

知识点Z2.4

连续系统的初始值

主要内容:

1. 初始值的定义
2. 初始值的求法

基本要求:

1. 了解初始值的概念
2. 掌握系数匹配法



2.4 系统的初始值

初始值是 n 阶系统在 $t=0$ 时接入激励，其响应在 $t=0_+$ 时刻的值，即 $y^{(j)}(0_+)$ ($j=0,1,2,\dots, n-1$)。

初始状态是指系统在激励尚未接入的 $t=0_-$ 时刻的响应值 $y^{(j)}(0_-)$ ，该值反映了**系统的历史情况**，而与激励无关。

为求解微分方程，需要从已知的**初始状态** $y^{(j)}(0_-)$ 求得 $y^{(j)}(0_+)$ 。



例1 某系统描述某系统的微分方程为

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2f'(t) + 6f(t)$$

已知 $y(0_-)=2$, $y'(0_-)=0$, $f(t)=\varepsilon(t)$, 求 $y(0_+)$ 和 $y'(0_+)$ 。

解：将 $f(t)=\varepsilon(t)$ 代入微分方程得

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2\delta(t) + 6\varepsilon(t)$$

系数匹配：上式在 $[0_-, 0_+]$ 区间两端 $\delta(t)$ 项的系数应相等。由于等号右端含 $2\delta(t)$ ，故**只有 $y''(t)$ 包含 $\delta(t)$** （思考原因）

故：

$$\begin{aligned} y'(0_+) &\neq y'(0_-) \\ y(0_+) &= y(0_-) = 2 \end{aligned}$$



对 $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2\delta(t) + 6\varepsilon(t)$ 两端积分

$$\int_{0-}^{0+} y''(t)dt + 3\int_{0-}^{0+} y'(t)dt + 2\int_{0-}^{0+} y(t)dt = 2\int_{0-}^{0+} \delta(t)dt + 6\int_{0-}^{0+} \varepsilon(t)dt$$

\downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow

$y'(0_+) - y'(0_-)$ $y(0_+) - y(0_-) = 0$ 0 2 0

说明：积分区间 $[0_-, 0_+]$ 无穷小，且 $y(t)$ 不含 $\delta(t)$ ，故

$$\int_{0-}^{0+} y(t)dt = 0, \int_{0-}^{0+} \varepsilon(t)dt = 0$$

于是由上式得： $y'(0_+) - y'(0_-) = 2$

所以： $y'(0_+) = 2$

结论：微分方程等号右端含有 $\delta(t)$ 时，仅在等号左端 $y(t)$ 的最高阶导数中含有 $\delta(t)$ ，则 $y(t)$ 的次高阶跃变，其余连续；若右端不含冲激函数，则不会跃变。

