By zzw4257 3230106267

周期二 慕课作业

T1 吉祥三宝

> 在杭州迎接2022年第19届亚洲运动会时，n名同学正在老师的带领下与亚运会吉祥物“江南忆”做游戏。游戏开始前，同学可以商定在游戏中采取的策略，但游戏进行过程中，同学之间不能互相交流。游戏开始时，老师在每位同学的背后贴上印有三个吉祥物“琮琮”、“宸宸”和“莲莲”之一的图案，不同同学背后的图案可以不同。每个同学不能看到自己背后的图案，但能看到除他自己外所有其他同学的图案。
>
> （1）现老师要求所有同学分站为3列。每列所有同学背后的图案均完全相同时，视为 “成功”。试给出一种策略，使成功的可能性尽可能大；
>
> （2）现老师要求每位同学同时在纸上画出自己背后的图案。一位同学所画的图案与自己背后的图案相同时视为该同学“成功”。试给出一种策略，使该策略能确保成功的同学数量尽可能多。

为了方便说明，我们将背后贴上印有三个吉祥物“琮琮”、“宸宸”和“莲莲"的图案的同学分别符号化为A，B，C

(1)

【法一】

下面我们将说明存在策略，成功的可能性为1

具体而言

我们设每个同学看到的A,B,C个数为a,b,c

则显然$a+b+c=n-1$，且具体而言，设所有同学中A,B,C个数为a_0,b_0,c_0

则$a=a_0-[\texttt{self.c = A}],b=b_0-[\texttt{self.c = B}],c=c_0-[\texttt{self.c = C}]$

我们构造排队方法

假设$(a-b)\mod 3\equiv 0$，其归到1队

假设$(a-b)\mod 3\equiv 1$，其归到2队

假设$(a-b)\mod 3\equiv 2$，其归到3队

在这种策略下，

- 本身是`A`：$(a-b)\equiv (a_0-b_0-1)\mod 3$
- 本身是`B`：$(a-b)\equiv (a_0-b_0+1)\mod 3$
- 本身是`C`：$(a-b)\equiv (a_0-b_0)\mod 3$

容易发现不同属性（即背后吉祥物不同）会有不同的计算结果，因此会被分到三个队列中

【法二】

首先，我们为每个人分配一个序号i，我们设h_i表示第i个人的颜色译码，设为

$$h_i=\begin{cases}0 & \texttt{self}_\texttt{i}\texttt{.c = A}\\1 & \texttt{self}_\texttt{i}\texttt{.c = B}\\2 & \texttt{self}_\texttt{i}\texttt{.c = C}\end{cases}\tag{1}$$

则我们将i分到$(\sum_{j\neq i} h_j \mod 3)+1$队列，则为一个合法的安排

证明和上面基本相同，这里不再赘述

:::tip[hint]

$-1\equiv 2 \mod 3$

:::

(2)

延续(1)【法二】的定义，我们用0,1,2表示A,

设$n=3k+r(0\leqslant m<3)$,即$k=\lfloor \frac{n}{3}\rfloor$

考虑如下策略

- $1\leqslant i\leqslant k$，猜测图案为$-\sum\limits_{j\neq i} h_j \pmod 3$
- $k+1\leqslant i\leqslant 2k+[r\geqslant 1]$，猜测图案为$1-\sum\limits_{j\neq i} h_j \pmod 3$
- $2k+1+[r\geqslant 1]\leqslant i\leqslant 3k+[r\geqslant 1]+[r\geqslant 2]$，猜测图案为$2-\sum\limits_{j\neq i} h_j \pmod 3$

容易证明

前k名同学，中间$k+[r\geqslant 1]$名同学，后面$k+[r\geqslant 2]$名同学 这三组同学，至少有完整的一组选择正确（证明基于分类讨论反证即可）

因此能保证至少$k=\lfloor \frac{n}{3}\rfloor$个成功

T2 假币识别问题

(1)

> 某种硬币单枚质量为W克。现有N堆该种硬币，依次标记为$1，2,...,N$。其中可能有若干堆，每堆均是伪币。所有伪币质量均相同，且不为W。伪币所在堆的指标集记为I。为求出I，现用一可精确测得质量的电子秤称量两次。第一次从每堆硬币中各取1枚，称得总质量为M_1克，第二次从第i堆硬币中取p^i枚，i=1,2,...,N, 称得总质量为M_2克，这里p为正整数(假设每堆硬币数量足够多)。
> (1)试给出M_1,M_2和W的某个函数，其值仅与I和p有关，而与伪币的质量无关；
> (2)为能用上述方法通过两次称量求出指标集I，p应满足什么条件？试给出某个满足条件的p值；并说明若取p $=2$,可能无法用上述方法通过两次称量求出I。

$$M_1=(N-|I|)W+|I|W'$$
$$M_2=W\sum_{i\notin I}p^i+W'\sum_{i\in I}p^i$$

有 $(M_1-NW)+\frac{|I|}{\sum_{i\in I}p^i}\left(\frac{p(1-p^N)}{1-p}W-M_2\right)$ 因此我们

可以构造函数 $F(M_1,M_2,W,N,p)=\frac{(M_1-NW)}{\left(M_2-\frac{p(1-p^N)}{1-p}W\right)}=\frac{|I|}{\sum_{i\in I}p^i}$

更好理解的形式是

$$F(M_1,M_2,W,N,p)=\frac{M_2-\left(\frac{p(1-p^N)}{1-p}W\right)}{(M_1-NW)}=\frac{\sum_{i\in I}p^i}{|I|} \tag{2}$$

我们已经给出了符合要求的函数

(2)

首先我们给出能够通过两次称量求出I的量化条件

对于

$$F(M_1,M_2,W,N,p)=\frac{\sum_{i\in I}p^i}{|I|}=G_p(I) \tag{3}$$

> 若对给定的p，$\forall I_1\neq I_2,G_p(I_1)\neq G_p(I_2)$
>
> 则我们称可以还原I

下面取$p=N+1$（实际上p可以任意取$>N$的正整数），证明还原性存在

若存在$I_1\neq I_2,G_p(I_1)=G_p(I_2)$

则

$$\frac{\sum\limits_{i\in I_1}p^i}{|I_1|}=\frac{\sum\limits_{i\in I_2}p^i}{|I_2|} \tag{4}$$

即

$$|I_2|\sum_{i\in I_1}p^i=|I_1|\sum_{i\in I_2}p^i \tag{5}$$

容易发现由于$p=N+1>\max\{|I_2|,|I_1|\}$,因此等式两侧是一个$p=N+1$进制数的不同位权表达，这与位权展开的唯一性违背，因此矛盾。

故$\forall I_1\neq I_2,G_p(I_1)\neq G_p(I_2)$

$p=N+1$为一个可行的取法

对于$p=2$

我们可以构造一些N,和对应的I_1,I_2使得可还原性被破坏

反例如下

$$\begin{gathered}p=2\\N=7\\I_1=\{2,2^3,2^7\}\Rightarrow G_p(I_1)=46\\I_2=\{2,2^2,2^5,2^6,2^7\}\Rightarrow G_p(I_2)=46\end{gathered} \tag{6}$$

即在$N=7$时存在两个指标集合我们函数获取的值一样，无法区分。

因此2不一定能称出来