证明背包问题具有贪心选择性质

背包问题：有 n 个物品：重量是 w_i, 价值是 v_i, (i=1, 2, ⋯, n), 包的容量是 C. 要求把每一件物品全部或部分装进包里，使得包中物品价值最大.

求证背包问题具有贪心选择性质。

证明：背包问题的线性规划方程：

$$\max \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$$

$$\text{s.t.}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i w_i \le C \\ x_i \in [0,1], i = 1,2,\cdots,n \end{cases}$$

设物品是按单位重量价值($\frac{v_i}{w_i}$，简称单位价值)不增排序，即$\frac{v_i}{w_i} \ge \frac{v_j}{w_j}$ $(i < j)$。

贪心选择：选择单位价值最大者。

假设$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$是背包问题的最优解。即

$$\sum_{i=1}^{n} x_i w_i \le C \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

情形 1：如果$x_1 = 1$或者$x_1 = C/w_1$, 则$\boldsymbol{x}$是贪心选择得到的最优解。

情形 2：如果$x_1 < 1$且$x_1 < C/w_1$，即$\boldsymbol{x}$不是贪心选择得到的最优解。

假设$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$是贪心选择得到的解，则

① 如果$w_1 > C$，则取$y_1 = C/w_1 < 1$，$y_i = 0 (i = 2,3,\cdots n)$，则 $\sum_{i=1}^{n} y_i w_i = y_1 w_1 = C$，即$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$是**可行解.**

因为$\frac{v_1}{w_1} \ge \frac{v_i}{w_i} (i = 2,3,\cdots,n)$, 即 $\frac{w_i}{w_1} v_1 \ge v_i$

所以，利用(1)式有：

$$\sum_{i=1}^{n} y_i v_i = y_1 v_1 = \frac{C}{w_1} v_1 = \frac{v_1}{w_1} C \ge \frac{v_1}{w_1} \sum_{i=1}^{n} x_i w_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{w_i}{w_1} v_1 \ge \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$$

即$\boldsymbol{y}$比$\boldsymbol{x}$更优.

② 如果$w_1 \le C$，则取$y_1 = 1$, 得到$n-1$个物品的子问题：

$$\max \sum_{i=2}^{n} y_i v_i$$

$$\text{s.t.}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=2}^{n} y_i w_i \le C - w_1 \\ y_i \in [0,1], i = 2,\cdots,n \end{cases}$$

如此迭代 k 步，直到$w_{k+1} > C - \sum_{i=1}^{k} w_i \geq 0$为止，此时问题变成了如情形①的问题，$\boldsymbol{y} = (1,1,\cdots 1, y_{k+1}, 0, \cdots, 0)$，其中$y_i = 1(i = 1,2,\cdots,k), y_{k+1} = \frac{C - \sum_{i=1}^{k} w_i}{w_{k+1}}$，$y_j = 0(j = k+2, \cdots, n)$.

$$\sum_{i=1}^{n} y_i w_i = \sum_{i=1}^{k} w_i + y_{k+1} w_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} w_i + \frac{C - \sum_{i=1}^{k} w_i}{w_{k+1}} w_{k+1} = C$$

即$\boldsymbol{y} = (1,1,\cdots 1, y_{k+1}, 0, \cdots, 0)$是是可行解。

由①知道，对第 k 步后的子问题的解$(y_{k+1}, 0, \cdots, 0)$比$(x_{k+1}, \cdots, x_n)$ 更优，即$y_{k+1} v_{k+1} \geq \sum_{i=k+1}^{n} x_i v_i$ 且$x_1 < 1$. 因此

$$\sum_{i=1}^{n} y_i v_i = \sum_{i=1}^{k} v_i + y_{k+1} v_{k+1} \geq \sum_{i=1}^{k} v_i + \sum_{i=k+1}^{n} x_i v_i > \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$$

即$\boldsymbol{y}$比$\boldsymbol{x}$更优.

由上述可知，背包问题的最优解只能由贪心选择得到。

所以，背包问题具有贪心选择性质。

证完。