Cauchy公式

设$A_{m\times n}$, $B_{n\times s}$已给. $r\in \min\{m,n,s\}$. 设$AB=C_{m\times s}$.

对于任意 $\forall\, 1\le i_1<i_2<\cdots<i_r\le m$. $1\le j_1<j_2<\cdots<j_r\le s$

$$|C(i_1,i_2\cdots i_r; j_1,j_2\cdots j_r)| = \sum_{1\le k_1<k_2<\cdots<k_r\le n} |A(i_1,i_2,\cdots i_r; k_1,\cdots k_r)|\cdot|B(k_1,k_2\cdots k_r; j_1, j_2\cdots j_r)|$$

Ch4. 相似矩阵与特征值. 特征向量

$\forall A, B\in M_n(\mathbb{F})$. 若∃可逆$P$ s.t. $P^{-1}AP=B$. 则称A与B相似.

记成 $A\overset{s}{\sim}B$ (similar)(conjugate)

性质1. $A\overset{s}{\sim}A$

2. 若 $A\overset{s}{\sim}B$. 则 $B\overset{s}{\sim}A$

3. 若 $A\overset{s}{\sim}B$, $B\overset{s}{\sim}C$. 则 $A\overset{s}{\sim}C$ (从而$\overset{s}{\sim}$是等价关系)

另一等价关系 $\overset{e}{\sim}$ $A_{m\times n}\overset{e}{\sim}B$ ⟺ ∃可逆P_m与Q_n. 使$PAQ=B$.

($\overset{e}{\sim}$: equivalent)

① 等价标准形

$$\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}_{m\times n}\quad r=r(A)$$

② 相似标准形

Jordan标准形 $\begin{pmatrix}J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_s\end{pmatrix}$

其中 $J_i=\begin{pmatrix}\lambda_i & 1 & & 0\\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & \lambda_i\end{pmatrix}$

问题1 A_n 满足何条件时，可相似于一个对角阵 $\begin{pmatrix} k_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & k_n \end{pmatrix} = diag\{k_1 \cdots k_n\}$

若 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} k_1 & & \\ & \ddots & \\ & & k_n \end{pmatrix}$. $A = P\begin{pmatrix} k_1 & & \\ & \ddots & \\ & & k_n \end{pmatrix}P^{-1}$

$$A^m = P\begin{pmatrix} k_1 & & \\ & \ddots & \\ & & k_n \end{pmatrix}P^{-1}P\begin{pmatrix} k_1 & & \\ & \ddots & \\ & & k_n \end{pmatrix}P^{-1}\cdots\cdots P\begin{pmatrix} k_1 & & \\ & \ddots & \\ & & k_n \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$= P\begin{pmatrix} k_1^m & & \\ & \ddots & \\ & & k_n^m \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$f(A) = P\begin{pmatrix} f(k_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(k_n) \end{pmatrix}P^{-1}$$

若 P 存在 且 $k_1, k_2 \cdots k_n \in \mathbb{F}$ 存在，命 $P = (\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n)$，其中 $\alpha_i \in \mathbb{F}^{n\times 1}$

则 P 可逆 $\Leftrightarrow \alpha_1, \cdots \alpha_n$ 线性无关

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} k_1 & & \\ & \ddots & \\ & & k_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow A(\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n) = (\alpha_1, \cdots \alpha_n)\begin{pmatrix} k_1 & & \\ & \ddots & \\ & & k_n \end{pmatrix}$$

$$(A\alpha_1, A\alpha_2 \cdots A\alpha_n) = (k_1\alpha_1, \cdots k_n\alpha_n)$$

$\therefore$ $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} k_1 & & \\ & \ddots & \\ & & k_n \end{pmatrix}$ 当且仅当 $A\alpha_i = k_i\alpha_i$

定理1 设 $A \in M_n(\mathbb{F})$，则 A 在 $\mathbb{F}$ 上相似于一个对角阵当且仅当存在 n 个线性无关的向量 $\alpha_1, \cdots \alpha_n \in \mathbb{F}^{n\times 1}$ 及 $k_1 \cdots k_n \in \mathbb{F}$ 使得 $A\alpha_i = k_i\alpha_i$

Pf. "$\Rightarrow$" 已证

"$\Leftarrow$" 此时，命 $P = (\alpha_1, \cdots \alpha_n)$，则有

$$AP = (A\alpha_1, \cdots A\alpha_n) = (k_1\alpha_1, \cdots k_n\alpha_n)$$

$$= (\alpha_1 \cdots \alpha_n)\begin{pmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_n \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_n \end{pmatrix}$$

#

定义1 (twin concepts) 设 $A \in M_n(\mathbb{F})$，若存在 $\boxed{\text{非零}}$ 向量 $\alpha \in \mathbb{F}^{n\times 1}$ 及 $\lambda \in \mathbb{F}$ 使 $A\alpha = \lambda\alpha$，则称 α 是属于特征值 λ 的特征向量

定理1' 设 $A \in M_n(\mathbb{F})$，则 A $\boxed{\text{在 } \mathbb{F} \text{ 上}}$ 相似于一个对角阵，当且仅当 $\exists\, n$ 个线性无关的特征向量

问题2 给定 A. 如何求 A 的所有特征值 $(\in \mathbb{F})$ 与特征向量 $(\in \mathbb{F}^{n\times 1})$?

$$A\alpha = (\lambda E)\alpha \iff (\lambda E - A)\alpha = 0$$

$\because$ $(\lambda E - A)X = 0$ 有非零解 $\iff |\lambda E - A| = 0$

① 求特征值. 求多项式 $g(x) = |xE - A|$ 在 $\mathbb{F}$ 上的所有根

(根即为 A 的特征值)

② 设 $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ 是 $g(x) = |xE - A|$ 在 $\mathbb{F}$ 上所有的两两互异的根

则 A 的属于 λ_i 的特征向量的一个极大无关组恰为 $(\lambda_i E - A)X = 0$ $(*)$ 的一个基础解系.

若 $\alpha_1, \cdots \alpha_u$ $(u = n - r(\lambda_i E - A))$ 是 $(*)$ 的一个基础解系, 那么 λ_i 的所有特征向量为 $\left\{ \sum_{i=1}^{u} k_i \alpha_i \neq 0 \mid k_i \in \mathbb{F} \right\}$

$= $ 矩阵 $\lambda_i E - A$ 的解空间 $\setminus \{0\}$

$\overset{\text{def}}{=} V_{\lambda_i E - A} \setminus \{0\}$

$V_{\lambda_i E - A} \overset{\text{def}}{=} V_{\lambda_i}^{A}$ 称为 A 的属于 λ_i 的<u>特征子空间</u>

命题2 A 的属于不同特征值的特征向量线性无关

Pf. 设 $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ 是 A 的全部两两互异的特征值. 设 $A\alpha_i = \lambda_i \alpha_i$

下证 $\alpha_1 \ldots \alpha_r$ 线性无关

事实上. 设 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r = 0$ 左乘 A

$$\begin{cases} \lambda_1 k_1 \alpha_1 + \lambda_2 k_2 \alpha_2 + \cdots + \lambda_r k_r \alpha_r = 0 & \text{左乘 } A \\ \lambda_1^2 k_1 \alpha_1 + \lambda_2^2 k_2 \alpha_2 + \cdots + \lambda_r^2 k_r \alpha_r = 0 & \\ \vdots & \\ \lambda_1^{r-1}(k_1\alpha_1) + \lambda_2^{r-1} k_2 \alpha_2 + \cdots + \lambda_r^{r-1} k_r \alpha_r = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_r \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{r-1} & \lambda_2^{r-1} & \cdots & \lambda_r^{r-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1\alpha_1 \\ k_2\alpha_2 \\ \vdots \\ k_r\alpha_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\because \lambda_i \neq \lambda_j \quad \therefore$ 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_r \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{r-1} & \lambda_2^{r-1} & \cdots & \lambda_r^{r-1} \end{pmatrix}$ 可逆

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} k_1\alpha_1 \\ k_2\alpha_2 \\ \vdots \\ k_r\alpha_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow k_i\alpha_i = 0 \Rightarrow k_i = 0$$

#

e.g.1. 问矩阵 A 是否相似于对角阵？

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Solution. $|xE - A| = \begin{vmatrix} x-3 & -2 & -2 \\ -2 & x-3 & -2 \\ -2 & -2 & x-3 \end{vmatrix} = (x-7)\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & x-3 & -2 \\ 1 & -2 & x-3 \end{vmatrix}$

$$= (x-7)\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x-7)(x-1)^2$$

$\therefore$ 特征值为 $\lambda_1 = 7.\ \lambda_2 = 1$ (二重根)

(1). $\lambda_1 = 7$ 时. 代入 $\lambda E - A$. 得解 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}$

(2) $\lambda_2 = 1$ 代入 $\lambda E - A$ 得 $\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

解得 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

令 $P = (\alpha_1 . \alpha_2 . \alpha_3)$. 则有 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 7 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

Cor of 命题2. 设 $\lambda_1, \ldots \lambda_r$ 是 A 在 $\mathbb{F}$ 中所有的互异特征值. 设 $\alpha_{i1}.\alpha_{i2} \cdots \alpha_{is_i}$ ($S_i = n - r(\lambda_i E - A)$). 是 A 的属于特征值 λ_i 的特征向量极大无关组. 则 $\alpha_{11}, \cdots \alpha_{1s_1}.\ \alpha_{21} \cdots \alpha_{2s_2} \cdots ; \alpha_{r1}, \cdots \alpha_{rs_r}$ 线性无关

Pf. 不妨设 $k_{11} \cdots k_{1s_1}$ 不全为 0, $\cdots k_{r1} \cdots k_{rs_r}$ 不全为 0. 使得

$$0 = k_{11}\alpha_{11} + \cdots + k_{1s_1}\alpha_{1s_1} + \cdots + k_{r1}\alpha_{r1} + \cdots + k_{rs_r}\alpha_{rs_r}$$

$\stackrel{def}{=} \beta_1 + \cdots + \beta_r$. 其中 $\beta_i = \sum_{j=1}^{s_i} k_{ij}\alpha_{ij}$

$\beta_1. \beta_2 \cdots \beta_r$ 都不是 0 向量

$\therefore A\beta_1 + \cdots + A\beta_r = 0$ HA-41

$\lambda_1\beta_1 + \cdots + \lambda_r\beta_r = 0$ 与命题2 矛盾

#

e.g 1. $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$ $A^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & & & & 0 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$ $A^{n-1}=\begin{pmatrix} & & 0 & 1 \\ & & & 0 \\ & O & & \end{pmatrix}$ $A^n=0$

称为幂零阵. 这样的 $A\neq 0$ 不相似于对角阵(否则矛盾)

$$|xE-A| = \begin{vmatrix} x & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ & & & x \end{vmatrix} = x^n \quad \therefore \text{特征值为 } \lambda_1=0 \ (n\text{重根})$$

相应特征向量 $(\lambda_1 E-A)Z=0$ 即 $AZ=0$ 的非零解

$$Z=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

特征多项式的性质

$$|xE-A| = \begin{vmatrix} x-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & x-a_{nn} \end{vmatrix} = x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\cdots+b_{n-1}x+b_n$$

其中
$$\begin{cases} b_1=(-1)^1 A\text{的所有一阶主子式之和} & (\text{共}C_n^1\text{个}) \\ b_2=(-1)^2 A\text{的所有二阶主子式之和} & (\text{共}C_n^2\text{个}) \\ b_3=(-1)^3 A\text{的所有三阶主子式之和} & (\text{共}C_n^3\text{个}) \\ \vdots \\ b_n=(-1)^n|A|. & (\text{所有}n\text{阶主子式之和}) \end{cases}$$

<u>命题 1</u> (韦达定理). 设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是 A 在 $\mathbb{C}$ 上所有根(特征根)

① $tr(A)=\sum_{i=1}^n \lambda_i$

② A 的所有二阶主子式之和 $=\sum_{1\le i<j\le n}\lambda_i\lambda_j$

③ A 的所有 r 阶主子式之和 $=\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_r\le n}\lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\cdots\lambda_{i_r}$

④ $|A|=\prod_{i=1}^n\lambda_i$

<u>Cor</u>. A 可逆 $\Longleftrightarrow$ A 的特征根均不为 0

命题2. 若 $A\alpha=\lambda\alpha$. 则对于 $\forall g(x)\in\mathbb{F}[x]$. 恒有 $f(A)\alpha=f(\lambda)\alpha$

特别地. 若 λ 是 A 的特征值. 则 $f(\lambda)$ 是 $f(A)$ 的特征值

命题2'. 若 $\lambda_1,\cdots\lambda_n$ 是 A 的特征根. 则 $f(\lambda_1).\ f(\lambda_2)\cdots f(\lambda_n)$ 是 $f(A)$ 的全部特征根. 即 $|xE-A|=\prod_{i=1}^{n}(x-\lambda_i)$

$$\Rightarrow |yE-f(A)|=\prod_{i=1}^{n}(y-f(\lambda_i))$$

命题3. (Cayley-Hamilton THM) 若 $A_{n\times n}$ 的特征多项式是 $f(x)$. 则 $f(x)$ 零化 A, 即 $f(A)=0$

Pf. $f(x)=|xE-A|$. 命 $B=xE-A$. $BB^*=|B|E=f(x)E$

设 $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$

$$\because f(x)E=\underline{Ex^n+(a_1E)x^{n-1}+\cdots+(a_{n-1}E)x+a_nE}$$

$$=B^*B=BB^* \qquad (\text{其中 } B_i\in M_n(\mathbb{F}))$$

$$\overset{\text{设}}{=}(xE-A)(B_{n-1}x^{n-1}+B_{n-2}x^{n-2}+\cdots+B_1x+B_0)$$

$$=\underline{B_{n-1}x^n+(B_{n-2}-AB_{n-1})x^{n-1}+(B_{n-3}-AB_{n-2})x^{n-2}}$$

$$\underline{+\cdots+(B_0-AB_1)x-AB_0}$$

$\xLeftrightarrow{\text{比较系数}}$

$$\begin{cases} AB_{n-1}=AE \\ B_{n-2}-AB_{n-1}=a_1E \rightarrow A+a_1E=B_{n-2} \\ B_{n-3}-AB_{n-2}=a_2E \rightarrow A^2+a_1A+a_2E=B_{n-3} \\ \vdots \\ B_0-AB_1=a_{n-1}E \\ E=-AB_0 \end{cases}$$

$f(A)=0$ #

§ Jordan标准形与最小多项式

设 $A\in M_n(\mathbb{F})$, 则 $f(x)=|xE-A|\in\mathbb{F}[x]$. 且 $f(x)$ 零化 A

$\therefore$ 存在次数最低的 $g(x)\in\mathbb{F}[x]$. 使 $g(A)=0$. 根据多项式的带余除法, 首1的零化 A 的次数最低的多项式是唯一的. 叫 A 在 $\mathbb{F}$ 上的最小多项式. 记成 $m_A(x)$

性质1 若 $h(x)\in\mathbb{F}[x]$ 零化 A. 则有 $m_A(x)\mid h(x)$. 特别地, $m_A(x)\,\Big|\,|xA-E|$

性质2 A在$\mathbb{F}$上相似于一个对角阵 $\Longleftrightarrow$ $m_A(x)$的根全在$\mathbb{F}$中且无重根

性质3 若$A\in\mathbb{F}$，而$\mathbb{F}\subseteq\mathbb{E}$均为数域，则A在$\mathbb{F}$上的最小多项式等于A在$\mathbb{E}$上的最小多项式

Ch5. 内积、正交阵与标准正交基（本节设$\mathbb{F}=\mathbb{R}$，$V=\mathbb{R}^{n\times 1}$）

定义1. $\forall\alpha,\beta\in V$. 定义内积 $\alpha\beta \overset{\text{记}}{=} \alpha\cdot\beta \overset{def}{=} \alpha^T\beta$ $\quad[\alpha,\beta]$

其中 $\alpha^T=(a_1,\cdots a_n)$，$\beta^T=(b_1,\cdots b_n)$

若 $V=\mathbb{C}^{n\times 1}$，$[\alpha,\beta]=\alpha^T\overline{\beta}$

性质(1) 对称性：$[\alpha,\beta]=[\beta,\alpha]$

(2) 双线性性：关于第一、二分量具有线性性

Δ

$$\begin{cases}[\alpha_1+\alpha_2,\beta]=[\alpha_1,\beta]+[\alpha_2,\beta]\\ [k\alpha,\beta]=k[\alpha,\beta]\end{cases}$$

(3) 正定性. $\forall\alpha\in V$. $[\alpha,\alpha]$是非负实数. 且$[\alpha,\alpha]=0\Leftrightarrow\alpha=0$

定义2. $\sqrt{[\alpha,\alpha]}$叫α的长度，记$|\alpha|$，或$\|\alpha\|$. 而在$\mathbb{R}$上，α与β的夹角θ定义为 $\cos\theta=\dfrac{[\alpha,\beta]}{|\alpha||\beta|}$ $\quad(0\leq\theta\leq\pi)$

命题1 $|[\alpha,\beta]|\leq|\alpha||\beta|$. 且"="当且仅当$\alpha,\beta$线性相关

Pf. ① $\mathbb{R}$情形 $\forall t\in\mathbb{R}$ （设$\beta\neq 0$）

$$0\leq[\alpha-t\beta,\alpha-t\beta]=[\alpha,\alpha]-2t[\alpha,\beta]+[\beta,\beta]\cdot t^2$$

$\therefore$ $\Delta\leq 0$

$\therefore$ $4[\alpha,\beta]^2\leq 4[\alpha,\alpha][\beta,\beta]$

即 $|[\alpha,\beta]|\leq|\alpha||\beta|$ #

② $\mathbb{C}$情形. 此时. 由定义 $\exists t\in\mathbb{C}$ s.t. $[\alpha-t\beta,\alpha-t\beta]\geq 0$

即 $[\alpha,\alpha-t\beta]-t[\beta,\alpha-t\beta]$

$[\alpha,\alpha]-\overline{t}[\alpha,\beta]-t\overline{[\alpha,\beta]}+t\overline{t}[\beta,\beta]$

取 $t=\dfrac{[\alpha,\beta]}{[\beta,\beta]}$

$$\text{则}\quad [\alpha,\alpha] - 2\frac{[\alpha,\beta]\overline{[\alpha,\beta]}}{[\beta,\beta]} + \frac{[\alpha,\beta]\overline{[\alpha,\beta]}}{[\beta,\beta]^2}[\beta,\beta] \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad [\alpha,\beta]\overline{[\alpha,\beta]} \leq [\alpha,\alpha][\beta,\beta]$$

$$\Rightarrow \quad |[\alpha,\beta]|^2 \leq |\alpha|^2|\beta|^2$$

命题1等价于如下的三角不等式.

__命题2__. $|\alpha+\beta| \leq |\alpha|+|\beta|$ $^{(*)}$，且等式成立当且仅当 $\alpha /\!/ \beta$（线性相关）（$\mathbb{R}$上）

__Pf__. (*)成立 $\Leftrightarrow$ $|\alpha+\beta|^2 \leq (|\alpha|+|\beta|)^2$

$$|\alpha+\beta|^2 = [\alpha+\beta,\alpha+\beta], \qquad (|\alpha|+|\beta|)^2 = [\alpha,\alpha]+[\beta,\beta]+2|\alpha||\beta|$$

$$\Leftrightarrow [\alpha,\beta]+[\beta,\alpha] \leq 2|\alpha||\beta|$$

由命题1. $[\alpha,\beta] \leq |[\alpha,\beta]| \leq |\alpha||\beta|$

$[\beta,\alpha] \leq |[\beta,\alpha]| \leq |\alpha||\beta|$ #

$\mathbb{C}^{n\times1}$中. $[\alpha,\beta] = \alpha^T\overline{\beta}$. 有长度无夹角. 称为酉空间

$\mathbb{R}^{n\times1}$中. $[\alpha,\beta] = \alpha^T\beta$. 有长度有夹角. 称为欧氏空间

内积空间V: 带内积的线性空间 $_{\mathbb{F}}V$，对$\mathbb{F}$要求<u>共轭封闭</u>

内积 $[-,-]$: ① $[\alpha,\beta] = \overline{[\beta,\alpha]}$

② $[k_1\alpha_1+k_2\alpha_2,\beta] = k_1[\alpha_1,\beta]+k_2[\alpha_2,\beta]$

$[\alpha, k_1\beta_1+k_2\beta_2] = \overline{k_1}[\alpha,\beta_1]+\overline{k_2}[\alpha,\beta_2]$ $\alpha\in V$

③ 正定性. $[\alpha,\alpha]$是非负实数 $\forall\alpha\in V$. 且 $[\alpha,\alpha]\neq0$, $\forall\alpha\neq0$

__定义1__. 正交向量组 $\alpha_1,\cdots\alpha_r$: ① $\alpha_i\neq0$ ② $[\alpha_i,\alpha_j]=0$ $\forall i\neq j$

__引理1__. 正交组均为无关组

__命题2__. 任一线性无关组等价于一个正交组

__Pf__. 设$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_r\in V$（内积空间）线性无关

$$\left.\begin{matrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \vdots\\ \alpha_r\end{matrix}\right\} \overset{\ell}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{aligned}\beta_1 &= \alpha_1\\ \beta_2 &= \alpha_2-k_{21}\beta_1\\ \beta_3 &= \alpha_3-k_{32}\beta_2-k_{31}\beta_1\\ &\vdots\\ \beta_r &= \alpha_r-k_{rr-1}\beta_{r-1}-k_{rr-2}\beta_{r-2}-\cdots-k_{r1}\beta_1\end{aligned}\right.$$

$$0 \overset{令}{=} [\beta_2, \beta_1] = [\alpha_2 - k_{21}\beta_1, \beta_1] = [\alpha_2, \beta_1] - k_{21}[\beta_1, \beta_1]$$

$$\therefore 取\ k_{21} = \frac{[\alpha_2, \beta_1]}{[\beta_1, \beta_1]}$$

$$0 \overset{令}{=} [\beta_3, \beta_1] = [\alpha_3 - k_{32}\beta_2 - k_{31}\beta_1, \beta_1] = [\alpha_3, \beta_1] - k_{31}[\beta_1, \beta_1] \quad \therefore 取\ k_{31} = \frac{[\alpha_3, \beta_1]}{[\beta_1, \beta_1]}$$

$$\vdots$$

$$0 \overset{令}{=} [\beta_r, \beta_s] = [\alpha_r - k_{rr-1}\beta_{r-1} - \cdots - k_{rs}\beta_s - \cdots k_{r1}\beta_1; \beta_s] = [\alpha_r, \beta_s] - k_{rs}[\beta_s, \beta_s]$$

$$\therefore 取\ k_{rs} = \frac{[\alpha_r, \beta_s]}{[\beta_s, \beta_s]} \quad \#$$

$\boxed{\text{Schmidt 正交化过程}}$ $\longrightarrow$ 正交组 $(\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_r)$

单位化过程 $\longrightarrow$ 标准正交向量组 $(\gamma_1, \gamma_2 \cdots \gamma_r)$

$$\gamma_i = \frac{1}{|\beta_i|}\beta_i$$

$$(\gamma_1, \gamma_2 \cdots \gamma_r) = (\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_r)\begin{pmatrix} \frac{1}{|\beta_1|} & & & 0 \\ & \frac{1}{|\beta_2|} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{|\beta_r|} \end{pmatrix}_{r\times r}$$

$$= (\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_r)\begin{pmatrix} 1 & & & * \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{|\beta_1|} & & & 0 \\ & \frac{1}{|\beta_2|} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{|\beta_r|} \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_r)\begin{pmatrix} \frac{1}{|\beta_1|} & & & (\Delta) \\ & \frac{1}{|\beta_2|} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{|\beta_r|} \end{pmatrix}$$

$$\therefore (\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_r) = (\gamma_1, \cdots \gamma_r)\begin{pmatrix} |\beta_1| & & (**) \\ & \ddots & \\ 0 & & |\beta_r| \end{pmatrix}$$

$$A_{n\times r} = Q_{n\times r} R_{r\times r}$$

其中 A 为 $\mathbb{F}$ 上的列满秩矩阵. R 是上三角可逆阵且其主对角元全为大于 0 的实数, Q 中列向量满足 $[\gamma_i, \gamma_j] = \delta_{ij}$

定理（可逆矩阵的QR分解）．任一可逆阵 A 必有如下的唯一分解式．

$A=QR$．其中 R 是上三角阵且 $R(i,i)$ 是大于零的实数．而 Q 是一个

酉阵．$\overline{U}^T U = E = U\overline{U}^T$（注：实酉阵叫正交矩阵）

Pf．①可分解性：在 $V=\mathbb{F}^{n\times 1}$ 中．取 $[\alpha,\beta]=\alpha^T\overline{\beta}$．则已知 $[-,-]$

是 V 中一个内积（满足①．②．③）

$\forall A=(\alpha_1\cdots\alpha_n)\in M_n(\mathbb{F})$．有 A 可逆 $\Leftrightarrow$ $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$ 线性无关

∴若 A 可逆．则已有 $A=Q_nR_n$，其中 R 是上三角阵且 $R(i,i)$

均为 >0 的实数．而 $Q=(r_1,r_2\cdots r_n)$．满足 $\delta_{ij}=[\nu_i,\nu_j]$

即有 $U^T\overline{U}=E$．

②分解的唯一性．设 $Q_1R_1=A=Q_2R_2$．下证 $Q_1=Q_2$ 且 $R_1=R_2$

事实上．由假设得 $\overline{Q_2}^T Q_1 = R_2R_1^{-1}$ (*)

其中 $\overline{(\overline{Q_2}^T Q_1)}^T(\overline{Q_2}^T Q_1)=\overline{Q_1}^T Q_2\overline{Q_2}^T Q_1=E$

即 (*) 左端为一个 U 阵，设为 Q．而 (*) 右端为上三角阵．

且主对角线元为实数且大于0

即只要说明：若 $Q=R$．则 $Q=E=R$

$r_{11}=1$．$r_{1j}=0$

归纳法 $r_{ii}=1$．$r_{ij}=0$ $\forall j>i$

⇑

设 $R=(r_{ij})=\begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n}\\ & \ddots & \vdots\\ 0 & & r_{nn}\end{pmatrix}$ 其中 $r_{11},\cdots r_{nn}$ 是 >0 的实数

$$E=\overline{R}^T R=\begin{pmatrix} r_{11} & & & 0\\ \overline{r_{12}} & r_{22} & & \\ \overline{r_{13}} & \overline{r_{23}} & r_{33} & \\ \vdots & \vdots & & \ddots \\ \overline{r_{1n}} & \overline{r_{2n}} & \cdots & r_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n}\\ & r_{22} & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & r_{nn}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_{11}^2 & r_{11}r_{12} & \cdots & r_{11}r_{1n}\\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} = \cdots$$

\#

内积空间中的标准正交基

设 $[-,-]$ 是 V 在 $\mathbb{F}^{n\times 1}$ 上的一个内积．称满足 $[\alpha_i,\alpha_j]=\delta_{ij}$ $\forall i,j$

的一个极大线性无关组为 V 关于 $[-,-]$ 的一个标准正交基

若 $[\alpha,\beta]=\alpha^T\overline{\beta}$．$\forall\alpha,\beta\in V$

则 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$ 是 $\mathbb{F}^{n\times 1}$ 的标准正交基 $\Leftrightarrow$ $U=(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n)$ 是一个酉阵

特别地．$\mathbb{F}=\mathbb{R}$ 且 $[\alpha,\beta]=\alpha^T\beta$ 时．$\alpha_1\cdots\alpha_n$ 是 $\mathbb{R}^{n\times 1}$ 的标准正交基

$\Leftrightarrow$ $U=(\alpha_1\cdots\alpha_n)$ 是一个正交阵

e.g. 令 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & & & \\ 1 & \cdots & \cdots & 1\end{bmatrix}_{n\times n}$，求正交阵U使得 $U^{-1}AU \overset{i.e}{=} U^TAU$

成为一个对角阵

Solution: $|xE-A| = \begin{vmatrix} x-1 & & -1 \\ & \ddots & \\ -1 & & x-1 \end{vmatrix} = (x-n)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & x-1 & -1 \\ \vdots & & \\ 1 & -1 & x-1 \end{vmatrix}$

$= (x-n)\begin{vmatrix} 1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & x \end{vmatrix} = (x-n)x^{n-1}$

A的特征值是 $\lambda_1=n$，$\lambda_2=0$

λ_1 代入 $xE-A$：
令 $B=nE-A=\begin{pmatrix} n-1 & & -1 \\ & n-1 & \\ -1 & & \ddots \\ & & & n-1 \end{pmatrix}$　$BZ=0$ 的基础解系为 $\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{n}}\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}$

λ_2 代入 $xE-A=-A$，求得基础解系，Schmidit正交化，单位化
过程得 $\alpha_2, \alpha_3 \cdots \alpha_n$，$\alpha_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$ …… $\alpha_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+n-1}}\begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\\-n\end{pmatrix}$

正规阵 $(N\overline{N}^T=\overline{N}^TN)$　$\overline{N}^T=N^*$
包括正交阵 实阵 U，$U^{-1}=U^T$
酉阵 复数域上阵 U，$U^{-1}=\overline{U}^T$
实对称阵 $\overline{A}=A$，$A^T=A$
Hermite阵 $\overline{H}^T=H$
若存在酉阵（正交阵）U使得 $\overline{U}^TAU=B$，则称A酉（正交）相似于B

<u>定理2</u> 设 $A\in M_n(\mathbb{F})$ 的<u>特征根全在F中</u>，而F是有性质"$\forall a,b\in\mathbb{F}$，$a+bi\in\mathbb{F}$ $\Leftrightarrow a-bi\in\mathbb{F}$"，则A在F上酉相似于一个对角阵 $\Leftrightarrow$ A是一个正规阵

<u>Schur引理</u>　设 $A\in M_n(\mathbb{F})$ 的特征根全在F中，则 $\exists U\in M_n(\mathbb{F})$，使 $\overline{U}^TAU$ 是

一个上三角阵（称 A 在 $\mathbb{F}$ 上酉相似于一个上三角阵）

Pf. 对于 n 用归纳法

$n=1$，trival

$n>1$. 若 $n-1$ 情形结论对，设 A 特征根全在 $\mathbb{F}$ 中，此时，至少有一个特征根 $\lambda_1\in\mathbb{F}$，使 $0\neq\alpha_1\in\mathbb{F}^{n\times1}$，使 $A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1$

可设 $\|\alpha_1\|=1$，考虑 $\overline{\alpha_1}^TZ=0$ 的一个基础解系（含 $n-1$ 个向量），对之用 Schmidt 正交化，单位化过程，得到 $\alpha_2\cdots\alpha_n$（标准正交基），使 $\alpha_1^T\overline{\alpha_i}=0 \quad 2\leq i\leq n$

令 $U_1=(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n)$，则 U_1 是一个酉矩阵，$U_1\in M_n(\mathbb{F})$

且 $AU_1=(A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots A\alpha_n)$

$$=(\lambda_1\alpha_1,A\alpha_2,\cdots A\alpha_n)$$

$$=(\alpha_1,\cdots\alpha_n)\left(\begin{array}{c|c}\lambda_1 & \beta^T\\ \hline 0 & \\ \vdots & A_1\\ 0 & \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow\quad U_1^{-1}AU=\left(\begin{array}{c|c}\lambda_1 & \beta^T\\ \hline 0 & A\end{array}\right)$$

$\because\ |xE-A|=|xE-U^{-1}AU|=\left|x\begin{pmatrix}1&0\\0&E\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda_1&\beta^T\\0&A_1\end{pmatrix}\right|$

（这是由 A 的特征根全在 $\mathbb{F}$ 中得到的 $|xE-A_1|$

$\therefore$ A_1 的特征根全在 $\mathbb{F}$ 中，由归纳假设，$\exists\, n-1$ 酉阵

$T\in M_{n-1}(\mathbb{F})$ 使 $T^{-1}A_1T=\begin{pmatrix}\lambda_2 & & *\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$.

令 $U_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&T\end{pmatrix}$，则 U_2 是 n 阶酉阵，使 $U=U_1U_2\in M_n(\mathbb{F})$

且为酉阵 $\quad \overline{U}^TAU=\overline{U_2}^T\overline{U_1}^TAU_1U_2=\overline{U_2}^T\begin{pmatrix}\lambda_1&\beta^T\\0&A\end{pmatrix}U_2$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\0&\overline{T}^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1&\beta^T\\0&A_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&T\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda_1&\beta^T\\0&\overline{T}^TA_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1&\beta^TT\\0&\overline{T}^TA_1T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$$

#

Pf of THM2　"$\Rightarrow$". 设酉阵 $U\in M_n(\mathbb{F})$. 使 $U^{-1}AU=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$

正规阵基本定理　则 $A=U\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}\overline{U}^T$

则 $\overline{A}^T=U\begin{pmatrix}\overline{\lambda_1}&&\\&\ddots&\\&&\overline{\lambda_n}\end{pmatrix}\overline{U}^T$

$$\therefore A\overline{A}^T=U\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}\overline{U}^TU\begin{pmatrix}\overline{\lambda_1}&&\\&\ddots&\\&&\overline{\lambda_n}\end{pmatrix}\overline{U}^T$$

$$=U\begin{pmatrix}\lambda_1\overline{\lambda_1}&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\overline{\lambda_n}\end{pmatrix}\overline{U}^T$$

$$=\overline{A}^TA$$

"$\Leftarrow$"　设 $\overline{A}^TA=A\overline{A}^T$

由舒尔引理.　$\exists$ 酉阵 $U=(u_{ij})\in M_n(\mathbb{F})$. 使

$$\overline{U}^TAU=\begin{pmatrix}b_{11}&\cdots&b_{1n}\\&\ddots&\vdots\\0&&b_{nn}\end{pmatrix}\quad b_{ij}\in\mathbb{F}$$

而由 $\overline{A}^TA=A\overline{A}^T$，$\overline{U}^T\overline{A}^TU\,\overline{U}^TAU=\overline{U}^TAU\cdot\overline{U}^T\overline{A}^TU$

$$\therefore\begin{pmatrix}\overline{b_{11}}&&0\\\vdots&\ddots&\\\overline{b_{1n}}&\cdots&\overline{b_{nn}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11}&\cdots&b_{1n}\\&\ddots&\vdots\\0&&b_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{11}&\cdots&b_{1n}\\&\ddots&\vdots\\0&&b_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{b_{11}}&&0\\\vdots&\ddots&\\\overline{b_{1n}}&\cdots&\overline{b_{nn}}\end{pmatrix}$$

左$(1,1)=b_{11}\overline{b_{11}}=|b_{11}|^2\in\mathbb{R}^+\cup\{0\}$

右$(1,1)=|b_{11}|^2+\cdots+|b_{1n}|^2\Rightarrow b_{12}=\cdots b_{1n}=0$

类似的 有　$b_{ij}=0\ \forall i\neq j$

$$\therefore\overline{U}^TAU=\begin{pmatrix}b_{11}&&0\\&\ddots&\\0&&b_{nn}\end{pmatrix}$$ #

Cor.　设 $A\in M_n(\mathbb{R})$. 设 A 的特征根全为实数，则 A 正交相似于一个对角阵 $\Leftrightarrow A^TA=AA^T$

"$\Rightarrow$". 由THM2马上得

"$\Leftarrow$". 设实阵 A 特征根全在 $\mathbb{R}$ 中. 且 $A^TA = AA^T$ 则 A 是正规阵

由 THM2. 知有 U 阵. 使 $\overline{U}^T AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ $\lambda_i \in \mathbb{C}$

易见 $\lambda_i \in \mathbb{R}$ (A 的特征根全为实数)

令 $U = (\alpha_1, \cdots \alpha_n)$. 则有 $(A\alpha_1 \cdots A\alpha_n) = AU = U\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$= (\lambda_1\alpha_1 \cdots \lambda_n\alpha_n) \iff A\alpha_i = \lambda_i\alpha_i$

$\iff$ α_i 是齐次方程组 $(\lambda_i E - A)X = 0$ 的解向量

其中 ($\alpha_i^T\overline{\alpha_j} = \delta_{ij}$, $\alpha_i \in \mathbb{C}^{n\times 1}$).

注意到 $\lambda_i E - A \in M_n(\mathbb{R})$

$n = \sum_{i=1}^{r} [n - r(\lambda_i E - A)]$. $\exists$ 实可逆阵 P. $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 E & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r E \end{pmatrix}$

由下述引理及正交化、单位化过程知. P 可取成正交阵. 从而 A 正交相似于 $\mathrm{diag}\{\lambda_1 \cdots \lambda_n\}$ #

引理4. 正规阵的属于不同特征值的特征向量彼此正交

pf. 设 $\overline{N}^T N = N\overline{N}^T$. 设 $N\alpha = \lambda\alpha$. $N\beta = \mu\beta$

其中 $\lambda \neq \mu$. $0 \neq \alpha, \beta \in \mathbb{C}^{n\times 1}$. 下证 $\alpha^T\overline{\beta} = [\alpha, \beta] = 0$

先证: $N\alpha = \lambda\alpha \Rightarrow \overline{N}^T\alpha = \overline{\lambda}\alpha \iff (\overline{\lambda E - N})^T\alpha = 0$

$\iff [(\overline{\lambda E - N})^T\alpha, (\overline{\lambda E - N})^T\alpha] = 0$

$\iff \alpha^T(\overline{\lambda}E - \overline{N})(\lambda E - N^T)\overline{\alpha} = 0$

$\qquad \| $

$\alpha^T(\lambda E - N^T)(\overline{\lambda E - N\alpha}) = 0$

$\qquad \| $

$\alpha^T(\lambda E - N^T) = 0$

$\therefore$ $N\alpha = \lambda\alpha$. $\overline{N}^T\beta = \overline{\mu}\beta$.

有 $\overline{\alpha}^T\overline{N}^T = \overline{\lambda}\,\overline{\alpha}^T$

$\overline{\alpha}^T\overline{N}^T\beta = \overline{\lambda}(\overline{\alpha}^T\beta)$

$\qquad \|$

$\overline{\alpha}^T\overline{\mu}\beta = \overline{\mu}(\overline{\alpha}^T\beta)$

$\therefore (\overline{\lambda} - \overline{\mu})(\overline{\alpha}^T\beta) = 0$

而 $\overline{\lambda - \mu} \neq 0$

$\therefore \overline{\alpha}^T\beta = 0$

$\therefore [\alpha, \beta] = 0$

#

命题5　Hermite阵的特征根均为实数

Pf.　设 $\overline{H}^T = H$. 　$H\alpha = \lambda\alpha$. 　$\lambda \in \mathbb{C}$　$0 \neq \alpha \in \mathbb{C}^{n\times 1}$

要证 $\lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lambda = \overline{\lambda}$

$$\overline{\alpha}^T H = \overline{\alpha}^T \overline{H}^T = \overline{H\alpha}^T = \overline{\lambda}\,\overline{\alpha}^T$$

$$\Rightarrow \quad \overline{\alpha}^T H \alpha = \overline{\lambda}\,\overline{\alpha}^T \alpha = \overline{\lambda}|\alpha|^2$$

$$\overline{\alpha}^T H\alpha = \overline{\alpha}^T \alpha \lambda = \lambda |\alpha|^2$$

$\because \alpha \neq 0$　$\therefore$ $|\alpha| > 0$.　$\therefore \lambda = \overline{\lambda}$　#

$\forall A_n \in M_n(\mathbb{R})$　$A = \underbrace{\frac{1}{2}(A + A^T)}_{实对称} + \underbrace{\frac{1}{2}(A - A^T)}_{实反对称}$

$\forall B_{m\times n}$　$B\overline{B}^T$ 与 $\overline{B}^T B$ 均为 Hermite阵

性质1　$r(B\overline{B}^T) = r(B) = r(\overline{B}^T B)$

Pf.　易见 $r(\overline{B}^T B) \leq r(B)$

易见 $BZ = 0$ 的解均为 $\overline{B}^T BZ = 0$ 的解. 反过来. 如果 $\alpha \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ 使 $\overline{B}^T B\alpha = 0$. 令 $\beta = B\alpha \in \mathbb{C}^{m\times 1}$. 则有

$|\beta|^2 = \overline{\beta}^T \beta = \overline{\alpha}^T \overline{B}^T B\alpha = 0$　$\therefore$ $\beta = 0$

$\therefore$ $B\alpha = 0$. 即 $BZ = 0$ 与 $\overline{B}^T BZ = 0$ 在 $\mathbb{C}$ 中同解.

由基础解系基本定理.　$n - r(\overline{B}^T B) = n - r(B)$

$$\Rightarrow \quad r(B) = r(\overline{B}^T B)$$

同理.　$r(B\overline{B}^T) = r(\overline{B}^T) = r(B)$　#

最小二乘法原理

$\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. $\forall \beta \in \mathbb{R}^{m\times 1}$. 方程组 $A^T A Z = A^T \beta$ 恒有解

其解称为 $AZ = \beta$ 的一个最小二乘解. 此外 $A^T A Z = A^T \beta$ 有唯一解 $\Leftrightarrow$ $r(A) = n$

Pf. ① $A^TAZ=A^T\beta$有解 $\Leftrightarrow r(A^TA,\ A^T\beta)=r(A^TA)$

易见 $(A^TA,A^T\beta)=A^T(A,\beta)$

$\therefore\ r(A)=r(A^TA)\le r(A^TA,A^T\beta)=r(A^T(A,\beta))\le r(A^T)=r(A)$

② $A^TAZ=A^T\beta$有唯一解 $\Leftrightarrow$ A^TA可逆 $\Leftrightarrow r(A^TA)=n=r(A)$

#

设 $Z=\alpha$是 $A^TAZ=A^T\beta$的解. 即 $A^T(\beta-A\alpha)=0$ (1)

设 $\alpha=\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix}$. $k_i\in\mathbb{R}$ 命 $A=(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n)$. 其中$\alpha_i\in\mathbb{R}^{m\times1}$

则(1)变为 $\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \vdots\\ \alpha_n^T\end{pmatrix}\Big(\underbrace{\beta-\sum_{i=1}^n k_i\alpha_i}_{\gamma}\Big)=0=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\gamma\\ \vdots\\ \alpha_n^T\gamma\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}[\alpha_1,\gamma]=0\\ \vdots\\ [\alpha_n,\gamma]=0\end{cases}$

奇异值分解定理 (SVD THM)

设 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$. 则有酉阵 U_m与V_n 及σ_i 使得 $A_{m\times n}=U_{m\times m}\begin{pmatrix}\sigma_1 & & & & \\ & \sigma_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \sigma_r & \\ & & & & 0 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0\end{pmatrix}_{m\times n}V_{n\times n}$

其中 $r=r(A)$. 而$\sigma_1^2,\cdots\sigma_r^2$是 $A\bar{A}^T$的全部非零特征值

性质2 对于$A\in\mathbb{C}^{m\times n}$. $A\bar{A}^T$的特征值均为非负实数

Pf. $\because$ $A\bar{A}^T$是Hermite阵 $\therefore$ 其特征值为实数

设 $A\bar{A}^T\alpha=\lambda\alpha$. 其$\lambda\in\mathbb{R}$ $\alpha\neq0$

则 $\bar{A}^T\alpha\neq0$ ($\because\ \lambda\alpha\neq0$)

$\bar{\alpha}^TA\bar{A}^T\alpha=\lambda\bar{\alpha}^T\alpha=\lambda|\alpha|^2$

$\overline{(\bar{A}^T\alpha)}^T(\bar{A}^T\alpha)=|\bar{A}^T\alpha|^2>0$ $\therefore\ \lambda>0$ #

Pf of SVD THM $\because$ $A\bar{A}^T$是一个Hermite阵

$\therefore\ \exists$ m阶酉阵U_1, 使 $U_1^{-1}(A\bar{A}^T)U_1=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_r & \\ & & & \ddots \\ & & & & 0\end{pmatrix}$

其中 $\lambda_i=\sigma_i^2$是 $A\bar{A}^T$的非零特征值

命 $U_1=(\alpha_1,\cdots\alpha_m)$. 则有

$$A\bar{A}^T(\alpha_1 \cdots \alpha_m) = (\alpha_1 \cdots \alpha_m)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A\bar{A}^T\alpha_i = \lambda_i\alpha_i \qquad 1 \le i \le r$$

$$\Rightarrow \quad (\bar{A}^T A)(\bar{A}^T\alpha_i) = \lambda_i(\bar{A}^T\alpha_i)$$

命 $\beta_i = \bar{A}^T\alpha_i$. $\quad \bar{A}^T A\beta_i = \lambda_i\beta_i$

$$[\beta_1, \beta_2] = \bar{\beta}_1^T\beta_2 = \left(\overline{\bar{A}^T\alpha_1}\right)^T \bar{A}^T\alpha_2 = \bar{\alpha}_1^T(A\bar{A}^T\alpha_2) = \bar{\alpha}_1^T\lambda_2\alpha_2$$
$$= \lambda_2(\bar{\alpha}_1^T\alpha_2)$$
$$= 0$$

$[\beta_1, \beta_1] = \lambda_1$

重命 $\beta_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\bar{A}^T\alpha_i = \frac{1}{\sigma_i}\bar{A}^T\alpha_i \quad 1 \le i \le r \Rightarrow A\beta_i = \frac{1}{\sigma_i}A\bar{A}^T\alpha_i = \sigma_i\alpha_i$

则有 $\quad \bar{A}^T A\beta_i = \lambda_i\beta_i = \sigma_i\bar{A}^T\alpha_i$

$[\beta_i, \beta_j] = \delta_{ij}$

由性质1. $\quad r(A^TA) = r(A) = r(A\bar{A}^T) = r$

由正规阵的属于不同值的特征向量彼此正交

$\therefore$ 可设标准正交组 $\beta_{r+1} \cdots \beta_n$. $\quad$ s.t. $\quad \bar{A}^T A\beta_k = 0 \cdot \beta_k$
$(r+1 \le k \le n)$

$$A\bar{A}^T U_1 = U_1\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$A(A^T\alpha_1, A^T\alpha_2 \cdots A^T\alpha_n) = (\lambda_1\alpha_1, \lambda_2\alpha_2 \cdots, \lambda_r\alpha_r, 0 \cdots 0)$$

$$A\left(\frac{1}{\sigma_1}A^T\alpha_1, \frac{1}{\sigma_2}A^T\alpha_2 \cdots \frac{1}{\sigma_r}A^T\alpha_r, 0 \cdots 0\right) = (\sigma_1\alpha_1, \cdots \sigma_r\alpha_r, 0 \cdots 0)$$

$$A(\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_n) =$$

最后命 $V_1 = (\beta_1, \cdots \beta_r, \beta_{r+1} \cdots \beta_n)$

$\therefore$ V_1 是一个酉阵. 且有

$$AV_1 = (A\beta_1 \cdots A\beta_r, A\beta_{r+1} \cdots A\beta_n)$$

$$= \left(\frac{1}{\sigma_1} AA^T\alpha_1, \cdots, \frac{1}{\sigma_r} AA^T\alpha_r, 0 \cdots 0\right)$$

$$= (\sigma_1\alpha_1, \cdots, \sigma_r\alpha_r, 0 \cdots 0)$$

$$= (\alpha_1 \cdots \alpha_m)\begin{pmatrix} \sigma_1 & & & & & \\ & \sigma_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \sigma_r & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$= U_1\begin{pmatrix} \sigma_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \sigma_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad A = U_1\begin{pmatrix} \sigma_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \sigma_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} V_1^{-1}$$

#

Ch6. 二次型 (Quadratic Forms)

$$\boxed{ax^2 + bxy + cy^2} + dx + ey + f = 0 \qquad ((a, b, c) \neq 0)$$

二元二次型　　二次曲线 (平面上的)

$$\left.\begin{matrix} a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \\ a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2x_2 + a_{23}x_2x_3 + \\ a_{31}x_3x_1 + a_{32}x_3x_2 + a_{33}x_3x_3 + \end{matrix}\right\} \text{三元二次型} \qquad \begin{matrix}(a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{23}, a_{13}) \\ \neq 0\end{matrix}$$

$$a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}$$ 空间中的二次曲面

<u>命题</u>. 对于实对称 A. $\exists$ 正交阵 U, 使得 U^TAU 是实对角阵

Pf. ① 实对称阵 A 是 H 阵. 从而特征值均为实数

② A 正交相似于对角阵 $\Leftrightarrow A^TA = AA^T$ #

n 元二次型 形为 $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} a_{ij}x_ix_j = Z^TAZ$.

其中 $A^T = A = \bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

$$\{n\text{元二次型}\} \xleftrightarrow{1-1} \{n\text{阶实对称阵}\}$$

$$f(Z) = Z^TAZ$$

二次型的标准形

做一次正交线性替换 $Z = UY$

$$Z^T A Z = Y^T U^T A U Y = Y^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} Y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$$

e.g. 求可逆（非退化，满秩）线性替换 $Z = PY$（P可逆阵）

将 $f(Z) = x_1x_2 + x_1x_3$ 化为标准型

Solution: 令 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

$$f = y_1^2 - y_2^2 + (y_1 - y_2)y_3 = \left(y_1^2 + y_1y_3 + \tfrac{1}{4}y_3^2\right) - \tfrac{1}{4}y_3^2 - y_2^2 - y_2y_3$$

$$= \left(y_1 + \tfrac{1}{2}y_3\right)^2 - \left(y_2 + \tfrac{1}{2}y_3\right)^2$$

令 $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Y$. 即 $Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Z$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Z = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Z$$

则有 $f = z_1^2 - z_2^2$

一. 复数域上二次型的规范形

$$Z^T A Z = f \xlongequal[P\text{可逆}]{Z = PY} y_1^2 + \cdots + y_r^2 \quad \text{唯一}. \quad r = r(A). \quad A^T = A$$

二. 实数域上二次型的规范形，也唯一

（惯性定理. The law of inertia）

$$X^T A X = f \xlongequal[P\text{可逆}]{X = PY} y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2 \quad r = r(A).$$

其中 $r = r(A)$. p称为f的正惯性指数

惯性定理 $\mathbb{R}$上二次型$f(X)$的正惯性指数 P 由$f(X)$唯一确定（与 $X = PY$ 中可逆阵 P取法无关

Pf. 若 P与Q可逆. 实. 且 $f \xlongequal{X=PY} y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2$

$\xlongequal{X=QZ} z_1^2 + \cdots + z_q^2 - z_{q+1}^2 - \cdots - z_{r}^2$

反证法：不妨设 $p<q$ $\quad PY=X=QZ$

令 $T=P^{-1}Q$，则 $Y=TZ$，考虑方程组

$$\begin{cases} y_1=t_{11}z_1+\cdots+t_{1q}z_q=0 \\ y_2=t_{21}z_1+\cdots+t_{2q}z_q=0 \\ \vdots \\ y_p=t_{p1}z_1+\cdots+t_{pq}z_q=0 \\ z_{q+1}=0 \\ \vdots \\ z_n=0 \end{cases}$$

$\longrightarrow$ 方程个数 $p<$ 未知元个数 q

有非零解 $Z_0=\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_q \\ z_{q+1} \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_q \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\neq 0$

$\because 0\le p<q$，$\therefore q\ge 1$

令 $X_0=QZ_0$，$X_0=PY_0$，即 $Y_0=P^{-1}X_0$

则 $X_0\neq 0$ $Y_0\neq 0$ 使得

$$0\overset{\because q\ge 1 \text{ 且 } X_0\neq 0}{<} k_1^2+\cdots+k_q^2-0^2-\cdots-0^2 \xlongequal{X_0=QZ_0} f(X_0) \xlongequal{X_0=PY_0} 0^2+\cdots+0^2-\sum_{i=p+1}^{r}y_{i0}^2\le 0$$

矛盾！

$\therefore$ $p=q$ #

正定阵、正定二次型与 $\mathbb{R}^{n\times 1}$ 上的内积

若 $f(\alpha)=\alpha^TA\alpha>0$ $\forall\, 0\neq\alpha\in\mathbb{R}^{n\times 1}$，则称 $f(X)$ 是正定的 n 元二次型。

而称实对称阵 A 为(半)正定阵

<u>定理1</u> 设 $A^T=A\in M_n(\mathbb{R})$，则以下等价

① A 正定 ② A 的特征值全大于 0 ③ $\exists$ ~~可逆~~ $P\in M_n(\mathbb{R})$，使 $A=PP^T$ ($A\simeq E_c$)

④ $\exists$ ~~可逆~~ 实对称 Q，使 $A=Q^2$

Pf. "④ $\Longrightarrow$ ③"

"③ $\Longrightarrow$ ②" 反证法，设 A 有一个特征值 ≤ 0，由于 $\exists$ 正交阵 U

使 $U^{-1}AU=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$，其中 $\lambda_1\cdots\lambda_n$ 为特征根(值)，不妨设 $\lambda_1\le 0$

则 $f \xlongequal{X=UY} \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$

$\Rightarrow$ f 的正惯性指数 $\leq n-1$. 而条件(3)表示 f 的正惯性指数 $=n$

矛盾

"②$\Rightarrow$①". 设正交阵 P 使 $P^TAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, 其中 $\lambda_i > 0$

$$\alpha^T A \alpha = (P^{-1}\alpha)^T P^T A P (P^{-1}\alpha) \underset{\text{令}\beta = P^{-1}\alpha}{=} \beta^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \beta = \lambda_1 b_1^2 + \cdots + \lambda_n b_n^2 > 0$$

则 $\beta \neq 0$

"①$\Rightarrow$②" 反证: 设正交 P 使 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 其中 $\lambda_1 \leq 0$

令 $\alpha = P\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

则有 $\alpha^T A \alpha = (P^{-1}\alpha)^T P^T A P (P^{-1}\alpha) = \lambda_1 \leq 0$

"②$\Rightarrow$④". 设正交 P 使 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$. 其中 $\lambda_i > 0$

$$\Rightarrow A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P^T$$

$$= P \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} P^T P \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} P^T$$

$$= Q^2. \quad \text{其中} \quad Q = P \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} P^T$$

#

定理2 设 $A^T = A \in M_n(\mathbb{R})$. 则 A 正定 $\Leftrightarrow$ A 的 n 个顺序主子式（2^n-1 个主子式）全大于0。

Pf. "$\Rightarrow$". 设 A 正定, 则 $0 < \alpha^T A \alpha$ $\forall\, 0 \neq \alpha \in \mathbb{R}^{n\times 1}$

由 THM1 ③ $|A| = |P|^2 > 0$. 要说明 A 的 r 阶顺序主子式 $|A_r| > 0$. 只须说明 A_r 是 r 阶正定阵

设 $A = \begin{bmatrix} A_r & B \\ B^T & C_{n-r} \end{bmatrix}$. 则 $\forall\, \alpha_r \neq 0 \in \mathbb{R}^{r\times 1}$. $0 \neq \begin{pmatrix} \alpha_r \\ 0 \end{pmatrix} = \beta$

$\therefore\ 0<\beta^T A\beta=(\alpha_r^T,0)\begin{pmatrix}A_r & B\\ B^T & C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_r\\0\end{pmatrix}=\alpha_r^T A_r\alpha_r$

$\therefore$ A_r正定

"$\Leftarrow$"．设 A的n个顺序主子式$|A_r|$全大于零．设 $A=\begin{pmatrix}A_{n-1} & \beta\\ \beta^T & a_{nn}\end{pmatrix}$

$\because$ A_{n-1}的$n-1$个顺序主子式全是A的顺序主子式．用归纳假设知A_{n-1}是正定阵．特别地 $|A|>0\Rightarrow A$可逆

令 $U^T=\begin{pmatrix}E_{n-1} & 0\\ -\beta^T A^{-1} & 1\end{pmatrix}$．则有

$$U^TAU=\begin{pmatrix}A_{n-1} & 0\\ 0 & a_{nn}-\beta^TA^{-1}\end{pmatrix}$$

$\therefore$ $|A_{n-1}|(a_{nn}-\beta^TA^{-1}\beta)=|A||U^2|>0$

$\therefore$ $a_{nn}-\beta^TA^{-1}\beta>0$

$\therefore$ U^TAU正定．$\forall\, 0\neq\alpha\in\mathbb{R}^{n\times1}$

令 $\beta=U^{-1}\alpha\neq0$ $\alpha^TA\alpha=\beta^T(U^{-1}AU)\beta>0$ #

$V=\mathbb{R}^{n\times1}$ 取定一个基 $\alpha_1\cdots\alpha_n$

$[\sum a_i\alpha_i,\sum b_j\alpha_j]=\sum a_ib_j[\alpha_i,\alpha_j]$

$$=(a_1\cdots a_n)\begin{pmatrix}[\alpha_1,\alpha_1] & \cdots & [\alpha_1,\alpha_n]\\ \vdots & & \vdots\\ [\alpha_n,\alpha_1] & \cdots & [\alpha_n,\alpha_n]\end{pmatrix}=\alpha^TA\beta$$

A的性质　①实对称 ② A正定

<u>定理3</u>　存在集合双射 $A=\{V=\mathbb{R}^{n\times1}$的内积$[-,-]\}$ 取定一组基

$\varphi:A\longleftrightarrow\{n$阶正定阵$\}$．即$[-,-]\to([\alpha_i,\alpha_j])$

Pf.　① φ是映射：已证

② φ是单射：　设$f(-,-)$，$g(-,-)$是$\mathbb{R}^{n\times1}$上的二内积

设 $\varphi(f)=\varphi(g)$. 则 $(f(\alpha_i,\alpha_j))_{n\times n} = (g(\alpha_i,\alpha_j))$

$\Leftrightarrow f(\alpha_i,\alpha_j) = g(\alpha_i,\alpha_j)$

$\Rightarrow f(\sum a_i\alpha_i, \sum b_j\alpha_j) = (a_1 \cdots a_n)(f(\alpha_i,\alpha_j))\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

$= (a_1 \cdots a_n)(g(\alpha_i,\alpha_j))\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = g(\sum \alpha_i a_i, \sum \alpha_j b_j)$

③ φ 是满射. 略 #

Ch7 线性空间与线性变换

$V = F^{n\times 1}$ $\quad +: V\times V \to V$, $(\alpha,\beta) \mapsto \alpha+\beta$

① 交换律
② 结合律
③ $\exists$ 零元(若存在, 则唯一)
④ $\forall \alpha$, α 有负元 $-\alpha$, $\alpha+(-\alpha)=0$

$*\quad F\times V \to V$, $(k,\alpha) \to k*\alpha$

① $1\alpha = \alpha$
② $(kl)\alpha = k(l\alpha)$
③ $(k+l)\alpha = k\alpha + l\alpha$
④ $k(\alpha+\beta) = k\alpha + k\beta$

一般地, 任意满足 8 条性质的 V 称为 $\mathbb{F}$ 上的线性空间

<u>e.g.1</u> $V = C[a,b] = \{[a,b]$ 上的实值连续函数$\}$

关于 $+: V\times V \to V$, $(f,g) \mapsto f+g=h$ $\quad h(x) = f(x)+g(x) \quad \forall x\in[a,b]$

$*: \mathbb{R}\times V \to V$, $(k,f) \mapsto kf$ $\quad (kf)(x) = k\cdot f(x) \quad \forall x\in[a,b]$

则 V 作成一个线性空间

$\alpha_1, \cdots, \alpha_u \stackrel{l}{\Longrightarrow} \beta_1 \cdots \beta_v$

<u>Lemma 1.</u> 若 $\alpha_1 \cdots \alpha_u \stackrel{l}{\Longrightarrow} \beta_1 \cdots \beta_v$ 且 β 无关. 则 $u \geq v$

<u>e.g.2</u> 设 $k_1 \cdots k_r$ 两两互异, $k_i \in \mathbb{R}$, 则 $f_i: V = C[a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f_i(x) \stackrel{def}{=} e^{k_i x}$

求证: $f_1 \cdots f_r$ 线性无关. 从而 $r(V) = \infty$

Pf. 设 $l_i \in \mathbb{R}$ s.t. $\sum l_i f_i = 0$

$$l_1 e^{k_1 x} + \cdots + l_r e^{k_r x} = 0$$

求导. $$(k_1 l_1) e^{k_1 x} + \cdots + (l_r k_r) e^{k_r x} = 0$$

$$\vdots$$

$$(k_1^{r-1} l_1) e^{k_1 x} + \cdots + (k_r^{r-1} l_r) e^{k_r x} = 0$$. 即

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_r \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_1^{r-1} & k_2^{r-1} & \cdots & k_r^{r-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 e^{k_1 x} \\ \vdots \\ l_r e^{k_r x} \end{pmatrix} = \Theta$$

$\because$ $k_i \neq k_j$, $i \neq j$ $\quad$ $\therefore$ 矩阵可逆

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} l_1 e^{k_1 x} \\ \vdots \\ l_r e^{k_r x} \end{pmatrix} = \Theta \quad \Rightarrow l_i e^{k_i x} = 0$$

$$\Rightarrow l_i e^{k_i a} = 0$$

$$\Rightarrow l_i = 0$$

$\therefore$ $f_1 \cdots f_r$ 线性无关

<u>e.g.3</u> $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^+ = \{ r \in \mathbb{R} \mid r > 0 \}$

定义运算 $\quad \oplus : V \times V \mapsto V$

$$(r, s) \mapsto r \oplus s \stackrel{def}{=\!=} rs$$

$$\otimes : \mathbb{R} \times V \longmapsto V$$

$$(r, s) \longmapsto r \otimes s \stackrel{def}{=\!=} s^r$$

⊕ 交换律 $\quad r \oplus s = rs = sr = s \oplus r$

结合律 $\quad (r_1 \oplus r_2) \oplus r_3 = (r_1 r_2) \oplus r_3 = (r_1 r_2) r_3 = r_1 (r_2 r_3) = r_1 (r_2 \oplus r_3)$

$$= r_1 \oplus (r_2 \oplus r_3)$$

$\exists$ 零元 $\quad 0_V = 1 \quad r \oplus 1 = 1 \oplus r = r$

负元 $\quad r \oplus \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \oplus r = \frac{1}{r} \cdot r = 1 = 0_V \qquad \ominus r = \frac{1}{r}$

⊗ $\quad 1 \otimes s = s^1 = s$

$(kl) \otimes s = s^{kl} = (s^l)^k = k \otimes s^l = k(l \otimes s)$

⑦ . ⑧ 易证

则 $(V, \oplus, \otimes)$ 成为一个线性空间

(i) V中一个元素 r 线性无关 $\Longrightarrow r \neq 0_V$

(ii) $\forall r \neq 1,\ r>0$ 都是 V 的一个极大无关组．即 $r(V)=1$

$\forall s \in V,\quad r \xrightarrow{\text{表}} s$．即 $\exists k \in \mathbb{R}$．s.t. $s = k \otimes r = r^k$

取 $k = \log_r s$

基 (a basis)：${}_{\mathbb{F}}V$ 的一个极大无关组，$r(V)$ 叫 ${}_{\mathbb{F}}V$ 的<u>维数</u> dimension

<u>e.g 3</u> 中 ${}_{\mathbb{R}}V$ 维数为 1：$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^+ = 1$

<u>e.g 4.</u> $V = \mathbb{R}[x]$．$\mathbb{F} = \mathbb{R}$

加法：多项式加法（合并同类项）

数乘：✓

$x,\ x^2 \cdots$ 是一个基

$x-1,\ (x-1)^2 \cdots$ 也是一个基 $\longrightarrow$ $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[x] = \infty$。

而 $\dim_{\mathbb{R}} C[0,1] = \infty$

坐标 (Coordinate)

设 $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 是线性空间 ${}_{\mathbb{F}}V$ 的一个基．则 $\forall \alpha \in V$ $\exists! X \in \mathbb{F}^{n\times 1}$

$X^T = (k_1 \cdots k_n)$， s.t $\alpha = k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_n = (\alpha_1 \cdots \alpha_n) X$

称 $\mathbb{F}$ 为 α 在基 $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 下的坐标

<u>e.g 5.</u> $\mathbb{F} = \mathbb{R}$，$V = \{3\times 3$ 实对称阵$\}$

$+$：矩阵加法

$*$：矩阵数乘

则 ${}_{\mathbb{F}}V$ 是一个 6 维线性空间

<u>e.g 6.</u> (1) $\mathbb{F} = \mathbb{C}$．$V = \mathbb{C}$．$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$

(2) $\mathbb{F} = \mathbb{R}$．$V = \mathbb{C}$，$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$

<u>e.g 7.</u> 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 已给 $V^A = \{\alpha \in \mathbb{R}^{n\times 1} \mid A\alpha = 0\}$ 解空间

是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间，基为 A 的基础解系 $\dim_{\mathbb{R}}(V^A) = n - r(A)$

基坐标下的坐标变换

设 $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 与 $\beta_1 \cdots \beta_n$ 为线性空间 $_{\mathbb{F}}V$ 中的二个基

$(\beta_1 \cdots \beta_n) = (\alpha_1 \cdots \alpha_n) A$. 其中 $\beta_i = (\alpha_1 \cdots \alpha_n) \cdot A(i)$.

即 $A(i)$ 是 β_i 在基 $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 下的坐标

可证. A 可逆.

设 $\alpha \in V$ 在 $\beta_1 \cdots \beta_n$ 与 $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 下的基分别为 Y 与 X. 则

$$\alpha = (\alpha_1 \cdots \alpha_n) X$$
$$= (\beta_1 \cdots \beta_n) Y$$
$$= (\alpha_1 \cdots \alpha_n) A Y$$

广义结合律 $(\alpha_1 \cdots \alpha_n)(AY) = (\alpha_1 \cdots \alpha_n) X$

$\because (\alpha_1 \cdots \alpha_n)$ 线性无关. 由 $(\alpha_1 \cdots \alpha_n)(AY - X) = 0$

$\Rightarrow AY - X = 0$. 即

$$\underset{旧}{X} = A \underset{新}{Y}$$

若 $(\beta_1 \cdots \beta_n) = (\alpha_1 \cdots \alpha_n) A$. 则 $Y = A^{-1} X$

§2. 子空间. 交与和

定义 设 $_{\mathbb{F}}V$ 是线性空间. 而 $_{\mathbb{F}}W \subseteq {}_{\mathbb{F}}V$. 若 $_{\mathbb{F}}W$ 按照 $_{\mathbb{F}}V$ 中的运算作成一个线性空间. 则称 $_{\mathbb{F}}W$ 是 $_{\mathbb{F}}V$ 的一个子空间 (subspace). 记成 $W \leqslant_{\mathbb{F}} V$

① $W \neq \phi$

② $\forall \alpha, \beta \in W$. $\alpha + \beta \in W$ + 八条性质

③ $\forall \alpha \in W$, $k \in \mathbb{F}$. $k\alpha \in W$

命题 ☆ 设 $\boxed{\phi \neq W} \subseteq {}_{\mathbb{F}}V$. 则 $W \leqslant V \Leftrightarrow$ 以下条件成立

① $\forall \alpha, \beta \in W$. 有 $\alpha + \beta \in W$; (两个封闭性)

② $\forall \alpha \in W$. $\forall k \in \mathbb{F}$. 有 $k\alpha \in W$

证: "$\Rightarrow$". Clear

"$\Leftarrow$" ①. ②. ⑤. ⑥. ⑦. ⑧在 V 中成立 $\therefore$ 在 W 中也成立

③ 只要说明：$\Theta_V \in W$，只须证 $0_{\mathbb{F}} \cdot \alpha = 0_V$

令 $0_{\mathbb{F}}\alpha = \beta$　$(0_{\mathbb{F}} + 0_{\mathbb{F}})\alpha = 0_{\mathbb{F}}\alpha + 0_{\mathbb{F}}\alpha$

$$\beta = \beta + \beta$$

$$\Theta_V = \beta + (-\beta) = \beta + \beta + (-\beta) = \beta + (\beta - \beta) = \beta + 0_V = \beta$$

注：同理可证 $k \cdot \Theta_V = \Theta_V$

④ $(-1)\beta + \beta = (-1+1)\beta = 0_{\mathbb{F}}\beta = 0_V$

$\therefore (-1)\beta = -\beta \in W$

$\therefore$ β在W中有负元$-\beta$

\#

e.g. $\forall A \in \mathbb{F}^{m\times n}$，$AX=0$的解空间 $V^A = \{\alpha \in \mathbb{F}^{n\times 1} \mid A\alpha = 0\}$ 是$\mathbb{F}^{n\times 1}$的一个子空间（其维数为 $n - r(A)$）

Pf：① $V^A \neq \phi$　$\because 0 \in V^A$

② ③ 易证

\#

e.g. $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$，$B \in \mathbb{F}^{s\times t}$ 已给．考虑 ${}_AV_B = \{C \in \mathbb{F}^{n\times s} \mid ACB = 0\}$

求证：① ${}_AV_B \leq_{\mathbb{F}} \mathbb{F}^{n\times s}$

求 $\dim_{\mathbb{F}} V$

Solution. ① $V \neq \phi$．$\because 0_{n\times s} \in V$　又关于矩阵加法和数乘封闭，$V \leq \mathbb{F}^{n\times s}$

② 可设可逆阵 P_i，Q_i，使得 $P_1AQ_1 = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，其中 $r = r(A)$

$$P_2BQ_2 = \begin{pmatrix} E_{s_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad s_1 = r(B)$$

$$P_1ACBQ_2 = 0$$

$$(P_1AQ_1)Q_1^{-1}CP_2^{-1}(P_2BQ_2) = 0$$

设 $Q_1^{-1}CP_2^{-1} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}$

则 $C \in V \Longleftrightarrow Q_1^{-1}CQ_2^{-1}$ 满足

$$0=\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1 & C_2\\ C_3 & C_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_{s_1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_1 & C_2\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_{s_1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \iff C_1=0$$

$C_1\in\mathbb{F}^{r\times s_1}$

$\therefore\ C\in V \iff Q_1^{-1}CP_2^{-1}$ 中的 $C_1=0$. 而 $r(Q_1^{-1}CP_2^{-1})=r(C)$

$$\therefore\ V=\{C\in\mathbb{F}^{n\times s}\mid P_1AQ_1Q_1^{-1}CP_2^{-1}P_2BQ_2=0\}$$

$$=\{C\in\mathbb{F}^{n\times s}\mid Q_1^{-1}CP_2^{-1}=\left(\begin{array}{c|c}0 & C_2\\ \hline C_3 & C_4\end{array}\right)\}$$

$Q_1E_{ij}P_2\left(\begin{array}{l}1\le i\le r \text{ 时 } s_1+1\le j\le s\\ 1\le j\le s_1 \text{ 时. } r+1\le i\le n\\ n\ge i\ge r+1,\ s\ge j\ge s_1+1\end{array}\right)$ 为 V 的一个基

$\therefore\ \dim_{\mathbb{F}}V=ns-r(A)r(B)$ #

子空间的运算：交与和

1. 作为集合的交：设 $W_i\le_{\mathbb{F}}V$. 则集合的交 $\bigcap W_i\le_{\mathbb{F}}V$

Pf. ① $\bigcap_i W_i\neq\phi$. $\because\ \theta_V\in W_i\ \therefore\ \theta_V\in\bigcap_i W_i$

② $\forall\alpha,\beta\in\bigcap_{i\in I}W_i\Rightarrow\alpha+\beta\in W_i\ \forall i\Rightarrow\alpha+\beta\in\bigcap_{i\in I}W_i$

③ 同理可证 $\forall\alpha\in\bigcap_{i\in I}W_i$. $k\alpha\in\bigcap_{i\in I}W_i$ #

特别地 $W_1\cap\cdots\cap W_r\le_{\mathbb{F}}V\quad\forall W_i\in W$

2. 作为集合的并：

<u>命题2</u>. $\forall W_1, W_2\le_{\mathbb{F}}V$. $W_1\cup W_2\iff W_1\subseteq W_2$ 或 $W_2\subseteq W_1$

Pf. "$\Leftarrow$" Clear

"$\Rightarrow$" 设 $W_1\nsubseteq W_2$ 且. $W_2\nsubseteq W_1$

取 $\alpha_1\in W_1\setminus W_2$, $\alpha_2\in W_2\setminus W_1$. 再设 $W_1\cup W_2\le W$

$\because\ \alpha_1, \alpha_2\in W_1\cup W_2\le W$

$\therefore\ \alpha_1+\alpha_2\in W_1\cup W_2$

若 $\alpha_1+\alpha_2\in W_1$. 可设 $\alpha_1+\alpha_2=\beta_1\in W_1$. 则 $\alpha_2=(-\alpha_1)+\beta_1\in W_1$ 矛盾!

$\alpha_1+\alpha_2\in W_2$ 同理 #

设 $W_i \not\subseteq W_j$ $\quad \forall \{i,j\} = \{1,2\}$

是否有包含 $W_1 \cup W_2$ 的最小子空间？

$\forall\, \alpha_1 \cdots \alpha_r \in {}_{\mathbb{F}}V$ 含 $\alpha_1 \cdots \alpha_r$ 的最小子空间是？

$\{k_1\alpha_1 + \cdots + k_r\alpha_r \mid k_1 \cdots k_r \in \mathbb{F}\} \overset{\text{def}}{=} L(\alpha_1 \cdots \alpha_r) \subseteq W$. if $\{\alpha_1 \cdots \alpha_r\} \subseteq W \leq V$

<u>命题3</u>. 如上定义的$L(\alpha_1 \cdots \alpha_r)$是${}_{\mathbb{F}}V$的一个子空间. 从而是包含$\{\alpha_1 \cdots \alpha_r\}$的最小子空间. 称为由$\alpha_1 \cdots \alpha_r$生成的子空间

设 $W_1 = L(\alpha_1 \cdots \alpha_r)$
$W_2 = L(\beta_1 \cdots \beta_s)$ $\Rightarrow$ ① $W_1 \cup W_2 \subseteq L(\alpha_1 \cdots \alpha_r, \beta_1 \cdots \beta_s)$
② 若 $W_1 \cup W_2 \subseteq W \leq_{\mathbb{F}} V$. 则有 $L(\alpha_1 \cdots \alpha_r, \beta_1 \cdots \beta_s) \subseteq W$

$\Rightarrow L(\alpha_1 \cdots \alpha_r, \beta_1 \cdots \beta_s)$是包含$W_1 \cup W_2$的最小子空间

3. 和

$\forall W_1, W_2 \leq_{\mathbb{F}} V$. 定义 $W_1 + W_2 \overset{\text{def}}{=} \{\alpha_1 + \alpha_2 \mid \alpha_i \in W_i\}$

则有 ① $W_1 \cup W_2 \subseteq W_1 + W_2$
② 事实上. $W_1 + W_2$是子空间. $W_1 + W_2 \leq_{\mathbb{F}} V$
③ 若 $W_1, W_2 \subseteq W \leq_{\mathbb{F}} V$ 那么一定有 $W_1 + W_2 \subseteq W$

$\Rightarrow W_1 + W_2$是包含$W_1 \cup W_2$的最小子空间. $W = L(W_1 \cup W_2)$

<u>命题4</u>. $\forall\, \phi \neq S \subseteq V$ 含S的最小子空间存在且唯一

$$L(S) = \bigcap_{S \subseteq W \leq_{\mathbb{F}} V} W$$

<u>定理2.1</u> (维数公式) $\dim_{\mathbb{F}}(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$

Pf. $W_1 \cap W_2 \leq \begin{matrix} W_1 \\ W_2 \end{matrix} \leq W_1 + W_2$

取定 $W_1 \cap W_2$的一个基 $\alpha_1 \cdots \alpha_r$ $(r = \dim(W_1 \cap W_2))$

分别扩张成 W_1和W_2的各一基

$\alpha_1 \cdots \alpha_r, \beta_1 \cdots \beta_s \ (\in W_1)$

$\alpha_1 \cdots \alpha_r, \gamma_1 \cdots \gamma_t \ (\in W_2)$

下证 $\alpha_1 \cdots \alpha_r, \beta_1 \cdots \beta_s, \gamma_1 \cdots \gamma_t$ 是 W_1+W_2 的基

事实上 (1) $\alpha_1 \cdots \alpha_r, \beta_1 \cdots \beta_s, \gamma_1 \cdots \gamma_t \xRightarrow{\ell} W_1+W_2$:

$\forall \alpha \in W_1+W_2$. $\exists \alpha_i \in W_i$ s.t. $\alpha = \alpha_1+\alpha_2$

$(\alpha_1 \cdots \alpha_r, \beta_1 \cdots \beta_s) \xRightarrow{(\ell)} \alpha_1$ $\Rightarrow \alpha \xLeftarrow{(\ell)} (\alpha_1 \cdots \alpha_r, \beta_1 \cdots \beta_s, \gamma_1 \cdots \gamma_t)$

$(\alpha_1 \cdots \alpha_r, \gamma_1 \cdots \gamma_t) \xRightarrow{\ell} \alpha_2$

(2) 再证 $\alpha_1 \cdots \alpha_r, \beta_1 \cdots \beta_s, \gamma_1 \cdots \gamma_t$ 线性无关

事实上. $\sum_{i=1}^{r} k_i \alpha_i + \sum_{j=1}^{s} l_i \beta_j + \sum_{u=1}^{t} a_{21}\gamma_{21} = 0$

$$W_1 \ni \left(\sum k_i \alpha_i + \sum l_i \beta_i\right) = \underset{\substack{\Rightarrow \\ W_1 \cap W_2}}{\sum} (-a_i)\gamma_i \in W_2$$

$\therefore (\gamma_1 \cdots \gamma_t) \xLeftarrow{(\ell)} (\alpha_1 \cdots \alpha_r)$

$\Rightarrow a_i = 0 \Rightarrow k_i, l_i = 0$ #

e.g. 设 $AB=BA$. $C=\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$. 求证 $r(A)+r(B) \geq r(C)+r(AB)$

Pf. 用 V^A 表示 A 的解空间 $V^A \overset{def}{=} \{\alpha \in \mathbb{F}^{n\times 1} \mid A\alpha = 0\}$

$\Rightarrow V^C = \{\alpha \mid C\alpha = 0\} = \{\alpha \mid \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}\alpha = 0\} = \{A\alpha = 0 \text{ 且 } B\alpha = 0\}$

$\Rightarrow V^A \cap V^B = V^C \subseteq V^A + V^B \subseteq V^{AB}$

由维数公式及基础解系基本定理. #

4. 直和 (direct sum)

定义 1 设 $W_i \leq_{\mathbb{F}} V$. $1 \leq i \leq r$ 记 $W = W_1 + W_2 + \cdots + W_r$

若 $\forall \alpha \in W$. 表达式 $\alpha = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i$ $(\alpha_i \in W_i)$ 是唯一的

$(\Leftrightarrow \sum \alpha_i = \alpha = \sum \beta_i, \ \alpha_i, \beta_i \in W_i \Rightarrow \alpha_i = \beta_i)$

则称 W 是子空间 $W_1 \cdots W_r$ 的一个直和. 记为 $W = W_1 \oplus W_2 \cdots \oplus W_r$

$\overset{\triangle}{=} \bigoplus_{i=1}^{r} W_i$

定理2. 设 $W_i \leq_{\mathbb{F}} V$. 令 $W = W_1 + W_2$. 则以下等价

① $W = W_1 \oplus W_2$

② 0_V 的分解式唯一 " $0_V = \alpha_1 + \alpha_2$ $(\alpha_i \in W_i) \Rightarrow \alpha_i = 0_V$

easy

③ $W_1 \cap W_2 = \{0_V\} \overset{记}{=\!=} 0$

④ $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$

Pf. ① $\Rightarrow$ ② Clearly

② $\Rightarrow$ ③ 设②成立. $\alpha \in W_1 \cap W_2$, $-\alpha \in W_1 \cap W_2$

$\therefore$ $\alpha \in W_1$. $\alpha \in W_2$

$-\alpha \in W_1$. $-\alpha \in W_2$

且有 $0_V = \underset{W_1}{(\alpha)} + \underset{W_2}{(-\alpha)} \Rightarrow \alpha = 0_V$

$\therefore W_1 \cap W_2 =$

③ $\Leftrightarrow$ ④ 由维数公式.

③ $\Rightarrow$ ① 设 $\forall \alpha \in W$. 表达式 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$
$= \beta_1 + \beta_2$

$\therefore (\alpha_1 - \beta_1) = (\alpha_2 - \beta_2) \in W_1 \cap W_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2$ #

推广 设 $W_i \leq_{\mathbb{F}} V$. 记 $W = \sum_{i=1}^{r} W_i$. 则以下等价:

① $W = \bigoplus_{i=1}^{r} W_i$

② 0_V 表达式唯一. $0_V = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i$ $(\alpha_i \in W_i)$ 蕴含了 $\alpha_i = 0$ $\forall i$

③ $W_i \cap \sum_{j \neq i} W_j = 0$

④ $\begin{cases} W_2 \cap W_1 = 0 \\ W_3 \cap (W_1 + W_2) = 0 \\ \vdots \\ W_r \cap (W_1 + W_2 + \cdots + W_{r-1}) = 0 \end{cases}$

⑤ $\dim \sum_{i=1}^{r} W_i = \sum_{i=1}^{r} \dim W_i$

Pf. "③ $\Rightarrow$ ④" $\because W_1 \subseteq \sum_{i \neq 2} W_i$

$\therefore W_2 \cap W_1 \subseteq W_2 \cap \sum_{i \neq 2} W_i = 0$ $\therefore W_2 \cap W_1 = 0$

同理得余式

"④ ⟹ ③" 已知 $W_r \cap \sum_{i\neq r} W_i = 0$

及 $W_{r-1} \cap (W_1 + \cdots + W_{r-2}) = 0$

$\alpha_{r-1} \ni W_{r-1} \cap (W_1 + \cdots + W_{r-2} + W_r) \exists \alpha_i \in W_i$

s.t. $\alpha_{r-1} = \alpha_1 + \cdots \alpha_{r-2} + \alpha_r$

$\therefore \underset{W_r \ni}{-\alpha_r} = \underset{\in W_1 + \cdots + W_r}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_{r-2} - \alpha_{r-1}}$

$= 0$ 回代 $\alpha_{r-1} = 0$

$\Rightarrow W_{r-1} \cap (W_1 + \cdots + W_{r-2} + W_r)$

同理可证 $W_{r-2} \cap (W_1 + \cdots + W_{r-3} + W_{r-1} + W_r)$ #

"④ ⟹ ⑤" $\dim(\sum_{i=1}^{r-1} W_i + W_r) = \dim(\sum_{i=1}^{r-1} W_i) + \dim W_r$

$\overset{\text{归纳法}}{=} \sum_{i=1}^{r} \dim W_i$

<u>Cor 2</u>. 设 $0 \neq \alpha_i \in {}_{\mathbb{F}}V$. 并命 $W = \sum_{i=1}^{r} \mathbb{F}\alpha_i$. 则 $W = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{F}\alpha_i$

$\Leftrightarrow \alpha_1 \cdots \alpha_r$ 线性无关

<u>Pf</u>. "⟹" 设 $W = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{F}\alpha_i$. 设 $\sum_{i=1}^{r} k_i\alpha_i = 0_V$. $k_i \in \mathbb{F}$. 由 0_V 表达唯一.

知 $k_i = 0 \Rightarrow \alpha_1 \cdots \alpha_r$ 线性无关

"⟸" 显然. #

§3. 线性映射

<u>定义1</u>. 设 ${}_{\mathbb{F}}V$ 是 ${}_{\mathbb{F}}W$ 是线性空间. $\varphi: {}_{\mathbb{F}}V \longrightarrow {}_{\mathbb{F}}W$ 是映射. 且满足

φ: $\alpha + \beta \mapsto \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$

$k\alpha \mapsto k\varphi(\alpha)$

(i.e $\varphi(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2) = \sum_{i=1}^{2} k_i \varphi(\alpha_i)$)

则称 φ 是一个线性映射. 若 ${}_{\mathbb{F}}V = {}_{\mathbb{F}}W$, 则称 φ 是 V 上的线性变换 (linear transform)

<u>e.g.1</u>. $V = \mathbb{F}^{n\times 1}$. $W = \mathbb{F}^{m\times 1}$. 设 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$. 则有映射

φ_A: $V \to W$

$\alpha \mapsto A_{m\times n}\alpha_{n\times 1}$ φ_A 是一个线性映射

e.g.2. ${}_{\mathbb{R}}V = (\mathbb{R}^+, \oplus, \otimes)$ $\begin{pmatrix} a\oplus b = a\times_{\mathbb{R}} b \\ a\otimes b = b^a \end{pmatrix}$. 取定 $\mathbb{R}^+$ 中一个 $a\neq 1$

${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R} = W$

命 $\varphi: {}_{\mathbb{R}}V \longrightarrow {}_{\mathbb{R}}W$. 则 φ 是一个双射线映

$r \longmapsto \log_a r$

Pf. ① φ 是映射

② $\varphi(r_1\oplus r_2) = \log_a(r_1\oplus r_2) = \log_a(r_1 r_2) = \log_a(r_1) + \log_a(r_2)$
$= \varphi(r_1) +_{\mathbb{R}} \varphi(r_2)$

③ $\varphi(k\otimes r) = \log_a r^k = k\log_a r = k \times_{\mathbb{R}} \varphi(r)$.

$\therefore$ φ 是线映

④ φ 单射. "$\forall r_1, r_2 \in {}_{\mathbb{R}}V$. 若 $\varphi(r_1)=\varphi(r_2)$. 则 $r_1 = r_2$"

$\forall r_1, r_2 \in {}_{\mathbb{R}}V$. 若 $\varphi(r_1)=\varphi(r_2)$. 则 $\log_a r_1 = \log_a r_2$. 则 $r_1 = r_2$

$\therefore$ φ 是单射

⑤ φ 满射 "$\forall s\in W$, $\exists r\in V$. s.t. $\varphi(r)=s$"

事实上. $\forall s\in\mathbb{R}$. $s=\varphi(r)=\log_a r$. $r = a^s = s\otimes a$

定义2. 双射线映 $\varphi: {}_{\mathbb{F}}V \to {}_{\mathbb{F}}W$ 称作一个线性同构映射, 简称同构 (isomorphisms)

若 ${}_{\mathbb{F}}V$ 到 ${}_{\mathbb{F}}W$ 存在一个线性同构映射. 则称 ${}_{\mathbb{F}}V$ 与 ${}_{\mathbb{F}}W$ 同构.

记为 ${}_{\mathbb{F}}V \cong {}_{\mathbb{F}}W$

e.g.3. $\forall {}_{\mathbb{F}}W$. ${}_{\mathbb{F}}V$. 有两个线映: $0: {}_{\mathbb{F}}V \longrightarrow {}_{\mathbb{F}}W$
$\alpha \longmapsto 0_W$

$I_V: {}_{\mathbb{F}}V \longrightarrow {}_{\mathbb{F}}V$
$\alpha \longmapsto \alpha$

线映 $\sigma: {}_{\mathbb{F}}V \longrightarrow {}_{\mathbb{F}}W$ 已给. 具有的性质

一. (元素类)

1. $\sigma(0_V) = \sigma(0_{\mathbb{F}} \cdot 0_V) = 0_{\mathbb{F}} \cdot \sigma(0_V) = 0_W$

2. $\sigma(-\alpha) = -\sigma(\alpha)$

3. 若 $\alpha_1 \cdots \alpha_r \in_{\mathbb{F}} V$ 线性相关. 则 $\sigma(\alpha_1) \cdots \sigma(\alpha_r)$ 线性相关.

$\left(\sigma(\sum k_i\alpha_i) = \sigma(0_V) = \sum k_i \sigma(\alpha_i) = 0_W\right)$

逆否: 若 $\sigma(\alpha_1) \cdots \sigma(\alpha_r)$ 线性无关. 则 $\alpha_1 \cdots \alpha_r$ 线性无关

二. (子空间的) $\operatorname{im}(\sigma)$

4. 若 $V_1 \leq_{\mathbb{F}} V$. 则象集合 $\sigma(V_1) \leq_{\mathbb{F}} W$

5. 若 $W_1 \leq_{\mathbb{F}} W$ 则 W_1 在映射 σ 下的完全逆象 $\sigma^{-1}(W_1)$ $\boxed{\text{不代表有逆映射}}$

是 V 的子空间: $\sigma^{-1}(W_1) \leq_{\mathbb{F}} V$

Pf. ① $\sigma^{-1}(W_1) \neq \phi$: $\because W_1 \leq_{\mathbb{F}} W \therefore 0_W \in W_1$. 而 $\sigma(0_V) = 0_W$

$\therefore 0_V \in \sigma^{-1}(W_1) \therefore \sigma^{-1}(W_1) = \phi$

② 若 $\alpha \in \sigma^{-1}(W_1)$. 则 $\sigma(\alpha) \in W_1$ $\therefore$ 若 $\alpha_1, \alpha_2 \in \sigma^{-1}(W_1)$

$\sigma(\alpha_1 + \alpha_2) = \sigma(\alpha_1) + \sigma(\alpha_2) \in W_1$

$\therefore \alpha_1 + \alpha_2 \in \sigma^{-1}(W)$

③ 同理. 若 $\alpha \in \sigma^{-1}(W)$. 则 $k\alpha \in \sigma^{-1}(W)$. #

6. 若 $V_1 \leq_{\mathbb{F}} V$. 则 $\dim V_1 \geq \dim \sigma(V_1)$

7. 若 σ 单射. (满射) 则有 $\dim W_1 \overset{\leq}{\geq} \dim \sigma^{-1}(W_1)$

Pf. 设 $\sigma^{-1}(W_1)$ 的一组基为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$. 则 $r = \dim_{\mathbb{F}} \sigma^{-1}(W_1)$

$\because \alpha_i \in \sigma^{-1}(W_1) \Longleftrightarrow \sigma(\alpha_i) \in W$. 则有 $W_1 \supseteq L(\sigma(\alpha_1) \cdots \sigma(\alpha_r))$

下证 $(\sigma(\alpha_1) \cdots \sigma(\alpha_r))$ 线性无关.

(即蕴含了 $\dim W_1 \geq r = \dim_{\mathbb{F}} \sigma^{-1}(W)$)

事实上. 设 $k_i \in \mathbb{F}$. s.t. $\sum k_i \sigma(\alpha_i) = 0_W$

$\therefore \sigma(\sum k_i\alpha_i) = 0_W$. 而 σ 单射

$\therefore \sum k_i\alpha_i = 0_V$

$\therefore k_i = 0$

$\therefore \sigma(\alpha_1), \cdots, \sigma(\alpha_r)$ 线性无关

#

同构

若存在双射线映 $\sigma: {}_{\mathbb{F}}V \to {}_{\mathbb{F}}W$，则称 V与W同构，记为 $V \cong W$

结论 ${}_{\mathbb{F}}V \cong {}_{\mathbb{F}}W \Longleftrightarrow \dim_{\mathbb{F}} V = \dim_{\mathbb{F}} W$

Pf："$\Rightarrow$" 设 $\sigma: V \to W$ 为同构线映

则 σ 单且满 $\therefore {}_{\mathbb{F}}V = \sigma^{-1}(W)$. 且 $W = \sigma(V)$

σ 单 $\Rightarrow \dim_{\mathbb{F}} V = \dim \sigma^{-1}(W) \leq \dim_{\mathbb{F}} W$

σ 满 $\Rightarrow \dim_{\mathbb{F}} V \geq \dim_{\mathbb{F}} \sigma(V) = \dim_{\mathbb{F}} W$

$\therefore \dim_{\mathbb{F}} V = \dim_{\mathbb{F}} W$

"$\Leftarrow$". 设 $\dim_{\mathbb{F}} V = \dim_{\mathbb{F}} W = n$

进一步设 $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 与 $\beta_1 \cdots \beta_n$ 分别是${}_{\mathbb{F}}V$ 与${}_{\mathbb{F}}W$的各一基．构作

$$\sigma: {}_{\mathbb{F}}V \to {}_{\mathbb{F}}W$$
$$\alpha \to \sigma(\alpha)$$
$$\exists! X \in \mathbb{F}^{n\times 1} \quad (\alpha_1 \cdots \alpha_n)X \qquad \sigma(\alpha) = (\beta_1 \cdots \beta_n)X$$

则可验证 ① σ是映射

② σ是线性映射

③ σ单

④ σ满 #

注：任一 n维空间${}_{\mathbb{F}}V$．同构于 $\mathbb{F}^{n\times 1}$．也同构于$\mathbb{F}^{1\times n}$

命题2．${}_{\mathbb{F}}V \to {}_{\mathbb{F}}V$的所有同构线映构成一个群．称为${}_{\mathbb{F}}V$的自同构群．记为 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}} V$

Pf．运算：映射的合成

(1) 封闭性：若 σ. $\tau \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}} V$. 则 $\sigma \cdot \tau \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}} V$

(2) 结合律

(3) 单位元：$I_V: V \to V \quad \alpha \mapsto \alpha$

(4) 若 $\sigma \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}} V$. $\sigma^{-1}: V \to V$ 也是同构映射

$\forall$ 线映 $\sigma: {}_{\mathbb{F}}V \to {}_{\mathbb{F}}W$

$$\sigma(V) \overset{\text{i.e.}}{=\!=} \mathrm{im}(\sigma) = \{\sigma(\alpha) \mid \alpha \in V\} \leq_{\mathbb{F}} W$$

$\ker(\sigma) = \{\alpha \in V \mid \sigma(\alpha) = 0_W\} = \sigma^{-1}(\{0_W\})$ kernal 核

则 $\ker(\sigma) \leqslant_{\mathbb{F}} V$

$\dim_{\mathbb{F}} \sigma(V) = \dim_{\mathbb{F}} \operatorname{im}(\sigma)$ 叫线映 σ 的秩 $r(\sigma)$

而 $\dim_{\mathbb{F}} \ker(\sigma)$ 叫 σ 的零点.

命题 3. $\forall$ 线性映射 $\sigma: {}_{\mathbb{F}}V \to {}_{\mathbb{F}}W$, 有

$$r(\sigma) + \text{Ndegree}(\sigma) = \dim_{\mathbb{F}} V$$

解. 设 $\dim_{\mathbb{F}} V = n$

取定 ${}_{\mathbb{F}}V$ 的一个基 $\alpha_1 \cdots \alpha_n$, $\forall \alpha \in V$. $\exists | (k_1 \cdots k_n)^T = X_0 \in \mathbb{F}^{n\times 1}$

s.t. $\alpha = (\alpha_1 \cdots \alpha_n) X_0 = \sum_{i=1}^{n} k_i \alpha_i$

那么 $\sigma(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} k_i \sigma(\alpha_i)$

$$\sigma((\alpha_1 \cdots \alpha_n) X_0) = (\sigma(\alpha_1) \cdots \sigma(\alpha_n)) X_0$$

取定 ${}_{\mathbb{F}}W$ 的一个基 $\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_m$. 则有唯一矩阵 A. s.t.

$$\sigma(\alpha_1 \cdots \alpha_n) \overset{\text{i.e}}{=\!=} (\sigma(\alpha_1), \sigma(\alpha_2) \cdots \sigma(\alpha_n))$$
$$= (\beta_1 \cdots \beta_m) A$$

$$\therefore \sigma((\alpha_1 \cdots \alpha_n) X_0) = (\sigma(\alpha_1) \cdots \sigma(\alpha_n)) X_0$$
$$= ((\beta_1 \cdots \beta_m) A) X_0$$
$$\overset{\text{广义结合律}}{=\!=} (\beta_1 \cdots \beta_m) A X_0$$

$$\sigma(V) = \{\sigma(\alpha) \mid \alpha \in V\} = \{\sigma(\alpha) \mid \alpha = (\alpha_1 \cdots \alpha_n) X_0\}$$
$$= \{(\beta_1 \cdots \beta_m)(\underset{m\times n}{A} X_0) \mid X_0 \in \mathbb{F}^{n\times 1}\}$$

$$\ker(\sigma) = \{\alpha \in V \mid \sigma(\alpha) = 0\}$$
$$= \{(\alpha_1 \cdots \alpha_n) X_0 \mid (\beta_1 \cdots \beta_m)(A X_0) = 0,\ X_0 \in \mathbb{F}^{n\times 1}\}$$
$$= \{(\alpha_1 \cdots \alpha_n) X_0 \mid A X_0 = 0\}$$

$\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$

事实上. 建立了三个同构

(1) $\varphi_1: \{{}_{\mathbb{F}}V$ 到 ${}_{\mathbb{F}}W$ 的线映$\} \to \mathbb{F}^{m\times n}$, $\sigma \longrightarrow A$

(2) φ_2: $\sigma(V) \longrightarrow L(A(1) \cdots A(n)) \leqslant \mathbb{F}^{m\times 1}$ HA-73

(3) φ_3: $Ker(\sigma) \longrightarrow AX_0=0$ 的解空间 V^A

$\therefore$ $\dim Hom_{\mathbb{F}}(V, W) = \dim \mathbb{F}^{m\times n} = mn$.

$r(\sigma) = \dim \sigma(V) = r(A)$. 而

$Ndegree(\sigma) = \dim ker(\sigma) = \dim(V^A)$.

$= n - r(A) = \dim_{\mathbb{F}} V - r(\sigma)$ #

§4. 线性变换

集合S到S的映射称为变换. 线性变换: ${}_{\mathbb{F}}V \to {}_{\mathbb{F}}V$ 的线性映射

记. $End_{\mathbb{F}}(V) = \{{}_{\mathbb{F}}V$ 上的线性变换全体$\}$

<u>命题3.</u> 设 $n = \dim_{\mathbb{F}} V$. 则

$$ker(\sigma) = \dim_{\mathbb{F}} V - r(\sigma)$$

取定 ${}_{\mathbb{F}}V$ 的一个基 $(\alpha_1 \cdots \alpha_n)$, $\forall \sigma \in End_{\mathbb{F}}(V)$, 有唯一 $A \in M_n(\mathbb{F})$

s.t. $\sigma(\alpha_1 \cdots \alpha_n) \overset{i.e.}{=} (\sigma(\alpha_1) \cdots \sigma(\alpha_n)) = (\alpha_1 \cdots \alpha_n) A$.

称A为 σ 在基 $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 下的矩阵

<u>定理2</u>. 存在代数同构 $End_{\mathbb{F}}(V) \cong M_n(\mathbb{F})$ (其中 ${}_{\mathbb{F}}V$ 基取定)

<u>Pf</u>. 考虑 φ: $End_{\mathbb{F}}(V) \longrightarrow M_n(\mathbb{F})$

$\sigma \longmapsto A$. 其中 $\varphi(\alpha_1 \cdots \alpha_n) = (\varphi(\alpha_1), \cdots \varphi(\alpha_n))$

$= (\alpha_1 \cdots \alpha_n) A$

下证: ① φ是映射 ✓

② φ是双射 ✓

③ φ是线性映射 ✓

④ $\varphi(\sigma\tau) = \varphi(\sigma)\cdot\varphi(\tau)$

⑤ $\varphi(I_V) = E$ ✓

④ $(\sigma\tau)(\alpha_1 \cdots \alpha_n) = ((\sigma\tau)(\alpha_1) \cdots (\sigma\tau)\alpha_n)$

$= (\sigma(\tau(\alpha_1)) \cdots \sigma(\tau(\alpha_n)))$

$= \sigma(\tau(\alpha_1) \cdots \tau(\alpha_n))$

$= \sigma(\tau(\alpha_1 \cdots \alpha_n))$

设 $\varphi(\tau) = A$. $= \sigma((\alpha_1 \cdots \alpha_n)A)$

$= \sigma((\alpha_1 \cdots \alpha_n)A(1), \cdots (\alpha_1 \cdots \alpha_n)A(n))$

$= \left(\sigma((\alpha_1 \cdots \alpha_n)A(1)), \cdots \sigma((\alpha_1 \cdots \alpha_n)A(n))\right)$

$= \left((\sigma(\alpha_1 \cdots \alpha_n))A(1), \cdots (\sigma(\alpha_1 \cdots \alpha_n))A(n)\right)$

$= \sigma(\alpha_1 \cdots \alpha_n)(A(1) \cdots A(n))$

$\overset{\varphi(\sigma)=B}{=} (\alpha_1 \cdots \alpha_n)BA$

$\varphi(\sigma\tau) = (\alpha_1 \cdots \alpha_n)\varphi(\sigma)\varphi(\tau)$ #

e.g.1. 求证 $\sigma^2 = 2\sigma \iff r(\sigma) + r(2I_V - \sigma) = \dim_{\mathbb{F}} V$

Pf. 由定理2. 知 $\varphi: \mathrm{End}_{\mathbb{F}} V \cong M_n(\mathbb{F})$ 是代数同构.

若 $\varphi(\sigma) = A$. $\varphi(\sigma^2) = A^2$. $\varphi(2\sigma) = 2A$

且有 $\sigma^2 = 2\sigma \iff A^2 = 2A$

$\overset{已知}{\iff} r(A) + r(2E - A) = n$

$r(\sigma) + r(2I_V - \sigma) = \dim_{\mathbb{F}} V$

另证. "$\Rightarrow$" 设 $\sigma^2 = 2\sigma$. 则 $\sigma(2I_V - \sigma) = \Theta$ ← 0变换

$\therefore (2I_V - \sigma)(V) \subseteq \ker(\sigma)$

$\therefore \sigma(V) \cap (2I_V - \sigma)(V) \subseteq \sigma(V) \cap \ker(\sigma)$

$\forall \alpha \in \sigma(V) \cap \ker(\sigma)$, 可设 $\sigma(\beta) = \alpha$.

$\therefore 0 = \sigma(\alpha) = \sigma^2(\beta) = 2\sigma(\beta) = 2\alpha \Rightarrow \alpha = 0$

$\therefore \sigma(V) \cap \ker(\sigma) = 0$

$\therefore \sigma(V) \cap (2I_V - \sigma)(V) = 0$

又$\because$ $2I_V = \sigma + (2I_V - \sigma)$

$\therefore V = \sigma(V) + (2I_V - \sigma)V$

$\therefore V = \sigma(V) \oplus (2I_V - \sigma)V$

$\therefore n = \dim_{\mathbb{F}} V = \dim \sigma(V) + \dim(2I_V - \sigma)V$

$= r(\sigma) + r(2I_V - \sigma)$

"$\Leftarrow$" $V = \sigma(V) \oplus (2I_V - \sigma)V$

$\therefore \sigma(V) \cap (2I_V - \sigma) = 0$

$$\because\ \sigma^2-2\sigma=\sigma(\sigma-2I_V) \qquad \sigma(\sigma-2I_V)(\alpha)\in\sigma(V)$$
$$=(\sigma-2I_V)\sigma \qquad (\sigma-2I_V)\sigma(\alpha)\in(\sigma-2I_V)(V)$$
$$\therefore\ (\sigma^2-2\sigma)(\alpha)=0 \quad \forall\alpha$$
$$\therefore\ \sigma^2-2\sigma=\Theta$$

#

e.g.1. ${}_{\mathbb{R}}V=\{\mathbb{R}$上的$3\times3$实对称阵$\}$　运算: 加法和数乘

$\dim_{\mathbb{R}}V=6$. 取定 $B=E_{12}$, 求线变 $\sigma_B: V\to V,\ A\mapsto B'AB$

在基　$2E_{11},\ E_{12}+E_{21},\ E_{13}+E_{31},\ 2E_{22},\ E_{23}+E_{32},\ 2E_{33}$

之下的矩阵

解: $\sigma_B(2E_{11})=E_{21}(2E_{11})E_{12}=2E_{22}$

类似, 有 $\sigma_B(2E_{11},\ E_{12}+E_{21},\ E_{13}+E_{31},\ 2E_{22},\ E_{23}+E_{32},\ 2E_{33})$

$$=(2E_{11},\ E_{12}+E_{21},\ E_{13}+E_{31},\ 2E_{22},\ E_{23}+E_{32},\ 2E_{33})\cdot\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 0\end{array}\right)$$

若 $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 与 $\beta_1\cdots\beta_n$ 为 ${}_{\mathbb{F}}V$ 的基. 且线变 σ 在 $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 与 $\beta_1\cdots\beta_n$ 的矩阵分别为 A 与 B. 问 A 与 B 关系如何?

条件　$\sigma(\alpha_1\cdots\alpha_n)=(\alpha_1\cdots\alpha_n)A$

$\sigma(\beta_1\cdots\beta_n)=(\beta_1\cdots\beta_n)B$

设 $(\beta_1\cdots\underset{新}{\beta_n})=(\alpha_1\cdots\underset{旧}{\alpha_n})P$. 其中 $P\in GL_n(\mathbb{F})$

$$\sigma((\alpha_1\cdots\alpha_n)P)=\sigma(\alpha_1\cdots\alpha_n)P=(\alpha_1\cdots\alpha_n)PB$$

$$\therefore\ \sigma(\alpha_1\cdots\alpha_n)=(\alpha_1\cdots\alpha_n)PBP^{-1}$$

$$\therefore\ A=PBP^{-1},\qquad P^{-1}\underset{旧}{A}P=\underset{新}{B}$$

§5. 不变子空间与矩阵的相似

一. 线变的特征值与特征向量

定义1. 对于 $_{\mathbb{F}}V$ 上的线变 σ. 若 $\exists\, 0_V \neq \alpha \in V$ 及 $\lambda \in \mathbb{F}$. 使 $\sigma(\alpha) = \lambda\alpha$
则称 α 是线变 σ 的属于特征值 λ 的特征向量

命题1. 设 $0 \neq \alpha = (\alpha_1 \cdots \alpha_n) X_0$.
设 σ 在基 $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 下的阵为 A. 则 α 是 σ 的属于 λ 的特征向量 $\Longleftrightarrow$ α 在 $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 下的坐标向量 X_0 (in $\mathbb{F}^{n\times 1}$) 是 A 的属于 λ 的特征向量

定义2. 取定一个基 $\alpha_1 \cdots \alpha_n \in {}_{\mathbb{F}}V$. 设 σ 在此基下阵为 A. 称 $f(x) = |xE - A|$ 是 σ 的特征多项式. 且 $f(x)$ 与基的取法无关. 由 σ 唯一确定

THM 9' 若 $f(x)$ 是线变 σ 的特征多项式. 则 $f(\sigma) = \Theta$ (零变换)

定义3. 设 σ 是 $_{\mathbb{F}}V$ 上的一个线变. $W \leq_{\mathbb{F}} V$. 若 $\sigma(W) \subseteq W$. 则 W 是 V 的一个 σ-不变子空间 (σ-invariant subspace). 简称 σ-子空间

e.g. 1 $\ker(\sigma^i)$ 与 $\operatorname{im}(\sigma^i)$ 均为 σ-子空间

Pf. 1) $\ker(\sigma^i) \leq_{\mathbb{F}} V$

2) $\forall \alpha \in \ker(\sigma^i)$. 则 $\sigma^i(\alpha) = 0_V$

要证 $\sigma(\alpha) \in \ker(\sigma^i)$

$$\Longleftrightarrow \quad \sigma^i(\sigma(\alpha)) = 0$$
$$\Longleftrightarrow \quad \sigma(\sigma^i(\alpha)) = 0$$
$$= \sigma(0_V) = 0_V$$

事实上. 确有 $\sigma(\alpha) \in \ker(\sigma^i)$ #

注: 设 σ 的特征多项式为 $f(x) = (x-\lambda_1)^{t_1} \cdots (x-\lambda_r)^{t_r}$ $\lambda_i \neq \lambda_j$

令 $f_i(x) = \dfrac{f(x)}{(x-\lambda_i)^{t_i}} \in \mathbb{F}[x]$

则有 $\operatorname{im} f_i(\sigma)$ 及 $\ker f_i(\sigma)$ 是 V 的 σ-子空间

e.g.2. $V=L(\alpha_1\cdots\alpha_n)$. ($\alpha_1\cdots\alpha_n$ 线性无关)

$\forall \alpha\in V$. $\exists!\ X_0\in F^{n\times 1}$. $\alpha=(\alpha_1\cdots\alpha_n)X_0$

构造 σ: $V\longrightarrow V$

$$\sum_{i=1}^{n}k_i\alpha_i \mapsto \sum_{i=2}^{n}k_i\alpha_i$$ 则 σ 是线变

令 $W=L(\alpha_n)$. 则 $\sigma(\alpha_n)=\alpha_{n-1}\notin W$

$\therefore$ W 不是 σ-子空间

e.g.3. 求可逆 P. 使 $P^{-1}AP$ 为 Jordan 标准形 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

解: ① $|xE-A|=(x-1)^3$

② 令 $B=A-1\cdot E=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$. $B^2=\begin{pmatrix}0&0&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$. $B^3=0$

取 $\xi=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. 则 $B^2\xi\neq 0$. $P\overset{令}{=}(B\xi^2.\ B\xi.\ \xi)$ 可逆

$BP=B(B^2\xi.\ B\xi.\ \xi)$

$=(0,\ B^2\xi.\ B\xi)=(B\xi^2$