数学分析 Mathematical Analysis

集合中的每个成员，称为元素
$6 \in \mathbb{N}$ 属于
$\pi \bar{\in} \mathbb{N}$
$\pi \notin \mathbb{N}$ 不属于

集合 (Set)

$\mathbb{N} = \{$全体自然数$\} = \{0, 1, 2, 3, 4 \cdots\}$

$\mathbb{Z} = \{$全体整数$\} = \{0, \pm 1, \pm 2 \cdots\}$

$\mathbb{Q} = \{$全体有理数$\} = \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$

$\mathbb{R} = \{$全体实数$\} \longrightarrow$ * Construction of the real numbers
↳ Cauchy sequences, Dedekind cuts, Decimal representation

$\sqrt{2} \bar{\in} \mathbb{Q} \longrightarrow \boxed{\text{反证法}}$

子集 e.g $\mathbb{R}^+$是$\mathbb{R}$的一个子集 $\triangleq \mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$

命题：$A \subset B$ 且 $B \subset A \Longleftrightarrow A = B$

集合的运算： 交、并、补

- $A \cap B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$
- $A \cup B = \{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$
- 背景集合 $A \subset X$， $A^c = A^\circ = \{x \in X$ 且 $x \bar{\in} A\}$

区间 $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$

有限集 / 无限集 $\longrightarrow$ 可列集 $\Longrightarrow$ 一个无限集如果可以按一定规则把元素排列出来

命题：可列个可列集的并集也是可列集 证明：对角线排法

e.g. $\mathbb{Q}$是可列集

证明：$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_{[0,1)} \cup \mathbb{Q}_{[-1,0)} \cup \mathbb{Q}_{[1,2)} \cup \mathbb{Q}_{[-2,-1)} \cup \cdots$
只需证 $\mathbb{Q}_{[0,1)}$ 可列，则 $\mathbb{Q}$ 可列
$\mathbb{Q}_{[0,1)} = \{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5} \cdots\}$

命题：可列集的无限子集也是可列的

Descartes 乘积： $A \times B \triangleq \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$

命题：有限多个可列集的乘积是可列集

证明：只要证 $A_1 \times A_2$ 可列 $\longrightarrow \boxed{\text{归纳法}}$

映射 $\phi: A \to B$ 集合A到集合B的对应关系.
给出 $a \in A$. 有唯一的 $\phi(a) \in B$ 与之对应

函数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\phi: A \to B$

1. 单射: 若 $a_1 \neq a_2 \Rightarrow \phi(a_1) \neq \phi(a_2)$

比较两个无穷集的"大小" ← 2. 满射: 若 B中所有元素都有原像

如果存在 $\phi: A \to B$, 单射 $\Rightarrow$ "$A \leq B$" 双射: (1-1对应) 若 ϕ是单射又是满射 $\Rightarrow$ 存在逆映射

$\phi: B \to A$. 单射 $\Rightarrow$ "$B \leq A$"

$\phi: A \to B$, 1-1对应 $\Rightarrow$ "$A = B$" 定义: A称为可列集. 若A与$\mathbb{N}$存在一个1-1对应的映射

命题1 实数集是不可列的

命题2 $[0,1)$是不可列的

证: Decimal representation: $r = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{10^i}$, $a_i \in \{0,1,2\cdots 9\}$

若不允许某一个位置之后都是9. 则小数表示唯一

假设$\mathbb{R}$可列. 则 $\mathbb{R} = \{x_1, x_2, x_3 \cdots x_n \cdots\}$

其中 $x_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} 10^{-j}$

构造 $x^* = \sum_{i=1}^{\infty} b_i 10^{-i}$, $b_i \neq a_{ii}$

$\Rightarrow x \overline{\in} \mathbb{R} \Rightarrow$ 矛盾. 实数集不可列

e.g. 可以建立 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ 的一一对应

子问题: 建立 $[0,1] \to [0,1] \times [0,1]$ 1-1对应

复合: $A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\psi} C$ $\psi \circ \phi: A \to C$

初等函数:

- $f(x) = C$
- $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$
- $f(x) = a^x$,
- $f(x) = \log_a x$
- $f(x) = \sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\sec x$, $\csc x$, $\cot x$
- $f(x) = \arcsin x$, $\arccos x \cdots$

关于函数的术语（性质）

1. 单调性 ∘ $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\le f(x_2)$ 单调增
$(<)$ 严格单调增

$$f(x)=\begin{cases} x & x\in\mathbb{Q} \\ 1-x & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$ ∘ 单调减类似

2. 有界性 ∘ $\forall x,\ \exists M.\ s.t.\ f(x)\le M$. 称 $f(x)$ 有上界
∘ 有下界类似
∘ $\forall x.\ \exists M.\ s.t.\ |f(x)|\le M$. 称 $f(x)$ 有界

3. 奇函数 $f(x)=-f(-x)$
4. 偶函数 $f(x)=f(-x)$
5. 周期性 $\exists T.\ \forall x.\ f(x)=f(x+T)$

e.g Dirichlet 函数 $D(x)=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Q}\\ 1 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ $D(x+T)=D(x)$ $\forall T\in\mathbb{Q}$

常用不等式 1. 三角不等式 $||a|-|b||\le|a+b|\le|a|+|b|$

2. 均值不等式 $\dfrac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\le\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\le\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$.
Cauchy's proof: 向下归纳法 $(a_1,a_2,\cdots a_n\in\mathbb{R}^+)$

3. $\dfrac{x}{1+x}\le\ln(1+x)\le x$, $\Rightarrow \dfrac{1}{n+1}\le\ln(1+\frac{1}{n})\le\frac{1}{n}$

实数的连续性 $\mathbb{Q}$ 有理数 $\frac{p}{q}$, $p,q\in\mathbb{Z}, q\ne0$

稠密性 $\alpha<\beta.\ \alpha,\beta\in\mathbb{Q}.\ \exists\gamma\in\mathbb{Q}.$
$\Rightarrow \alpha<\gamma<\beta$

定义:
$S\subseteq\mathbb{R}$ 如果 $\exists x\in S.\ x\ge y.\ \forall y\in S$ 成立. 则称 x 是 S 中最大值 ↗ 不一定存在
记为 $x=\max S$ （最小值类似）

如果 $\exists M\in\mathbb{R},\ x\le M.\ \forall x\in S.$ 成立. 则称 M 是 S 的一个上界
（下界类似）

定理（确界原理）: $S\subseteq\mathbb{R}$, S 有上界, 那么所有 S 的上界中存在最小数
称为 S 的上确界. 记为 $\sup S$

证明: Decimal Representation.

反例：　$S=(0,\pi)\cap\mathbb{Q}$．在 $\mathbb{Q}$ 中有上界，但是在 $\mathbb{Q}$ 中没有上确界

假设　S 在 $\mathbb{Q}$ 中有上确界记为 $\sup S=q\in\mathbb{Q}$

情况一：　$q>\pi$，$\exists q'\in(\pi,q)\cap\mathbb{Q}$，$q'$ 是 S 的上界

但 $q'<q$ 矛盾

情况二：　$q<\pi$．　类似

注：　对于一个有界集合 $S\subseteq\mathbb{R}$，$\sup S$，$\inf S$ 总是存在的．

但 $\max S$．$\min S$ 不一定存在

如果　$\sup S\in S$，则 $\sup S=\max S$

$\inf S\in S$．则 $\inf S=\min S$

Dedekind分割：　定义　$\mathbb{Q}=A\cup B$．并且 $\forall a\in A$．$b\in B$．总有 $a<b$．则称

A、B 是 $\mathbb{Q}$ 的一个分割

如果　A．B 是 $\mathbb{Q}$ 的一个分割．那么有以下四种可能

1) $\max A$ 存在．$\overset{\min}{\cancel{\max}}$ B 存在

2) $\max A$ 存在．$\overset{\min}{\cancel{\max}}$ B 不存在

3) $\max A$ 不存在．$\overset{\min}{\cancel{\max}}$ B 不存在

4) $\max A$ 不存在．$\min B$ 存在

1) 显然不可能　　2)，4) 确定了一个有理数．　3) 定义了一个无理数

数列极限

数列　$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

定义 $\exists L$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$．s.t　$|x_n-L|\leq\varepsilon$，　$\forall n\geq N$ 成立

则称　$\{x_n\}$ 的极限为 L．记作 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=L$．

如果 $\{x_n\}$ 极限存在．我们称 $\{x_n\}$ 收敛

Claim　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+3}=1$

要证　$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$．s.t.　$\left|\frac{n}{n+3}-1\right|<\varepsilon$　$\forall n\geq N$ 成立

要做的就是 $\forall\varepsilon>0$．找到那个 N

$\left|\frac{3}{n+3}\right|\leq\frac{3}{N+3}<\varepsilon$　取 $N=[\frac{3}{\varepsilon}-3]+1$

证明：　$a>1$，　$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$

令 $\sqrt[n]{a}-1=x_n$.　$(1+x_n)^n = a = 1+nx_n+\frac{n(n-1)}{2}x_n^2+\cdots$

$$>1+nx_n$$

$$\Rightarrow x_n < \frac{a-1}{n}$$

$\forall \varepsilon>0$. 取 $N=\left\lfloor\frac{a-1}{\varepsilon}\right\rfloor+1$ 即可

极限的一些性质

1. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 如果存在. 必定唯一

2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在. 那么 $\{x_n\}$ 一定有界

3. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L>0$，$\exists N$. s.t. $\forall n\geq N$. $x_n > L/2$

4. 定义. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$，则称 $\{x_n\}$ 为无穷小量

   如果 $\{y_n\}$ 有界序列. ($\exists M>0$. s.t. $|y_n|\leq M$. $\forall n$ 成立)

   $$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0$$

证明：　$|x_n y_n| = |x_n||y_n| \leq M|x_n|$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \Leftrightarrow \forall \frac{\varepsilon}{M}>0$. $\exists N$，$\forall n\geq N$，s.t. $|x_n| < \frac{\varepsilon}{M}$

$\Rightarrow \forall\varepsilon>0$，$\exists N$. $\forall n\geq N$，s.t. $M|x_n| < \varepsilon$

$|x_n y_n| \leq$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0$$

极限的四则运算　$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.　$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$

- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a\pm b$

- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = a\cdot b$

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ $(b\neq 0)$

注：极限四则运算只对有限多项成立

$\{x_n\}$ 为无穷大量，若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty \Leftarrow \forall G>0$. $\exists N$. $\forall n>N$，$|x_n|>G$

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，$|b_n|\leq M$ ($\exists M>0$，$\forall n$). $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n\cdot b_n = 0$

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. $|b_n| \leq \underset{MA-5}{M}$ ($\exists M>0$，$\forall n$). $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$

极限的夹逼性质（保序性）

1. 如果 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 收敛，并且 $x_n \le y_n$（注：一般来说，条件可以放宽成有限多项以后成立）

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n \le \lim_{n\to\infty} y_n$$

（★ 即使 $x_n<y_n$，也有可能 $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$）

2. 如果 $\{x_n\}$, $\{z_n\}$ 收敛，且 $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = L$

$$x_n \le y_n \le z_n \quad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = L$$

e.g. 求极限

法一：

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\cdot\underbrace{1\cdots\cdots1}_{n-2个1})^{\frac{1}{n}} \le \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n}+n-2}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2+\sqrt{n}-\frac{2}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$$

$$= 1$$

法二：

$$\sqrt[n]{n} = 1+y_n$$

$$n = (1+y_n)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} y_n + \binom{n}{2} y_n^2 + \cdots$$

$$\Rightarrow n > 1 + \frac{n(n-1)}{2} y_n^2$$

$$\Rightarrow 0 < y_n < \sqrt{\frac{2}{n}}$$

e.g. 已知 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$，证明 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = a$

证明：$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \forall \varepsilon>0, \exists N, \forall n\ge N, |a_n - a| \le \varepsilon$

取 N_1, s.t. $\left|\frac{a_1+\cdots+a_N}{n}\right| \le \varepsilon$, $\forall n \ge N_1$

$$\left|\frac{a_1+\cdots a_N + a_{N+1}+\cdots+a_n}{n} - a\right| \le \left|\frac{a_1+\cdots+a_N}{n}\right| + \left|\frac{a_{N+1}+a_{N+2}+\cdots+a_n}{n} - a\right|$$

$$\left|\frac{Na}{n}\right| \le \varepsilon \qquad \le \varepsilon + \left|\frac{(a_{N+1}-a)+(a_{N+2}-a)+\cdots+(a_n-a)-Na}{n}\right|$$

可以取 N_2 s.t. ~~$\frac{a_{N+1}-a}{n} \le \varepsilon$~~ $\qquad \le \varepsilon + \frac{\varepsilon}{n}(n-N) + \varepsilon \le 3\varepsilon$

待定型极限 e.g $\infty-\infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, ∞^0, ~~0^∞~~, 1^∞, $0\cdot\infty$

注：∞^0, 0^∞, 1^∞ 可以取 $\ln$ 转化

Stolz定理 $\{x_k\}$, $\{y_k\}$. 其中 当 $\{y_k\}$ 当 k 充分大时是严格单调增 ($y_k > y_{k-1}$, $\forall k \geq K$)

如果 $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{x_k - x_{k-1}}{y_k - y_{k-1}} = L$. 那么 $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{x_k}{y_k} = L$

注：L 可以是有限数. $+\infty$, $-\infty$

证明. 先证 $L=0$ 时成立. 即证若 $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{x_k-x_{k-1}}{y_k-y_{k-1}}=0$. 则 $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{x_k}{y_k}=0$

$\forall \varepsilon>0$, $\exists N$, s.t. $\forall k\geq N$. $\left|\frac{x_k-x_{k-1}}{y_k-y_{k-1}}\right|<\varepsilon$

$\frac{x_k}{y_k} = a_k \Rightarrow x_k = a_k y_k = x_k - x_{k-1} + x_{k-1} + x_{k-2} + \cdots + x_{N+1} - x_N + x_N$

$$|y_k||a_k| \leq |x_k - x_{k-1}| + |x_{k-1} + x_{k-2}| + \cdots + |x_{N+1} - x_N| + |x_N|$$
$$\leq \varepsilon|y_k - y_{k-1}| + \varepsilon|y_{k-1} - y_{k-2}| + \cdots + \varepsilon|y_{N+1} - y_N| + |x_N|$$
$$= \varepsilon(y_k - y_{k-1} + y_{k-1} + y_{k-2} + \cdots + y_{N+1} - y_N) + |x_N|$$

$$|a_k| \leq \varepsilon(y_k - y_N)\cdot\frac{1}{y_k} + \frac{|x_N|}{y_k}$$
$$\leq \varepsilon + \frac{|x_N|}{y_k}$$

x_N fixed, $y_k\to+\infty$, $\exists K$. $\frac{|x_N|}{y_k}<\varepsilon$, $\forall k\geq K$.

$$\leq 2\varepsilon$$

对于一般的 $L\neq 0$. 考虑 $z_k = x_k - Ly_k$

已知 $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{x_k-x_{k+1}}{y_k-y_{k-1}} = L \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty}\frac{z_k-z_{k-1}}{y_k-y_{k-1}}=0$

线性性质 $\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty}\frac{z_k}{y_k}=0 \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty}\frac{x_k}{y_k}=L$

$L=+\infty$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{x_k-x_{k-1}}=+\infty \Rightarrow$ ① x_k 当 k 充分大严格增 ② $\lim\limits_{n\to\infty} x_k=+\infty$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=0$$

问题：$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 何时收敛？

定理　单调有界数列必定收敛 $\begin{cases}\text{单调增加有上界}\\ \text{单调减少有下界}\end{cases}$

e.g　$x_1>0$,　$x_{n+1}=1+\dfrac{x_n}{1+x_n}$　$n=1,2,3\cdots$

证明．　x_n 收敛并求极限

$$\left.\begin{aligned}x_{n+1}&=1+\frac{x_n}{1+x_n}\\ x_n&=1+\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned}x_{n+1}-x_n&=\frac{x_n-x_{n-1}}{(1+x_n)(1+x_n)}\\ 1\le x_{n+1}&\le 2\end{aligned}\right\} \Rightarrow \{x_n\}\text{ 收敛}$$

$$\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}1+\frac{x_n}{1+x_n}\Rightarrow L=1+\frac{L}{1+L}$$

$$\Rightarrow L=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$(1+\frac{1}{n})^n$ 单调上升有上界，记 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$

单调　$\sqrt[n+1]{((1+\frac{1}{n})^n\cdot 1)}\le\dfrac{n(1+\frac{1}{n})+1}{n+1}\Rightarrow(1+\frac{1}{n})^n\le(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}$

有界　　$a_n=(1+\frac{1}{n})^n$，考虑 $b_n=(1+\frac{1}{n})^{n+1}$

$$b_n^{-1}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$\sqrt[n+2]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\cdot 1}\le\frac{\overbrace{\frac{n}{n+1}+\cdots+\frac{n}{n+1}}^{n+1}+1}{n+2}\Rightarrow b_n^{-1}\le b_{n+1}^{-1}$$

$$a_1\le a_n\le b_n\le b_1\quad\forall n$$

习题课

e.g 1. $\{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n}\}$ 是无穷小量

Pf：　n是奇数：$\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n}\right|$

$$=\left|\frac{1}{n}-\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)-\left(\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{2n-2}-\frac{1}{2n-1}\right)-\frac{1}{2n}\right|$$

$$<\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}\right|<\frac{1}{n}$$

n是偶数．　同理

$\forall\varepsilon>0$，取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]$，$\forall n>N$．$\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n}\right|<\varepsilon$　#

e.g. $a_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n)$. 证明$\{a_n\}$收敛

Pf: $a_{n+1} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)$

$\Rightarrow a_{n+1}-a_n = \frac{1}{n+1}-\ln(1+\frac{1}{n}) \le 0 \quad \{a_n\}\downarrow$

$(1+\frac{1}{n})^{n+1}\downarrow \ \ge e \Rightarrow \ln(1+\frac{1}{n}) \ge \frac{1}{n+1}$

$(1+\frac{1}{n})^{n}\uparrow \ \le e \Rightarrow \ln(1+\frac{1}{n}) \le \frac{1}{n}$

$a_n \ge \ln(1+\frac{1}{1})+\ln(1+\frac{1}{2})+\cdots+\ln(1+\frac{1}{n})-\ln n = \ln(n+1)-\ln n > 0$

闭区间套定理 ① $[a_n, b_n]\subset[a_{n-1}, b_{n-1}]$. $\forall n\ge 1$

② $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$

$\Rightarrow \exists$唯一$\{\xi\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$. 并且 $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

Pf: ① $\Rightarrow a_n\uparrow$ 有上界 $\quad b_n\downarrow$有下界

$\xrightarrow{\text{定理1}}$ $a_n\to a_\infty$. $b_n\to b_\infty$

② $\Rightarrow$ $a_\infty = b_\infty = \xi$. $\quad a_n\le\xi\le b_n \ \forall n$

$\Rightarrow \{\xi\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$

注: 开区间不对 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(0, \frac{1}{n}) = \phi$

e.g $a<b$. $X_1=a$. $X_2=b$. $X_n = \frac{x_{n-1}+x_{n-2}}{2}$

子列 $\{X_n\}$. 取自然数序列 $n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots \longrightarrow \infty$

$\{x_{n_k}\}$称为$\{x_n\}$的一个子列

事实1 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$. 那么任意$\{x_n\}$的子序列均收敛于$L$

☆ 事实2 如果$\exists\{x_n\}$的两个子序列收敛于不同的极限. 则$\{x_n\}$发散

事实3 如果$\{x_n\}$收敛, 那么其极限 = 任一子序列的极限

(Bolzano-Weierstrass) 有界数列必有收敛子列

Pf: 有界 $\Rightarrow \exists M, \forall n, |x_n|\le M$

$[-M, 0]$, $[0, M]$之一必含无穷多项$\{x_n\}$. 取定之后二等分. 其中之一

必含无穷多项$\{x_n\}$. 依次往下取. 由此. 我们得到 ① $[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}]$

② $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$

③ $\forall n$. 总有无穷多项$\{x_n\} \in [a_n, b_n]$

①+② $\xlongequal{定理2}$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \xi$

由③. $\forall k$. 取 $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$ $\quad a_k \le x_{n_k} \le b_k$.

夹逼 $\lim\limits_{k\to\infty} a_k \le \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \le \lim\limits_{k\to\infty} b_k$

$\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi$ #

基本列: 称$\{x_n\}$为基本列. 如果 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$. s.t. $\forall m > n > N$. $|x_m - x_n| \le \varepsilon$

(另外一种写法. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$. s.t. $\forall n \ge N$. $\forall p \in \mathbb{N}$
有 $|x_n - x_{n+p}| \le \varepsilon$)

Cauchy 收敛准则 $\quad\{x_n\}$收敛 $\Leftrightarrow$ $\{x_n\}$是基本列

Pf: 先证必要性 "$\Rightarrow$". 不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N.\ s.t\ \left.\begin{array}{l}\forall n \ge N\ \ |x_n - L| \le \varepsilon \\ \forall m \ge N\ \ |x_m - L| \le \varepsilon\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$|x_n - x_m| \le |x_n - L + L - x_m| \le \underbrace{|x_n - L| + |x_m - L|}_{\le 2\varepsilon}$$

再证充分性 "$\Leftarrow$".

Step 1. $\{x_n\}$基本列 $\Rightarrow$ $\{x_n\}$有界

对于$\varepsilon = 1$, $\exists N$, s.t. $\forall n, m \ge N$, $|x_n - x_m| \le 1$

$\Rightarrow x_n \in [x_N - 1, x_N + 1]$ $\forall n \ge N$

前面只有 $x_1, \cdots x_N$ 有限多项 $\Rightarrow$ $\{x_n\}$有界

Step 2 $\{x_n\}$有界 $\xRightarrow{B-W}$ $\exists \{x_{n_k}\}$收敛

不妨设 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = L$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$. s.t. $\forall n_k \ge N$ $\quad |x_{n_k} - L| < \varepsilon$. 取定一个$x_{n_k}$

$\exists M$. s.t. $\forall n, m \ge M$ $\quad |x_m - x_n| < \varepsilon$ $\quad (n_k > p)$

取 $p = \max(M, N)$. $\forall n \ge p$. $\quad |x_n - L| \le \underbrace{|x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - L|}_{\le 2\varepsilon}$

#

e.g. 记a_k是使$x_n>k$的最小下标. 求 $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{a_k}{a_{k-1}}$ $\left(x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$

解.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{a_k}>k \cdots\cdots ①$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{a_k-1}<k \cdots ②$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{a_{k-1}}>k-1 \cdots ③$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{a_{k-1}-1}<k-1 \cdots ④$$

$$①.④ \Rightarrow \frac{1}{a_{k-1}}+\frac{1}{a_{k-1}+1}+\cdots+\frac{1}{a_k}>1 \cdots ⑤$$

$$②.③ \Rightarrow \frac{1}{a_{k-1}+1}+\frac{1}{a_{k-1}+2}+\cdots+\frac{1}{a_k-1}<1 \cdots ⑥$$

$$⑤ \Rightarrow \ln\left(1+\frac{1}{a_{k-1}-1}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{a_{k-1}}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{a_{k-1}+1}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{a_k-1}\right)$$

$$>\frac{1}{a_{k-1}}+\frac{1}{a_{k-1}+1}+\cdots+\frac{1}{a_k}>1$$

$$\Rightarrow \ln \frac{a_{k-1}}{a_{k-1}-1}\cdot\frac{a_{k-1}+1}{a_{k-1}}\cdot\frac{a_{k-1}+2}{a_{k-1}+1}\cdots\cdots\frac{a_k}{a_k-1}>1$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \ln\left(\frac{a_k}{a_{k-1}-1}\right)>1 \Rightarrow \frac{a_k}{a_{k-1}-1}>e \\ ⑥ \Rightarrow \ln\left(\frac{a_k}{a_{k-1}+1}\right)<1 \Rightarrow \frac{a_k}{a_{k-1}+1}<e \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{a_{k-1}}$$

函数极限

$x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)\setminus\{x_0\}$

定义1 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall x, 0<|x-x_0|<\delta, |f(x)-L|<\varepsilon$

定义2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists G>0, \forall x>G. |f(x)-L|<\varepsilon$

定义3. (左极限) $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=L \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0. \forall x\in(x_0-\delta, x_0), |f(x)-L|<\varepsilon$

定义4 (右极限) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0. \forall x\in(x_0, x_0+\delta), |f(x)-L|<\varepsilon$

定义(连续函数). 若 $f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. 则称 f 在 x_0 处连续

e.g. $D(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\in\mathbb{Q}\end{cases}$ $\lim\limits_{x\to\pi} D(x) = D.N.E$

四则运算 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$

1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm g(x) = a\pm b$

2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = a\cdot b$

3) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}$ $(b\neq 0)$

函数极限的性质 1) 存在必唯一 2) 局部有界性 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$

$\Rightarrow \exists\delta, \exists M, s.t. \forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$

$|f(x)|\le M$

3) 夹逼原理

$f(x)\le g(x)\le h(x)$

且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = L$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L$

e.g $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$ $\forall x>0$ $\sin x < x < \tan x$

$\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < \dfrac{x}{x} = 1$

$1 = \lim\limits_{x\to 0}\cos x \le \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\le 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$

连续函数

定义1. 称 f 在 x_0 处连续，如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

定义2. 称 f 在 x_0 处左(右)连续，如果 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0^- \\ (x\to x_0^+)}} f(x) = f(x_0)$

定义3. 称 f 是 (a,b) 上的连续函数，如果 f 在每一点连续

记号 $f\in C(a,b)$

称 f 是 $[a,b]$ 上的连续函数，如果 f 在 a 右连续，b 左连续

$f\in C(a,b)$，记号 $f\in C[a,b]$

e.g. (Riemann函数) $R(x)=\begin{cases}\frac{1}{q} & x=\frac{p}{q}\ (p\in\mathbb{Z}\setminus\{0\},\ q\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\ p\perp q)\\ 1 & x=0\\ 0 & x\bar{\in}\mathbb{Q}\end{cases}$

命题. $R(x)$在x_0处连续 ($\forall x_0\bar{\in}\mathbb{Q}$), 即 $\lim\limits_{x\to x_0}R(x)=R(x_0)=0$

不妨设 $x_0\in(0,1)$ [$R(x)$是以1为周期的函数]

Proof: $\forall\varepsilon>0$, $\exists N=\lfloor\frac{1}{\varepsilon}\rfloor+1$. s.t. $\forall q\geq N$, $|\frac{1}{q}|\leq\varepsilon$

但是 $\{\frac{p}{q}\in(0,1)\,|\,q\leq N\}$ 只有有限多项 $\Rightarrow\exists\frac{p_0}{q_0}$和$x_0$距离最近

取 $\delta=|x_0-\frac{p_0}{q_0}|$. 由取法, $\forall|x-x_0|<\delta$, $|R(x)|<|\frac{1}{q}|\leq\varepsilon$

$\therefore\lim\limits_{x\to x_0}R(x)=0$. #

命题1 初等函数及他们之间的复合在定义域上都是连续的

命题2 严格单调的连续函数具有连续的反函数

Proof (sketch) $f\in C[a,b]$严格单调增

$f(a)=\alpha$, $f(b)=\beta$

Step 1. 说明f的像集恰为$[\alpha,\beta]$

Step 2. $\exists g:[\alpha,\beta]\longrightarrow[a,b]$为$f$的反函数

Step 3. $g\in C[\alpha,\beta]$

不连续点的分类

Type 1. $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$(存在) $\neq\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ (存在)

Type 2. $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 不存在

e.g. $f(x)=\sin(\frac{1}{x})$ 在 $x=0$处左右极限都不存在

Type 3. $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ (存在) $=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ (存在) $=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$ 或 f在x_0处无定义

(可去不连续)

e.g. 设 $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ 的严格单调函数

f只有第一类间断点，并且f的间断点是可列集

Proof: $\left(\forall x_0\in\mathbb{R}.\ \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)\text{存在}\right)$

已知 $\forall x<x_0$，有 $f(x)<f(x_0)$，$\underbrace{\{f(x)\mid x<x_0\}}_{=A_{x_0}}$有上界 $\Rightarrow$ 有上确界

$\left(\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\sup A_{x_0}\right)$

$\forall\varepsilon>0$，$\exists f(x_1)\in A_{x_0}$，$f(x_1)>\sup A_{x_0}-\varepsilon$

$\forall x\in(x_1,x_0)$，$f(x)\geq f(x_1)>\sup A_{x_0}-\varepsilon$

$\Rightarrow 0<-f(x)+\sup A_{x_0}<\varepsilon$

$\Rightarrow |\sup A_{x_0}-f(x)|<\varepsilon$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\sup A_{x_0}$. 存在.

同理. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 存在

如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)\Rightarrow$ 连续

如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)<\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\Rightarrow x_0$是第一类间断点

定义 $\underset{\text{间断点}}{x_0}\to\underset{\text{开区间}}{\left(\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x),\ \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\right)}\ni q\in\mathbb{Q}$ 任取一有理数

Φ: 间断点 $\to\mathbb{Q}$ 单射

计算极限

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{m}}-1}{x}=\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t-1}{t^m-1}=\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{1}{t^{m-1}+t^{m-2}+\cdots 1}=\dfrac{1}{m}$

2) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{[4x]}{1+x}=\dfrac{3}{2}$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\cdots\cos nx}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x+\cos x-\cos x\cos 2x\cdots\cos nx}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}+\dfrac{\cos x-\cos x\cos 2x\cdots\cos nx}{x^2}$

$=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}+\dfrac{\cos 2x}{x^2}(1-\cos 3x\cos 4x\cdots\cos nx)=\dfrac{1+2^2+3^2+\cdots+n^2}{2}$

$=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{12}$

情形2'，$\exists\delta>0$，$\exists m, M$. s.t. $\forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)\setminus\{x_0\}$

$m\le\left|\frac{u(x)}{v(x)}\right|\le M$． 设 u, v 为同阶无穷大

情形3. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{u(x)}{v(x)}=1$. 称 u、v 为等价无穷大. 记为 $u(x)\sim v(x)$ $(x\to x_0)$

已知. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\sin x}{x}=1$. $\sin x\sim x$ $(x\to 0)$

$\cos x\sim 1-\frac{1}{2}x^2$ $(x\to 0)$

三个重要的等价无穷小量

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=1$ $\ln(x+1)\sim x$ $(x\to 0)$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{y\to 1}\frac{y-1}{\ln y}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=1$ $e^x-1\sim x$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{y}{\ln(1+x)}\cdot\frac{\ln(1+x)}{x}=\alpha$. $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$

$(\alpha\in\mathbb{R})$ $y=(1+x)^\alpha-1$

三个无穷大的比较 $(k, n\in\mathbb{N}$. $a>1)$ $\ln^k x$. x^n. a^x

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a^x}{x^n}=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^n}{a^x}=0$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^n}{\ln^k x}=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln^k x}{x^n}=0$

三个无穷小的比较 $(k, n\in\mathbb{N})$ $x\to 0^+$

$\left(\frac{-1}{\ln x}\right)^k$ x^n $e^{-\frac{1}{x}}$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\left(\frac{-1}{\ln x}\right)^k}{x^n}=\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^n}{e^{-\frac{1}{x}}}=\infty$

补充说明：极限的变量代换

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\xlongequal{x=g(y)}\lim\limits_{y\to y_0}f(g(y))$，当 $\lim\limits_{y\to y_0}g(y)=x_0$

且 $g(y)\neq x_0$. 对某个 y_0 的去心邻域成立

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$

$\boxed{\forall x\in\mathbb{R} \quad n\le x<n+1}$

$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n^2} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{(n+2)(n-2)}$

$> e^{n-2} \nearrow \infty$

无穷小量和无穷大量

<u>定义</u> $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$. 称 $f(x)$ 为无穷小量 $(x\to x_0)$

设 $u(x)$. $v(x)$ 都是无穷小量 $(x\to x_0)$

<u>定义</u>

1° 情形1 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{u(x)}{v(x)}=0$, 则称 $u(x)$ 为 $v(x)$ 的高阶无穷小量 | $x\to x_0$

记为 $u(x)=o(v(x))$

2° 情形2 $\frac{u(x)}{v(x)}$ 在 x_0 的某个去心邻域内有界. 可以记为 $u(x)=O(v(x))$

i.e. $\exists\delta>0$, $\exists M>0$, s.t. $\forall x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)\setminus\{x_0\}$

$\left|\frac{u(x)}{v(x)}\right|\le M \qquad (O\ge o)$

2°' 情形2' $\exists\delta>0$, $\exists m, M>0$, s.t. $\forall x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)\setminus\{x_0\}$

$0<m<\left|\frac{u(x)}{v(x)}\right|\le M$. 则称 u 和 v 为同阶无穷小量

3° 情形3 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{u(x)}{v(x)}=1$. 则称 $u(x)$ 和 $v(x)$ 为等价无穷小.

记为 $u(x)\sim v(x) \qquad (x\to x_0)$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\frac{u(x)-v(x)}{v(x)}=0$. $u(x)-v(x)=o(v(x))\quad x\to x_0$

<u>定义</u>. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ (或 $+\infty$ / $-\infty$). 则称 $f(x)$ 为无穷大量 $(x\to x_0)$

设 $u(x)$. $v(x)$ 为无穷大量

情形1. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{u(x)}{v(x)}=\infty$. 称 $u(x)$ 为 $v(x)$ 的高阶无穷大量

情形2. $\frac{u(x)}{v(x)}$ 在 x_0 某个去心邻域内有界, 记为 $u(x)=O(v(x))$

闭区间上的连续函数（记号 $f\in C[a,b]$）

<u>定理1.</u> $f\in C[a,b]$，则 f 有界且可以取到最大最小值

（最值定理）

Pf: Step 1. 先证 f 有界

反证. 假设 f 上无界. $\forall n$, $\exists x_n\in[a,b]$ s.t. $f(x_n)>n$

$\{x_n\}\subset[a,b]$，必有收敛子列

取定一收敛子列，记为 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$，$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=x_\infty\in[a,b]$

$\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \xlongequal{连续} f(x_\infty)$. 另一方面. $f(x_{n_k})>n_k$ $n_k\to\infty$

矛盾！ $f(x)$ 上有界. 类似可证 $f(x)$ 下有界

Step 2. $\Rightarrow$ f 有界. $|f|\le L$

令 $M=\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$，$m=\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$

即要证 $\exists x', x''\in[a,b]$ s.t. $f(x')=M$, $f(x'')=m$

$\because$ $M=\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$

$\therefore$ $\forall \varepsilon_n>0$, $\exists x_n$ s.t. $f(x_n)>M-\varepsilon_n$. 取 $\varepsilon_n=\frac{1}{n}$ $(*)$

$\because$ $\{x_n\}\subset[a,b]$. 必有收敛子列

取定一收敛子列，记为 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=\xi\in[a,b]$

由 $(*)$ $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k})=M$

由连续性 $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k})=\lim\limits_{x\to\xi} f(x)=f(\xi)=M$. #

<u>定理2（介值定理）</u> $f\in C[a,b]$. 如果 $f(a)=c<f(b)=d$

则 $\forall \xi\in(c,d)$, $\exists \eta\in(a,b)$, s.t. $f(\eta)=\xi$

<u>推论（零点定理）</u> $f\in C[a,b]$. 如果 $f(a)\cdot f(b)<0$. 则一定 $\exists x\in(a,b)$

s.t. $f(x)=0$

Pf: 取定 $\xi\in(c,d)$. 考察集合 $E=\{x\in[a,b] \mid \forall y\in[a,x],\ f(y)<\xi\}$

Step 1. $E\neq\phi$

Step 2. E 有界 $\Rightarrow$ 存在上确界. 令 $\eta=\sup E$

下面证 $f(\eta)=\xi$.

Step 1. $\eta=\sup E$. $\exists\{x_n\}\subset E$. $x_n\nearrow\eta$, $f(x_n)<\xi$

$\therefore f(\eta)\le\xi$ 连续 $\lim\limits_{x\to\eta} f(y)\le\xi$

Step 2 若 $f(\eta)<\xi \Rightarrow \exists\delta>0$. $f(y)<\xi$. $y\in[\eta,\eta+\delta]$ 邻域有界

矛盾于 $\eta=\sup E$

$\therefore f(\eta)=\xi$

\#

一致连续

连续 $\longrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta=\delta(\varepsilon,x_0)>0$, s.t. $\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$
$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

定义 称 f 在定义域上一致连续, 如果 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$, s.t.
$\forall\ |x-y|<\delta$, 有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$

命题 f 在定义域上一致连续, 若 $\forall\varepsilon>0$, $\inf\limits_{x\in D}\delta(\varepsilon,x)>0$

定理. 若 $f\in C[a,b]$, 则 f 一定一致连续

Pf: $\forall\varepsilon>0$. 对于取定的 $x\in[a,b]$. $\exists\delta(\varepsilon,x)>0$
s.t. $\forall y\in(x-\delta(\varepsilon,x),x+\delta(\varepsilon,x))$, $|f(y)-f(x)|<\varepsilon$

事实 $[a,b]\subset\bigcup\limits_{x\in(a,b)}\left(x-\frac{\delta(\varepsilon,x)}{2},x+\frac{\delta(\varepsilon,x)}{2}\right)\cup\left[a,a+\frac{\delta(\varepsilon,a)}{2}\right)$
$\cup\left(b-\frac{\delta(\varepsilon,b)}{2},b\right]$

论断 必能从右端找出有限多个区间覆盖 $[a,b]$

反证. 假设不能找有限覆盖. $[x_1,y_1]=[a,b]$
二等分. 必有一个区间也不能找到有限覆盖.
记为 $[x_2,y_2]$. 继续等分 $[x_2,y_2]$, 记为 $[x_3,y_3]$
…

由此 $[x_1,y_1]\supset[x_2,y_2]\supset\cdots\supset[x_n,y_n]\supset\cdots$

$$\lim_{n\to\infty}(y_n-x_n)=0$$

注 $x_\infty=a$ 或 b 时，

$x_\infty=a\Rightarrow[a,a+\frac{\delta(\varepsilon,a)}{2})$

$x_\infty=b\Rightarrow(b-\frac{\delta(\varepsilon,b)}{2},b]$

$\xrightarrow{\text{闭区间套定理}}\exists!\,x_\infty\in\bigcap_{n=1}^{\infty}[x_n,y_n]$

对于 $x_\infty\in(x_\infty-\frac{\delta(\varepsilon,x_\infty)}{2},\ x_\infty+\frac{\delta(\varepsilon,x_\infty)}{2})$

$\because\ \lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n=x_\infty$

$\therefore$ 当 n 充分大时，$[x_n,y_n]\subset(x_\infty-\delta(\varepsilon,x_\infty),\ x_\infty+\delta(\varepsilon,x_\infty))$

矛盾！假设不成立

$\therefore$ 找到有限多个区间，不妨设为 $(x_1-\frac{\delta(\varepsilon,x_1)}{2},x_1+\frac{\delta(\varepsilon,x_1)}{2}),\cdots$
$(x_k-\frac{\delta(\varepsilon,x_k)}{2},x_k+\frac{\delta(\varepsilon,x_k)}{2})$ （注，其中也包含 $[a,a+\frac{\delta(\varepsilon,a)}{2}),(b-\frac{\delta(\varepsilon,b)}{2},b]$）

令 $\delta=\min\{\frac{\delta(\varepsilon,x_i)}{2}\}_{i=1}^{k}$

$\forall x\in[a,b]$，$\exists l$，s.t. $x\in(x_l-\frac{\delta(\varepsilon,x_l)}{2},x_l+\frac{\delta(\varepsilon,x_l)}{2})$

$\forall|y-x|<\delta$，$\Rightarrow y\in(x_l-\delta(\varepsilon,x_l),x_l+\delta(\varepsilon,x_l))$

$\Rightarrow|f(x)-f(x_l)|<\varepsilon$，$|f(y)-f(x_l)|<\varepsilon$

$\Rightarrow|f(x)-f(y)|\le 2\varepsilon$

$\therefore$ $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续 #

定理：$f(x)$ 在 A 上定义，$f(x)$ 一致连续 $\Leftrightarrow$

$\forall\{x_n'\},\{x_n''\}$，如果 $\lim_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=0$，则 $\lim_{n\to\infty}(f(x_n')-f(x_n''))=0$

Pf：必要性“$\Longrightarrow$”

一致连续 $\Rightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\delta(\varepsilon),\forall x',x''\ |x'-x''|<\delta$，则 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$

$\lim_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=0\Longrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N,\forall n>N\ |x_n'-x_n''|<\varepsilon$.

对于 $\forall\varepsilon$，取定 $\delta=\delta(\varepsilon)$，$\exists N$，$\forall n>N$，$|x_n'-x_n''|<\delta$

$\Rightarrow|f(x_n')-f(x_n'')|<\varepsilon$

$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}(f(x_n')-f(x_n''))=0$

充分性"$\Leftarrow$"，考虑逆否．若f非一致连续

$\exists \varepsilon_0,\ \forall \delta,\quad \exists\ |x'-x''|<\delta.\quad |f(x')-f(x'')|>\varepsilon_0$

取$\delta_n=\frac{1}{n}$．．取出 $|x_n'-x_n''|<\delta=\frac{1}{n}$

$|f(x_n')-f(x_n'')|>\varepsilon_0$

$\therefore \lim_{n\to\infty} f(x_n')-f(x_n'')\neq 0$

#

导数

定义（导数）　f连续函数．定义域：I．$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$称为$f$的平均变化率

如果$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$存在．则称为$f$在$x$处的导数（瞬时变化率）

记为$f'(x)$

注：1. $f'(x)$给出了f在x处切线的斜率

2. $\Delta x\to 0$是两边的

2.a　$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ 存在 称为f在x处的右导数．记为$f'(x_+)$或$f_+'(x)$

2.b　$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ 存在 称为f在x处的左导数．记为$f'(x_-)$或$f_-'(x)$

3. $f'(x)$存在 称$f(x)$在x处可导

4. $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)-f'(x)\Delta x}{\Delta x}=0$$

$$\Leftrightarrow\quad f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x)\Delta x+o(\Delta x)$$

$$\Leftrightarrow\quad f(x+\Delta x)=f(x)+f'(x)\Delta x+o(\Delta x)$$

定义．称f在x处可微．如果$\exists A=$ Constant．使得

$$\boxed{f(x+\Delta x)=f(x)+A\cdot\Delta x+o(\Delta x)}$$

f在x处可微$\Longleftrightarrow f$在x处可导

5. 记 $y=f(x)$. $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$

$$\boxed{\Delta y = f'(x)\Delta x + o(\Delta x)}$$

6. 可导 $\Rightarrow$ 连续

定义 $dy = f'(x)\,dx$ 称为 f 的微分

导数的另一种记号 $\frac{dy}{dx} = f'(x)$

e.g. 1. $f(x) = c$. $f'(x) = 0$

2. $f(x) = x^\alpha$.
$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(x+\Delta x)^\alpha - x^\alpha}{\Delta x}$$
$$= x^\alpha \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1}{\Delta x}$$
$$= x^\alpha \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\alpha}{x}$$
$$= \alpha\cdot x^{\alpha-1} \quad (x\neq 0)$$

$$f'(0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x^\alpha - 0}{\Delta x} \lim_{\Delta x\to 0} \Delta x^{\alpha-1} = \begin{cases} 0 & \alpha>1 \\ 1 & \alpha=1 \\ D.N.E & 0\le\alpha<1 \\ D.N.E & \alpha<0 \end{cases}$$

即 $f(x) = x^\alpha$.
$$f'(x) = \begin{cases} \alpha x^{\alpha-1} & \alpha>1 \quad \forall x\in I \\ 1 & \alpha=1 \\ \alpha x^{\alpha-1} & \forall x\in I\setminus\{0\} \quad \alpha<1 \end{cases}$$

3. $f(x) = e^x$ $x\in\mathbb{R}$
$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{e^x(e^{\Delta x}-1)}{\Delta x} = e^x$$

4. $f(x) = \ln x$ $(x>0)$
$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\ln(x+\Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x} \frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{1}{x}$$

5. $f(x) = \sin x$
$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \cos x$$

6. $f(x) = \cos x$
$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = -\sin x$$

双曲正弦函数
$$sh(x) = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

双曲余弦函数
$$ch(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

大前提：所有涉及的函数可导

乘法法则 $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

除法法则 $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$

反函数法则 $(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)}$ $x = f^{-1}(y)$ 或 $y = f(x)$

7. $y = \arcsin x$ $y'(x) = \frac{1}{(f(y))'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$x = f(y) = \sin y$ $(y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

8. $y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $y' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

9. $y = \arctan x$ $y'(x) = \frac{1}{(\tan(y))'} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{\tan^2 y + 1}$

$y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ $= \frac{1}{x^2+1}$

链式法则（复合函数求导）

$z = f(y)$, $y = g(x)$, 则 $z = h(x) = f(g(x))$

则 $h'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x) - g(x))}{g(x+\Delta x) - g(x)} \cdot \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$= f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

幂指函数 $y = f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$

$$\therefore y' = e^{g(x)\ln f(x)} \left(g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}\right)$$

$$= f(x)^{g(x)} \left(g'(x) \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}\right)$$

隐函数求导

定义 $F(x, y) = 0$. 一个关于 x, y 的方程式

$\forall x \in I$. 有唯一的 y 满足方程. 则称 y 为 F 在 I 上定义的隐函数

e.g $e^{xy}+x^2y-1=0$. 确定了一个隐函数 $y=y(x)$

$\therefore$ $e^{xy}(x'\cdot y+x\cdot y')+(x^2)'\cdot y+x^2\cdot y'=0$

$e^{xy}(y+xy')+2xy+x^2y'=0$

$$\therefore\ y'=-\frac{2x+e^{xy}}{x^2+xe^{xy}}\cdot y$$

高阶导数

$$f(x)\longrightarrow f'(x)\longrightarrow f''(x)\rightarrow\cdots f^{(n)}(x)\rightarrow\cdots$$

一阶导数 $\frac{dy}{dx}$　　二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$　　n阶导数 $\frac{d^ny}{dx^n}$

参数方程求导

$\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$ 如果决定了一个函数 $y=y(x)$. 就可以求 $\frac{dy}{dx}$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{y'(t)}{x'(t)}$$

$$\frac{d\frac{y'(t)}{x'(t)}}{dx}=\frac{d\frac{y'(t)}{x'(t)}}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{y''(t)x'(t)-x''(t)y'(t)}{(x'(t))^2}\cdot\frac{1}{x'(t)}$$

$$=\frac{y''(t)-x''(t)\frac{dy}{dx}}{(x'(t))^2}$$

微分的应用（利用导数研究函数）

$\boxed{\text{中值定理}}$

定义（极值） 称 x_0 为 $f(x)$ 的极小（极大）值，如果 $\exists\,\delta>0$,

s.t. $f(x)\geq f(x_0)$. $\forall x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$

注：1. 极值只涉及函数的局部性质

2. f 不一定连续

Fermat定理. 如果 x_0 为 $f(x)$ 的极值并且 f 在 x_0 处可导

$$\Longrightarrow f'(x_0)=0.$$

Pf：不妨设 x_0 为极小．$\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$．$\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0$

$$\Rightarrow f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+/x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$$ #

Rolle中值定理　$f(x)\in C[a,b]$．$f(x)$ 在 (a,b) 可导．$f(a)=f(b)$

$$\Rightarrow \exists \xi\in[a,b].\ s.t.\ f'(\xi)=0$$

Pf：1．不妨设 $f\not\equiv C$（$f\equiv C$ 显然成立）

2．$f(x)\in C[a,b]\Rightarrow f(x)$ 一定有最值 $\Rightarrow f(a)\ (=f(b))$ 不可能即是最大值又是最小值 $\Rightarrow \exists\xi\in(a,b)$．$f$ 在 ξ 处取得最值

$\Rightarrow \xi$ 一定是极值 $\Rightarrow f'(\xi)=0$ #

注：对边界极值点．Fermat定理不正确

Lagrange中值定理　$f(x)\in C[a,b]$．$f(x)$ 在 (a,b) 可导．

$$\exists\xi\in(a,b).\quad f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Pf：令 $g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(a)$

$\because g(x)\in C[a,b]$，$g(x)$ 在 (a,b) 可导．$g(a)=g(b)=0$．

$\therefore$ 由Rolle中值定理．$\exists\xi\in(a,b)$．$g'(\xi)=0$

即 $\exists\xi\in(a,b)$．$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ #

推论1：$f'(x)=0$．$\forall x\in I\Rightarrow f(x)\equiv C$

推论2：$f'(x)=g'(x)$．$\forall x\in I\Rightarrow f(x)-g(x)\equiv C$

- 一阶导数：函数的单调性
- 二阶导数：函数的凹凸性

定理　f 在 (a,b) 上可导，那么 ① $f'(x)\geq 0\Leftrightarrow f$ 单调增

② $f'(x)>0\Rightarrow f$ 严格单调增

注：$f'(x)\geq 0$ 且只在离散点上为零 $\Rightarrow$ 严格单调增

Pf of ①: "$\Rightarrow$" $\forall x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$.

(Lagrange) $\exists \xi \in (x_1, x_2)$. s.t. $f(x_1) - f(x_2) = (x_2 - x_1) f'(\xi) \geq 0$

$\Rightarrow$ f单调增

"$\Leftarrow$" $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0$

单调增 $\Rightarrow$ $\Delta x > 0 \Rightarrow f(x+\Delta x) - f(x) \geq 0$

$\Delta x < 0$. $\Rightarrow f(x+\Delta x) - f(x) \leq 0$. #

Darboux定理 f在(a, b)可导. 则$f'(x)$满足介值性质

$\forall x_1, x_2 \in (a, b)$. $\forall \eta \in (f'(x_1), f'(x_2))$或$(f'(x_2), f'(x_1))$

$\exists \xi \in (x_1, x_2)$. s.t. $f'(\xi) = \eta$

引理 f在(a, b)上可导. $x_1 < x_2 \in (a, b)$

如果 $f'(x_1) \cdot f'(x_2) < 0 \Rightarrow \exists \xi \in (x_1, x_2)$. s.t $f'(\xi) = 0$

Pf: 不妨认为 $f'(x_1) < 0$, $f'(x_2) > 0$

$\therefore$ $\exists \delta_1 > 0$, s.t. $f(x) < f(x_1)$. $\forall x \in (x_1, x_1 + \delta_1)$

$\exists \delta_2 > 0$. s.t. $f(x) < f(x_2)$. $\forall x \in (x_2 - \delta_2, x_2)$

$\xRightarrow{极值}$ f在$[x_1, x_2]$有最小值. 根据以上两个结论

$\Rightarrow$ 最小值点 $\xi \notin \{x_1, x_2\}$ $\xRightarrow{Fermat}$ $f'(\xi) = 0$ #

Pf of Darboux Thm: 不妨设 $f'(x_1) < f'(x_2)$. $\forall \eta \in (f'(x_1), f'(x_2))$

考虑: $g(x) = f(x) - \eta x$, $g'(x) = f'(x) - \eta$

$\therefore$ $g'(x_1) < 0$, $g'(x_2) > 0$. 由引理. $\exists \xi \in (x_1, x_2)$. $g'(\xi) = 0$

$\therefore$ $f'(\xi) = \eta$ #

- 二阶导数与函数的凹凸性

定义 (下凸函数) 称f在(a, b)上为下凸函数. 如果$\forall x_1 < x_2 \in (a, b)$

$\Rightarrow f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$. $\forall \lambda \in [0, 1]$

☆ 思考题: f在(a, b)上的下凸函数 $\Rightarrow$ f连续

定理 f在(a,b)上二阶可导 ① $f''(x)\geqslant 0 \Longleftrightarrow f$下凸函数

② $f''(x)>0 \Longrightarrow f$严格下凸函数

引理：若f在x处二阶可导，那么 $f''(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)+f(x-\Delta x)-2f(x)}{(\Delta x)^2}$

Hint: $g(x)=\dfrac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$

Pf of ①："$\Leftarrow$" 根据引理 $f''(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)+f(x-\Delta x)-2f(x)}{(\Delta x)^2}$

f下凸 $\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}(x-\Delta x)+\frac{1}{2}(x+\Delta x)\right)\leqslant\frac{1}{2}f(x-\Delta x)+\frac{1}{2}f(x+\Delta x)$

$\Rightarrow f(x+\Delta x)+f(x-\Delta x)-2f(x)\geqslant 0$

$\Rightarrow f''(x)\geqslant 0$

"$\Rightarrow$" 令 $x=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$

Lagrange: $f(x)-f(x_1)=(x-x_1)f'(\xi_1)$. $\xi_1\in(x_1,x)$

$f(x_2)-f(x)=(x_2-x)f'(\xi_2)$ $\xi_2\in(x,x_2)$

$\Rightarrow \begin{cases} f(x)=f(x_1)+(x-x_1)f'(\xi_1) \\ f(x)=f(x_2)-(x_2-x)f'(\xi_2)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\lambda f(x)=\lambda f(x_1)+\lambda(x-x_1)f'(\xi_1) \\ (1-\lambda)f(x)=(1-\lambda)f(x_2)-(1-\lambda)(x_2-x)f'(\xi_2)\end{cases}$

相加. $f(x)=\lambda f(x)+(1-\lambda)f(x_2)+\lambda(x-x_1)f'(\xi_1)-(1-\lambda)(x_2-x)f'(\xi_2)$

只要证 $\lambda(x-x_1)f'(\xi_1)-(1-\lambda)(x_2-x)f'(\xi_2)\leqslant 0$

$x=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$, 只要证 $\lambda(1-\lambda)(x_2-x_1)f'(\xi_1)-(1-\lambda)\lambda(x_2-x_1)f'(\xi_2)\leqslant 0$

只要证 $\lambda(1-\lambda)(x_2-x_1)\left(f'(\xi_1)-f'(\xi_2)\right)\leqslant 0$

$f''(x)\geqslant 0$. $f'(x)\nearrow$. 得证 #

应用 (Jensen不等式) f在(a,b)上的下凸函数. $\forall x_1\cdots x_n\in(a,b)$

$\lambda_i\in[0,1]$, $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=1$

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)$$

e.g. f在 (a,b)上满足 $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$, $\boxed{|f(x_1)-f(x_2)| \le |x_1-x_2|^{\alpha}}$.
其中 $\alpha>1$. 证明 $f(x)=$常数

Pf: $|f(x+\Delta x)-f(x)| \le |\Delta x|^{\alpha} \Rightarrow \dfrac{|f(x+\Delta x)-f(x)|}{|\Delta x|} \le |\Delta x|^{\alpha-1}$

$$\therefore f'(x)=\lim_{\Delta x\to}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=0$$

$\therefore f'(x)=$常数

注: ☆ $\alpha=1$. 称f满足 Lipschitz条件
☆ $0<\alpha<1$. 称f满足 Holder条件 $\Big\}\Rightarrow f$连续 → 一致连续
☆ $\alpha=0$. f有界

☆条件给出了函数连续的量化刻画

<u>定义</u>(拐点) 称 x_0为f的拐点. 如果 $(x_0-\delta_1, x_0)$和$(x_0, x_0+\delta_2)$上函数具有不同的凹凸性

<u>定理</u> 如果$f(x)$在 x_0处二阶可导. x_0为f的拐点 $\Rightarrow f''(x_0)=0$

Pf: $f(x)$在 x_0处二阶可导 $\Rightarrow f'(x)$在 x_0处连续

<u>引理</u>: $f(x)$是(a,b)上的下凸函数. $f(x)$可导 $\Rightarrow f'(x)$单调增

若 x_0为拐点, 不妨假设在x_0左端下凸, 在x_0右端上凸.

$\xRightarrow{\text{引理}}$ $f'(x)$在x_0左端单调增. $f'(x)$在x_0右端单调减

$\therefore x_0$为$f'(x)$的极大值点 $\xRightarrow{\text{Fermat}} f''(x_0)=0$

x为极值点 + 一阶可导 $\Rightarrow f'(x)=0$
x为拐点 + 二阶可导 $\Rightarrow f''(x)=0$

注: 反之不对

L'Hospital (洛必达法则)

<u>Cauchy中值定理</u> $f(x), g(x) \in C[a,b]$, $f(x), g(x)$在 (a,b)可导. 并且$g'(x)\ne 0$ $\forall x\in(a,b)$, 则 $\exists \xi\in(a,b)$, s.t $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

注: 若 $g(x)=x$. 即为 Lagrange中值定理

Pf：法一：$g'(x)\neq 0$ $\forall x\in(a,b)$ $\xRightarrow{\text{Darboux}}$ $g'(x)>0$ $\forall x\in(a,b)$ 或 $g'(x)<0$ $\forall x\in(a,b)$

不妨设 $g'(x)>0$. $\forall x\in(a,b)$ $\Rightarrow$ $g(x)$ 严格单调增

$\Rightarrow \begin{cases} x=g(t) \\ y=f(t) \end{cases}$ 确定的参数曲线一定是某个函数图像

令 $y=h(x)$. $\xRightarrow{\text{Lagrange}}$ $\exists\, \xi\in(g(a),g(b))$, $h'(\xi)=\dfrac{h(g(b))-h(g(a))}{g(b)-g(a)}$

$\Rightarrow$ $\xi \xrightarrow{\text{唯一}} \eta$, $h'(\xi)=\dfrac{f'(\eta)}{g'(\eta)}$ $\Rightarrow$ $\exists\,\eta\in(a,b)$, $\dfrac{f'(\eta)}{g'(\eta)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

#

法二：构造 $h(x)=f(x)-\left(f(a)+\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))\right)$

$h(a)=h(b)=0$ $\xRightarrow{\text{Rolle}}$ $\exists\,\xi\in(a,b)$. s.t. $h'(\xi)=0$

$\Rightarrow$ $h'(x)=f'(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x)$

$\therefore$ $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

#

定理 $(x\to a^+)$

- $f(x)$, $g(x)$ 在 $(a, a+d]$ 上可导，$g'(x)\neq 0$ $\forall x\in(a,a+d]$

并且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to a^+}g(x)=0$ 或 $\lim\limits_{x\to a^+}g(x)=\infty$

如果 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=L$ （L 可以是 ∞）

$\Longrightarrow$ $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=L$

Pf：Case 1：$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to a^+}g(x)=0$

补充定义 $f(a)=g(a)=0$. $f(x)$, $g(x)\in C[a,x]$. $\forall x\in(a,a+d]$

$\xRightarrow{\text{Cauchy}}$ $\exists\,\xi\in(a,a+d)$. $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\dfrac{f(x)}{g(x)}$

$$\therefore \lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi\to a^+}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = L$$

$L=\infty$时. $\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\infty$. $\Longleftrightarrow \forall M.\ \exists\delta.\ \forall x\in(a, a+\delta)$.

$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}\right| > M$.

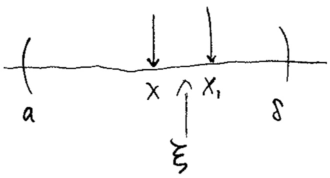
那么对于 $\forall x\in(a. a+\delta]$. $\exists\xi\in(a. x)$. s.t. $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

$$\therefore \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right| > M.$$

$$\therefore \lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

Case 2. $\lim_{x\to a^+} g(x) = \infty$. $\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$. 先假设 $L\neq\infty$

$\Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0.\ \exists\delta.\ \forall x\in(a, a+\delta).\ \left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - L\right| < \varepsilon$



fix $x_1\in(a, a+\delta)$

取 $x\in(a, x_1)$

在 $[x. x_1]$上. $\xLongrightarrow{\text{Cauchy}}$ $\frac{f(x_1)-f(x)}{g(x_1)-g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$. $\exists\xi\in(x. x_1)$

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} = \frac{-f(x)g(x_1)+g(x)f(x_1)}{g(x)(g(x)-g(x_1))} = -\frac{f(x)}{g(x)}\left(\frac{g(x_1)}{g(x)-g(x)}\right)+\frac{f(x_1)}{g(x)-g(x_1)}$$

$$\therefore \frac{f(x)}{g(x)}\left(1+\frac{g(x_1)}{g(x)-g(x_1)}\right) - \frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} = \frac{f(x)}{g(x)-g(x_1)}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{g(x)}{g(x)-g(x_1)} = \frac{f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} + \frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)}$$

$$\begin{aligned}\therefore \left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| &= \left|\frac{g(x)-g(x_1)}{g(x)}\left(\frac{f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} + \frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)}\right) - L\right| \\ &= \left|\frac{g(x)-g(x_1)}{g(x)}\left(\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} - L\right) + \frac{f(x_1)}{g(x)} - \frac{g(x_1)}{g(x)}L\right| \\ &\le \left|\frac{g(x)-g(x_1)}{g(x)}\right|\left|\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} - L\right| + \left|\frac{f(x_1)-Lg(x_1)}{g(x)}\right|\end{aligned}$$

$\because \lim_{x\to a^+} g(x) = \infty$. $\exists\delta'<\delta$, s.t. $\forall x\in(a, a+\delta')$, $|g(x)| > |g(x_1)|$

$\therefore |g(x)-g(x_1)| < 2|g(x_1)| \Longrightarrow \left|\frac{g(x)-g(x_1)}{g(x)}\right| < 2$

$\Longrightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| < 3\varepsilon$. MA-29 #

注 1. Case 2. $L=\infty$ 类似

2. 运用于 $x\to a^-$, $x\to a$. $x\to+\infty$. $x\to-\infty$. $x\to\infty$

(1) $0\cdot\infty \to \frac{\infty}{\frac{1}{0}}$ $\frac{0}{\frac{1}{\infty}}$

(2) $\infty-\infty \to \frac{1}{1/\infty} - \frac{1}{1/\infty} \Rightarrow \frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to0^+} \cot x-\frac{1}{x} = \lim_{x\to0^+}\left(\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to0^+}\frac{x\cdot\cos x-\sin x}{\sin x\cdot x}$$

(3) $\infty^0, 1^\infty, 0^0$

e.g $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x>0 \\ 0 & x\le 0. \end{cases}$ 在0处 f 的任意阶导数存在

$\boxed{\text{Taylor 公式}}$

1. Peano 余项

$\to f(x)$ 在 x_0 的一个邻域内有 $n-1$ 阶的连续导数

$f(x)$ 在 x_0 处有 n 阶导数, $\Rightarrow$ $f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-\left(f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right)}{(x-x_0)^n}=0$$

Pf: L'Hospital 法则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)-\frac{f''(x_0)(x-x_0)}{1}-\cdots-\frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}}{n(x-x_0)^{n-1}}$$

反复利用 L'Hospital 法则 $\lim_{x\to x_0}\frac{f^{n-1}(x)-f^{(n)}(x_0)(x-x_0)-f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!\,(x-x_0)}$ (*)

又: $f^{(n-1)}(x)=f^{(n-1)}x_0+f^{(n)}(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$

∴ (*) 是 0 #

$f(x)$ 在 x_0 处有 n 阶导数 $\Rightarrow$ $f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+r_n(x)$

$r_n(x)=o((x-x_0)^n)$. Peano 余项

2. Lagrange 余项.

f(x) 在 [a, b] 上有 n 阶连续导数. (n+1) 阶导数

$$\Rightarrow \quad r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \qquad \xi \in (x, x_0)$$

Pf: $$G(t) = f(x) - \left(f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n \right)$$

$\therefore \quad G(x_0) = f(x) - T_n(x). \quad G(x) = 0$

$$G'(t) = 0 - f'(t) - f''(t)(x-t) + f'(t) - \frac{f''(t)}{2}(x-t)^2 \cdots$$

$$= -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

令 $H(t) = (x-t)^{n+1}$. $\quad H(x) = 0$. $\quad H(x_0) = (x-x_0)^{n+1}$

$H'(t) = -(n+1)(x-t)^n$

$$\therefore \xrightarrow{\text{Cauchy}} \quad \frac{G(x) - G(x_0)}{H(x) - H(x_0)} = \frac{G'(\xi)}{H'(\xi)}$$

即 $$\frac{T_n(x) - f(x)}{-(x-x_0)^{n+1}} = \frac{-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n}{-(n+1)(x-\xi)^n}$$

即 $$f(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$ #

命题: f(x) 在 x_0 处二阶可导. $f''(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x) + f(x_0-\Delta x) - 2f(x_0)}{(\Delta x)^2}$

Pf: $$f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2 + o((\Delta x)^2)$$

$$f(x_0-\Delta x) = f(x_0) - \frac{f'(x_0)}{1!}\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2 + o((\Delta x)^2)$$

$$\therefore \quad f(x_0+\Delta x) + f(x_0-\Delta x) - 2f(x_0) = f''(x_0)(\Delta x)^2 + o((\Delta x)^2)$$

$$\therefore \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f''(x_0)(\Delta x)^2 + o((\Delta x)^2)}{(\Delta x)^2} = f''(x_0)$$

常见函数的 Taylor 公式

◦ e^x 在 $x_0=0$ 处泰勒展开 $e^x = 1+\frac{1}{1}x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+r_n(x)$

Peano. $r_n(x) = o(x^n)$

Lagrange. $r_n(x) = \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}$

e是无理数.

Pf: $e = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{e^\xi}{(n+1)!}$ $\xi\in(0,1)$

假设 $e=\frac{p}{q}$. $(q\in N^*, p\in \mathbb{Z}, (p,q)=1)$

令 $n=q$. $\frac{p}{q} = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{q!}+\frac{e^\xi}{(q+1)!}$

$\therefore p(q-1)! = q!+\frac{q!}{1!}+\frac{q!}{2!}+\cdots+1+\frac{e^\xi}{q+1}$

$q\geq 2$. $1<e^\xi<e<3$ $\frac{e^\xi}{q+1}<1$ 不可能为整数

$\therefore$ 矛盾! e是无理数 #

◦ $\sin x$ 在 $x_0=0$ 处泰勒展开.

$\sin x = \frac{1}{1!}x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\frac{1}{9!}x^9-\frac{1}{11!}x^{11}+\cdots+r_n(x)$

$r_n(x) = \frac{\sin^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$

◦ $\cos x$. 在 $x_0=0$ 处泰勒展开

$\cos x = 1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots+r_n(x)$

$\therefore$ $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$

$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$

$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$

$\Rightarrow$ $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

○ $(1+x)^{\alpha}=f(x)$ 在 $x_0=0$ 处

$$f^{(1)}(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}$$

$$f^{(2)}(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$$

$$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$$

$$\therefore (1+x)^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}+r_n(x)$$

记号： $$\binom{\alpha}{n}:=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

$$T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}x^k$$

特例： $\alpha=-1$. $$f(x)=\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4+\cdots+(-1)^n x^n+r_n(x)$$

$$f(x)=\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots+x^n+r_n(x)$$

○ $\ln(1+x)$

求导法则（Taylor展开）. 在 $x_0=0$ 处. $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+r_n(x)$

那么 $$f'(x)=a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}+r_{n-1}(x)$$

$$\ln(1+x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n+r_n(x)$$

$$[\ln(1+x)]'=\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^{n-1}x^{n-1}+r_{n-1}(x)$$

$$=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+r_{n-1}(x)$$

$$\therefore a_0=0. \quad a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

$$\therefore \ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+r_n(x)$$

○ $\arctan x=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+r_n(x)$

$$\frac{1}{1+x^2}=[\arctan(x)]'=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+r_{n-1}(x)$$

☆ 对于一个已知的Taylor展开

$$f(x)=T_n(x)+o(x^n)$$

令 $x=g(y)$. $\Rightarrow f(g(y))=T_n(g(y))+o(g(y)^n)$ (*)

如果 $T_n(g(y))$ 恰好是 y 的 m 次多项式. $o(g(y)^n)$ 恰好是 $o(y^m)$

那么(*)就成了 $f(g(y))$ 在 $y=0$ 的 m 阶 Taylor 展开

$$\therefore \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$$

$$\arctan(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 \cdots$$

令 $x=1$ （需证明 $r_n(1) \to 0$ 当 $n \to \infty$）

$$\Longrightarrow \quad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$$

应用

e.g. 1 $\quad \ln(1+x) = \dfrac{x}{1+\theta(x)\cdot x} \qquad 0 < \theta(x) < 1$

证明 $\quad \lim\limits_{x\to 0} \theta(x) = \frac{1}{2}$

Pf. 在 $[0, x]$ 之间. $f(x) = \ln(1+x)$, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$

$\exists\, \xi \in (0, x)$, s.t. $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(\xi) = \dfrac{1}{1+\xi}$. $\xi = \theta(x)\cdot x$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{1+\theta(x)\cdot x}$$

$$\Longrightarrow \quad \theta(x) = \frac{\left(\frac{x}{\ln(1+x)} - 1\right)}{x} = \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} = \frac{x - \ln(1+x)}{x\cdot \ln(1+x)}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\lim_{x\to 0} \theta(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x\cdot\ln(1+x)} \overset{\lim\limits_{x\to 0}}{=} \frac{x - \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{x\cdot\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)} \overset{\lim\limits_{x\to 0}}{=} \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2}}{1 - \frac{x}{2} + \frac{o(x^3)}{x^3}\cdot x} = \frac{1}{2} \qquad \#$$

e.g. 2 $\quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$

Solution: $\quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!}\frac{x^4}{4} + o(x^4)\right)}{x^4}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{12}x^4}{x^4} = -\frac{1}{12}$$

e.g.3 $\alpha>1$. 证明: $x>-1$时. $(1+x)^{\alpha}\geq 1+\alpha x$

Pf. $(1+x)^{\alpha} \xlongequal{Lagrange} 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)(1+\xi)}{2}\cdot x^2$ ξ在x和0之间

$$\because \frac{\alpha(\alpha-1)(1+\xi)}{2}x^2\geq 0$$

$$\therefore (1+x)^{\alpha}\geq 1+\alpha x$$ #

e.g.4 f在$[0,1]$上二阶可导. $|f(x)|\leq A$. $\forall x$ Interpolation

$|f''(x)|\leq B$. 证明. $|f'(x)|\leq 2A+\frac{1}{2}B$

Pf. $\forall c\in[0,1]$. $f(x)=f(c)+\frac{f'(c)}{1!}(x-c)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2$

取 $x=0$. $f(0)=f(c)+f'(c)(-c)+\frac{f''(\xi_1)}{2}c^2$ ①

取 $x=1$. $f(1)=f(c)+f'(c)(1-c)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-c)^2$ ②

② − ①. $\Rightarrow$ $f(1)-f(0)=f'(c)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-c)^2-\frac{f''(\xi_1)}{2}c^2$

$$\therefore |f'(c)|=\left|f(1)-f(0)+\frac{f''(\xi_1)}{2}c^2-\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-c)^2\right|$$

$$\leq |f(1)|+|f(0)|+\left|\frac{f''(\xi_1)}{2}c^2\right|+\left|\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-c)^2\right|$$

$$\leq 2A+\frac{B}{2}(c^2+(1-c)^2) \qquad c\in[0,1]$$

$$\leq 2A+\frac{B}{2}$$ #

e.g.5 $f(0)=f(1)=0$. f在$[0,1]$二阶可导. $\min\limits_{x\in[0,1]}f(x)=-1$

求证 $\max f''(x)\geq 8$

Pf. 设f在c处取最小值(最值定理)

$f(0)=f(1)=0 \Rightarrow c\in(0,1) \xRightarrow{Fermat} f'(c)=0$

$\xRightarrow{Lagrange余项}$ $f(x)=f(c)+\frac{f'(c)}{1}(x-c)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-c)^2$

取 $x=0$. $0=-1+\frac{f''(\xi_1)}{2}c^2$

取 $x=1$. $0=-1+\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-c^2)$

$c\in(0,1)\Rightarrow c^2\leq\frac{1}{4}$ 或 $(1-c)^2\leq\frac{1}{4}$

$\Rightarrow f''(\xi_1)\geq 8$ 或 $f''(\xi_2)\geq 8$

$\Rightarrow \max f''(x)\geq 8$ #

2. 渐近线

$L(x)=ax+b$ 称为 $f(x)$ 在 $x\to+\infty$ ($x\to-\infty$ 或 $x\to\infty$) 的渐近线

如果 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty) \\ x\to\infty}} (f(x)-L(x))=0$

垂直渐近线. $\lim\limits_{\substack{x\to a^+ \\ \text{或}\, x\to a^-}} f(x)=\infty$ (或 $\begin{smallmatrix}+\infty\\-\infty\end{smallmatrix}$)

称 $x=a$ 为 $f(x)$ 的垂直渐近线

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-L(x))=0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-ax-b}{x}=0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a$$
$$\Rightarrow b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)$$

e.g. $y=\dfrac{(x-1)^2}{3(x+1)}$

Solution

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)^2}{3(x+1)x}=\frac{1}{3}$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)^2}{3(x+1)}-\frac{1}{3}=-1$$

$$L(x)=\frac{1}{3}x-1$$

$x=-1$. 为垂直渐近线

e.g. f 在 $[a,+\infty)$ 上连续. $(a,+\infty)$ 二阶可导. 如果 $f(a)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

证明 ① $\exists\xi$ s.t. $f'(\xi)=0$

② $\exists\eta$ s.t. $f''(\eta)=0$

Pf. (导数具有介值性质) Darboux

① 假设 $\nexists\xi$. s.t $f'(\xi)=0$

那么 $f'(x)>0$. 或 $f'(x)<0$ $\forall x\in(a,+\infty)$

不妨 $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ 严格单调增 $\to\leftarrow \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=f(a)$

② 假设 $f''(\eta)\neq 0$. $\xlongequal{\text{Darboux}}$ $f''(x)>0$ 或 $f''(x)<0$ $\forall x\in(a,+\infty)$

不妨设 $f''(x)>0 \Rightarrow f'(x)$ 严格单调增 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=L$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0. \xlongequal{\text{L'Hospital}} \lim_{x\to\infty} f'(x)=L=0$$

$\Rightarrow f'(x)<0. \Rightarrow f(x)$ 严格单调减 $\rightarrow\leftarrow \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=f(a)$

#

e.g. $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上二阶可导. f'' 有界. $\exists x_0$ s.t. $f(x_0)=0$

证明. $\exists\xi$. s.t. $\xi f''(\xi)+(2+\xi)f'(\xi)+f(\xi)=0$

极值原理

- (一阶) x_0 为极值点 $\xRightarrow{\text{Fermat}}$ $f'(x_0)=0$ (双侧导数)

  (内点, 即函数在 x_0 的一个邻域内有定义)

- (二阶) 在 $f'(x_0)=0$ 处.
  - $f''(x_0)>0 \Longrightarrow$ 极小值点
  - $f''(x_0)<0 \Longrightarrow$ 极大值点
  - $f''(x_0)=0 \Longrightarrow$ 没有结论

Pf. Taylor 展开. $f(x)=f(x_0)+\dfrac{f'(x_0)}{1}(x-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$

$+o((x-x_0)^2)$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{o((x-x_0)^2)}{(x-x_0)^2}=0 \Rightarrow \left|\frac{o((x-x_0)^2)}{(x-x_0)^2}\right|<\frac{f''(x_0)}{4}, \left(\exists\delta. \forall 0<|x-x_0|<\delta\right)$$

$$\Rightarrow -\frac{f''(x_0)}{4}(x-x_0)^2\le o((x-x_0)^2)$$

$$\Rightarrow f(x)\ge f(x_0)+\frac{f''(x_0)}{4}(x-x_0)^2.$$

#

最值问题

Q: $f(x)\in[a,b]$. $\xRightarrow{\text{最值定理}}$ f 有最大最小值

找到 f 的最大最小值?

A: f 可导 + 二阶可导 $\begin{cases}1. \text{ 先找 } f'=0 \text{ 的点. 以及 } a,b \text{ 两端点}\\ 2. \text{ 比较函数值}\end{cases}$

极值问题　　Q: $f\in C(\mathbb{R})$. 找极值点

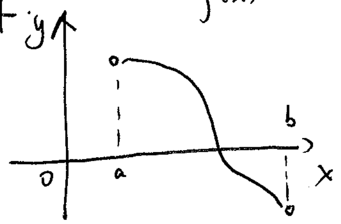
A: 1. $f'=0$.

2. 二阶极值原理

3. $f'(x_0)=0$. $f''(x_0)=0$. 看 f' 在 x_0 两边的符号

方程的近似解　　$f(x)=0$. 求解

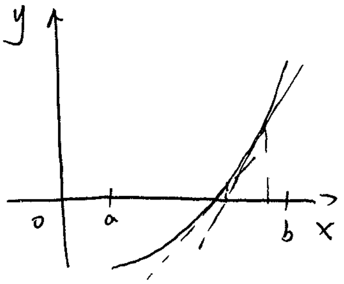
◦ 二分法.



k步以后.

$$|x_k - x_{k+1}| = \frac{b-a}{2^k} < \varepsilon_0$$

◦ Newton法



充分条件　◦ $f(a)\cdot f(b)<0$

◦ $f'(x)>0$

◦ $f''(x)>0$

$\boxed{\text{不定积分}}$

◦ 微分　$dF(x)=f(x)dx$　　　f 称为 F 的导数

◦ 积分　$\int f(x)dx = F(x)+C$　　　F 称为 f 的一个原函数

命题.　$F, G\in C(\mathbb{R})$.　$F'=G' \Longrightarrow \exists$ 唯一 C. s.t. $F=G+C$

e.g.　$\int \cos x\,dx = \sin x + c$

$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(x)+c$

$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x|+c$

$\int nx^{n-1}dx = x^n$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin(x)+C$

$\int e^x dx = e^x + c$

不定积分的性质
（线性性）

1. $\int (f \pm g)\,dx = \int f\,dx \pm \int g\,dx$
2. $a \equiv \text{Constant}$ $\quad \int a f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$

第一类换元法（变量代换） e.g.

$$\int \frac{1}{x-2}\,dx \overset{令u=x-2}{=\!=} \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C = \ln|x-2| + C$$

一阶微分的形式不变性 $\quad dF(x) = F'(x)\,dx.$

$x = g(u)$

$$\overset{x=g(u)}{=\!=} \quad dF(g(u)) = F'(g(u))\,dx = \underbrace{\boxed{F'(g(u))\,g'(u)}}_{关于u的导数}du$$

e.g.

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1} = \frac{a}{a^2}\int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

第二类换元法 e.g.

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x\,dx}{\cos x} = \int \frac{-d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$$

$u = g(x)$ e.g.

$$\int \frac{\frac{1}{x}dx}{\ln x} = \int \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln|\ln x| + C$$

e.g.

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx \overset{x=a\sin u}{=\!=} \int a\cos u \cdot a\cos u\,du = a^2\int \cos^2 u\,du$$

$$= a^2\int \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt = a^2\left(\frac{1}{2}t\right) + \frac{a^2}{4}\sin 2t + C$$

$$\overset{t=\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)}{=\!=} \frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{a^2}{2}x\,\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2} + C$$

e.g.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx = 2\int \frac{d\sqrt{x}}{1+x} \overset{t=\sqrt{x}}{=\!=} 2\int \frac{dt}{1+t^2} = 2\arctan(\sqrt{x}) + C$$

分部积分法

$$(u(x)v(x))' = u(x)v'(x) + u'(x)v(x)$$

$$d(u(x)v(x)) = u(x)\,dv(x) + v(x)\,du(x)$$

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx$$

e.g $\int xe^x dx = \int x\,d(e^x) = x\cdot e^x - \int e^x dx$
$= (x-1)e^x + C$

e.g $\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\,d\ln x = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx$
$= x\ln x - x + C$

e.g $\int e^x\cos x\,dx = \int e^x d\sin x = e^x\sin x - \int \sin x\, e^x dx$
$= e^x\sin x + \int e^x d(\cos x)$
$= e^x\sin x + e^x\cos x - \int \cos x\, e^x dx$
$\therefore \int e^x\cos x\,dx = e^x\frac{\sin x+\cos x}{2} + C$

e.g $\int x^2\cos x\,dx = \int x^2 d\sin x = x^2\sin x - \int 2\sin x\, x\,dx$
$= x^2\sin x + 2\int x\,d\cos x$
$= x^2\sin x + 2\left(x\cos x - \int \cos x\,dx\right)$
$= x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C$

e.g. $\int \tan^{10}x\sec^2 x\,dx = \int \tan^{10}x\, d(\tan x) \xlongequal{u=\tan x} \frac{(\tan x)^{11}}{11} + C$

e.g $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} \xlongequal{x=\tan t} \int \frac{\sec(t)}{\tan(t)}dt = \int \frac{1}{\sin t}dt = \int \frac{-d(\cos t)}{\sin^2 t}$
$\xlongequal{u=\cos t} -\int \frac{du}{1-u^2}$

三角换元
1. $\sqrt{a^2-x^2}$ $\quad \frac{1}{a}x = \sin t \quad t\in[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
2. $\sqrt{x^2-a^2}$ $\quad \frac{1}{a}x = \sec t$
3. $\sqrt{a^2+x^2}$ $\quad \frac{1}{a}x = \tan t$

有理函数的积分 $\quad R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ $\quad P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$
$Q_m(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0$

Step 1 $\deg(P) > \deg(Q)$ 带余除法

$$R = S(x) + \frac{r(x)}{Q(x)} \quad \deg(r) < \deg(Q)$$

Step 2. Q有一个标准因式分解

$$Q = \prod_{i=1}^{p} (a_i x + b_i)^{l_i} \cdot \prod_{j=1}^{q} (a_j x^2 + b_j x + c_j)^{k_j}$$

$l_i \in \mathbb{N}$ 一次因子 不可约二次因子

Step 3. $\frac{r(x)}{Q(x)} = \sum$ 四类

① $\frac{C_i}{a_i x + b_i}$ if $l_i = 1$

② $\sum_{u=1}^{l_i} \frac{C_{i,u}}{(a_i x + b_i)^u}$ if $l_i \geq 2$

③ $\frac{D_j x + E_j}{a_j x^2 + b_j x + c_j}$ if $k_j = 1$

④ $\sum_{v=1}^{k_j} \frac{D_{j,v} x + E_{j,v}}{(a_j x^2 + b_j x + c_j)^2}$ if $k_j \geq 2$

①. ② $\xRightarrow{\text{首项系数}=1}$ $\int \frac{c}{(x+b)^n} dx = \begin{cases} c \ln|x+b| & n = 1 \\ \frac{c}{1-n}(x+b)^{-n+1} & n \geq 2 \end{cases}$

③. ④ $\xRightarrow{\text{首项系数}=1}$ $\int \frac{ex+f}{(x^2+bx+c)^n} dx \xlongequal[du=(2x+b)dx]{\text{令} u = x^2+bx} \int \frac{\frac{e}{2}du + (f - \frac{e}{2}b)dx}{(u+c)^n}$

可以转化成有理函数

1. $R\left(x, \sqrt[n]{\frac{\xi x + \eta}{\mu x + \nu}}\right)$ 类的不定积分 令 $\sqrt[n]{\frac{\xi x + \eta}{\mu x + \nu}} = t$ 分式线性表达

2. $R(\sin x, \cos x)$ 万能公式

$\boxed{\text{定积分}}$

一般地，取 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的有界函数 $\quad (m \le f(x) \le M \quad \forall x \in [a,b])$

Step 1（分划）P：$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \quad \Delta x_n = x_n - x_{n-1}$

Step 2（取点、近似和）$\forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$，$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

Step 3（加细取极限）$\lambda(P) = \max_{1\le i\le n} \Delta x_i$

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} \left(\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \right) \qquad (*)$$

定义 (*)如果存在，则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann可积

记为 $\displaystyle\int_{\boxed{a}}^{\boxed{b}} f(x)\,dx = \lim_{\lambda(P)\to 0}\left(\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right)$

b：积分上限；a：积分下限；$f(x)$：被积函数

(*)存在 $\quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$，s.t. $\forall \lambda(P) < \delta$，$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right| < \varepsilon$

$\forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

注：(*)存在 $\Longrightarrow$ 和分划以及取点是无关的

Darboux 大和、小和

给定 P：$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$

令 $M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$，$m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$

$$\overline{S}(P) := \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x_i \qquad \underline{S}(P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x_i$$

$\overline{S}(P)$：Darboux大和 $\qquad \underline{S}(P)$：Darboux小和

$\Rightarrow$ 对于 P 的任意取点

$$\underline{S}(P) \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \le \overline{S}(P) \qquad (**)$$

引理1. $\underline{S}(P)$ 是上有界 $\Longrightarrow l = \sup_{P} \underline{S}(P)$ 存在 $\qquad \underline{S}(P) \le \overline{S}(P)$

$\overline{S}(P)$ 是下有界 $\Longrightarrow L = \inf_{P} \overline{S}(P)$ 存在

$$\Downarrow$$

$$l \le L$$

Darboux定理 $\lim_{\lambda(p)\to 0} \underline{S}(p)=l$. $\lim_{\lambda(p)\to 0} \overline{S}(p)=L$

定理 f在$[a,b]$上 Riemann可积 $\Longleftrightarrow$ $l=L$

证. "$\Leftarrow$" (**)式中取 $\lambda(P)\to 0$ 即可

"$\Rightarrow$" 如果f可积. $\lim_{\lambda(p)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = I$

给定P. $m_i=\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$. $\Rightarrow \forall \varepsilon>0$. $\exists \xi_i\in[x_{i-1},x_i]$, s.t. $|f(\xi_i)-m_i|<\varepsilon$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i-\underline{S}(P)\right|=\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i-\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i\right|$$

$$=\left|\sum_{i=1}^{n}(f(\xi_i)-m_i)\Delta x_i\right|\le\sum_{i=1}^{n}|f(\xi_i)-m_i|\Delta x_i\le \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i\right)=\varepsilon(b-a)$$

$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta$. s.t. $\forall P$. $\lambda(P)<\delta \Rightarrow \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right|<\varepsilon$.

$\forall \xi_i\in[x_{i-1},x_i]$

$$\Rightarrow |\underline{S}(P)-I|\le (b-a+1)\varepsilon$$

$\therefore \lim_{\lambda(p)\to 0}\underline{S}(P)=I=l \Rightarrow l=L$ #

同理 $\lim_{\lambda(p)\to 0}\overline{S}(P)=I=L$

定义 给定P. $w_i=M_i-m_i$. 称为$f(x)$在$[x_{i-1},x_i]$上的振幅

推论 f在$[a,b]$上Riemann可积$\Longleftrightarrow \lim_{\lambda(p)\to 0}\sum_{i=1}^{n} w_i\Delta x_i=0$

推论1 $f\in C[a,b] \Rightarrow f$在$[a,b]$上Riemann可积

证. $f\in C[a,b]\Rightarrow f$在$[a,b]$上一致连续

$\Rightarrow \forall\varepsilon>0$. $\exists\delta$, s.t. $|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

$\forall P$. $\lambda(P)<\delta$. $M_i-m_i=w_i=f(\xi_i)-f(\eta_i)<\varepsilon$

($f\in C[a,b]\Rightarrow \exists \xi_i,\eta_i$. s.t. $f(\xi_i)=M_i$. $f(\eta_i)=m_i$)

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} w_i\Delta x_i<|b-a|\varepsilon \Rightarrow \lim_{\lambda(p)\to 0} w_i\Delta x_i=0$

$\Rightarrow f$在$[a,b]$Riemann可积 #

推论二. f在$[a,b]$上单调 $\Rightarrow$ f在$[a,b]$上Riemann可积

推论三. f在$[a,b]$上只有有限多个间断点 $\Rightarrow$ f可积
(有界)

Pf of 推论二. 不妨假设f单调增

$$\forall P, \quad a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\big(f(x_i)-f(x_{i-1})\big)\Delta x_i$$

$$\le \lambda(P)\big(f(b)-f(a)\big)$$

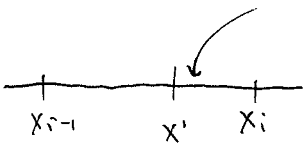
$$\therefore \lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=0 \qquad \#$$

Pf of Darboux Thm. 只证 $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0}\overline{S}(P)=L \quad (L=\inf\limits_{P}\overline{S}(P))$

Pf: $\forall \varepsilon>0$, $\exists P'$, $\overline{S}(P')\in(L, L+\varepsilon)$, $P': a=x_0'<x_1'<\cdots<x_l'=b$

$\forall P$, 定义 $\overline{P}=P\cup P'$ (分点合并)

引理. $\overline{S}(\overline{P})\le\overline{S}(P')$



设加前对大和的贡献 $M_i\Delta x_i$

加后对大和的贡献 $M_1\Delta x_1+M_2\Delta x_2\le M_i\Delta x_i$

$\therefore$ 若取 $\delta<\min\{\Delta x_i'\}$ ($\uparrow P'$) 则若 $\lambda(P)<\delta$, 则 P的相邻两个分点之间至多只有1个P'的分点, 而此时

$$\overline{S}(P)-\overline{S}(\overline{P})=\sum_{[x_{j-1},x_j]\text{中有}P'\text{的分点}}M_{ij}\Delta x_{ij}-\sum M_{ij}^{(1)}(x_j'-x_{ij-1})+M_{ij}^{(2)}(x_{ij}-x_j')$$

$$|\overline{S}(P)-\overline{S}(\overline{P})|=\sum\Big[\big|(M_{ij}-M_{ij}^{(1)})(x_j'-x_{ij-1})\big|+\big|(M_{ij}-M_{ij}^{(2)})(x_{ij}-x_j')\big|\Big]$$

$|f(x)|\le M$
$$\le\sum_{i=1}^{l}2M\Delta x_i<2Ml\delta$$

$$\therefore \text{取 } \delta \le \frac{L+\varepsilon-\overline{S}(\overline{P})}{2Ml}\text{，则有 } \overline{S}(P)-\overline{S}(\overline{P}) \le L+\varepsilon-\overline{S}(\overline{P})$$

$$\text{即 } \overline{S}(P) \le L+\varepsilon$$

$$\therefore \lim_{\lambda(P)\to 0} \overline{S}(P) = L = \inf_{P} \overline{S}(P) \qquad \#$$

Cor $\displaystyle \lim_{\lambda(P)\to 0}\left(\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i\right)=0 \iff \forall \varepsilon>0,\ \exists P\ \text{s.t.}\ \sum_{i=1}^{n}\omega_i^{(P)}\Delta x_i<\varepsilon$

$\Updownarrow$

$f(x)$ 在 $[a,b]$ Riemann 可积.

Pf of 推论三：只需证 $\forall \varepsilon>0$, $\exists P$, $\sum_{i=1}^{n} w_i\Delta x_i<\varepsilon$ 即可

设 $y_1, y_2 \cdots y_k$ 为 f 的间断点

取分点 $y_1-\delta/2,\ y_1+\delta/2,\ \cdots\ y_k-\delta/2,\ y_k+\delta/2$.

那么 f 在 $\underbrace{[a,b]\setminus\bigcup_{i=1}^{k}\left(y_i-\delta/2,\ y_i+\delta/2\right)}_{\text{至多}k+1\text{个闭区间之并，记为}\bigcup_{j=1}^{k+1}I_j}$ 上连续

$\Rightarrow$ 每个闭区间可以找到分划 P_j 使得在每个区间 I_j 上 $\sum \omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2(k+1)}$

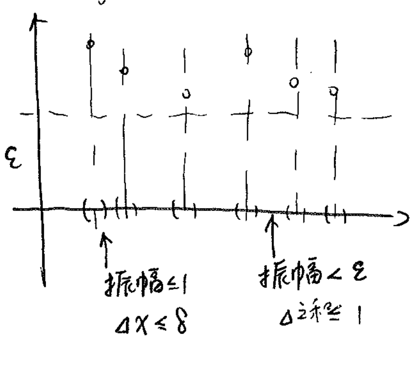
$\therefore P=\bigcup_j P_j \cup \{y_1-\delta/2,\ y_1+\delta/2,\ \cdots\ y_k-\delta/2,\ y_k+\delta/2\}$

$\therefore \sum \omega_i^P\Delta x_i \le \frac{\varepsilon}{2}+\delta\cdot 2M\cdot k<\varepsilon$ （取 $\delta<\frac{\varepsilon}{4Mk}$） #

推论四. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有可列多个间断点.

e.g. 1 Riemann 可积. 在 $[0,1]$ 上. $R(x)=\begin{cases}\frac{1}{p} & x=\frac{q}{p}\\ 1 & x=0\\ 0 & x\text{无理数}\end{cases}$

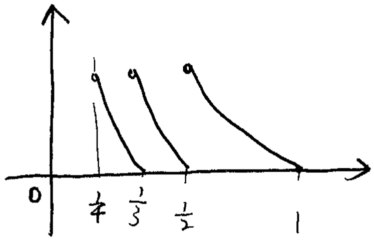
Pf. $\forall\varepsilon>0$, $\exists$ 有限多个点, $\{x_k\}_{k=1}^{n}$ s.t. $R(x_k)>\varepsilon$



取 $\delta<\varepsilon/n$

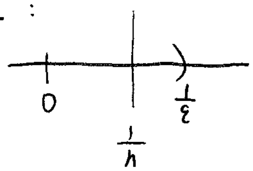
$\Rightarrow \sum \omega_i^P\Delta x_i<2\varepsilon$ #

e.g 2. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \lfloor \frac{1}{x} \rfloor & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$



在 $[0,1]$ Riemann 可积

证:



$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n$. s.t. $\frac{1}{n} < \varepsilon$

$[\frac{1}{n}, 1]$ 只有有限多个间断点

#

定积分的性质

1. 线性 $\int_a^b k_1 f + k_2 g \, dx = k_1 \int_a^b f(x)dx + k_2 \int_a^b g(x)dx$

推论: $\{x \mid f(x) \neq g(x)\}$ 有限集 $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$

2. 乘积可积: $\Longrightarrow$ $f(x)g(x)$ 可积

3. 保序性: $f(x) \geq g(x)$. 在 $[a,b]$ 成立. $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

推论. $f(x) \in C[a,b]$, 并且 $f(x) \geq 0$ 但不恒为 0. $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx > 0$

4. 绝对可积: $f(x)$ 可积 $\Rightarrow |f(x)|$ 可积

$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

5. 区间可加性 $f(x)$ 在 $[a,c]$. $[c,b]$ 上可积 $\Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积

并且 $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

6. 积分第一中值定理 $f(x)$. $g(x)$ 可积, $g(x)$ 不变号. $m \leq f(x) \leq M$

$\Rightarrow$ 1) $\exists \xi \in [m, M]$, s.t. $\int_a^b f(x)g(x)dx = \xi \int_a^b g(x)dx$

2) 若 $f \in C[a,b]$. $\exists \eta \in [a,b]$, s.t. $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\eta)\int_a^b g(x)dx$

证 对 1). 不妨设 $g(x) \geq 0$.

$$m \le f(x) \le M \Rightarrow \quad m g(x) \le f(x) g(x) \le M g(x)$$

$$\Rightarrow m\int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)g(x)\,dx \le M\cdot\int_a^b g(x)\,dx$$

$$\therefore \exists \xi \in [m, M].\quad \xi\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

积分不等式

1. Cauchy-Schwartz不等式 $\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \le \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)\,dx\right)$

证. $\int_a^b (f+tg)^2\,dx \ge 0 \quad \forall t$

$$\therefore \left(\int_a^b g^2 dx\right)t^2 + \left(\int_a^b 2fg\,dx\right)t + \int_a^b f^2 dx \ge 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 4\left(\int_a^b fg\,dx\right)^2 \le 4\left(\int_a^b g^2 dx\right)\left(\int_a^b f^2 dx\right)$$

#

2. Hölder不等式 $\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

$$\int_a^b f\cdot g\,dx \le \left(\int_a^b |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |g|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

注: $p=q=2 \Rightarrow$ Cauchy-Schwartz

证. 命 $\varphi = \dfrac{f}{\left(\int_a^b |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}} \quad \psi = \dfrac{g}{\left(\int_a^b |g|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}}$

$$\varphi(x)\psi(x) \le \frac{1}{p}|\varphi(x)|^p + \frac{1}{q}|\psi(x)|^q$$

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx \le \frac{1}{p}\int_a^b \frac{|f|^p dx}{\int_a^b |f|^p dx} + \frac{1}{q}\int_a^b \frac{|g|^q dx}{\int_a^b |g|^q dx}$$

$$= 1$$

$$\therefore \int_a^b fg\,dx \le \left(\int_a^b |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |g|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

#

3. Minkowski不等式 $\left(\int_a^b |f+g|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_a^b |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$ $(p \ge 1)$

定义 $\|f\| = \left(\int_a^b |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$

证.
$$\int_a^b |f+g|^p dx = \int_a^b |f+g||f+g|^{p-1} dx$$

$$\leq \int_a^b |f||f+g|^{p-1} dx + \int_a^b |g||f+g|^{p-1} dx$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\int_a^b |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b (|f+g|)^{p-1})^q\right)^{\frac{1}{q}} \qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

$$+\left(\int_a^b |g|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b (|f+g|)^{p-1})^q\right)^{\frac{1}{q}} \qquad p+q=pq$$

$$= \left[\left(\int_a^b |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\right] \left(\int_a^b |f+g|^p dx\right)^{1-\frac{1}{p}}$$

$$\Rightarrow \left(\int_a^b |f+g|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \#$$

4. Young不等式 $y=f(x)$. $[0,+\infty)$ 上严格单调增连续函数

$f(0)=0$. 记反函数为 $y=f^{-1}(x)$

则有 $\int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(x)dx \geq a\cdot b$

Newton-Leibniz公式

定理. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的可积函数. 定义 $F(x) \triangleq \int_a^x f(t)dt$

$\Rightarrow$ 1) $F(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数

2) 当 $f(x)$ 是连续函数时, $F(x)$ 可导. 并且 $F'(x)=f(x)$

Cor of 2) $\int f(x)dx = F(x)+C$

$\int_a^b f(x)dx = G(b)-G(a)$. 其中 G 是 f 的一个原函数

Pf of Cor: $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数

$\Rightarrow F'(x)=G'(x) \Rightarrow F(x)=G(x)+C$

$\therefore G(b)-G(a) = F(b)-F(a) = \int_a^b f(x)dx$

Pf of Thm. 2) $F'(x) := \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\int_a^{x+\Delta x} f(x)dx - \int_a^x f(x)dx}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(x)dx}{\Delta x} \xlongequal{\text{积分第一中值定理}} \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(\xi)\cdot\Delta x}{\Delta x} = f(\xi)$$

$\exists \xi \in (x, x+\Delta x)$

$\therefore$ $F(x)$ 可导，$F'(x) = f(\xi)$. $\Delta x\to 0$ 时，$\xi \to x$

$\xrightarrow{f\text{是连续函数}} \lim\limits_{\xi\to (x)} f(\xi) = f(x)$

1) $|F(x)-F(x_0)| = \left|\int_{x_0}^{x} f(t)dt\right| \le \int_{x_0}^{x} |f(t)|dt$

$\le M(x-x_0)$

$\therefore$ $x\to x_0$. $|F(x)-F(x_0)| \to 0$

$\therefore$ $\lim\limits_{x\to x_0} F(x) = F(x_0)$. 即 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 连续 #

注：$F'_+(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0^+} \dfrac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = f(x^+)$ 　　f 在 x 处有第一类间断点.

$F'_-(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0^-} \dfrac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = f(x^-)$

e.g. 1. $G(x) = \int_0^{x^2} \sin\sqrt{t}\,dt$，求 $G'(x)$

令 $F(x) = \int_0^x \sin\sqrt{t}\,dt$. 　$g(x) = x^2$

$\therefore$ $G(x) = F(g(x))$

$G'(x) = F'(g(x))g'(x) = \sin x \cdot 2x$

e.g. 2. $G(x) = \int_0^{x^2} \sin\sqrt{t}\,dt - \int_0^{x^3} \sin\sqrt{t}\,dt = \int_{x^3}^{x^2} \sin\sqrt{t}\,dt$. 求 $G'(x)$

e.g. 3 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$

原式 $= \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\dfrac{i}{n}\right)^p \cdot \dfrac{1}{n} = \int_0^1 x^p dx = \begin{cases} 1/p+1 & p>-1 \\ +\infty & p=-1 \end{cases}$

e.g 4. $\int_0^x f(u)(x-u)du = \int_0^x \left(\int_0^u f(x)dx\right)du$

Pf

令 $F(x) = \int_0^x f(u)(x-u)du \qquad F(0)=0$

$G(x) = \int_0^x \left(\int_0^u f(x)dx\right)du \qquad G(0)=0$

$G'(x) = \int_0^x f(t)dt$

$F(x) = \int_0^x f(u)x\,du - \int_0^x f(u)u\,du$

$= x\int_0^x f(u)du - \int_0^x f(u)u\,du$

$F'(x) = \int_0^x f(u)du + xf(x) - xf(x) = \int_0^x f(u)du$

$\therefore \quad F'(x) = G'(x) \Rightarrow F(x) = G(x) + C$

$F(0) = G(0) + C \Rightarrow C = 0$

$\therefore \quad F(x) = G(x)$ #

e.g. 5. 求 $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}x \, d(-\cos x) = -\sin^{n-1}x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, d(\sin^{n-1}x)$

$= -\sin^{n-1}x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\cos^2 x \sin^{n-2}x\,dx$

$= 0 + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}x\,(1-\sin^2 x)dx$

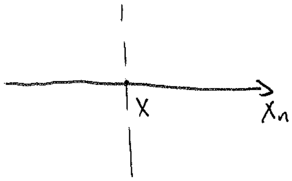
$= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$

$\therefore \quad nI_n = (n-1)I_{n-2}$

定积分的应用(几何) 面积. 体积. 弧长

e.g. n维单位球体积 $= w_n$

n维半径为r的球的体积 $= w_n r^n$



横截面 $(n-1)$ 维半径为 $\sqrt{1-x^2}$ 的球

$$w_n = V = \int_{-1}^{1} w_{n-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{n-1} dx$$

$$= 2\int_0^1 w_{n-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{n-1} dx$$

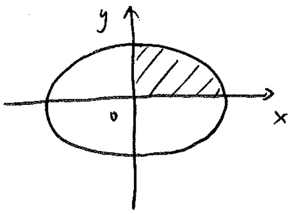
令 $x=\cos\theta$

$$= 2\int_0^1 w_{n-1} \sin^{n-1}\theta \, d(\cos\theta)$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} w_{n-1}\sin^n\theta \, d\theta = 2w_{n-1}\int_0^{\pi/2}\sin^n\theta \, d\theta$$

$$w_n = 2w_{n-1}\cdot I_n$$

e.g. 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所围成的面积



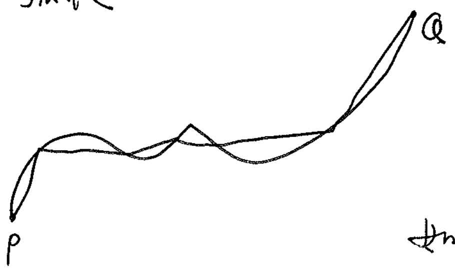
$$y = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

$$A = 4\int_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx, \quad 令\ x = a\sin\theta$$

$$= 4b\int_0^{\pi/2}\cos\theta \cdot a\cos\theta \, d\theta$$

$$= \pi ab$$

弧长



$\gamma(t) = (x(t), y(t)) \quad t\in[\alpha, \beta]$

定义 取定一分划 $P=P_0, P_1, \cdots, P_n=Q$ （对应 $t_0, t_1, \cdots, t_n$）

从P到Q的一串 γ 上的点列.

如果 $\lim\limits_{\lambda(\Delta t)\to 0}\left(\sum_{i=1}^{n}|P_{i-1}P_i|\right)$ 存在, 则称 γ 是可求长的. 其长度记为 $\lim\limits_{\lambda(\Delta t)\to 0}\left(\sum_{i=1}^{n}|P_{i-1}P_i|\right)$

命题　如果 $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ 是连续可导（导数连续）$\Rightarrow \gamma$ 可求长

并且 $l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$

Pf. $\sum_{i=1}^n |p_{i-1}p_i| = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x(t_i)-x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i)-y(t_{i-1}))^2}$

$$= \sum_{i=1}^n \sqrt{(x'(\xi_i)\Delta t_i)^2 + (y'(\eta_i)\Delta t_i)^2}$$

$$= \sum_{i=1}^n \sqrt{x'^2(\xi_i) + y'^2(\eta_i)}\, \Delta t_i$$

$\forall \varepsilon > 0$. $\exists \delta$. s.t. $\lambda(p) < \delta$

$$\left| \sum_{i=1}^n \sqrt{x'(\xi_i)^2 + y'(\eta_i)^2}\, \Delta t_i - \sum_{i=1}^n \sqrt{x'^2(\xi_i) + y'^2(\xi_i)}\, \Delta t_i \right| < (\beta - \alpha)\varepsilon$$

$$\left| \sum_{i=1}^n \sqrt{x'^2(\xi_i) + y'^2(\xi_i)} - l \right| < \varepsilon$$

\#

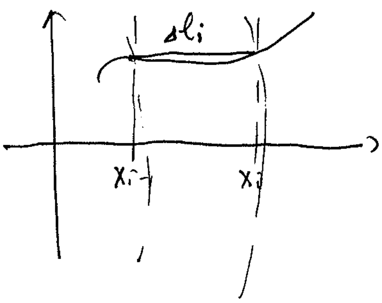
参数化　$\begin{cases} x = a\sin\theta \\ y = b\cos\theta \end{cases}$　$0 \le \theta \le 2\pi$

$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}\, d\theta$　　初等表达式不存在

表面积

旋转面的表面积

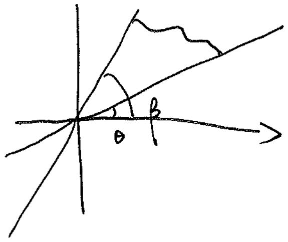
$$A = \lim_{\lambda(p)\to 0} \sum_{i=1}^n \pi \left(f(x_{i-1}) + f(x_i) \right) \Delta l_i \qquad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$$



$$= \lim_{\lambda(p)\to 0} \pi \sum_{i=1}^n \left(f(x_{i-1}) + f(x_i) \right) \sqrt{1 + y'(\xi_i)^2}\, \Delta x_i$$

$$= \pi \int_a^b 2f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$$

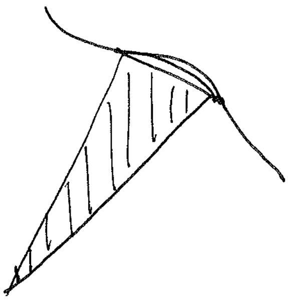
极坐标下面积的计算 $\qquad r = r(\theta) \qquad \alpha \le \theta \le \beta$



$$P \qquad \theta_0 = \alpha < \theta_1 < \cdots < \theta_n = \beta$$

$$A = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} r^2(\theta_i) \Delta\theta_i$$

$$= \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} r^2(\theta)\, d\theta$$



$\boxed{\text{反常积分}}$

1. 无界区间积分 $\qquad$ 2. 对有界区间上的无界函数积分

1. $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \ (*)$ $\underline{\text{定义}}$. 如果 $\displaystyle\int_a^A f(x)\,dx$ 有意义 $\forall A > a$

且 $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)\,dx$ 存在. 则称(*)收敛

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)\,dx$$

反之称(*)发散

$\underline{e.g.}$ $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_1^A \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{A\to\infty} \left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^A$ 存在 $\Leftrightarrow p > 1$

$p = 1$. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \ln A$ 不存在

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \overset{def}{=\!=} \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to-\infty} \int_A^a f(x)\,dx + \lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)\,dx$$

$$\underbrace{\text{c.p.v}}_{\text{复变}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \right) \overset{def}{=\!=} \lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{A} f(x)\,dx$$

2. 有限区间、无界函数

$[a,b]$. f 在 a 的任一个邻域内无界. 但是 f 在 $[a+\varepsilon, b]$ 上有界且可积

<u>定义</u> $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$

若极限存在. 称反常积分收敛. 反之发散. a 称为 f 的奇点

<u>e.g.</u> $$\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx \overset{p=1}{=\!=} \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}(\ln 1-\ln\varepsilon) = +\infty \text{ (发散)}$$

$$\overset{p\neq 1}{=\!=} \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-p+1}}{-p+1} = \frac{1}{1-p} - \frac{1}{1-p}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\varepsilon^{-p+1} \quad \text{存在} \iff p<1$$

e.g. $$\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \ln x\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \ln x\,dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\ln x\cdot x\Big|_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 x\cdot\frac{1}{x}dx\right)$$

问题 反常积分收敛的判定 (针对 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$)

<u>Cauchy 判别法</u> $\forall \varepsilon>0$, $\exists A$. s.t. $\forall A', A''>A$

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x)dx\right| < \varepsilon$$

<u>定义</u>. $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$. 如果 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ 收敛. 则称 $f(x)$ 绝对收敛

如果 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 发散. 但 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛. 则称 $f(x)$ 为条件收敛.

<u>命题</u> $f(x)$ 绝对收敛 $\Rightarrow$ $f(x)$ 收敛

Pf. $\forall\varepsilon>0$. $\exists A$. $\forall A', A''>A$. $\int_{A'}^{A''}|f(x)|dx < \varepsilon$

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x)dx\right| \leq \int_{A'}^{A''}|f(x)|dx$$

$\therefore f(x)$ 收敛 #

比较判别法 $0 \le f(x) \le g(x) \quad \forall x \in [a, +\infty)$

那么 1) $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛 $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛

2) $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散 $\Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x)dx$ 发散

e.g. $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)\sin x}{\sqrt{x^3+5}}dx \qquad \left|\frac{\cos(2x)\sin x}{\sqrt{x^3+5}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow p>1$ 绝对收敛

e.g.' $\int_3^{+\infty} \frac{\cos(2x)\sin x}{\sqrt{x^3-5}}dx \qquad \left|\frac{\cos(2x)\sin x}{\sqrt{x^3-5}}\right| \le \left|\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}x^3}}\right|$ 绝对收敛

比较判别法的极限版本 $0 \le f(x)$, $0 \le g(x)$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

那么 1) $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛, $0 \le l < +\infty \Rightarrow \int_a^{+\infty}$ 收敛

(假设 $\int_a^A f(x)dx$ 可积, $\int_a^A g(x)dx$ 可积) 2) $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散. $0 \le l \le +\infty \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散

常见比较函数 $\frac{1}{x^p} \quad e^{-ax}$

Abel—Dirichlet 判别法 处理 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$

积分第二中值定理 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积. $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调

$\exists \xi \in [a,b]$. s.t. $\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)dx + g(b)\int_{\xi}^b f(x)dx$

Pf. 额外假设. $f(x)$ 连续 $g'(x)$ 存在

定义 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ (f 的原函数)

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b g(x)\,dF(x) = g(x)F(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx$$

$$\overset{\exists \xi \in [a,b]}{=\!=} g(x)F(x)\Big|_a^b - F(\xi)\int_a^b g'(x)dx = g(b)\int_a^b f(x)dx - 0 - \int_a^{\xi} f(x)dx\,(g(b)-g(a))$$

$$= g(b)\int_{\xi}^b f(x)dx + g(a)\int_a^{\xi} f(x)dx$$

<u>Abel-Dirichlet</u>　　条件① $g(x)$单调　$\left|\int_{A'}^{A''} f(x)g(x)\,dx\right|$ (*)

$\exists \xi \in [A', A'']$ $= |g(A')|\left|\int_{A'}^{\xi} f(x)\,dx\right| + |g(A'')|\left|\int_{\xi}^{A''} f(x)\,dx\right|$

1. $g(x)$单调 $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$. $\exists M$. s.t. $\left|\int_{A'}^{A''} f(x)\,dx\right| < M$
$(\forall A', A'')$

2. $g(x)$单调有界　$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛

对于 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$. 若条件1)或2)满足则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ 收敛

Pf. 1) $\Rightarrow$ $\forall \varepsilon>0$. $\exists A$. s.t. $A'>A$ $|g(A')| \le \varepsilon$

(*) $\le \varepsilon M + \varepsilon M = 2M\varepsilon$ $\Rightarrow$ $\forall A', A'' > A$. $\left|\int_{A'}^{A''} f(x)g(x)\,dx\right| \le 2M\varepsilon$

$\Rightarrow$ 收敛

2) $\Rightarrow$ $\forall \varepsilon>0$. $\exists A$. s.t. $\forall A', A''>A$ $\left|\int_{A'}^{A''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$

(*) $\le M\cdot\varepsilon + M\cdot\varepsilon = 2M\varepsilon$ $\left|\int_{A'}^{A''} f(x)g(x)\,dx\right| \le 2M\varepsilon$

$\Rightarrow$ 收敛 #

e.g. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$　$g(x) = \frac{1}{x} \downarrow 0$　$f(x) = \sin x$

$\Rightarrow$ 收敛

$\left|\int_{A'}^{A''} (\sin x)\,dx\right| = |-\cos(A'') + \cos(A')| \le 2$

无界函数 A-D 判别法　$\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)g(x)\,dx$ a是奇点
$\varepsilon\to 0^+$

① $\int_a^b f(x)\,dx < +\infty$. $g(x)$单调有界 $(x\to a^+)$

② $\left|\int_{a+\varepsilon_1}^{a+\varepsilon_2} f(x)\,dx\right| \le M$. $g(x)$单调趋于0 $(x\to a^+)$

e.g. 讨论 $\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x^p \ln x}$ 的敛散性 $(p>0)$

Step 1. 0 奇点 $\left(x^p \ln x \xrightarrow{x\to 0} 0 \right)$

Step 2. ∘ $p<1$ $\left| \frac{1}{x^p \ln x} \right| \leqslant \frac{1}{x^p} \Rightarrow$ 绝对收敛 $\Rightarrow$ 收敛

∘ $p=1$. $\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \ln|\ln x| \Big|_\varepsilon^{\frac{1}{e}} \Rightarrow$ 发散

∘ $p>1$ $\exists\, \delta$ s.t. $p-\delta>1$ $\frac{-1}{x^p \ln x} \geqslant \frac{1}{x^{p-\delta}}$

$\Rightarrow$ 发散

e.g. $\int_0^1 \frac{1}{x^p} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$ $(p<2)$

换元 $\frac{1}{x} = t$. $x = \frac{1}{t}$ $dx = -\frac{1}{t^2} dt$

$$\parallel \int_{+\infty}^1 (t)^p \sin t \frac{-1}{t^2} dt = \int_1^{+\infty} t^{p-2} \sin t\, dt = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{2-p}} dt$$

$$\left.\begin{array}{l} f(t) = \sin t \quad \left| \int_{A'}^{A''} f(t) dt \right| \leqslant 2 \\ g(t) = \frac{1}{t^{2-p}} \downarrow \to 0 \end{array}\right\} \xRightarrow{A-D} \text{收敛}$$

e.g. $\int_a^{+\infty} f(x) dx < +\infty \not\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

e.g. $\int_a^{+\infty} f(x) dx < +\infty$ 且 $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 存在 $\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

e.g. $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 且 $f(x)$ 一致连续 $\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Pf. 一致连续 $\forall \varepsilon>0$, $\exists\, \delta$, s.t. $|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

Cauchy $\forall \varepsilon>0$, $\exists A$. s.t. $A', A'' \geqslant A \Rightarrow \left| \int_{A'}^{A''} f(x) dx \right| < \varepsilon$

如果 $\lim_{x\to+\infty} f(x) \neq 0$

$\exists\, \varepsilon_0$, $\forall x_n$, $x_n \to +\infty$ $|f(x_n)| > \varepsilon_0$

不妨设 $x_n > \varepsilon_0$（总可以通过选取子列找无穷多个 x_n 满足 $f(x_n) > \varepsilon_0$ 或 $f(x_n) < -\varepsilon_0$）

对于 $\frac{\varepsilon_0}{2}$. $\exists \delta$. $|x-y| < \delta$. $\Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon_0}{2}$

取 $\forall y \in [x_n - \delta.\ x_n + \delta]$

$|f(y) - f(x_n)| < \frac{\varepsilon_0}{2}$. 但 $f(x_n) > \varepsilon_0$

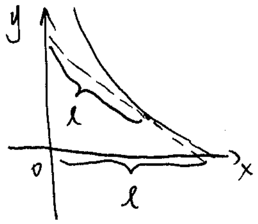
$\Rightarrow f(y) > \frac{\varepsilon_0}{2}$

找到了 $\int_{x_n-\delta = A'}^{x_n+\delta = A''} f(y)\,dy > \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot 2\delta = \varepsilon_0 \cdot \delta$

Cauchy $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ 发散. 矛盾 #

常微分方程

1. 抛物线



设轨迹 $y = f(x)$

在 $x = a$ 处. 切线方程 $y - f(a) = f'(a)(x-a)$

$\Rightarrow$ 与 y 轴交于 $(0,\ f(a) - f'(a)\cdot a)$

$\forall a$ $a^2 + f'(a)^2 a^2 = l^2$

$\Longrightarrow x^2 + (f'(x))^2 x^2 = l^2$

$F(y', y, x) = 0$ 一阶常微分方程

$y'^2 = \frac{l^2 - x^2}{x^2} \Rightarrow y' = -\sqrt{\frac{l^2-x^2}{x^2}}$

2. Malthus 人口模型

设 $p(t)$ 人口关于时间的函数 $\dot{p} = kp$

$\frac{dp}{dt} = k \cdot p \Rightarrow \frac{dp}{p} = k\,dt \Rightarrow \ln p = kt + C$

分离变量 $\frac{dy}{dx} = \varphi(x)\psi(y)$ $\frac{dy}{\psi(y)} = dx\,\varphi(x)$

$\int \frac{dy}{\psi(y)} = \int \varphi(x)\,dx$

3. Logistic 模型

$$\frac{dp(t)}{dt} = k\cdot p(t)\left(1-\frac{p(t)}{M}\right)$$ M 假设人口承载上限

$$\Rightarrow \frac{dp}{p(1-\frac{p}{M})} = k\,dt \Rightarrow p = \frac{M\cdot e^{kt+c}}{1+e^{kt+c}}$$

4. 换元法 $\frac{dy}{dx} = f(\frac{y}{x})$

令 $\frac{y}{x} = u$. $y = x\cdot u$ $y' = u + xu'$

$$\Rightarrow u + xu' = y' = f(u)$$

$$\Rightarrow \frac{du}{f(u)-u} = \frac{dx}{x}$$

积分因子法

一阶线性常微分方程 $a(x)y' + b(x)y + c(x) = 0$ (非齐次)

$a(x)y' + b(x)y = 0$ (齐次)

对于齐次 $a(x)y' + b(x)\cdot y = 0$

如果 y_1、y_2 为方程的解 $\Rightarrow$ $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ 也是方程的解

非齐次 ($a(x) \neq 0$, $\forall x$)

$$y' + p(x)y + q(x) = 0$$

两边同乘以 $e^{\int p(x)dx} = I(x)$. 积分因子

$$e^{\int p(x)dx} y' + p(x)y e^{\int p(x)dx} + q(x) = 0$$

$$\left(y e^{\int p(x)dx}\right)' = -q(x) e^{\int p(x)dx}$$

$$\Rightarrow y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int -q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right)$$