拓扑空间：Hausdorlf空间,正规空间

2019年1月14日 星期一　　上午10:56

Def. 若 $(X, \mathcal{O})$ 满足下面的 H 条件，则称它为 Hausdorlf 空间。

H　$\forall x, y \in X,\ x \neq y,\ \exists\ U_x \in \mathcal{U}(x),\ U_y \in \mathcal{U}(y)$,

s.t.　$U_x \cap U_y = \phi$

Def. (i) $(X, \mathcal{O})$ Hausdorlf，$Y \subset (X, \mathcal{O})$. Hausdorlf

(ii) $(X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)$. $\lambda \in \Lambda$. Hausdorlf．直积拓扑空间 Hausdorlf

(iii) $(Y, \mathcal{O}')$，　$f: X \to Y$．　诱导 $(X, \mathcal{O})$

$(X, \mathcal{O})$ Hausdorlf $\iff$ f 为双射

Def. 若 $(X, \mathcal{O})$ 满足下面的 N 条件，则称它为正规空间

N　A_1, A_2 两闭集．若 $A_1 \cap A_2 = \phi$．则 $\exists$ 开集 O_1, O_2

s.t.　$A_1 \subset O_1,\ A_2 \subset O_2,\ O_1 \cap O_2 = \phi$

THM. 距离空间是正规空间

Pf. A_1, A_2 不相交闭集．

$$\varepsilon_1(x) = \inf_{y \in A_2} \rho(x, y) > 0, \quad x \in A_1$$

$$\varepsilon_2(y) = \inf_{x \in A_1} \rho(x, y) > 0, \quad y \in A_2$$

$$O_1 = \bigcup_{x \in A_1} V\left(x, \varepsilon_1(x)/2\right) \quad O_2 = \bigcup_{y \in A_2} V\left(y, \varepsilon_2(y)/2\right)$$

Urysohn's Lemma　$(X, \mathcal{O})$，A_1, A_2 闭集．$A_1 \cap A_2 = \phi$

$\exists$ 连续映象 $f: X \to R$．满足

(i) $f(x) = 0 \quad (x \in A_1)$

(ii) $f(x) = 1 \quad (x \in A_2)$

(iii) $0 \le f(x) \le 1 \quad (x \in X)$

Tietze扩张定理　$(X, \mathcal{O})$ 正规空间，$A \subset X$．$\varphi_0: A \to R$ 实有界连续

$\exists\, f: X \to R$．满足 (i) $f|_A = \varphi_0$

(ii) $\sup\{|f(x)|; x \in X\} = \sup\{|\varphi(x)|; x \in A\}$

Urysohn的附以距离定理　满足第二可数公理的正规空间 $(X, \mathcal{O})$ 一定能够定义一个距离函数．使 (X, ρ) 所确定的拓扑空间与原有的拓扑空间 $(X, \mathcal{O})$ 一致