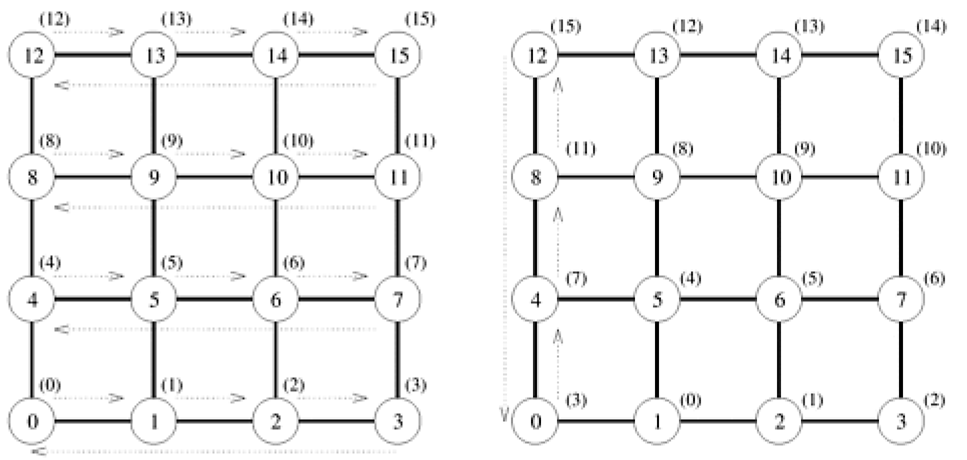
4.6 循环移位

循环移位是更广泛的全局通信操作中的一种，被称为 **置换（Permutation）**。置换是一种同步、一对一的数据再分配操作，其中每个节点向唯一的节点发送一个包含 m 个字的数据包。我们将**循环 q 移位（Circular q-Shift）**定义为在 p 个节点集合$(0 < q < p)$中，节点 i 向节点 $(i+q) \mod p$ 发送数据包的操作。移位操作适用于某些矩阵计算以及字符串和图像模式匹配。

4.6.1 二维网格

在环形或双向线性阵列上实现循环 q 移位相当直观。它可以通过单向 `min{q, p - q}` 邻近通信来实现。利用环形算法可以推导出圆周位移的网格算法。

如果网格的节点都有行主标，那么在一个 p 个节点的正方形环绕网格上，可以分两个阶段进行圆周 q 移位。图 4.22 展示了在 4×4 网格上进行圆周 5 移位的过程。首先，整组数据同时沿行移动 $(q \mod \sqrt{p})$ 步。然后沿列移动 $\lfloor q/\sqrt{p} \rfloor$ 步。在循环行移位过程中，部分数据会从行的最高标注节点到最低标注节点绕行连接。所有这些数据包都必须沿列向前多移动一步，以补偿它们在各自行中穿越后向边缘时损失的 $\sqrt{p}$ 距离。例如，图 4.22 中的 5 次移位需要一次行移位、一次补偿性列移位和最后一次列移位。



(a) Initial data distribution and the first communication step

(b) Step to compensate for backward row shifts

(c) Column shifts in the third communication step

(d) Final distribution of the data

图4.22 4x4网格上循环5档的通信步骤

在实际操作中，我们可以选择行和列的移动方向，以尽量减少圆周移动的步数。例如，4×4 网格上的 3 次移动可以通过一次向后的行移动来完成。使用这种策略，一个方向上的单位移动次数不能超过 $\lfloor \sqrt{p}/2 \rfloor$。

成本分析 考虑到某些数据包的补偿列移动，使用大小为 m 的数据包在 p 节点网格上进行任何循环 q 移位的总时间上限为

$$T = (t_s + mt_w)(\sqrt{p} + 1) \tag{1}$$

4.6.2 超立方

在开发移位运算的超立方体算法时，我们将一个有 2^d 个节点的线性数组映射到一个 d 维的超立方体上。具体方法是将线性数组的节点 i 分配给超立方体的节点 j，这样 j 就是 i 的 d 位二进制反射格雷码 (RGC)。这种映射的一个特性是，线性阵列上距离为 2^i 的任意两个节点，在超立方体上正好相隔两个链路。$i = 0$（即线性阵列上直接连接的节点）是一个例外，此时两个节点之间只有一个超立方体链路相隔。

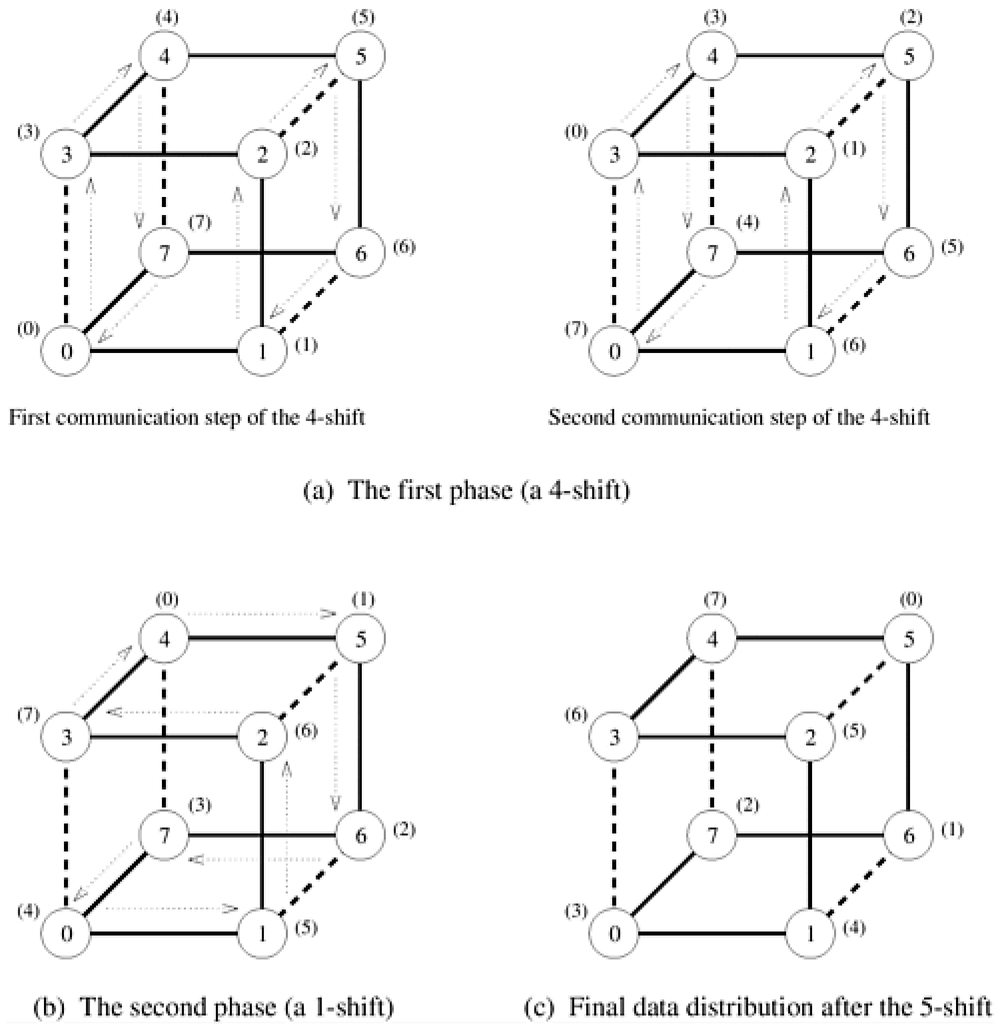


图4.23 将一个八节点线性阵列映射到一个三维超立方体上，以4移位和1移位相结合的方式进行循环5移位

例如，数字 5 可以表示为 $2^2 + 2^0$。这两个项对应于 5 的二进制表示中的 0 和 2 位，即 101。如果 q 是 s 个不同的 2 的幂的和，那么超立方体上的循环 q 移位要分 s 个阶段进行。

在通信的每个阶段，所有数据包通过短切线性阵列（映射到超立方体上），以 2 的幂级数接近各自的目的地。例如，如图 4.23 所示，5 移位由 4 移位和 1 移位组成，q 移位中的通信阶段数正好等于 q 的二进制表示中的 1 的个数。除 1 移位外，每个阶段都包含两个通信步骤，1 移位只包含一个步骤（即 q 的最小有效位为 1）。例如，在 5 次移位中，4 次移位的第一阶段（图 4.23(a)）由两个步骤组成，1 次移位的第二阶段（图 4.23(b)）由一个步骤组成。因此，p 节点超立方体中任意 q 的总步数最多为 $2\log p - 1$。

在给定的时间步长内，所有通信都不会拥塞。这得益于线性阵列映射的特性，即线性阵列上相互距离为 2 的幂次的所有节点都被安排在超立方体上互不相连的子阵列中。因此，所有节点都可以在各自的子阵列中以循环方式自由通信。如图 4.23(a)所示，标有 0、3、4 和 7 的节点组成一个子阵列，标有 1、2、5 和 6 的节点组成另一个子阵列。

在 p 节点超立方体上对 m 字数据包进行任意移位时，总通信时间的上限为

$$T = (t_s + mt_w)(2\log p - 1) \tag{2}$$

我们可以通过同时进行前移和后移，将这一上限降低为 $(t_s + mt_w)\log p$。例如，在 8 个节点上，可以通过一次后向 2 移位来完成 6 移位，而不是先进行前向 4 移位，然后再进行前向 2 移位。

我们现在要说明的是，如果使用第 4.5 节中介绍的 E 立方体路由，那么对于大信息量，超立方体上的循环移动时间几乎可以提高 $\log p$ 倍。这是因为采用 E 立方体路由时，在具有双向信道的 p 节点超立方体中，每对具有恒定距离 l 的节点（$i \le l < p$）都有一条无拥塞路径。图 4.24 展示了八节点超立方体上 $1 \le q < 8$ 的循环 q 移位操作中所有报文的无冲突路径。在 p 节点超立方体上进行循环 q 移位时，最长路径包含 $\log p - \gamma(q)$ 链路，其中 $\gamma(q)$ 是 q 能被 2^j 整除的最大整数 j。因此，长度为 m 的信息的总通信时间为

$$T = t_s + mt_w \tag{3}$$

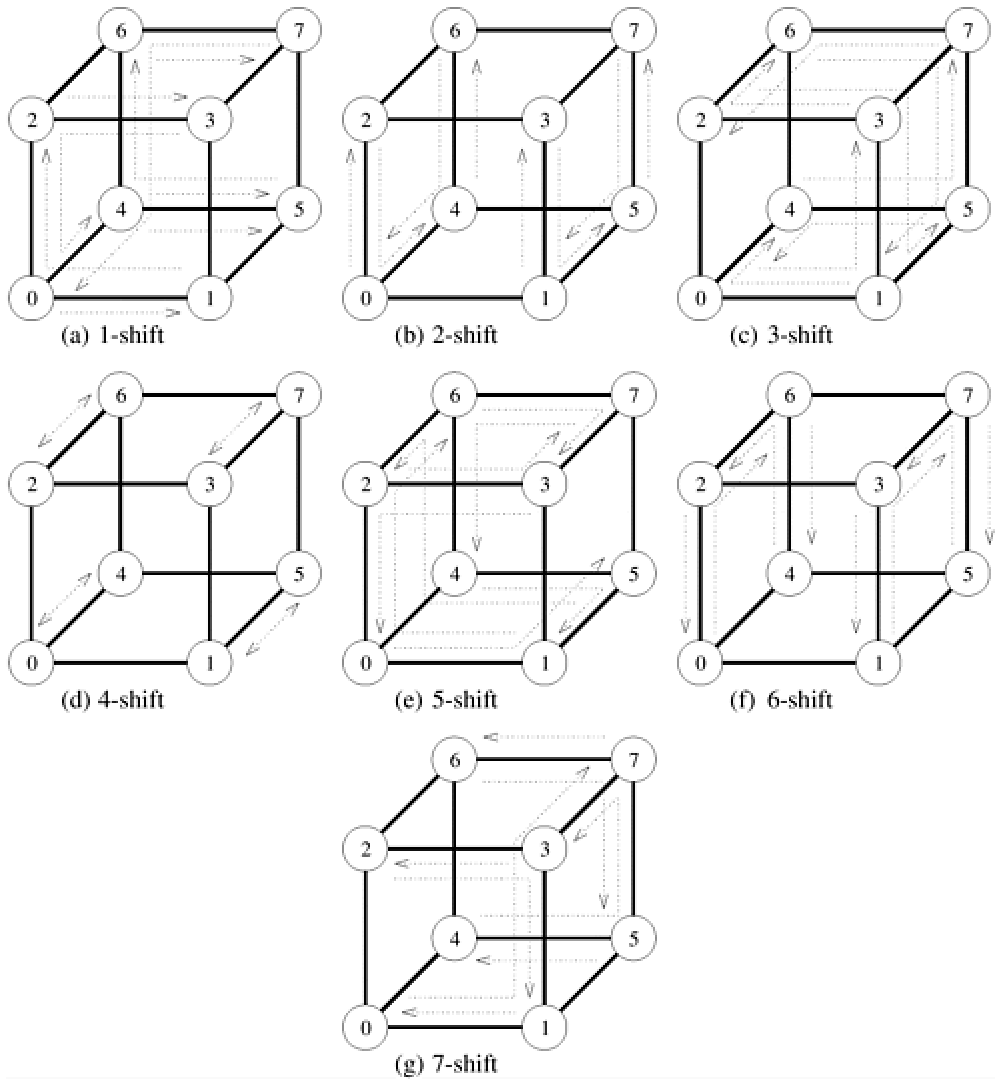


图4.24 8节点超立方体上的循环q移位