知识点Z2.13

卷积公式

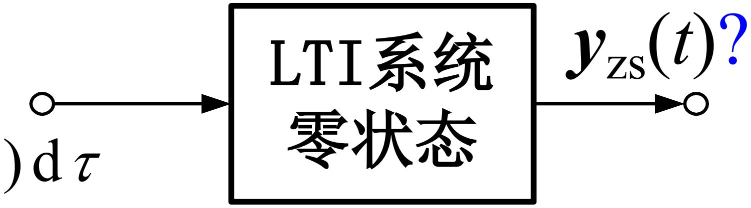
主要内容：

1. 卷积积分的定义
2. 零状态响应的卷积求解公式

基本要求：

掌握卷积积分的重要公式

Z2.13 卷积公式



$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

根据$h(t)$的定义： $\delta(t) \Longrightarrow h(t)$

由时不变性： $\delta(t-\tau) \Longrightarrow h(t-\tau)$

由齐次性： $f(\tau)\,\delta(t-\tau) \Longrightarrow f(\tau)\,h(t-\tau)$

由叠加性：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau \Longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau = f(t), \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau = y_{zs}(t)$$

$$y_{zs}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$ 卷积积分

[定义] 卷积积分

已知定义在区间$(-\infty,\infty)$上的两个函数$f_1(t)$和$f_2(t)$，则定义积分

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

为$f_1(t)$与$f_2(t)$的卷积积分，简称卷积；记为

$$f(t)=f_1(t)*f_2(t)$$

注意：积分是在虚设的变量 τ 下进行的， τ 为积分变量， t为参变量。结果仍为 t 的函数。可演变其他上下限.

$$y_{zs}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau=f(t)*h(t)$$

例1： $f_1(t) = e^{-t}\varepsilon(t)$， $f_2(t) = \varepsilon(t)$，求 $f(t) = f_1(t) * f_2(t)$。

解：

$$f(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau}\varepsilon(\tau)\cdot\varepsilon(t-\tau)d\tau$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-\tau}\varepsilon(t\text{-}\tau)d\tau$$

$$= [\int_{0}^{t} e^{-\tau}d\tau]\cdot\varepsilon(t)$$

$$= -e^{-\tau}\Big|_0^t \cdot\varepsilon(t)$$

$$= (1-e^{-t})\varepsilon(t)$$