周期三 慕课作业

T1 变形格雷码

> 一电灯由n个开关控制。每个开关有“开”、“关”两种状态，但开关当前状态未知。每按一次开关可改变开关的状态，当且仅当所有开关均处在“开”状态时电灯才能开启。
>
> （1）若当前电灯未开启，至多按开关多少次总可开启电灯；
>
> （2）给出n=4时的一种实现方式，并将其推广到n为任意值的情形。

(1)

这里给出一个简单的放缩

设$0,1$分别表示关和开，则1^n表示全部开启状态即目标状态

一个不执行冗余操作的方案中，每次翻转状态均可以产生一个没有出现的状态，则至少需要2^n-1次能够开启点灯

(2)

一个合法方案的本质是一个格雷码，即生成n长度所有的2^n个01串的排列，使得两两相邻串间相差一位

其中要求最后一个串为1111...

这里我们可以反过来生成从$0^n=0000...0000$出发的01串序列，使得相邻串相差一位

具体而言

对于$n=3$，我们先生成：

`000,001,011,010,110,111,101,100`

然后将其01翻转并序列倒转得到

`011,010,000,001,101,100,110,111`

这样我们就从一个电灯未开启的状态通过$2^3-1=7$步到达了111即电灯开启的状态

对于$n=4$是类似的

我们先生成

`0000 → 1000 → 1100 →0100 → 0110 → 1110 → 1010 → 0010 → 0011 → 1011 → 1111 → 0111 →0101 → 1101 → 1001 → 0001`

最终方案为

`1110 → 0110 → 0010 → 1010 → 1000 → 0000 → 0100 → 1100 → 1101 → 0101 → 0001 → 1001 → 1011 → 0011 → 0111 → 1111`

假设S_k为长度为k的字符串的一种方案，则$S_k=(\text{rev}(S_{k-1}^R)||0)+(S_{k-1}^R||1)$

即可以通过将S_{k-1}的每个字符串倒置，然后复制一遍在后面，对前2^{k-1}个串做序列反转，并填0，后半字符串填1即可得到S_k

换句话说，本题的答案序列是倒置且01翻转的标准格雷码

存在通用的数学表示，长度为k的串的第i个串为$S_k(i)=2^k-\left((2^k-1-i)\oplus\lfloor\frac{2^k-1-i}{2}\rfloor\right)$

这个结果看似复杂，也的确比较复杂（

T2

> 现有六堆硬币，每堆32枚。硬币有真伪两种，真币每枚重100克，伪币每枚重99克。同一堆硬币要么全是真币，要么全是伪币。现需用可显示重量的电子秤称重**一次**判断出每堆硬币的真假，试给出称量方案，并说明其正确性。若每堆仅有24枚，是否仍存在可行的称量方案?

方案如下，对于第i堆，我们取2^{i-1}枚$(1 \leqslant i \leqslant 6)$

则我们取的集合为$S=\{1,2,4,8,16,32\}$

任意两个子集的和不同，因此可以根据取出的硬币的质量和63×100作差即可获取伪币所在的堆编号

而假设只有24枚，我们可以取$S=\{11,17,20,22,23,24\}$,，容易发现中任意含 $i+1$ 个元素的子集元素之和大于含 i 个元素的子集之和，仍可以通过与标准值求差确定子集，因此存在称量方案。