证明人民币找零问题贪心算法的正确性

证明思路：

贪心算法的正确性，必须满足最优子结构性质和贪心选择性质。

1.满足最优子结构性质：如果原问题最优解的一部分，是对应子问题的最优解。

2.满足贪心选择性质：

① 明确指出贪心选择什么。

② 证明问题的最优解必须是贪心选择得到，或者贪心选择得到的解一定是最优解，或者最优解可以构造成贪心选择得到。(通常用反正法)

例如最优装载问题，可以证明最优解可以构造成贪心选择得到。

下面可以证明人民币找零问题最优解必须是贪心选择得到的（如果不是贪心选择会得到矛盾）。

1. 人民币找零问题满足最优子结构性质

证明：

假设需要找零的金额为一个正整数 M. 人民币面值为 1，2，5。

如果(y_1, y_2, y_5)是下面整数规划方程的一个最优解：

$$\begin{cases} \min x_1 + x_2 + x_5 \\ \text{s.t.} \\ x_1 + 2x_2 + 5x_5 = M \\ x_1, x_2, x_5 \text{都是非负整数} \end{cases}$$

则(y_1, y_2)是下面子问题的一个最优解：

$$\begin{cases} \min x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \\ x_1 + 2x_2 = M - 5y_5 \\ x_1, x_2 \text{都是非负整数} \end{cases}$$

否则，设(z_1, z_2)是这个子问题的最优解，而(y_1, y_2)不是它的最优解。由此可知，

$$z_1 + z_2 < y_1 + y_2\text{，且}z_1 + 2z_2 = M - 5y_5$$

即$z_1 + z_2 + y_5 < y_1 + y_2 + y_5$，且$z_1 + 2z_2 + 5y_5 = M$

这表明(z_1, z_2, y_5)是比(y_1, y_2, y_5)更优的解，从而(y_1, y_2, y_5)不是原问题的最优解。与假设矛盾！

所以，如果(y_1, y_2, y_5)是原问题的最优解，则(y_1, y_2)是子问题的最优解。

即，人民币找零问题满足最优子结构性质。（证完）

2. 人民币找零问题满足贪心选择性质

证明：

贪心选择面值最大者。

假设需要找零的金额为一个正整数 M. 人民币面值为 1，2，5。人民币找零问题也就是求解下面的整数规划方程：

$$\begin{cases} \min x_1 + x_2 + x_5 \\ \text{s.t.} \\ x_1 + 2x_2 + 5x_5 = M \\ x_1, x_2, x_5 \text{是非负整数} \end{cases}$$

假设(x_1, x_2, x_5)是一个最优解，其中它们分别对应面值为 1，2，5。

不妨设$M \geq 5$（否则把x_5去掉，只考察x_1和x_2）。

下面证明只有贪心选择才能得到最优解：

如果$x_5 = \left\lfloor \frac{M}{5} \right\rfloor$，则$(x_1, x_2, x_5)$是贪心选择所得，其中$\lfloor \cdot \rfloor$是下取整。

如果$x_5 \neq \left\lfloor \frac{M}{5} \right\rfloor$，

① 当$x_5 > \left\lfloor \frac{M}{5} \right\rfloor$， $x_5 \geq \left\lfloor \frac{M}{5} \right\rfloor + 1$，则$x_1 + 2x_2 + 5x_5 \neq M$，即$(x_1, x_2, x_5)$不可行。

② 当$x_5 < \left\lfloor \frac{M}{5} \right\rfloor$，比如$x_5 = \left\lfloor \frac{M}{5} \right\rfloor - 1$，则$x_1 + 2x_2 + 5x_5 = M$，即$x_1 + 2x_2 + 5(\left\lfloor \frac{M}{5} \right\rfloor - 1) = M$，

有$x_1 + 2x_2 = 5 + M\%5$.

因 $5 \leq 5 + M\%5 \leq 9$，

从而，因问题满足最优子结构性质，所以最优解(x_1, x_2)满足：

$x_1 \geq 1$ 且$x_2 \geq 2$, 或者$x_1 \geq 0$ 且$x_2 \geq 3$. （见后面的附加说明）

构造另一个解

$$(y_1, y_2, y_5) = \left(x_1 - 1, x_2 - 2, \left\lfloor \frac{M}{5} \right\rfloor\right) \quad (\text{当} x_1 \geq 1 \text{ 且} x_2 \geq 2) \tag{1}$$

$$(y_1, y_2, y_5) = \left(x_1 + 1, x_2 - 3, \left\lfloor \frac{M}{5} \right\rfloor\right) \quad (\text{当} x_1 \geq 0 \text{ 且} x_2 \geq 3) \tag{2}$$

都能保证y_1, y_2, y_5是非负整数。

可以证明，(y_1, y_2, y_5)是比(x_1, x_2, x_5)更优的解。

事实上，对(1)式，有：

$$y_1 + 2y_2 + 5y_5 = (x_1 - 1) + 2(x_2 - 2) + 5\left\lfloor \frac{M}{5} \right\rfloor$$

$$= x_1 + 2x_2 + 5(\left\lfloor \frac{M}{5} \right\rfloor - 1)$$

$$= x_1 + 2x_2 + 5x_5 = M$$

因此，(y_1, y_2, y_5)是可行解。

又

$$y_1 + y_2 + y_5 = (x_1 - 1) + (x_2 - 2) + \left\lfloor \frac{M}{5} \right\rfloor$$

$$= x_1 + x_2 + (\left\lfloor \frac{M}{5} \right\rfloor - 1) - 2$$

$$= x_1 + x_2 + x_5 - 2 < x_1 + x_2 + x_5$$

即(y_1, y_2, y_5)是比(x_1, x_2, x_5)更优的解。

同理，对(2)式也能得到(y_1, y_2, y_5)是比(x_1, x_2, x_5)更优的解。

都与(x_1, x_2, x_5)是最优解矛盾！因此，$x_5 < \left\lfloor \frac{M}{5} \right\rfloor$是不可能的。

所以，如果 (x_1, x_2, x_5)是一个最优解，则只有$x_5 = \left\lfloor \frac{M}{5} \right\rfloor$，即最优解是贪心选择所得。

故，人民币找零问题满足贪心选择性质，贪心选择面值最大者。（证完）

附加说明：

其实就是求解下面的整数规划方程：

$$\begin{cases} \min x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \\ x_1 + 2x_2 = 5 + M\%5 \\ x_1, x_2 \text{是非负整数} \end{cases}$$

$5 + M\%5$	最优解(x_1, x_2)
5	(1,2)
6	(0,3)
7	(1,3)
8	(0,4)
9	(1,4)

所以，$x_1 \geq 1$ 且$x_2 \geq 2$, 或者$x_1 \geq 0$ 且$x_2 \geq 3$.