知识点Z1.10

冲激函数的尺度变化

主要内容：

1. $\delta(at)$的定义

2.冲激函数和冲激偶函数的奇偶性

基本要求：

1.掌握冲激函数尺度和时移的重要公式

2.掌握冲激函数和冲激偶函数的奇偶性

Xidian University, ICIE. All Rights Reserved

Z1.10 冲激函数的尺度变化

1. $\delta(at)$ 的定义

$$\delta^{n}(at)=\frac{1}{|a|}\frac{1}{a^{n}}\delta^{n}(t)$$

特例：

$$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$$

证明：

若$a>0$,则$|a|=a$,令$x=at$,则上式可写为

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(at)\varphi(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\varphi(\frac{x}{a})\frac{dx}{|a|}=\frac{1}{|a|}\varphi(0)$$

若$a<0$,则$|a|=-a$,有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(at)\varphi(t)dt=\int_{\infty}^{-\infty}\delta(x)\varphi(\frac{x}{a})\frac{dx}{-|a|}=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\varphi(\frac{x}{a})\frac{dx}{|a|}=\frac{1}{|a|}\varphi(0)$$

Xidian University, ICIE. All Rights Reserved

2. 推广结论

(1) $\delta(at-t_0)=\delta[a(t-\frac{t_0}{a})]=\frac{1}{|a|}\delta(t-\frac{t_0}{a})$

(2) 当$a=-1$时 $\delta^{(n)}(-t)=(-1)^n\delta^{(n)}(t)$

$\delta(-t)=\delta(t)$ 为偶函数

$\delta'(-t)=-\delta'(t)$ 为奇函数

例1 计算 $\int_{-\infty}^{\infty}(t-2)^2\delta'(-t)\,\mathrm{d}t$

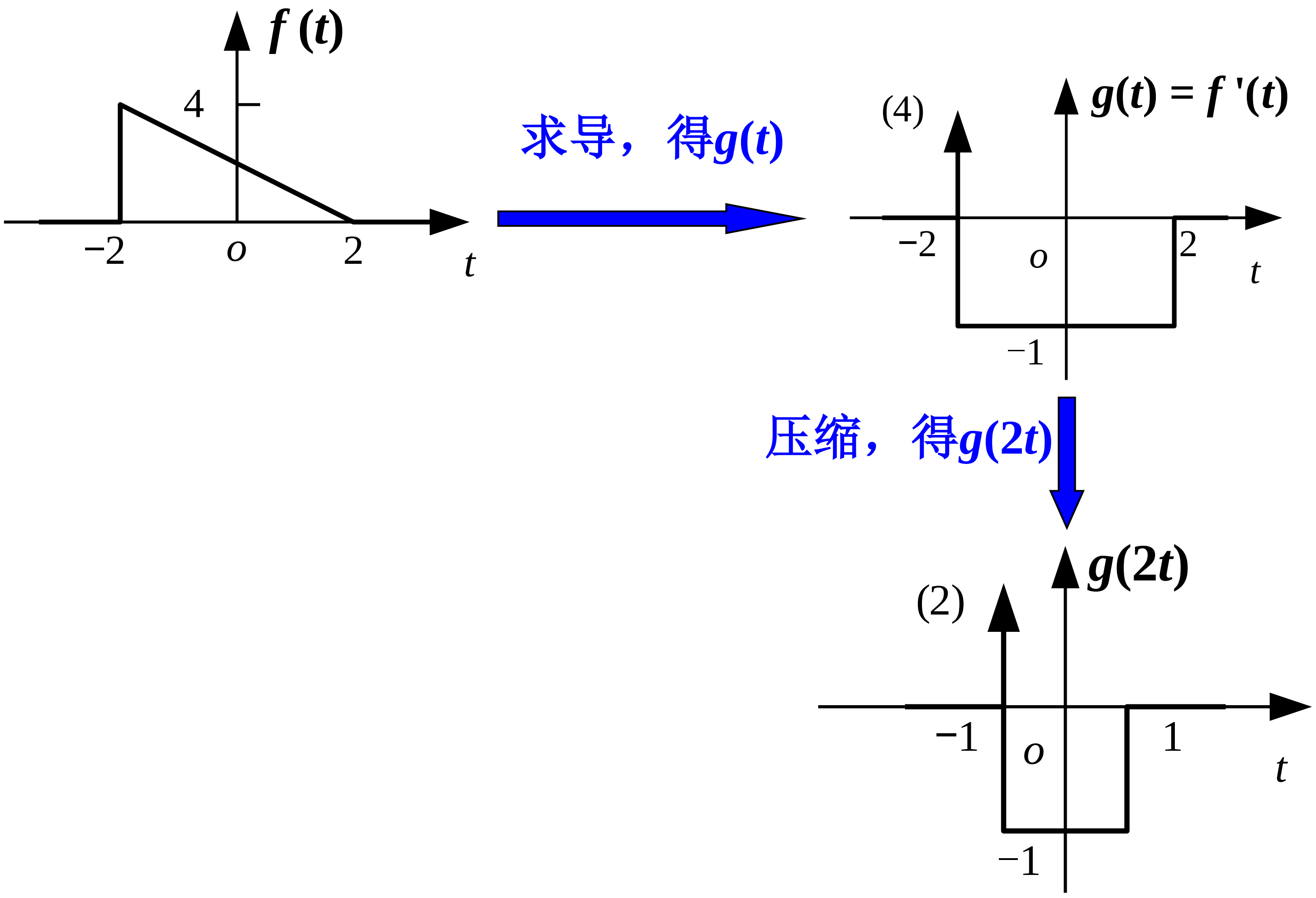
$$=\int_{-\infty}^{\infty}-(t-2)^2\delta'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[-(t-2)^2]\Big|_{t=0}=2(t-2)\Big|_{t=0}=-4$$

Xidian University, ICIE. All Rights Reserved

1.2 基本信号

例2 已知 $f(t)$，画出$g(t) = f'(t)$和 $g(2t)$。



Xidian University, ICIE. All Rights Reserved

例3 计算下列各式。

(1) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(2t)}{t}\delta(t)dt$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty}(t^3-3t^2+5t-1)\delta'(t-1)dt$

(3) $\int_{-\infty}^{\infty}(t^3+5)\delta(\frac{t}{2})dt$

(4) $\int_{-\infty}^{t}(2-x)\delta'(x)dx$

Xidian University, ICIE. All Rights Reserved

解：

$$(1)\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(2t)}{t}\delta(t)dt$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(2t)}{t}$$

$$=2$$

Xidian University, ICIE. All Rights Reserved

解：

$$(2)\quad \int_{-\infty}^{\infty}(t^3-3t^2+5t-1)\delta'(t-1)dt$$

$$=-(t^3-3t^2+5t-1)'\big|_{t=1}$$

$$=-(3t^2-6t+5)\big|_{t=1}$$

$$=-2$$

Xidian University, ICIE. All Rights Reserved

解:

(3) $$\int_{-\infty}^{\infty}(t^3+5)\delta(\frac{t}{2})dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}(t^3+5)\cdot 2\delta(t)dt$$

$$=2(t^3+5)\Big|_{t=0}$$

$$=10$$

Xidian University, ICIE. All Rights Reserved

解：

$$(4)\quad \int_{-\infty}^{t}(2-x)\delta'(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{t}[2\delta'(x)-(-1)\delta(x)]dx$$

$$=2\delta(t)+\varepsilon(t)$$

Xidian University, ICIE. All Rights Reserved