知识点Z2.10

阶跃响应的定义和求法

主要内容：

1. 阶跃响应的定义
2. 阶跃响应的求法

基本要求：

掌握阶跃响应的求法

Z2.10 阶跃响应的定义和求法

1.定义

阶跃响应是由单位阶跃函数 $\varepsilon(t)$所引起的零状态响应，记为$g(t)$。

$g(t)$隐含的条件：

$$f(t) = \varepsilon(t)$$

$$g(0_-) = g'(0_-) = 0$$

基本信号：阶跃函数 $\varepsilon(t)$

基本响应：阶跃响应$g(t)$

2.求法

方法一 (利用线性性质和微分性质)

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_2 f''(t) + b_1 f'(t) + b_0 f(t)$$

求解系统的阶跃响应 可分两步进行：

(1)选新变量$g_1(t)$，使它满足

$$g_1''(t) + a_1 g_1'(t) + a_0 g_1(t) = \varepsilon(t)$$

$$g_1(0_-) = g_1'(0_-) = 0$$

采用经典法求解$g_1(t)$；

(2)根据LTI系统零状态响应的线性性质和微分，则阶跃响应：

$$g(t) = b_2 g_1''(t) + b_1 g_1'(t) + b_0 g_1(t)$$

方法二：

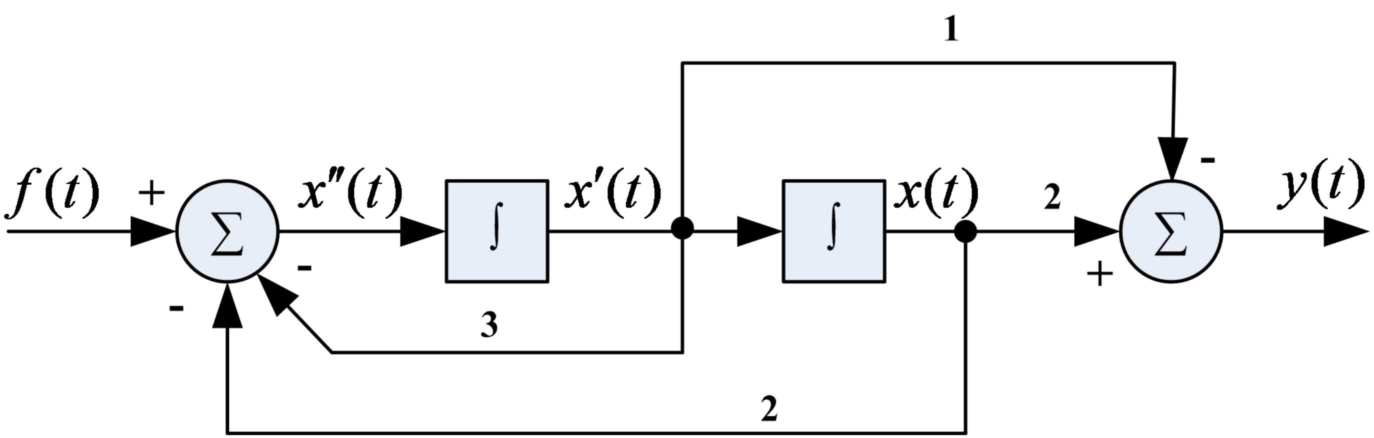
利用单位阶跃函数 $\varepsilon(t)$与单位冲激函数 $\delta(t)$的关系：

$$\varepsilon(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\,\mathrm{d}\tau,\quad \delta(t)=\frac{\mathrm{d}\,\varepsilon(t)}{\mathrm{d}\,t}$$

根据LTI系统的微（积）分特性，阶跃响应与冲激响应的关系为：

$$g(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)\,\mathrm{d}\tau,\quad h(t)=\frac{\mathrm{d}\,g(t)}{\mathrm{d}\,t}$$

例2 如图所示LTI系统，求其阶跃响应和冲激响应。



解：(1) 先列写系统的微分方程

设最后一个积分器的输出为$x(t)$，列出左端加法器的方程：

$$x''(t)=-3x'(t)-2x(t)+f(t) \qquad x''(t)+3x'(t)+2x(t)=f(t)$$

右端加法器方程： $y(t)=-x'(t)+2x(t)$

合并整理：$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=-f'(t)+2f(t)$

(2) 求$g_1(t)$，满足如下方程

$$\begin{cases} g_1''(t)+3g_1'(t)+2g_1(t)=\varepsilon(t) \\ g_1(0_-)=g_1'(0_-)=0 \end{cases}$$

由系数匹配法： $g_1(0_+) = 0$, $g_1'(0_+) = 0$ (思考:Why?)

其特征根为-1和-2，特解为0.5，故设解为：

$$g_1(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}+0.5, \quad t\geq 0$$

代入初始值可得：

$$g_1(t)=(-e^{-t}+0.5e^{-2t}+0.5)\varepsilon(t)$$

(3)求$g(t)$，满足如下方程

$$g(t) = -g_1'(t) + 2g_1(t)$$ (思考:Why?)

求得阶跃响应为：

$$g(t) = -g_1'(t) + 2g_1(t) = (-3e^{-t} + 2e^{-2t} + 1)\varepsilon(t)$$

求得冲激响应为：

$$h(t) = \frac{\mathrm{d}g(t)}{dt} = (3e^{-t} - 4e^{-2t})\varepsilon(t)$$

说明： 可以灵活运用冲激响应和阶跃响应之间的关系；注意中间变量 $g_1(t)$ 的表达式。