大家好，今天给大家介绍一下期权二叉树定价的方法及原理

因为使用利率二叉树定价和BMS模型定价的前提，都是标的资产的收益率变化满足一般维纳过程，因此二叉树定价法也可以看做一个简化版本的BMS定价模型。在二叉树定价的原理中会用到维纳过程、伊藤定理和BMS模型的相关内容作为模型推进的前提。因为上述内容较为复杂，所以不在视频中展开说明，具体的证明过程可以通过视频下方的网址，下载“二叉树定价”文档查看。

根据收入资本化原理，一个资产在当前的价值等于它产生的未来现金流的折现值。

假设现在有一间写字楼，在第一年可以获取1千万的租金，第二年可以获取2千万的租金，第二年后写字楼将会废弃不再产生收益。那么，这个写字楼在当前的价值就是未来两笔现金流折现到现在的总价值。

不幸的是，对于一个欧式看涨期权来说，这两项都是不确定的。

举个栗子

假设当前有一种股票，价格为20元，3个月后的价格将为22元或者18元，以该股票作为标的的，执行价格为21元的3个月欧式看涨期权F的空头，在未来既可能产生0元的现金流，也可能产生-1元的现金流。这导致该期权未来的现金流是不确定的，同时，在进行现金流折现的过程中，折现的收益率应该是期权的预期收益率，而期权的预期收益率也是不可知的，因为根据风险偏好的不同，不同的投资者对这份期权会产生不同的预期收益率。

虽然现金流和折现率的不确定性导致我们无法直接进行期权的折现定价，但是假如存在一种已知价格的资产S，可以和期权F组成一个无风险的证券组合，而这个组合未来的价值是确定的，那么因为证券组合无风险，所以我们可以根据无风险利率计算出组合的现值，又因为资产S的现值已知，这样我们就可以计算出期权F现值了。

有了上面这种迂回的定价思路，下一步我们要解决的是，首先资产S应该选择什么资产，其次资产S和期权F应该如何进行无风险证券组合。

为了构建无风险的资产组合，资产S需要满足无论市场如何波动变化，资产S的价格变化方向始终和期权F相反，这样无论市场如何变化，资产S和期权F的价格风险都可以相互抵消，实现组合的无风险。

在市场中，价格波动和期权F的价格波动呈现出相关性的资产很多，但是只有一个资产能够完美地符合无论市场如何波动，其价格的变化方向始终和期权F相反，那就是期权F的标的资产。所以我们选定期权F的标的资产作为资产S。

确定资产S后，如何将资产S和期权F构建成无风险组合呢。

依旧是上述的例子，股票S当前的价格为20元，以该股票作为标的的执行价格为21元的3个月欧式看涨期权F的价格为f，3个月后行权时，股票的价格可能上涨也可能下跌，我们假设已经知道三个月后，股票S价格要么上涨为22元，要么下降为18元。假设我们现在拥有一个期权F的空头，为了组合出无风险组合，则需要股股票多头。当前证券组合的价值是20∆-f，未来的价值是22∆-1或者18∆。因为该组合无风险，所以

22∆-1 = 18∆

即∆=0.25

因此，一个无风险组合的组成是：0.25股股票多头和一个看涨期权F的空头。该组合在股票价格上升时价格为22\*0.25-1=4.5，在股票价格下降时价格为18\*0.25=4.5。假设无风险利率为12%，则该组合的现值可以通过下式计算

又因为已知股票的现价为20\*0.25=5，所以期权价格f为5-4.367=0.633

至此我们完成了二叉树的期权定价。

接下来我们将上述过程一般化，假设现在有一个价格为的股票，基于该股票的某个期权当前价格为f。该股票在T时刻价格或者上升为，或者下降为，对应的期权价值分别为和。

同样的，我们通过一个期权空头和∆股股票多头构建一个无风险组合。该组合的现价为

未来的价格为∆或者

因为该组合无风险，所以∆

求得，该组合的现价通过T时刻价值折现表示为

(∆

和组合现价相等

所以

(∆=

推出期权的定价公式

=

其中

*P* =

这个公式也很直观，就是期权的现值等于未来价格的期望根据无风险利率折现得到的价格。

应用上述的公式进行期权的定价，我们需要解决三个问题，首先，T时刻股票上涨和下跌后的价格到底是多少，这决定了期权的价格和的值。其次两种价格发生的概率分别为多少，最后，期权价值为什么是用无风险利率折现的。

上述过程将T时刻股票可能的价格抽象为上涨价格和下跌价格，但是事实上，T时刻，标的资产的价格可能分布在0到正无穷的整个区间里，在这里我们引入一个假设，假设股票收益率的变化满足一般维纳过程，那么3个月时股票价格将满足对数正态分布，也就是在0到正无穷的价格区间里，不同的价格出现的概率满足这样一条曲线。这些所有可能的价格组成的曲线满足以下两个条件，1、价格的期望为,其中是该股票的预期收益率，这说明股票价格虽然有波动，但是总的来说股票未来的价格是符合预期收益率的

2、平方差为，这是基于一般维纳过程推出的，其中为股票的波动率，可以通过观察市场行情得到。

当我们将这样一个复杂的价格分布抽象成为只有上涨价格和下跌价格的简单的分布时，简化后的分布应该同样满足上面的两个条件。当和满足上述两个条件时，

*P* =

最后说明一下期权价格为什么是用无风险利率折现。其实可以看到，在刚才的推导中，股票价格上涨的概率是*P* = ，其中是该股票的预期收益率，当用这个概率进行期权定价时，期权定价公式=中的无风险收益率也应该换成股票预期收益率即公式变为=。

但是因为每个投资者的风险偏好不同，对同一个股票，不同的投资者会有不同的预期收益率，因而我们无法确定股票的预期收益率到底是多少。但是根据BSM公式的推导，我们会发现，期权的定价和股票的预期收益率无关，无论预期收益率为多少，期权的价值都是一样的，这是因为更高的预期收益率在折现过程中被更小的折现因子抵消了。

所以，我们假设了一个风险中性的世界，股票的预期收益率就等于无风险收益率，期权的价格可以用无风险收益率计算。这就是所谓的风险中性假设。风险中性世界中的期权价格和真实世界的期权价格是一致的，因为期权的价格和股票的预期收益率无关。