知识点Z2.17

卷积的微积分性质

主要内容：

1. 卷积的微积分性质
2. 使用微积分性质简化卷积计算的条件

基本要求：

掌握卷积的微积分性质

Z2.17 卷积的微积分性质

1. $$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}[f_1(t)*f_2(t)]=\frac{\mathrm{d}^n f_1(t)}{\mathrm{d}t^n}*f_2(t)=f_1(t)*\frac{\mathrm{d}^n f_2(t)}{\mathrm{d}t^n}$$

证：上式 $= \delta^{(n)}(t)*[f_1(t)*f_2(t)]$

$= [\delta^{(n)}(t)*f_1(t)]*f_2(t) = f_1^{(n)}(t)*f_2(t)$

2. $$\int_{-\infty}^{t}[f_1(\tau)*f_2(\tau)]\mathrm{d}\tau=\left[\int_{-\infty}^{t}f_1(\tau)\mathrm{d}\tau\right]*f_2(t)=f_1(t)*\left[\int_{-\infty}^{t}f_2(\tau)\mathrm{d}\tau\right]$$

证：上式 $= \varepsilon(t)*[f_1(t)*f_2(t)]$

$= [\varepsilon(t)*f_1(t)]*f_2(t) = f_1^{(-1)}(t)*f_2(t)$

3. 在 $f_1(-\infty)=0$ 或 $f_2^{(-1)}(\infty)=0$ 的前提下，

$$f_1(t)*f_2(t)=f_1'(t)*f_2^{(-1)}(t)$$

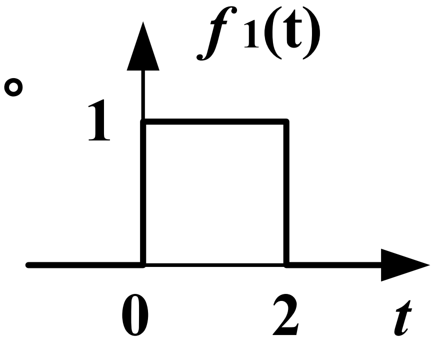
例1 $f_1(t)=1$，$f_2(t)=e^{-t}\,\varepsilon(t)$，求$f_1(t)*f_2(t)$。

解： 通常复杂函数放前面，代入定义式得

$$f_2(t)*f_1(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\tau}\,\varepsilon(\tau)\,\mathrm{d}\tau=\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\tau}\mathrm{d}\tau=-\mathrm{e}^{-\tau}\Big|_0^{\infty}=1$$

注意： 若套用$f_1(t)*f_2(t)=f_1'(t)*f_2^{(-1)}(t)=0*f_2^{(-1)}(t)=0$ 显然是错误的。

例2 $f_1(t)$ 如图，$f_2(t)=e^{-t}\,\varepsilon(t)$，求$f_1(t)*f_2(t)$。



解： $f_1(t)*f_2(t)=f_1'(t)*f_2^{(-1)}(t)$

$$f_1'(t)=\delta(t)-\delta(t-2)$$

$$f_2^{(-1)}(t)=\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\tau}\,\varepsilon(\tau)\,\mathrm{d}\tau=\left[\int_{0}^{t}\mathrm{e}^{-\tau}\mathrm{d}\tau\right]\varepsilon(t)=-\mathrm{e}^{-\tau}\Big|_0^{t}\cdot\varepsilon(t)=(1-\mathrm{e}^{-t})\varepsilon(t)$$

$$f_1(t)*f_2(t)=(1-e^{-t})\,\varepsilon(t)-[1-e^{-(t-2)}]\,\varepsilon(t-2)$$