

考虑全局和局部帕累托前沿的多模态多目标优化算法

李文桦¹ 明梦君¹ 张涛^{1,2} 王锐^{1,2} 黄生俊^{1,2} 王凌³

摘 要 多模态多目标优化问题 (Multimodal multi-objective optimization problems, MMOPs) 是指具有多个全局或局部 Pareto 解集 (Pareto solution sets, PSs) 的多目标优化问题 (Multi-objective optimization problems, MOPs). 在这类问题中, Pareto 前沿 (Pareto front, PF) 上相距很近的目标向量, 可能对应于决策空间中相距较远的不同解. 在实际应用中全局或局部最优解的缺失可能导致决策者缺乏对问题的整体认识, 造成不必要的困难或经济损失. 大部分多模态多目标进化算法 (Multimodal multi-objective evolutionary algorithms, MMEAs) 仅关注获取尽可能多的全局最优解集, 而忽略了对局部最优解集的搜索. 为了找到局部最优解集并提高多模态优化算法的性能, 首先提出了一种局部收敛性指标 (I_{LC}), 并设计了一种基于该指标和改进种群拥挤度的环境选择策略. 基于此提出了一种用于获取全局和局部最优解集的多模态多目标优化算法. 经实验验证, 该算法在对比的代表性算法中性能较好.

关键词 多模态多目标优化, 局部收敛性, 进化算法, 种群多样性

引用格式 李文桦, 明梦君, 张涛, 王锐, 黄生俊, 王凌. 考虑全局和局部帕累托前沿的多模态多目标优化算法. 自动化学报, 2023, 49(1): 148–160

DOI 10.16383/j.aas.c220476

Multimodal Multi-objective Evolutionary Algorithm Considering Global and Local Pareto Fronts

LI Wen-Hua¹ MING Meng-Jun¹ ZHANG Tao^{1,2} WANG Rui^{1,2} HUANG Sheng-Jun^{1,2} WANG Ling³

Abstract Multimodal multi-objective optimization problems (MMOPs) refer to problems with multiple global or local Pareto solution sets (PSs). Different solutions far apart in the decision space may correspond to objective vectors in the Pareto front (PF) that are closed. The lack of global or local optimal solutions in practical applications may lead to the lack of overall understanding of the problem for decision-makers, resulting in unnecessary difficulties or economic losses. Most of the multimodal multi-objective evolutionary algorithms (MMEAs) mainly focus on obtaining the global optimal solution sets and pay little attention to the local optimal solutions. In order to find the local optimal solution sets and improve the performance of MMEAs, this paper proposes a local convergence indicator (I_{LC}) and designs an environment selection strategy. Then, a multimodal multi-objective optimization algorithm for obtaining global and local optimal solution sets is proposed. Experiments show that the performance of the proposed algorithm is better than that of the compared representative algorithms.

Key words Multimodal multi-objective optimization, local convergence, evolutionary algorithms, population diversity

Citation Li Wen-Hua, Ming Meng-Jun, Zhang Tao, Wang Rui, Huang Sheng-Jun, Wang Ling. Multimodal multi-objective evolutionary algorithm considering global and local Pareto fronts. *Acta Automatica Sinica*, 2023, 49(1): 148–160

收稿日期 2022-06-08 录用日期 2022-08-15

Manuscript received June 8, 2022; accepted August 15, 2022

国家优秀青年科学基金 (62122093), 国家自然科学基金 (72071205, 62273193) 资助

Supported by National Science Fund for Outstanding Young Scholars (62122093) and National Natural Science Foundation of China (72071205, 62273193)

本文责任编辑 杨涛

Recommended by Associate Editor YANG Tao

1. 国防科技大学系统工程学院 长沙 410073 2. 多能源系统智慧互联技术湖南省重点实验室 长沙 410073 3. 清华大学自动化系 北京 100084

1. College of Systems Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073 2. Hunan Key Laboratory of Multi-energy System Intelligent Interconnection Technology, Changsha 410073 3. Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084

多目标优化问题 (Multi-objective optimization problems, MOPs) 在现实世界中广泛存在^[1]. 对于该类优化问题, 往往需要考虑存在互斥关系的多个优化目标, 并且不存在一个解能够最优化所有优化目标. 因此该类问题的最优解通常为的一组互不支配的 Pareto 最优解集. 在工业应用和现实工程问题中, 决策者经常遇到多个不同的最优解其目标函数值相同的一类问题, 例如脑功能成像^[2]、柴油机设计问题^[3]、游戏地图生成问题^[4]等. 对于 Pareto 前沿上的某个目标向量, 在决策空间中可以找到多个对应的决策向量. 这类问题通常称为多模态多目标

优化问题^[5](Multimodal multi-objective optimization problems, MMOPs). 图 1 展示了一个两目标两决策变量的 MMOP, 从中可以看到, A 点和 B 点都对应于 Pareto 前沿上的 P 点. 对于决策者来说, 如果能够获得待优化问题的全部最优解, 一方面可以更深入地了解该问题, 对于刻画问题属性、提出改进方向、寻找最优解等具有重要作用; 另一方面, 一旦其中一个最优解因环境变化等因素导致不可用, 决策者可以方便快速地转变到另一个最优解. 对于工业生产来说, 多个最优解意味着有更多的生产方案可供选择. 在某些情况下, 决策者甚至会接受目标值稍劣的解^[6]. 例如某个解决方案要达到的加工条件较为苛刻, 或者对加工精度要求极高, 那么决策者将偏向于选择对条件要求不苛刻的解而接受其目标函数值上的劣势. 因此, 如何获得 MMOPs 的全部最优解成为亟待解决的问题之一.

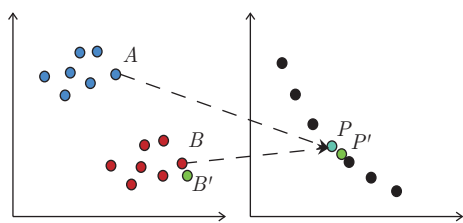


图 1 两目标两决策变量多模态问题示意图 (左图和右图分别表示问题的决策空间和目标空间)

Fig.1 Diagram of a two-objective two-decision-variable MMOP (the left figure and right figure are decision space and objective space respectively)

多目标进化算法 (Multi-objective evolutionary algorithms, MOEAs) 在求解非线性、决策类型多样、决策空间复杂的 MOPs 上的有效性已经得到了广泛的验证^[7-8]. 鉴于 MOEAs 在 MOPs 的标准测试问题和实际工程问题上的优异性能, 多种 MOEAs 被拓展以用于解决 MMOPs. 研究者将种群多样性保持机制与现有 MOEAs 结合, 以获得问题的全部最优解集, 这类算法统称为多模态多目标进化算法 (Multimodal multi-objective evolutionary algorithms, MMEAs). 但由于 MMOPs 比传统的 MOPs 具有更复杂的决策空间和映射关系, 目前所提出的 MMEAs 在求解 MMOPs 时仍存在许多困难^[9], 例如, 如何平衡决策空间的多样性和目标空间的收敛性, 如何保留目标向量相似而决策向量相差较大的个体.

前期围绕 MMOPs 的大部分工作是获得此类问题的多个全局最优解集, 不考虑问题的局部最优解集. 在火箭任务规划问题^[6]中, 对于相距较远的两个火箭发射窗口, 其空间飞行时间和有效载荷相

差非常小, 因此对于决策者来说, 获得这两个不同的解具有重要意义. 最新的研究也指出, 在现实问题中, 存在多个全局最优 Pareto 区域较为罕见. 更普遍的情况是, 多个全局最优与局部最优区域同时存在. 从另一个角度来说, 多个全局最优是存在局部最优的一种特殊情况, 因此, 同时获得问题的全局最优和局部最优区域更为重要^[10]. 遗憾的是, 针对此类问题的研究目前还比较少, 仍处于初期阶段. 为了进一步提升 MMEAs 在具有局部最优解集的 MMOPs 上的性能, 本文进行了积极的探索, 创新性体现在以下几个方面:

1) 提出了一种局部收敛性指标 (I_{LC}). 具体来说, 区别于全局收敛性指标, 局部收敛性指标只求个体与它附近的个体进行对比. 在进化过程中, 基于局部收敛性指标可以保留问题的局部最优解. 另外, 该指标可以方便地嵌入到已有的 MOEAs 中, 从而使算法具有搜索问题局部最优 Pareto 区域的能力.

2) 为了增强算法保持种群多样性的能力, 提出了一种考虑目标空间和决策空间多样性的指标, 并以此为依据, 设计了一种能够同时获得问题的全局和局部 Pareto 最优解的环境选择策略.

3) 结合局部收敛性指标和环境选择策略, 提出了一种多模态多目标优化算法用以获得 MMOPs 的全局和局部 Pareto 解集. 通过对比其他代表性算法在测试问题上的表现, 验证了所提算法的有效性.

本文内容安排如下: 第 1 节介绍多模态多目标优化的相关概念以及该类问题的求解难点; 第 2 节详细介绍本文所提的局部收敛性指标以及基于该指标的多模态多目标优化算法; 第 3 节通过实验对所提算法的有效性进行验证; 第 4 节对本文研究进行总结, 并提出未来可能的研究方向.

1 研究背景

1.1 多目标优化问题

现实世界中的许多工程应用问题, 往往需要考虑多个优化目标. 通常来说, 不同的目标是互相制约的, 只能通过权衡来获得令决策者满意的解. 不失一般性, MOPs^[11-12] 可以表示如下

$$\begin{aligned} \min F(\mathbf{x}) &= \{f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})\} \\ \text{s. t. } \mathbf{x} &= (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega \end{aligned} \quad (1)$$

其中, Ω 为问题的可行域, $f_m(\mathbf{x})$ 为决策向量 \mathbf{x} 的第 m 个目标函数值. 与具有单个全局最优值的单目标优化问题不同, 在多目标优化问题中, 存在多个非支配解, 称为 Pareto 最优解集. 解 \mathbf{x}_A 支配解 \mathbf{x}_B 当且仅当

$$\begin{cases} \forall i \in 1, 2, \dots, m, f_i(\mathbf{x}_A) \leq f_i(\mathbf{x}_B) \\ \exists j \in 1, 2, \dots, m, f_j(\mathbf{x}_A) < f_j(\mathbf{x}_B) \end{cases} \quad (2)$$

一般来说, MOEAs 会给出一组互不支配的解集, 称为 Pareto 最优解集 (Pareto solution set, PS), 并且不存在一个解能在所有目标函数上都优于其他解. 而 PS 在目标空间上的映射称为 Pareto 最优前沿 (Pareto front, PF).

1.2 多模态多目标优化问题

多模态多目标优化问题可以定义^[5, 9]如下:

定义 1. 如果一个多目标优化问题满足以下两个条件之一, 则称该问题为多模态多目标优化问题.

- 1) 问题至少有一个局部 Pareto 最优解集;
- 2) 问题至少有两个等效全局 Pareto 最优解集,

它们对应相同的 PF.

定义 2. 对于解集 S_L 中的任意解 \mathbf{x} , 如果不存在 \mathbf{x} 的邻居解 \mathbf{y} , 其中 $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \delta$, 使得 \mathbf{y} Pareto 支配 \mathbf{x} , 那么 S_L 称为局部最优解集.

定义 3. 对于解集 S_G 中的任意解 \mathbf{x} , 如果不存在解 \mathbf{y} , 使得 \mathbf{y} Pareto 支配 \mathbf{x} , 那么 S_G 称为全局最优解集.

从定义中可以看出, MMOPs 存在两种情况. 情况 1 可由图 1 简单表示, 即在决策空间中存在多个相距较远的 PS 对应于相同的 PF. 换句话说, 在目标空间 Pareto 前沿上的一个目标向量, 可以在决策空间上找到距离较远的多个最优解. 情况 2 可由图 2 表示, 其中 B 点对应目标空间中的 P_1 点, A 点对应局部 PF 上的 P_2 点. 在情况 1 的基础上, 问题还存在一个或多个局部 PF.

由上述定义可知, 对于 MMOPs, 只存在一个全局 PF, 而局部 PF 可能有多个, 且全局 PF 和局部 PF 对应至少一个 PS. 图 3 展示了 MMF12 问题

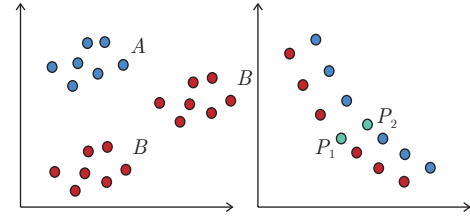


图 2 具有局部帕累托前沿的两目标多模态问题 (左图和右图分别表示问题的决策空间和目标空间)

Fig.2 A two-objective MMOP with local Pareto front (the left figure and right figure are decision space and objective space respectively)

和 MMF15 问题的 PF 和 PS. 从中可以直观地看到, MMF12 存在一个全局 PF 对应于 4 个等效全局 PS, 一个局部 PF 对应于 4 个等效局部 PS; 而 MMF15 则只有一个全局 PS 和一个局部 PS.

传统的 MOEAs 的目标是获得一组靠近 Pareto 最优前沿的均匀分布的解集. 这一目标包含两个重点: 1) 解集具有良好的收敛性, 其目标向量接近于 Pareto 前沿; 2) 解集在 Pareto 前沿上均匀分布. 为了达成这一目标, NSGA-II 算法先后使用了两个评价指标, 即快速非支配排序和目标空间的拥挤距离. 类似于 NSGA-II, 其他 MOEAs 总是以收敛性为第一准则, 辅以目标空间的均匀性选择策略, 从而获得性能较好的解集. 以图 1 为例, 在利用 MOEAs 求解 MMOPs 问题时, 假设算法已经通过搜索获得解 A (对应于目标空间的点 P), 在新的迭代搜索中, 算法得到解 B' (对应于目标空间的点 P'). 那么, 对于传统的 MOEAs 来说, P 与 P' 在目标空间将变得“拥挤”. 由于目标空间均匀性指标的存在, P' 将不会在迭代过程中得到保留, 因此算法难以同时获得解 A 和解 B. 即传统以收敛性为第一准则的算法难以求解多模态多目标优化问题. 另外, 对于存在多个局部 PF 的 MMOPs 来说, 由于 MOEAs 以收

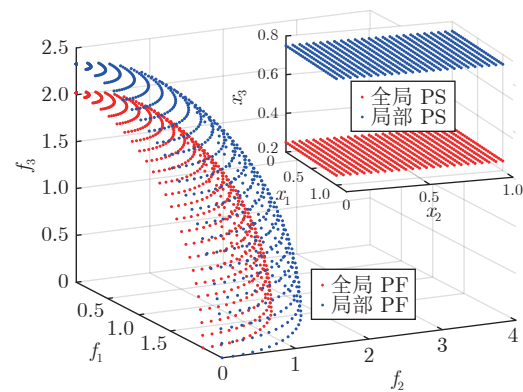
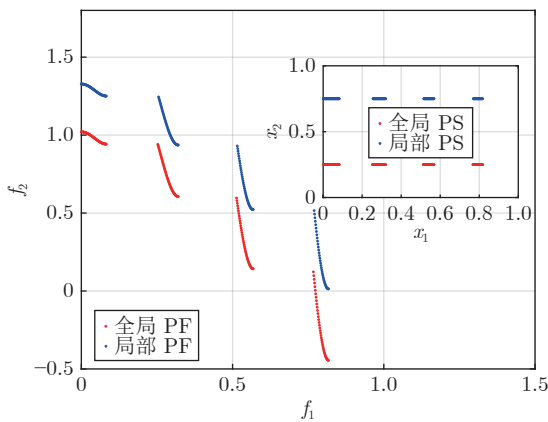


图 3 MMF12 (左) 和 MMF15 (右) 问题的 PF 和 PS 示意图

Fig.3 Diagram of PF and PS for MMF12 (left) and MMF15 (right)

敛性作为第一准则, 在没有其他种群多样性策略的辅助下, 算法将迅速收敛到问题的全局 PF, 因此不会保留该问题的局部 PF.

为了获得 MMOPs 的全部最优解集, 近年来学者们提出了许多 MMEAs. Omni-optimizer^[13] 可能是最具代表性的 MMEA, 它基于 NSGA-II^[14] 引入了保持决策空间解的多样性的策略, 包括基于拉丁超立方体采样的种群初始化方法、限制交配选择策略和替代拥挤距离. 其中, 替代拥挤距离旨在评估目标空间和决策空间中解的多样性. 受此启发, 基于 niching 的协方差矩阵自适应 (Covariance matrix adaptation, CMA) 方法^[15] 在目标和决策空间中引入了聚合距离度量, 可以将解集划分为多个 niches. 另外, 双 niches 进化算法 (Double-niched evolutionary algorithm, DNEA)^[16] 和基于决策空间的 niching NSGA-II (Decision space-based niching NSGA-II, DN-NSGAI)^[17] 是两种基于 Omni-optimizer 的增强算法, 经实验证明, 这两个算法在 MMF 测试问题上表现优异. 与传统采用模拟二元交叉算子 (Simulated binary crossover, SBX) 不同, MO_PSO_MM^[18] 和 MO_Ring_PSO_SCD^[19] 使用粒子群优化 (Particle swarm optimization, PSO) 算子^[20] 来生成新的解并在传统 MMOPs 上获得了良好的性能. 此外, 差分进化 (Differential evolution, DE) 算子^[21] 也被用来促进决策空间的多样性, 例如 MMODE^[22]、DE-RLFR^[23] 等. 然而, 前期的工作为了更直观地展示算法获得不同 PS 的能力, 测试问题的决策变量通常被设计为 2 ~ 3 个, 并且问题的搜索难度较小, 通常能够在 10 ~ 50 代内找到最优解.

最近, Liu 等^[24] 考虑到现有的测试问题中, 搜索不同 PS 时难度一样, 而在现实问题中, 获得不同区域的解集难度往往是不同的. 基于此, 作者提出了一种新的测试问题集 IDMP (Imbalanced distance minimization benchmark problems). 这个测试集的主要特点是, 搜索不同的区域需要的解的评价次数不同. 经过实验, 已有的算法在这类问题上表现较差, 往往只能找到一个 Pareto 解集. 因此, 该测试问题能够更加准确地衡量算法保持多样性和搜索不同 PS 的能力. 为了解决这类问题, Liu 等提出了一种基于距离的收敛性惩罚方法, 并选择每次只更新一个解的 steady 策略对种群进行更新, 形成了 CPDEA 算法. 受基于指标的进化算法 (Indicator-based evolutionary algorithm, IBEA) 启发, Li 等^[25] 提出了一种加权指标, 可以衡量个体的局部收敛性. Fan 等提出了一种自适应分区搜索 (Zoning search with adaptive resource allocating, ZS-ARA)^[26] 策

略, 将整个搜索空间分成几个子区域进行搜索, 从而提高算法保持多样性的能力. 经过验证, 这些算法在 IDMP 问题上表现良好.

总体来说, MMEAs 的有效性得到了广泛的实验验证, 但是目前的 MMEAs 更多地关注于找到 MMOPs 的全局最优解. 在现实问题中, 存在多个等效全局最优 Pareto 区域往往是比较少的情况, 更普遍的情况是, 全局最优与局部最优同时存在. 因此研究同时获得问题的全局最优和局部最优区域更为重要. 遗憾的是, 针对此类问题的研究目前还比较少. 其中, $P_{Q,\epsilon}$ -MOEA^[6] 是专门针对空间任务设计问题而设计的算法, 其使用 ϵ -dominance^[27] 进行后代选择; MMOPIO^[28] 基于 Pareto 支配关系设计, 能在一定程度上获得局部最优解; eMOEA/D-ADA^[29] 是基于分解方法的算法, 通过给不同参考向量分配多个个体, 也具有一定的局部最优搜索和保留能力; DIOP^[30] 则给出一种多样性的指标, 并使用基于集合的多目标优化算法框架对问题进行求解, 能够获得问题的局部最优解集; DNEA-L^[10] 则通过使用一种多前沿档案集更新方法来获取局部 PS. 但是, 由于没有系统地讨论这类问题, 因此在性能上仍有提升的空间.

Liang 等^[31] 提出了具有局部 PF 的 MMOPs 测试问题, 并举办了相关的竞赛. 在这之后, Lin 等^[32] 提出了使用基于 DBSCAN 的双重聚类的方法来维持种群的多样性, 能够获得问题的局部最优解集. 然而, 由于基于密度的聚类方法在对不同的解集区域进行聚类时存在误差, 因此容易出现性能不稳定的情况. Li 等^[33] 则提出了一种基于分层选择的多目标优化算法 (Hierarchy ranking method based evolutionary algorithm, HREA) 来获取问题的全局和局部 Pareto 解集. Tanabe 等^[9] 和岳彩通等^[5] 针对多模态多目标优化进行了较为详细的综述总结, 总的来说, 虽然获取 MMOPs 的全局和局部最优解具有重要意义, 但是相关的算法设计仍然处于起步阶段, 设计一种鲁棒性高、性能好的考虑局部 PS 的 MMEA 成为 MMOPs 研究领域的前沿问题.

2 基于局部收敛性指标的多模态多目标优化

2.1 局部收敛性指标

传统的 MOEAs 更多地关注解集的收敛性, 因此绝大多数算法都选择收敛性作为第一准则进行后代个体的选择^[14]. 基于传统 MOEAs 设计的多模态多目标优化算法考虑了决策空间的多样性, 因此能

够获得更多的等效 PS. 然而, 传统算法往往只关注获得全局 PS, 从而舍弃局部 PS 的搜索. 为了加强算法对局部 PS 的搜索能力, 参考 SPEA2 算法^[34]中所提的元适应度值, 本文提出一种局部收敛性指标, 对于解 \mathbf{x}_i , 其局部收敛性指标计算如下

$$I_{LC}^i = \sum_{j \in N_i} S_j D_{j,i} \quad (3)$$

其中, N_i 表示解 \mathbf{x}_i 的邻居解数量; $D_{j,i} \in \{0, 1\}$, 其中 $D_{j,i} = 1$ 表示解 \mathbf{x}_j Pareto 支配解 \mathbf{x}_i . 当 $I_{LC}^i = 0$ 时, 表明解 \mathbf{x}_i 不被它的任何邻居解支配, 即解 \mathbf{x}_i 局部 Pareto 最优. S_i 表示解 \mathbf{x}_i Pareto 支配其邻居解的次数, S_i 的值越大, 表明解 \mathbf{x}_i 的相对性能越好, 具体计算过程为

$$S_i = \sum_{j \in N_i} D_{i,j} \quad (4)$$

图 4 为本文所提的局部收敛性指标计算示意图. 与 SPEA2 算法所提的元适应度值需要跟种群中所有的个体进行比较不同, 在局部收敛性指标的计算中, 个体只跟自己的邻居解进行比较, 从而提高局部最优解的收敛能力. 具体来说, 对于决策空间中的解 A 来说, 其处于局部 PS (圆圈区域) 中. 在传统的 MOEAs 中, 由于全局 PS (C 点所在线条) 的收敛性更好, 因此解 A 和解 B 被解 C 支配, 在进化过程中不会被保留. 在局部收敛性指标的计算中, 解 A 在计算支配关系时, 只跟自身的邻居解 (在当前示意图中, 邻居只有解 B) 进行比较, 此时解 A 属于非支配解, 能够保留并顺利进入下一次的进化. 局部收敛性指标的计算中使用了邻居的概念, 而决策空间中邻居解的定义是偏主观的, 需要引入参数^[4]. 不失一般性, 在本文中, 称两个解 \mathbf{x}_i 和 \mathbf{x}_j 为邻居, 当且仅当它们的欧几里得距离小于 V , 计算如下

$$V = \frac{1}{2} \left(\prod_{d=1}^D (x_d^{\max} - x_d^{\min}) \right)^{\frac{1}{D}} \quad (5)$$

其中, D 表示决策变量的个数; x_d^{\max} 和 x_d^{\min} 分别代表第 d 个决策变量的最大值和最小值.

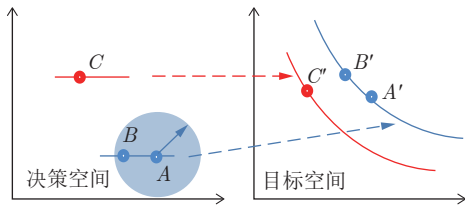


图 4 局部收敛性指标示意图

Fig. 4 Diagram of local convergence indicator

2.2 算法框架

前面具体介绍了局部收敛性指标的思想以及计算过程, 基于该指标, 本文提出了一种基于局部收敛性指标的多模态多目标优化算法 (MMEA based on local convergence indicator, I_{LC} -MMEA). I_{LC} -MMEA 的算法框架由算法 1 表示. 与大多数 MOEAs 一样, I_{LC} -MMEA 由以下步骤组成: 种群初始化, 交配选择, 后代生成, 环境选择. 本文引入了局部收敛性指标来搜索全局和局部的 PS. 并且在挑选父代个体时 (步骤 3), 使用了局部收敛性指标作为二元竞争的准则, 从而加快算法的收敛速度和提升局部探索能力. 具体来说, 首先从当前种群 Pop 里随机挑选两个解并比较它们的局部收敛性指标值, 较好的个体将被选择; 如果它们的局部收敛性指标值一致, 则拥挤距离小的个体被选择; 这一过程将被重复执行, 直到挑选出 N 个个体. 之后, 被挑选的父代个体将使用 SBX 和多项式变异 (Polynomial mutation, PM) 产生后代个体 (步骤 4). 另外, 针对局部 PS 的搜索问题, 本文设计了一种新的环境选择策略.

算法 1. I_{LC} -MMEA 算法框架

输入. 最大函数评价次数 N_{FE} , 种群大小 N .

输出. 最优解集 Pop .

- 1) 初始化种群 Pop ;
- 2) 计算种群的局部收敛性指标 I_{LC} 和拥挤距离 CD , 用于挑选父代个体;
- 3) 通过收敛性指标和拥挤距离, 使用二元竞争方式挑选父代 $Parent$;
- 4) 交叉变异产生后代 $nPop$;
- 5) 通过环境选择产生新的种群 Pop ;
- 6) 更新当前函数评价次数: $FE = FE + N$;
- 7) 如果 $FE < N_{FE}$, 则跳转到 2) 继续运行.

2.3 环境选择策略

在这一节中, 将详细讨论基于 I_{LC} 的环境选择策略, 其基本思路由算法 2 表示.

算法 2. 环境选择策略

输入. 种群 Pop , 后代种群 $nPop$, 种群大小 N .

输出. 新种群 Pop , 局部收敛性指标值 I_{LC} , 种群拥挤距离 CD .

- 1) 将当前种群 Pop 与后代 $nPop$ 合并形成新种群 $jointP$;
- 2) 利用式 (3) 计算合并后种群的局部收敛性 I_{LC} ;
- 3) 挑选出局部 Pareto 最优解 $localPop$, 即 $I_{LC} < 1$ 的个体;
- 4) 如果局部 Pareto 最优解 $localPop$ 个数大于等于 N ,

则跳转到 5); 否则, 根据局部收敛性 I_{LC} 对 $jointP$ 进行升序排序, 挑选前 N 个个体形成新种群 Pop , 之后跳转到 7);

5) 计算种群 $localPop$ 的拥挤度 CD ;

6) 根据 CD 对种群 $localPop$ 进行降序排列, 取前 N 个个体形成新种群 Pop ;

7) 计算新种群 Pop 的局部收敛性指标 I_{LC} 和种群拥挤度 CD .

首先, 将种群与新生成的后代个体进行合并, 并计算合并后种群的局部收敛性指标 I_{LC} (步骤 1)、步骤 2)). 根据式 (3), 当 $I_{LC}^i = 0$ 时, 表明解 \mathbf{x}_i 不被它的任何邻居解支配. 因此本文设计了一种二次选择策略, 具体为: 当局部非支配解的个数小于种群大小 N 时, 按照 I_{LC} 的值对种群进行排序, 随后选择前 N 个个体进入下一代 (步骤 4)); 否则, 算法将首先挑选出局部非支配解, 然后计算它们的拥挤距离, 随后删除拥挤距离较大的解, 从而保持新种群的大小为 N (步骤 5)、步骤 6)).

I_{LC} -MMEA 使用拥挤距离作为第二准则对种群中的个体进行挑选. 一般来说, 传统的 MOEAs 更多地关注目标空间中解集分布的均匀性, 而 MMEAs 则更多地关注决策空间的均匀性^[5, 9], 这一点可以通过图 5 对目标空间和决策空间的分布性进行说明. 图 5 中左边表示解在决策空间的分布性很好, 但是在目标空间的分布性较差, 对应于传统的 MMEAs; 图 5 中间表示解在决策空间的分布性很差, 但是在目标空间的分布性很好, 对应于传统的 MOEAs; 理想状态的解分布应该如图 5 中右边所示, 即解在决策空间和目标空间的分布性都很好. 为了实现这一目标, 本文提出了一种改进的种群拥挤距离计算方法, 具体如下

$$CD_i = \frac{N-1}{\sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{1}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|}} + \frac{N-1}{\sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{1}{\|f(\mathbf{x}_j) - f(\mathbf{x}_i)\|}} \quad (6)$$

其中, $\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|$ 表示 \mathbf{x}_i 和 \mathbf{x}_j 的欧氏距离, $f(\mathbf{x}_i)$ 则代表解 \mathbf{x}_i 对应的目标向量归一化之后的值. 值得注意的是, 在计算之前, 需要对 \mathbf{x}_i 和 \mathbf{x}_j 的值进行归一化.

新提出的拥挤距离充分考虑了解集在目标空间

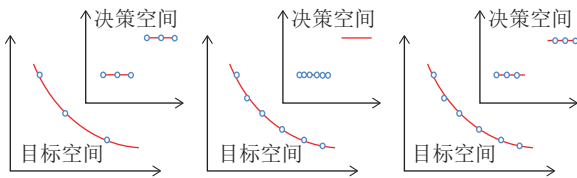


图 5 目标空间和决策空间的分布均匀性

Fig.5 Distribution uniformity in the objective space and the decision space

和决策空间的相对位置, 因此可以获得在两个空间中分布更加均匀的解集. 另外, 为了更好地平衡两个空间的差异, 算法对两个空间的向量使用了统一的归一化策略.

2.4 算法计算复杂度分析

本节将讨论 I_{LC} -MMEA 在最坏情况下的计算运行时间复杂度. 对于每一代, 主要执行三个步骤: 交配选择, 个体交叉变异, 环境选择. 假设种群大小、问题的目标数量和决策变量的数量分别为 N , M , D . 对于每一代, 交配选择需要 $O(MN^2)$ 的时间复杂度. 采用 SBX 来执行交叉操作, 需要的运行时间为 $O(DN)$. 另外, 对于环境选择, 算法需要计算 I_{LC} , 其时间复杂度为 $O(MN^2/2)$; 而二次选择的时间复杂度为 $O(D^2)$; 因此环境选择的总复杂度为 $\max\{O(MN^2/2), O(D^2)\}$. 那么, I_{LC} -MMEA 算法的最终时间复杂度为 $\max\{O(GMN^2/2), O(GD^2)\}$, 其中 G 表示迭代次数. 通常有 $N > D$, 因此, 可以确定 I_{LC} -MMEA 的运行时间复杂度为 $O(GMN^2)$. 作为比较, Two_Arch2、IBEA 和 NSGA-III 的运行时间复杂度分别为 $\max\{O(N \log_2^{m-2} N), O(MN^2)\}$, $O(N^2)$, $\max\{O(N \log_2^{m-2} N), O(MN^2)\}$ ^[35]. 从理论分析来看, I_{LC} -MMEA 的计算效率很高. 此外, 在后续实验部分, 算法的运行时间将与其他代表性 MMEAs 进行比较.

3 实验

3.1 实验设置

3.1.1 测试问题和对比较算法

为了测试 I_{LC} -MMEA 在求解传统 MMOPs 和具有局部 PS 的 MMOPs 时的性能, 本节将使用 IDMP 测试集^[24] 和 IEEE CEC 2019 MMOP 测试集^[31]. 相比于其他的 MMOPs 测试集, IDMP 测试集在搜索不同的 PS 时搜索难度不同, 在某种程度上来说, 此类问题更能显示出算法保持种群多样性的能力; 另外, IEEE CEC 2019 MMOP 测试集中的部分测试问题 (MMF10 ~ MMF13, MMF15) 具有局部 PS, 因此被选择用来测试所提算法获得局部 PS 的能力.

为了验证 I_{LC} -MMEA 在解决 MMOPs 中的有效性, 本文选择 Omni-optimizer^[13]、DN-NSGAI^[16]、MO_Ring_PSO_SCD^[19]、MMEA-WI^[25]、CPDEA^[24]、DNEA-L^[10] 和 MMOEA/DC^[32] 作为对比算法. 具体来说, Omni-optimizer、DN-NSGAI 和 MO_Ring_PSO_SCD 都是求解 MMOPs 的代

表性算法, 其性能已经得到了广泛验证; MMEA-WI 和 CPDEA 是专门为解决不平衡 MMOPs 提出的算法; DNEA-L 和 MMOEA/DC 则是最新关注于获得全局和局部 PS 的算法.

为了保证对比的公平性, 对于所有算法, 设置种群大小 $N = 100D$, 函数评估的最大次数设置为 $N_{FE} = 5000D$, 其中 D 是决策变量的数量. 此外, 除了 MO_Ring_PSO_SCD 采用 PSO 算子, 其他算法均使用 SBX 和 PM 算子用于生成后代, 其中交叉概率和变异概率分别为 1 和 $1/D$, $\eta_c = \eta_m = 20$. 对比算法中的具体参数均按照原论文设置. 所有实验均基于 PlatEMO v1.6^[36], 计算机配置为 Intel i9-9900X @ 3.50 GHz, 64 GB RAM. 为方便多模态多目标相关领域研究人员的后续研究工作, 本文开放了 I_{LC} -MMEA 的源代码, 相关代码可从以下网站获取: <https://gitee.com/wenhua-li/ilcmmea>.

3.1.2 性能评价指标

针对 MOEAs 性能的评价指标包括超体积 (Hypervolume, HV)^[37]、世代距离 (Generation distance, GD)^[38] 和反世代距离 (Inverted generation distance, IGD)^[38] 等. 它们中的大多数是用来衡量解集在目标空间中接近真实 Pareto 前沿的程度和解集分布的均匀程度. 由于 MMEAs 旨在获得所有 PS, 因此还应衡量解集在决策空间中的性能. 因此, 在本文中采用 IGD_X^[39] 作为评价指标, 以评价获得的解集与真实 PF 和真实 PS 的近似程度. 对于一个解集 \mathbf{X} , IGD_X 的计算过程可以表示如下

$$IGDX(\mathbf{X}) = \frac{1}{|\mathbf{X}^*|} \sum_{\mathbf{y} \in \mathbf{X}^*} \min_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \{ED(\mathbf{x}, \mathbf{y})\} \quad (7)$$

其中, $ED(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 表示解 \mathbf{x} 和解 \mathbf{y} 的欧氏距离, \mathbf{X}^* 代表真实 Pareto 集合中的均匀采样, $|\mathbf{X}^*|$ 表示集合 \mathbf{X}^* 中解的总个数. IGD_X 的值越小, 表示解集的收敛性和均匀性越好, 当 IGD_X 值为 0 时, 表示获得的解集能完全覆盖参考解集.

3.2 传统 MMEAs 性能对比

为了测试 I_{LC} -MMEA 在求解传统 MMOPs 时的性能, 本文使用了 IDMP 测试集. 具体来说, 相比较前期提出的 MMOPs 测试问题, 获得 IDMP 测试问题的全部 Pareto 最优解集更加困难, 因此更能体现出 MMEAs 保持种群多样性和获取不同 PS 的能力. 表 1 列出了所有算法 31 次独立运行的 IGD_X 的平均值和方差. 另外, 本文使用 Wilcoxon 秩和检验来比较 I_{LC} -MMEA 与每个对比算法的性能差异, 其中显著性水平 p 设置为 0.05. 在表 1 的最

后一列中, 符号 “+” 和 “-” 表示当前算法与 I_{LC} -MMEA 相比, 能获得更好和更差的性能的测试问题数量. 此外, 符号 “=” 表示该对比算法与 I_{LC} -MMEA 之间没有显著差异的测试问题数量.

从表 1 中可以观察到, I_{LC} -MMEA 在所选测试问题上表现出比其他代表性算法更好的性能. 具体来说, 12 个测试问题中, I_{LC} -MMEA 在 8 个问题上表现出了最佳性能. 此外, MMOEA/DC、MMEA-WI 和 CPDEA 分别在 2 个、1 个和 1 个测试问题上获得了最好的 IGD_X 值. 从表 1 中可以看出, I_{LC} -MMEA、MMOE/DC、MMEA-WI 和 CPDEA 相较于其他对比算法性能更强, 其在 IGD_X 指标值上有跨越量级的领先. 这是因为, CPDEA 和 MMEA-WI 是为了解决 IDMP 问题提出的, 考虑了搜索不同 PS 时的不平衡性问题; I_{LC} -MMEA 和 MMOEA/DC 则是考虑到了决策空间中存在局部 PS 的情况, 因此在求解 PS 不平衡问题时依然能够获得问题的全部 PS. 但是, 随着目标个数的提升, 只有 I_{LC} -MMEA 和 MMOEA/DC 能够获得较好的结果, 其他算法均不能够获得问题的全部 PS. 虽然 DN-NSGAI 和 Omni-optimizer 是为多模态多目标优化设计的, 但似乎它们在所选基准问题上表现不佳. IDMP 测试问题在搜索不同 PS 时存在不平衡, 因此一般的 MMEAs 很难获得所有 PS. DN-NSGAI 和 Omni-optimizer 是 MMOPs 早期研究中的两个代表性算法, 其思想启发了众多针对 MMOPs 的算法和相关工作, 但是在 IDMP 测试问题上表现较差.

图 6 展示了所有算法在 IDMPM3T4 问题上获得的 PS 和 PF (挑选出每个算法最接近平均 IGD_X 值的运行结果进行展示). 从图中可以看出, I_{LC} -MMEA 和 MMOEA/DC 能够获得所有的 PS, 而 DNEA-L、CPDEA、MMEA-WI 和 MO_Ring_PSO_SCD 只能获得其中的部分 PS; DN-NSGAI 和 Omni-optimizer 只能获得其中一个 PS. 另外, 图 7 展示了所有算法在具有 4 个决策变量的 IDMPM4T3 问题上获得的 PS. 可以看到, 仅有考虑了局部 PS 的 DNEA-L、 I_{LC} -MMEA 和 MMOEA/DC 能够获得全部的 PS, 并且 I_{LC} -MMEA 和 MMOEA/DC 获得的解集分布均匀性明显更好. 此外, 可以明显地看到, I_{LC} -MMEA 和 MMOEA/DC 最终获得的解集中包含了非支配解. 这是因为这两个算法都考虑了获得问题的局部 PS, 因此还有少量的个体继续在决策空间进行探索.

总体来说, 在 IDMP 测试问题上, I_{LC} -MMEA、MMOE/DC、MMEA-WI 和 CPDEA 表现良好,

表 1 不同算法在 IDMP 测试问题上 31 次独立运行的 IGD_X 平均值和方差Table 1 Mean and variance of 31 independent runs of IGD_X for different algorithms on IDMP test problems

测试问题	Omni-optimizer	DN-NSGAI	MO_Ring_PSO_SCD	DNEA-L	CPDEA	MMOE/DC	MMEA-WI	I_{LC} -MMEA
IDMPM2T1	3.88×10^{-1}	2.84×10^{-1}	5.90×10^{-2}	1.27×10^{-3}	1.03×10^{-3}	8.76×10^{-4}	9.32×10^{-4}	6.55×10^{-4}
	3.31×10^{-1}	3.24×10^{-1}	1.67×10^{-1}	2.39×10^{-3}	5.41×10^{-4}	1.15×10^{-4}	7.13×10^{-5}	2.30×10^{-9}
IDMPM2T2	2.99×10^{-1}	2.99×10^{-1}	5.58×10^{-3}	1.75×10^{-3}	9.55×10^{-4}	1.03×10^{-3}	1.12×10^{-3}	8.65×10^{-4}
	3.33×10^{-1}	3.34×10^{-1}	2.91×10^{-3}	1.39×10^{-3}	1.33×10^{-4}	1.14×10^{-4}	8.61×10^{-5}	4.71×10^{-9}
IDMPM2T3	1.19×10^{-1}	1.19×10^{-1}	3.35×10^{-3}	2.65×10^{-3}	3.70×10^{-3}	1.85×10^{-3}	1.99×10^{-3}	1.42×10^{-3}
	2.57×10^{-1}	2.55×10^{-1}	4.22×10^{-4}	1.62×10^{-3}	1.47×10^{-3}	1.92×10^{-4}	2.49×10^{-4}	8.51×10^{-9}
IDMPM2T4	5.44×10^{-1}	6.10×10^{-1}	8.67×10^{-2}	1.30×10^{-2}	2.32×10^{-2}	9.06×10^{-2}	4.58×10^{-2}	6.12×10^{-4}
	2.63×10^{-1}	1.94×10^{-1}	2.00×10^{-1}	2.16×10^{-2}	1.23×10^{-1}	2.32×10^{-1}	1.71×10^{-1}	7.82×10^{-10}
IDMPM3T1	3.50×10^{-1}	3.49×10^{-1}	1.19×10^{-1}	3.26×10^{-2}	1.53×10^{-2}	8.41×10^{-3}	7.48×10^{-3}	8.67×10^{-3}
	2.30×10^{-1}	2.42×10^{-1}	1.47×10^{-1}	7.42×10^{-2}	4.42×10^{-2}	3.97×10^{-4}	1.78×10^{-4}	1.68×10^{-8}
IDMPM3T2	6.00×10^{-1}	6.14×10^{-1}	1.45×10^{-1}	2.78×10^{-2}	7.23×10^{-3}	8.17×10^{-3}	7.69×10^{-3}	8.73×10^{-3}
	2.29×10^{-1}	2.90×10^{-1}	1.25×10^{-1}	6.21×10^{-2}	2.56×10^{-4}	2.71×10^{-4}	2.01×10^{-4}	1.51×10^{-8}
IDMPM3T3	3.71×10^{-1}	4.75×10^{-1}	2.65×10^{-2}	3.65×10^{-2}	2.65×10^{-2}	1.01×10^{-2}	2.55×10^{-2}	9.66×10^{-3}
	2.03×10^{-1}	2.32×10^{-1}	4.34×10^{-2}	7.41×10^{-2}	6.09×10^{-2}	6.01×10^{-4}	6.29×10^{-2}	5.89×10^{-8}
IDMPM3T4	8.24×10^{-1}	8.13×10^{-1}	2.64×10^{-1}	8.16×10^{-2}	5.71×10^{-2}	1.84×10^{-2}	1.54×10^{-1}	8.43×10^{-3}
	2.16×10^{-1}	2.27×10^{-1}	1.82×10^{-1}	1.08×10^{-1}	9.87×10^{-2}	3.13×10^{-2}	1.52×10^{-1}	1.91×10^{-8}
IDMPM4T1	7.94×10^{-1}	6.36×10^{-1}	9.36×10^{-1}	1.07×10^{-1}	7.03×10^{-1}	4.44×10^{-2}	2.68×10^{-2}	9.15×10^{-3}
	3.07×10^{-1}	3.33×10^{-1}	2.75×10^{-1}	1.50×10^{-1}	2.89×10^{-1}	7.50×10^{-2}	6.77×10^{-2}	2.40×10^{-6}
IDMPM4T2	9.72×10^{-1}	9.24×10^{-1}	5.59×10^{-1}	2.89×10^{-1}	5.47×10^{-1}	2.62×10^{-2}	3.62×10^{-1}	4.45×10^{-2}
	2.28×10^{-1}	2.37×10^{-1}	2.64×10^{-1}	2.51×10^{-1}	2.36×10^{-1}	5.25×10^{-2}	2.81×10^{-1}	2.79×10^{-3}
IDMPM4T3	7.44×10^{-1}	7.25×10^{-1}	8.04×10^{-2}	1.32×10^{-1}	4.07×10^{-1}	1.66×10^{-2}	4.16×10^{-1}	1.82×10^{-2}
	3.18×10^{-1}	3.05×10^{-1}	8.42×10^{-2}	1.59×10^{-1}	2.56×10^{-1}	1.33×10^{-3}	2.92×10^{-1}	9.53×10^{-4}
IDMPM4T4	1.08	1.11	6.86×10^{-1}	1.70×10^{-1}	7.94×10^{-1}	3.87×10^{-2}	7.28×10^{-1}	2.86×10^{-2}
	1.68×10^{-1}	1.53×10^{-1}	3.44×10^{-1}	2.38×10^{-1}	3.19×10^{-1}	6.08×10^{-2}	3.28×10^{-1}	3.95×10^{-3}
+/-/=	0/10/2	0/12/0	0/12/0	0/11/1	1/10/1	1/7/4	1/8/3	

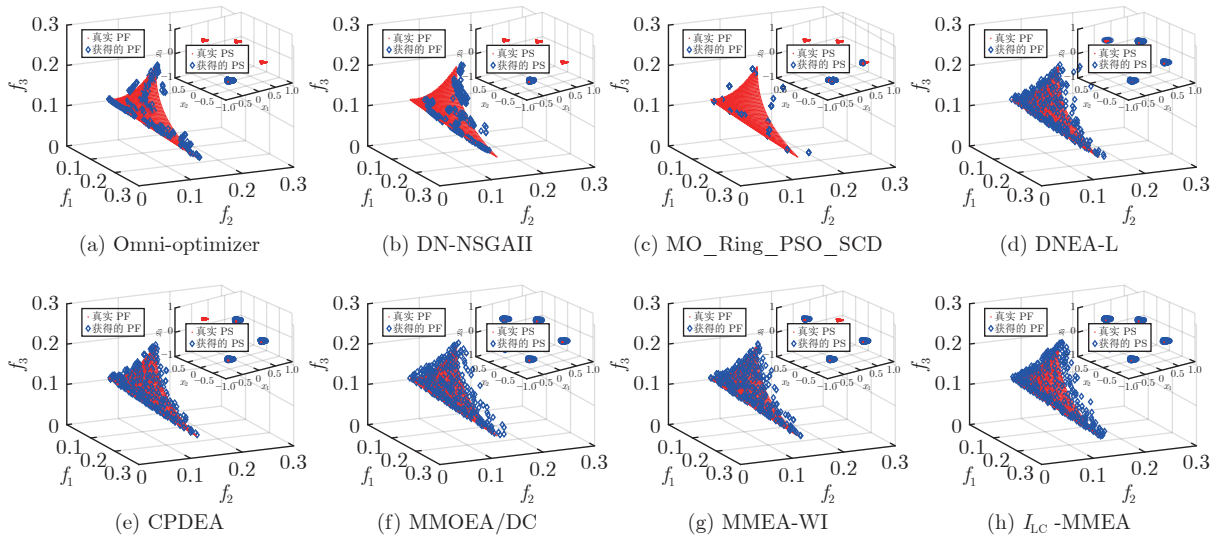


图 6 不同算法在 IDMPM3T4 问题上获得的 PS 和 PF

Fig.6 PS and PF obtained by different algorithms on IDMPM3T4 problem

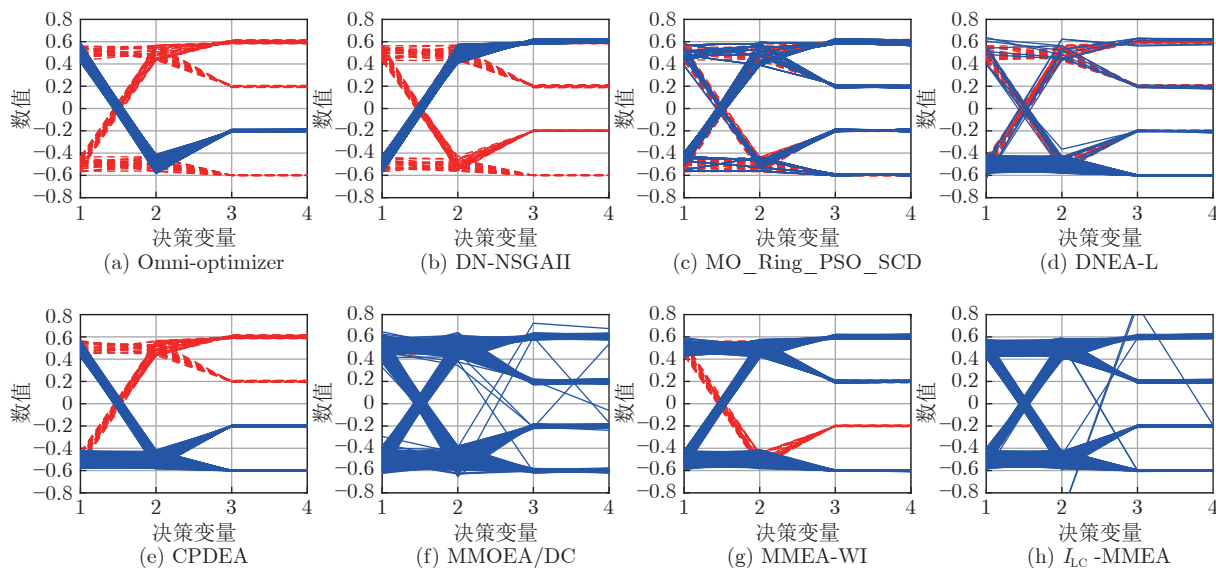


图7 不同算法在IDMPM4T3问题上获得的PS(蓝色实线)和真实PS(红色虚线)

Fig.7 True PS (red dotted lines) and obtained PS (blue solid lines) by different algorithms on IDMPM4T3 problem

而随着目标个数和决策数量的增加, I_{LC} -MMEA 和 MMOEA/DC 的性能优势更加凸显, 且 I_{LC} -MMEA 性能更佳.

3.3 考虑局部最优算法性能对比

本节展示了 I_{LC} -MMEA 和对比算法在具有局部 PS 的 MMOPs 上的性能. 具体来说, 实验挑选了 IEEE CEC 2019 MMOP 中的部分测试问题, 包括 MMF10、MMF11、MMF12、MMF13 和 MMF15. 为了降低随机性带来的影响, 所有实验均独立执行 31 次. 与上一节相同, 使用 Wilcoxon 秩和检验来表示不同算法相比于 I_{LC} -MMEA 的性能好坏.

表 2 列出了所有对比算法在测试问题上获得的 IGDX 的平均值和方差. 从表中可以看出, 在全部 5 个测试问题中, I_{LC} -MMEA 在 4 个测试问题上表现出最好的性能, MMOEA/DC 在 1 个测试问题上表现最好. DNEA-L、MMOE/DC 和 I_{LC} -MMEA 相比于其他算法表现更加出色 (IGDX 值更小). 这是因为, 这三个算法均采取了一定的策略对局部 PS 进行搜索并保留. 对于本节选择的测试问题, 这三个算法都能找到并保留局部 PS, 因此其性能表现优异.

图 8 直观地展示了所有算法在具有局部 PS 问题上的表现. 可以看到, MMOEA/DC 和 I_{LC} -MMEA 能够找到问题的全局和局部 PS. DNEA-L 在 MMF11 问题上能够找到全局和局部 PS, 但是在 MMF12 上只能获得部分 PS, 且解集分布的均匀性较差. 对于早期提出的 MMEAs 而言, 由于算法没有考虑局部 PS 的搜索, 因此无法对局部 PS 进行保留. I_{LC} -

MMEA 获得的 PF 分布性更加均匀. 这是因为, I_{LC} -MMEA 引入了全新的种群拥挤度计算方式, 能够更好地平衡目标空间和决策空间分布的均匀性. 在 MMF12 问题上, MMOEA/DC 获得的 PF 相比于 I_{LC} -MMEA 更加均匀, 而 PS 情况则相反. 由于篇幅限制, 算法在其他问题上的 PF 和 PS 没有全部画出, 感兴趣的读者可以在论文代码开源地址获得所有数据结果. 总体来说, I_{LC} -MMEA 和 MMOEA/DC 均能够获取问题的全局和局部 PS, DNEA-L 能够获取问题的部分局部 PS, 且 I_{LC} -MMEA 获得的解集分布性更好.

3.4 算法运行时间对比

前文在理论上给出了 I_{LC} -MMEA 算法的计算时间复杂度, 为了更加直观地展示不同 MMEAs 算法的计算耗时, 本节将使用实验的方法对时间复杂度进行分析. 具体来说, 将使用 Multi-polygon 作为基准测试问题. 该测试问题可以方便地扩展到高维, 因此, 设置目标函数个数 M 分别为 3、4、8、10, $D = 4$, 并统一使用 $N = 200$, $N_{FE} = 20000$ 进行 31 次独立实验, 取结果的平均值进行比较.

图 9 展示了不同算法在目标个数不同的测试问题上的计算时间. 可以看到, MMOEA/DC、MMEA-WI 和 I_{LC} -MMEA 的计算复杂度随着目标个数的提升并没有明显的增大. 对于 DN-NSGAI 和 Omni-optimizer 来说, 求解目标个数为 4 时的优化问题所用时间甚至小于目标个数为 3 时的求解时间. 进一步分析可以知道, 这两个算法的计算复杂度与当前种群中非支配解占比息息相关. 当目标个

表 2 不同算法在具有局部 PS 测试问题上 31 次独立运行的 IGD_X 平均值和方差Table 2 Mean and variance of 31 independent runs of IGD_X for different algorithms on MMOPs with local PS

测试问题	Omni-optimizer	DN-NSGAI	MO_Ring_PSO_SCD	DNEA-L	CPDEA	MMOEA/DC	MMEA-WI	I_{LC} -MMEA
MMF10	1.76×10^{-1}	1.48×10^{-1}	1.69×10^{-1}	1.76×10^{-2}	2.01×10^{-1}	1.55×10^{-2}	1.99×10^{-1}	1.40×10^{-2}
	3.11×10^{-2}	2.97×10^{-2}	8.40×10^{-3}	2.03×10^{-2}	4.68×10^{-5}	3.18×10^{-2}	8.00×10^{-3}	2.64×10^{-3}
MMF11	2.50×10^{-1}	2.50×10^{-1}	2.10×10^{-1}	9.08×10^{-3}	2.49×10^{-1}	7.51×10^{-3}	2.48×10^{-1}	7.26×10^{-3}
	3.63×10^{-4}	4.16×10^{-4}	2.49×10^{-2}	9.42×10^{-4}	3.24×10^{-4}	3.33×10^{-4}	2.17×10^{-3}	1.05×10^{-7}
MMF12	2.45×10^{-1}	2.47×10^{-1}	1.90×10^{-1}	3.01×10^{-2}	2.45×10^{-1}	3.21×10^{-3}	2.44×10^{-1}	2.88×10^{-3}
	9.24×10^{-3}	5.35×10^{-4}	4.29×10^{-2}	3.22×10^{-2}	2.11×10^{-4}	2.01×10^{-4}	3.62×10^{-4}	2.83×10^{-8}
MMF13	2.86×10^{-1}	2.86×10^{-1}	2.35×10^{-1}	2.59×10^{-1}	2.53×10^{-1}	8.85×10^{-2}	2.52×10^{-1}	8.08×10^{-2}
	9.28×10^{-3}	9.59×10^{-3}	1.57×10^{-2}	2.31×10^{-3}	7.32×10^{-4}	1.59×10^{-2}	7.26×10^{-4}	1.94×10^{-5}
MMF15	2.44×10^{-1}	2.26×10^{-1}	1.51×10^{-1}	6.69×10^{-2}	2.31×10^{-1}	5.36×10^{-2}	2.58×10^{-1}	5.54×10^{-2}
	2.05×10^{-2}	2.38×10^{-2}	1.04×10^{-2}	4.36×10^{-3}	1.78×10^{-2}	1.56×10^{-3}	9.91×10^{-4}	1.00×10^{-6}
+/-/=	0/5/0	0/5/0	0/5/0	0/4/1	0/5/0	0/3/2	0/5/0	

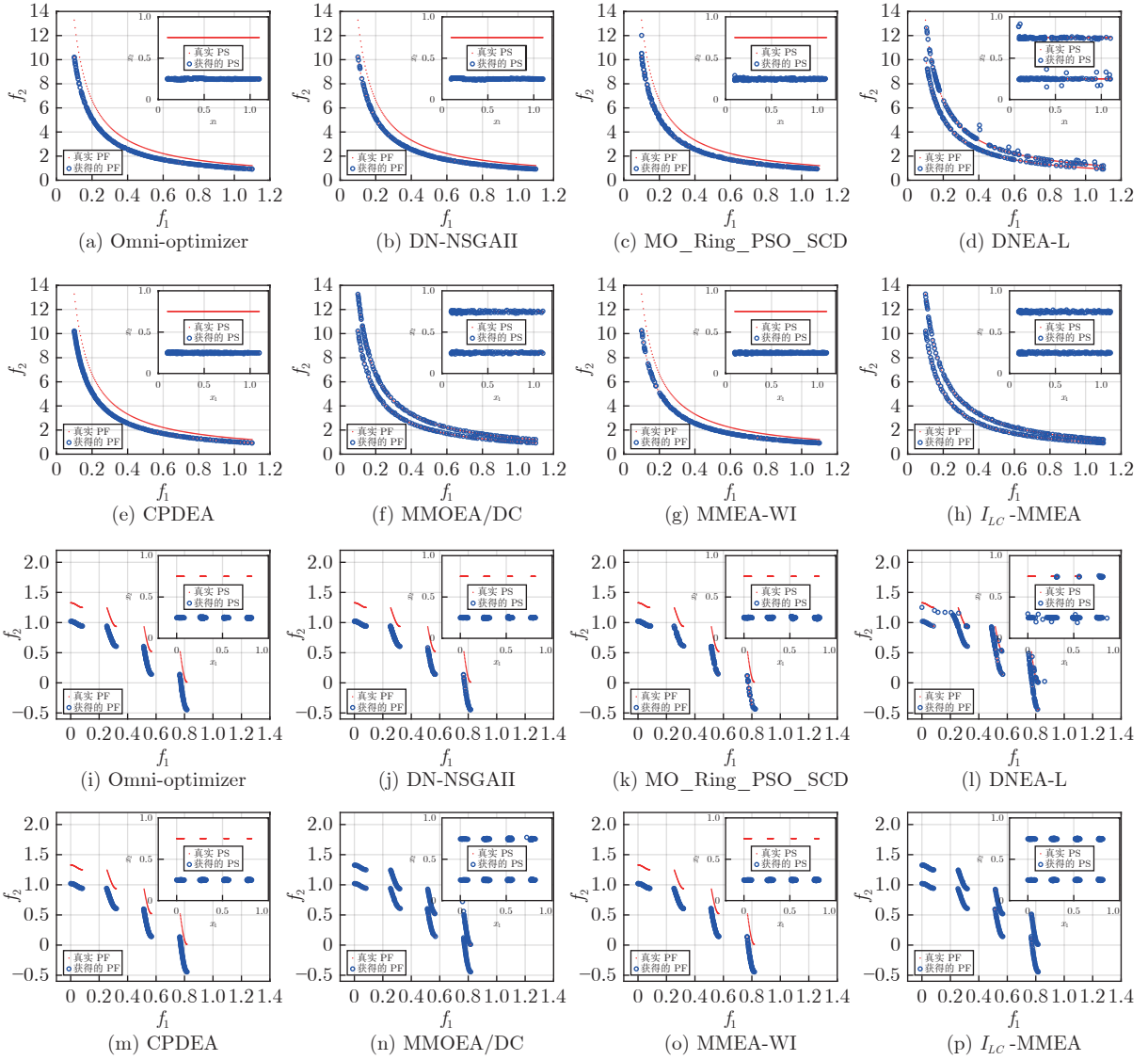


图 8 不同算法在 MMF11 问题 (前两行) 和 MMF12 问题 (后两行) 上获得的 PS 和 PF

Fig.8 PS and PF obtained by different algorithms on MMF11 (first two rows) and MMF12 (last two rows) problems

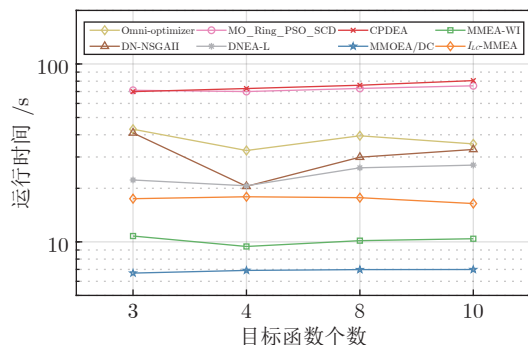


图9 不同算法在不同目标个数测试问题上的计算时间

Fig.9 Computational time of different algorithms on test problems with different number of objectives

数增大时, 算法运行前期种群中非支配解的占比较低, 这导致了计算时间的下降. 另外, CPDEA、DNEA-L 和 MO_Ring_PSO_SCD 的计算时间随着目标个数的增大略有微小增加. 总体来说, ILC-MMEA 的计算时间在所有对比算法中处于中间位置, 具备较好的计算效率.

4 结论

获得 MMOPs 的全部 PS 对于决策者具有重要意义. 然而, 由于目标空间多样性与决策空间多样性存在一定的冲突, 因此, 获得全部 PS 仍然是进化计算领域面临的一个巨大挑战. 此外, 搜索并保留决策者能接受的局部最优 PS 可以认为是保留全部全局 PS 的更普遍情况. 这是因为, 拥有多个全局最优 PS 的问题是具有局部最优 PS 的一个特例. 研究具备搜索局部 PS 能力的算法可以更好地解决 MMOPs. 在本文中, 提出了局部收敛性指标和基于双空间的拥挤距离, 并通过实验验证了所提方法的有效性, 说明关注问题的局部 PS 可以更好地解决 MMOPs.

目前, 针对 MMOPs 的研究大多聚焦在连续型优化上^[5, 9], 且问题的决策空间较小 (决策变量个数较少), 已有算法重点考虑了解集的分布性而没有重视算法的搜索能力. 然而实际问题的决策变量可能是多类型或大规模的. 近期, CEC 会议举办了针对路径规划的多模态多目标竞赛^[40-41], 公开了一系列测试集, 研究了多模态多目标优化算法在离散型问题上的性能, 取得了较多的关注. 另一方面, 针对多模态多目标优化算法的实际应用还比较少. 这是因为, 决策者难以确定待优化问题是否属于多模态优化问题; 并且, 已有的 MMEAs 在实际问题上的效果还有待检验. 因此决策者更倾向于选择传统的 MOEAs 对问题进行求解, 这对理解问题的决策空间属性造成了一定的障碍. 因此, 如何快速表征某

个问题是否为多模态多目标优化问题是推广此类算法的关键. 另外, 未来的研究方向将聚焦于提升多模态多目标优化算法在大规模决策变量问题上的性能以及推动多模态多目标优化算法的实际应用.

References

- Gong Mao-Guo, Jiao Li-Cheng, Yang Dong-Dong, Ma Wen-Ping. Research on evolutionary multi-objective optimization algorithms. *Journal of Software*, 2009, **20**(2): 271-289 (公茂果, 焦李成, 杨咚咚, 马文萍. 进化多目标优化算法研究. 软件学报, 2009, **20**(2): 271-289)
- Ji Jun-Zhong, Zou Ai-Xiao, Liu Jin-Duo. An overview of identification methods on human brain effective connectivity networks based on functional magnetic resonance imaging. *Acta Automatica Sinica*, 2021, **47**(2): 278-296 (冀俊忠, 邹爱笑, 刘金铎. 基于功能磁共振成像的人脑效应连接网络识别方法综述. 自动化学报, 2021, **47**(2): 278-296)
- Ouyang T C, Su Z X, Gao B X, Pan M Z, Chen N, Huang H Z. Design and modeling of marine diesel engine multistage waste heat recovery system integrated with flue-gas desulfurization. *Energy Conversion and Management*, 2019, **196**: 1353-1368
- Ma L B, Cheng S, Shi M L, Guo Y N. Angle-based multi-objective evolutionary algorithm based on pruning-power indicator for game map generation. *IEEE Transactions on Emerging Topics in Computational Intelligence*, 2021, **6**(2): 341-354
- Yue Cai-Tong, Liang Jing, Qu Bo-Yang, Yu Kun-Jie, Wang Yan-Li, Hu Yi. A survey on multimodal multiobjective optimization. *Control and Decision*, 2021, **36**(11): 2577-2588 (岳彩通, 梁静, 瞿博阳, 于坤杰, 王艳丽, 胡毅. 多模态多目标优化综述. 控制与决策, 2021, **36**(11): 2577-2588)
- Schutze O, Vasile M, Coello C A C. Computing the set of Epsilon-efficient solutions in multiobjective space mission design. *Journal of Aerospace Computing, Information, and Communication*, 2011, **8**(3): 53-70
- Wang Li-Fang, Zeng Jian-Chao. A cooperative evolutionary algorithm based on particle swarm optimization and simulated annealing algorithm. *Acta Automatica Sinica*, 2006, **32**(4): 630-635 (王丽芳, 曾建潮. 基于微粒群算法与模拟退火算法的协同进化方法. 自动化学报, 2006, **32**(4): 630-635)
- Ma Yong-Jie, Chen Min, Gong Ying, Cheng Shi-Sheng, Wang Zhen-Yan. Research progress of dynamic multi-objective optimization evolutionary algorithm. *Acta Automatica Sinica*, 2020, **46**(11): 2302-2318 (马永杰, 陈敏, 龚影, 程时升, 王甄延. 动态多目标优化进化算法研究进展. 自动化学报, 2020, **46**(11): 2302-2318)
- Tanabe R, Ishibuchi H. A review of evolutionary multimodal multiobjective optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2019, **24**(1): 193-200
- Liu Y P, Ishibuchi H, Nojima Y, Masuyama N, Han Y Y. Searching for local Pareto optimal solutions: A case study on polygon-based problems. In: *Proceedings of the IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC)*. Wellington, New Zealand: IEEE, 2019. 896-903
- Gong W Y, Liao Z W, Mi X Y, Wang L, Guo Y Y. Nonlinear equations solving with intelligent optimization algorithms: A survey. *Complex System Modeling and Simulation*, 2021, **1**(1): 15-32
- Lin C M, Tian D X, Duan X T, Zhou J S. 3D environmental perception modeling in the simulated autonomous-driving systems. *Complex System Modeling and Simulation*, 2021, **1**(1): 45-54
- Deb K, Tiwari S. Omni-optimizer: A generic evolutionary algorithm for single and multi-objective optimization. *European Journal of Operational Research*, 2008, **185**(3): 1062-1087
- Edupuganti V G, Prasad M V N K, Ravi V. A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2002, **6**(2): 182-197

- 15 Shir O M, Preuss M, Naujoks B, Emmerich M. Enhancing decision space diversity in evolutionary multiobjective algorithms. In: Proceedings of the 5th International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization. Nantes, France: Springer, 2009. 95–109
- 16 Liu Y P, Ishibuchi H, Nojima Y, Masuyama N, Shang K. A double-niched evolutionary algorithm and its behavior on polygon-based problems. In: Proceedings of the 15th International Conference on Parallel Problem Solving from Nature. Coimbra, Portugal: Springer, 2018. 262–273
- 17 Liang J J, Yue C T, Qu B Y. Multimodal multi-objective optimization: A preliminary study. In: Proceedings of the IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC). Vancouver, Canada: IEEE, 2016. 2454–2461
- 18 Liang J, Guo Q Q, Yue C T, Qu B Y, Yu K J. A self-organizing multi-objective particle swarm optimization algorithm for multimodal multi-objective problems. In: Proceedings of the 9th International Conference on Swarm Intelligence. Shanghai, China: Springer, 2018. 550–560
- 19 Yue C T, Qu B Y, Liang J. A multiobjective particle swarm optimizer using ring topology for solving multimodal multiobjective problems. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2017, **22**(5): 805–817
- 20 Wang D S, Tan D P, Liu L. Particle swarm optimization algorithm: An overview. *Soft Computing*, 2018, **22**(2): 387–408
- 21 Bilal, Pant M, Zaheer H, Garcia-Hernandez L, Abraham A. Differential evolution: A review of more than two decades of research. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 2020, **90**: Article No. 103479
- 22 Liang J, Xu W W, Yue C T, Yu K J, Song H, Crisalle O D, et al. Multimodal multiobjective optimization with differential evolution. *Swarm and Evolutionary Computation*, 2019, **44**: 1028–1059
- 23 Li Z H, Shi L, Yue C T, Shang Z G, Qu B Y. Differential evolution based on reinforcement learning with fitness ranking for solving multimodal multiobjective problems. *Swarm and Evolutionary Computation*, 2019, **49**: 234–244
- 24 Liu Y P, Ishibuchi H, Yen G G, Nojima Y, Masuyama N. Handling imbalance between convergence and diversity in the decision space in evolutionary multimodal multiobjective optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2019, **24**(3): 551–565
- 25 Li W H, Zhang T, Wang R, Ishibuchi H. Weighted indicator-based evolutionary algorithm for multimodal multiobjective optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2021, **25**(6): 1064–1078
- 26 Fan Q Q, Ersoy O K. Zoning search with adaptive resource allocating method for balanced and imbalanced multimodal multi-objective optimization. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 2021, **8**(6): 1163–1176
- 27 Li H, Deng J D, Zhang Q F, Sun J Y. Adaptive epsilon dominance in decomposition-based multiobjective evolutionary algorithm. *Swarm and Evolutionary Computation*, 2019, **45**: 52–67
- 28 Hu Y, Wang J, Liang J, Yu K J, Song H, Guo Q Q, et al. A self-organizing multimodal multi-objective pigeon-inspired optimization algorithm. *Science China Information Sciences*, 2019, **62**(7): 1–17
- 29 Tanabe R, Ishibuchi H. A framework to handle multimodal multiobjective optimization in decomposition-based evolutionary algorithms. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2019, **24**(4): 720–734
- 30 Ulrich T, Bader J, Thiele L. Defining and optimizing indicator-based diversity measures in multiobjective search. In: Proceedings of the 11th International Conference on Parallel Problem Solving from Nature. Krakov, Poland: Springer, 2010. 707–717
- 31 Liang J, Qu B Y, Gong D W, Yue C T. Problem Definitions and Evaluation Criteria for the CEC 2019 Special Session on Multimodal Multiobjective Optimization, Technical Report, School of Electrical Engineering, Zhengzhou University, China, 2019
- 32 Lin Q Z, Lin W, Zhu Z X, Gong M G, Li J Q, Coello C A C. Multimodal multiobjective evolutionary optimization with dual clustering in decision and objective spaces. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2020, **25**(1): 130–144
- 33 Li W H, Yao X Y, Zhang T, Wang R, Wang L. Hierarchy ranking method for multimodal multi-objective optimization with local Pareto fronts. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, DOI: 10.1109/TEVC.2022.3155757
- 34 Zitzler E, Laumanns M, Thiele L. SPEA2: Improving the Strength Pareto Evolutionary Algorithm, Technical Report, Department of Electrical Engineering, Swiss Federal Institute of Technology, Switzerland, 2001
- 35 Wang H D, Jiao L C, Yao X. Two_Arch2: An improved two-archive algorithm for many-objective optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2015, **19**(4): 524–541
- 36 Tian Y, Cheng R, Zhang X Y, Jin Y C. PlatEMO: A MATLAB platform for evolutionary multi-objective optimization [educational forum]. *IEEE Computational Intelligence Magazine*, 2017, **12**(4): 73–87
- 37 Bader J, Zitzler E. HypE: An algorithm for fast hypervolume-based many-objective optimization. *Evolutionary Computation*, 2011, **19**(1): 45–76
- 38 Riquelme N, Lücken C V, Baran B. Performance metrics in multi-objective optimization. In: Proceedings of the Latin American Computing Conference (CLEI). Arequipa, Peru: IEEE, 2015. 1–11
- 39 Zhou A M, Zhang Q F, Jin Y C. Approximating the set of Pareto-optimal solutions in both the decision and objective spaces by an estimation of distribution algorithm. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2009, **13**(5): 1167–1189
- 40 Liang J, Yue C T, Li G P, Qu B Y, Suganthan P N, Yu K J. Problem Definitions and Evaluation Criteria for the CEC 2021 on Multimodal Multiobjective Path Planning Optimization, Technical Report, School of Electrical Engineering, Zhengzhou University, China, 2020
- 41 Yao X Y, Li W H, Pan X G, Wang R. Multimodal multi-objective evolutionary algorithm for multiple path planning. *Computers & Industrial Engineering*, 2022, **169**: Article No. 108145



李文桦 国防科技大学系统工程学院博士研究生。2020 年获得国防科技大学硕士学位。主要研究方向为多目标优化及其应用。

E-mail: liwenhua1030@aliyun.com

(**LI Wen-Hua** Ph.D. candidate at the College of Systems Engineering,

National University of Defense Technology. He received his master degree from National University of Defense Technology in 2020. His research interest covers multi-objective optimization and applications.)



明梦君 国防科技大学系统工程学院讲师。2022 年获得国防科技大学博士学位。主要研究方向为约束优化, 多目标优化和微电网调度优化。

E-mail: mmengjun@gmail.com

(**MING Meng-Jun** Lecturer at the College of Systems Engineering, National

University of Defense Technology. She received her Ph.D. degree from National University of Defense

Technology in 2022. Her research interest covers constrained optimization, multi-objective optimization, and microgrid dispatch optimization.)



张 涛 国防科技大学系统工程学院教授. 2004 年获得国防科技大学博士学位. 主要研究方向为能源互联网优化调度, 数据挖掘和优化方法.

E-mail: zhangtao@nudt.edu.cn

(**ZHANG Tao** Professor at the College of Systems Engineering, National University of Defense Technology. He received his Ph.D. degree from National University of Defense Technology in 2004. His research interest covers energy internet scheduling optimization, data mining, and optimization methods.)



王 锐 国防科技大学系统工程学院副研究员. 2013 年获得英国谢菲尔德大学博士学位. 主要研究方向为进化计算, 多目标优化及其应用. 本文通信作者.

E-mail: ruiwangnudt@gmail.com

(**WANG Rui** Associate researcher at the College of Systems Engineering, National University of Defense Technology. He received his Ph.D. degree from the University of Sheffield, UK, in 2013. His research interest covers evolutionary computation, multi-objective optimization, and the development of

algorithms applicable in practice. Corresponding author of this paper.)



黄生俊 国防科技大学系统工程学院副教授. 2018 年获得加拿大阿尔伯塔大学博士学位. 主要研究方向为混合整数线性规划, 鲁棒优化算法, 大规模电力系统和微电网集群.

E-mail: huangshengjun@nudt.edu.cn

(**HUANG Sheng-Jun** Associate professor at the College of Systems Engineering, National University of Defense Technology. He received his Ph.D. degree from the University of Alberta, Canada, in 2018. His research interest covers mixed-integer linear programming, robust optimization algorithms, large-scale power systems, and microgrid clusters.)



王 凌 清华大学自动化系教授. 1999 年获得北京清华大学控制理论和控制工程博士学位. 主要研究方向为智能优化, 生产调度.

E-mail: wangling@tsinghua.edu.cn

(**WANG Ling** Professor in the Department of Automation, Tsinghua University. He received his Ph.D. degree in control theory and control engineering from Tsinghua University in 1999. His research interest covers intelligent optimization and production scheduling.)