知识点Z2.3

微分方程的经典解法

主要内容：

1. 齐次解的定义和解法
2. 特解的含义和全响应的求解

基本要求：

1. 熟悉齐次解和特解的函数形式
2. 掌握微分方程的经典解法

Z2.3 微分方程的经典解法

1.经典解

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y^{(1)}(t) + a_0y(t)$$
$$= b_m f^{(m)}(t) + b_{m-1} f^{(m-1)}(t) + \dots + b_1 f^{(1)}(t) + b_0 f(t)$$

$y(t)$(完全解) = $y_h(t)$(齐次解) + $y_p(t)$(特解)

齐次解是对应齐次微分方程的解：

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\dots+a_1y^{(1)}(t)+a_0y(t)=0$$

特征根为 $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0 = 0$的根$\lambda_i$(i = 1，2，…，n)，由特征根可以得到齐次解的函数形式。

特解的函数形式与激励的函数形式有关。

2.齐次解的常用函数形式(p.35)

表2-1 不同特征根所对应的齐次解

特征根λ	齐次解$y_h(t)$
单实根	不一样 $Ce^{\lambda t}$
2重实根	一样 $(C_1t+C_0)e^{\lambda t}$
一对共轭复根$\lambda_{1,2}=\alpha\pm j\beta$	$e^{\alpha t}[C\cos(\beta t)+D\sin(\beta t)]$或$Ae^{\alpha t}\cos(\beta t-\theta)$，其中$Ae^{j\theta}=C+jD$

3.特解的常用函数形式(p.35)

表2-2 不同激励所对应的特解

激励$f(t)$	特解$y_p(t)$	
t	P_1t+P_0 $t\cdot(P_1t+P_0)$	所有的特征根均不等于0； 有1个等于0的特征根；
$e^{\alpha t}$	$Pe^{\alpha t}$ $(P_1t+P_0)e^{\alpha t}$	α不等于特征根； α等于特征单根；
$\cos(\beta t)$或$\sin(\beta t)$	$P\cos(\beta t)+Q\sin(\beta t)$ 或$A\cos(\beta t-\theta)$, 其中$Ae^{j\theta}=P+jQ$	所有的特征根均不等于$\pm j\beta$

例1 某系统的微分方程为 $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = f(t)$, 求

(1)当 $f(t) = 2e^{-t}, t \geq 0$；$y(0)=2$，$y'(0)= -1$时的全解；

(2)当 $f(t) = e^{-2t}, t \geq 0$；$y(0)=1$，$y'(0)=0$时的全解。

解: (1) 特征方程： $\lambda^2 + 5\lambda + 6=0$，得：$\lambda_1 = -2$，$\lambda_2 = -3$

设定齐次解： $y_h(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t}$

设定特解： $y_p(t) = Qe^{-t}$，代入微分方程：

$$Qe^{-t} + 5(-Qe^{-t}) + 6Qe^{-t} = 2e^{-t}$$ 解得： $Q=1$

全解： $y(t) = y_h(t) + y_p(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t} + e^{-t}$

$$y(0) = C_1 + C_2 + 1 = 2$$

$$y'(0) = -2C_1 - 3C_2 - 1 = -1$$

解得 $C_1 = 3$，$C_2 = -2$

最后得全解 $y(t) = 3e^{-2t} - 2e^{-3t} + e^{-t}, t \geq 0$

2.1 LTI连续系统的响应

(2)齐次解： $y_h(t) = C_1e^{-2t} + C_2e^{-3t}$ 同上

特解： $y_p(t) = (Q_0 + Q_1t)e^{-2t}$ ($f(t) = e^{-2t}$, 注意形式)

代入微分方程： $Q_1e^{-2t} = e^{-2t}$ 解得： $Q_1 = 1$

全解： $y(t) = C_1e^{-2t} + C_2e^{-3t} + te^{-2t} + Q_0e^{-2t}$

$= (C_1+Q_0)e^{-2t} + C_2e^{-3t} + te^{-2t}$

代入初始条件，得：

$y(0) = (C_1+Q_0) + C_2 = 1$， $y'(0) = -2(C_1+Q_0) - 3C_2 + 1 = 0$

解得 $C_1 + Q_0 = 2$, $C_2 = -1$

最后得全解： $y(t) = 2e^{-2t} - e^{-3t} + te^{-2t}$, $t \geq 0$

讨论：上式第一项系数 $C_1 + Q_0 = 2$，不能区分 C_1 和 Q_0.