第十六讲 总复习

1. 每章复习要点
2. 样卷分析

题型：选择、填空、计算、证明

复习：范围课本例子、习题、平时作业等；理清概念、性质、熟记公式…..

提醒：1）遵守考场纪律…..

2)不带计算器

3)不能用铅笔答题….

1. 每章复习要点

第一章：概率论的基本概念

随机事件的关系与运算；（事件的和、积.....）

概率的性质；（如事件的加法公式、减法公式等）

古典概率计算；

条件概率定义与计算

（条件概率、全概率、贝叶斯等等公式）

事件互不相容、相互独立

第二章　随机变量及其分布

（1）随机变量、分布函数F(x)定义、分布函数的性质

第二章

（2）离散型随机变量的分布律（性质）、

对应的分布函数（或已知分布函数求分布律）、

随机变量落在某范围内的概率、

离散型随机变量函数的分布律、

三个重要的离散型随机变量（分布律）

（（0-1）分布、二项分布、泊松分布）

第三章 多维随机变量及其分布

边缘分布；

离散型随机变量条件分布；

二维随机变量相关概率计算；

随机变量的独立性；

随机变量函数的分布

第三章

（1）二维随机变量、分布函数$F(x,y)$、分布函数的性质

（2）二维离散型随机变量的分布律（性质），

边缘分布律、条件分布律、

随机变量落在某范围内的概率（或条件概率），

离散型随机变量独立性的判定、

二维离散型随机变量函数的分布律

第三章

（3）二维连续型随机变量的概率密度及性质、

求概率密度中未知参数、

边缘概率密度、条件概率密度、

随机变量落在某范围内的概率（条件概率）、

连续型随机变量独立性的判定、

连续型随机变量函数的分布函数或概率密度

第四章 随机变量的数字特征

期望、方差、

协方差、相关系数的定义、性质及计算；

不相关的判定

第四章 随机变量的数字特征

期望、方差、

协方差、相关系数的定义、性质及计算；

不相关的判定

第四章

1. 期望、方差的定义、计算公式、性质（公式）、重要的结论或公式

2. 已知一维、二维离散型随机变量的分布律，如何求期望（包括函数的期望）、方差

3. 已知一维、二维连续型随机变量的概率密度函数，如何求期望（包括函数的期望）、方差

第四章

4.3个重要的离散型随机变量的期望、方差

5.3个重要的连续型随机变量的期望、方差

6. 协方差、相关系数的定义、计算公式、性质

7. 不相关的定义，判定；

独立与不相关的区别（判定方法的区别、关系）

8. 重要的结论（如相互独立的正态分布的线性组合仍是正态分布）

第五章 大数定律与中心极限定理

独立同分布*中心极限定理的应用*

n充分大时，有近似公式：

$X_1, X_2, \cdots, X_n$,独立同分布，记期望$E(X_i) = \mu$,方差$D(X_i) = \sigma^2$

则：$P\{a < \sum_{i=1}^{n} X_i < b\} \approx \Phi(\frac{b - n\mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma}) - \Phi(\frac{a - n\mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma})$

其中：$\Phi(x)$为标准正态分布函数

$\Phi(0) = \frac{1}{2}$, $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

第六章　样本及抽样分布

常用统计量定义；

三种抽样分布的定义、性质、图像；

上α分位点定义（标准正态分布、卡方分布、t分布、F分布分位点）

正态总体样本均值和样本方差的分布四个定理结论

第六章

常用统计量：如样本均值、样本方差

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \quad 或 S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i{}^2 - n\overline{X}^2)$$

结论:

设总体 X 的均值和方差均存在, $EX=\mu$, $DX=\sigma^2$,

对样本 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 及其样本均值 $\overline{X}$ 和样本方差 S^2,

则

$$E(\overline{X})=E(X)=\mu\,,\quad D(\overline{X})=\frac{D(X)}{n}=\frac{\sigma^2}{n}\,,$$

$$E(S^2)=D(X)=\sigma^2\,.$$

第六章

三大分布：（定义、性质、图像）

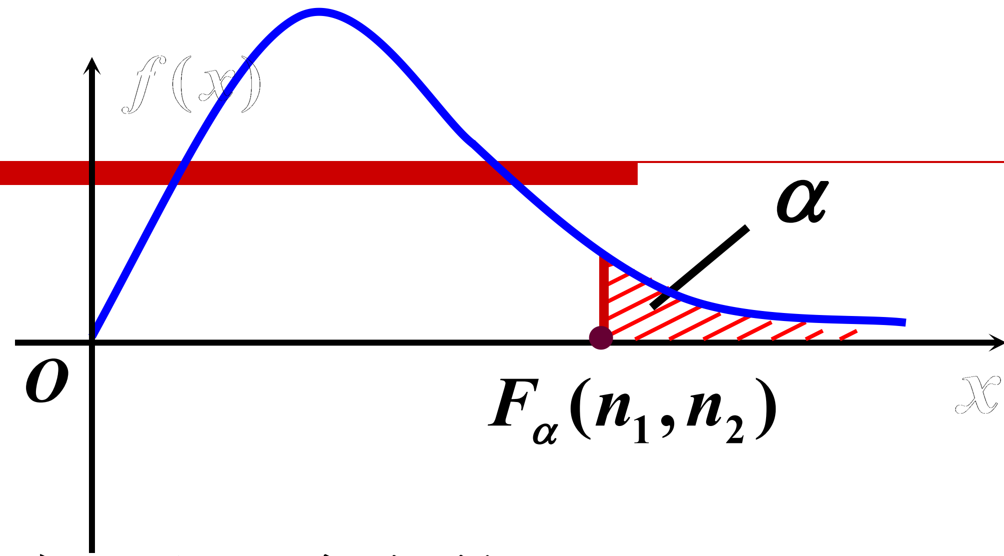
$\chi^2(n)$分布;$t(n)$分布，$\mathrm{F}(\mathrm{n}_1, n_2)$分布

分位点：

（标准正态分布（无自由度）的分位点、

三大分布（有自由度）的分位点）

如：F分布的分位点:



设$F\sim F(n_1,n_2)$，对于给定的α，$0<\alpha<1$，称满足条件

$$P\{F > F_\alpha(n_1,n_2)\} = \alpha$$

的点$F_\alpha(n_1,n_2)$为$F(n_1,n_2)$分布的上α分位点。

性质：$F_{1-\alpha}(n_1,n_2) = \dfrac{1}{F_\alpha(n_2,n_1)}$

第六章

1. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，

$\overline{X}$ 和 S^2 分别是样本均值和样本方差, 则有

则样本均值 $\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$. 或 $U = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$

而 $T = \dfrac{\overline{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$ (自由度$n-1$)

2. 设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，样本$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，

$\overline{X}$ 和 S^2 分别是样本均值和样本方差, 则有

1） $\overline{X}$ 与 S^2 相互独立;

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i{}^2-n\overline{X}^2)$$

2) $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

3) $\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \sim \chi^2(n)$

两个正态总体下：

设两个正态总体 $X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$

相互独立, 分别抽取样本 $(X_1,X_2,\cdots,X_{n_1})$ 和 $(Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2})$,

$$U=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}\sim N(0,1)$$

$$T=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_\omega\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$$

其中 $S_\omega^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$

$$F=\frac{S_1^2}{S_2^2}\bigg/\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1).$$

第七章　参数估计

矩估计、

最大似然估计；

估计量的评选标准（无偏性、有效性）；

置信区间计算

第七章　参数估计

矩估计、

最大似然估计；

估计量的评选标准（无偏性、有效性）；

置信区间计算

1、矩估计的基本原理：总体矩=样本矩，令 $\mu_l = A_l$

记总体 l 阶原点矩为 $\mu_l = E(X^l)$

样本 l 阶原点矩为 $A_l = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^l$

估计量是随机变量通常用大写字母表示，为了与真实值加以区别，注意估计量的书写；

估计值为给定样本带入计算的值，通常用小写字母表示。

矩估计法的基本步骤：

步骤1：求出总体原点矩 $u_l = E(X^l)$

（含有待估未知参数）

步骤2：列方程或者方程组，令总体原点矩=样本原点矩

$$u_l = A_l, l = 1, 2, \ldots, k$$ （ k为总体中未知参数的个数）

步骤3：解方程或者方程组，求出矩估计量。

$$\hat{\theta}_l = \theta_l(A_1, A_2, \ldots A_k), l = 1, 2, \ldots, k$$

总体中含有几个未知参数就选择几个原点矩，从低阶到高阶选取，联立方程组，解方程组。

2、最大似然估计法的基本原理:

根据样本值来确定参数，使该样本发生的概率最大。

似然函数:

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} p(x_i;\theta)$$ 离散型：联合分布律

是x_i,不是x

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$$ 连续型：联合密度函数

是x_i,不是x

对数函数的基本性质：

若$a>0, b>0$,则有：

(1) $\ln ab=\ln a+\ln b$

(2) $\ln\frac{a}{b}=\ln a-\ln b$

(3) $\ln a^{b}=b\ln a$

把似然函数转换成对数似然函数，不改变其最值点，但是可以简化计算，乘积转换成求和，商转换成差，乘方转换成乘积

求最 大似然估计(MLE)的一般步骤是：

(1) 由总体分布导出样本的联合分布 律 (或联合概率密度)， 即： 似然函数 $L(\theta)=L(x_1,x_2,\ldots,x_n;\theta)$

(2) 求似然函数$L(\theta)$ 的最大值点(常常转化为求 $\ln(L(\theta))$ 的最大值点)，即 θ的MLE：

$$令\ \frac{\mathrm{d}\ln(L(\theta))}{\mathrm{d}\theta}=0$$

一个未知参数：求导；
多个未知参数：求偏导.

(3) 解方程求出驻点，即为 θ 的最大似然估计值

$$\hat{\theta}=\hat{\theta}(x_1,x_2,\ldots x_n)$$

称 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\ldots X_n)$ 为 θ 的最大似然估计量。

3、无偏性 $E(\hat{\theta}) = \theta$

有效性（先无偏） $D(\hat{\theta}_1) < D(\hat{\theta}_2)$

4、置信区间计算（书P172）

$$(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2},\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2})$$

$$(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1),\overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1))$$

$$(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)})$$

4、置信区间计算（书P172）（单侧）

思考：应用下面公式的条件？

$$(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2},\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2})$$

$$(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1),\overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1))$$

4、置信区间计算（书P172）（单侧：$\frac{\alpha}{2}$的地方换成α）

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$$

$$\left(\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)},\frac{S_1^2/S_2^2}{F^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}\right)$$

$$化为\left(\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)},\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot F_{\frac{\alpha}{2}}(n_2-1,n_1-1)\right)$$

第八章　假设检验

假设检验；拒绝域

假设检验的两类错误

	实际情况	
决定	H_0为真	H_0不真
拒绝H_0	**第一类错误**	正确
接受H_0	正确	**第二类错误**

犯两类错误的概率：$P\{拒绝H_0|H_0为真\}=\alpha$，

$P\{接受H_0|H_0不真\}=\beta$.

假设检验的拒绝域（书P189-190）

$$|z| = \left|\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \geq z_{\alpha/2}$$

$$|t| = \left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right| \geq t_{\alpha/2}(n-1)$$

（双边检验的拒绝域有两边的……）

假设检验的拒绝域（书P189-190）

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0{}^2} \le \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}{}^2(n-1)$$

或 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0{}^2} \ge \chi_{\frac{\alpha}{2}}{}^2(n-1)$

$$\frac{S_1{}^2}{S_2{}^2} \le F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1) \text{或} \frac{S_1{}^2}{S_2{}^2} \ge F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)$$

（双边检验的拒绝域有两边的……）

期末样卷分析

一、选择题，将正确答案填在括号内（每小题 3 分，共 18 分）

1．设随机事件 A 与 B 互不相容，且有 $P(A)>0, P(B)>0$，则下列结论肯定正确的是

(　　　　).

A. $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 互不相容　　　　B. $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相容

C. $P(AB)=P(A)P(B)$　　　　D. $P(A-B)=P(A)$

2．设随机变量 X 与 Y 相互独立，对应的分布函数为 $F_X(x)$，$F_Y(y)$，则函数 $Z=\min\{X,Y\}$ 的分布函数为(　　　　).

A. $F_Z(z)=F_X(z)F_Y(z)$　　　　B. $F_Z(z)=(1-F_X(z))(1-F_Y(z))$

C. $F_Z(z)=1-[(1-F_X(z))(1-F_Y(z))]$　　　　D. $F_Z(z)=1-F_X(z)F_Y(z)$

期末样卷分析

3. 对任意的两个随机变量 X 与 Y，若 $E(XY)=E(X)E(Y)$，则一定成立的是（　　　　）.

A. $D(XY)=D(X)D(Y)$　　　　B. $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

C. X 与 Y 相互独立　　　　D. X 与 Y 不相互独立

4. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_9$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_9$ 均来自正态总体 $N(0,0.3^2)$ 的两个独立样本，

则统计量 $U=\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_9}{\sqrt{Y_1^2+Y_2^2+\cdots+Y_9^2}}$ 的分布是（　　　　）.

A. $\chi^2(9)$；　　B. $t(9)$　　C. $F(9,9)$；　　D. 不能确定

5. 在假设检验中，显著性水平 α 表示（　　　　）.

A. H_0 为真,但接受 H_0 的概率　　　　B. H_0 为真,但拒绝 H_0 的概率

C. H_0 不真,但接受 H_0 的概率　　　　D. 假设 H_0 的可信度

期末样卷分析

6. 某厂生产的某种型号的电机,其寿命长期以来服从方差$\sigma^2=50^2$的正态分布.现有一批这种电机, 从它的生产情况来看,寿命的波动性有所变化.现随机地取 26 只电机,测出其寿命的样本方差$s^2=2800$，问能否认为这批电机的寿命的波动性较以往显著地偏大（$\alpha=0.05$）?对此检验问题　应提出的假设为(　　　　).

A. $H_0:\sigma^2\ge 50^2$　$H_1:\sigma^2<50^2$　　B. $H_0:\sigma^2\le 50^2$　$H_1:\sigma^2>50^2$

C. $H_0:\sigma^2=50^2$　$H_1:\sigma^2<50^2$　　D. $H_0:\sigma^2=50^2$　$H_1:\sigma^2\ne 50^2$

二、填空题（每小题3 分，共 15 分）

1. 设事件A,B相互独立，且满足$P(A)=0.6$，$P(B)=0.4$，则$P(A\cup B)=$__________ .

2. 设$X\sim N(3,\sigma^2)$，$P\{3<X<6\}=0.4$，则$P\{X\le 0\}=$__________ .

3. 设两个随机变量X与Y相互独立且服从同分布：$P\{X=-1\}=P\{Y=-1\}=\frac{1}{2}$，

$P\{X=1\}=P\{Y=1\}=\frac{1}{2}$，则$P\{X=Y\}=$__________ .

期末样卷分析

4. 设X，Y是两个相互独立随机变量，且$D(X)=5$，$D(Y)=12$，

则$D(3X-Y+15)=$______________ .

5. 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自该总体X的一个简单随机样本，记统计量$T^2=C\cdot\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，

若T^2是总体X方差$D(X)$的无偏估计量，则$C=$ ______________ .

期末样卷分析

三、（本题 15 分）设随机变量(X,Y)的概率分布律为：

Y \ X	0	1	2
0	0.2	0.1	0.2
1	0.1	0.3	0.1

（1）求关于$Z=XY$的分布律；

（2）求概率$P\{X+Y\le 1\}$；

（3）求方差$D(X)$和协方差$Cov(X,Y)$；

（4）问X与Y是否不相关？需说明理由.

期末样卷分析

四、（本题 20 分）设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0<y<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

（1）求关于 X 和关于 Y 的边缘概率密度 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$；

（2）问 X 与 Y 是否相互独立？需说明理由.

（3）求 $E(X^2+Y^2)$；

（4）求 $Z=X+Y$ 的分布函数 $F_Z(z)$.

期末样卷分析

五、（本题 8 分）设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_{100}$ 相互独立，且都服从相同的指数分布，

概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-x/2}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$，试用中心极限定理求概率 $P\{\sum_{i=1}^{100} X_i > 180\}$ 的近

似值.（结果用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示，$x>0$）

期末样卷分析

六、(本题10分)设总体X具有分布律：

X	1	2	3
P_k	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

其中$\theta\ (0<\theta<1)$为未知参数.已知取得了样本值$x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=1$, $x_4=3$，

试求θ的矩估计值和最大似然估计值.

期末样卷分析

七、（本题 8 分）有一大批糖果，现从中随机地取16袋, 称其重量（以 g 计），计算得样本均值 $\bar{x}=502.5$, 样本标准差 $s=4.0$. 设袋装糖果的重量近似服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ,σ^2 均未知. 求总体均值 μ 的置信水平为0.95的置信区间.（保留二位小数）

（$t_{0.05}(15)=1.7531, t_{0.05}(16)=1.7459$，$t_{0.025}(15)=2.1315$，$t_{0.025}(16)=2.1199$）.

期末样卷分析

八、（本题 6 分）设总体 X 具有概率密度 $f(x,\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}, & 0<x\le\theta\\ 0, & 其他\end{cases}$，其中 θ 是未知参数，

$X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是总体 X 的一个简单随机样本 $(n>1)$，

证明：（1）参数 θ 的最大似然估计量；

（2）$\hat{\theta}=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 不是 θ 的无偏估计量.

期末样卷分析（解答）

一、选择题，将正确答案填在**括号**内（每小题 3 分，共 18 分）

1．设随机事件 A 与 B 互不相容，且有 $P(A)>0, P(B)>0$，则下列结论肯定正确的是(　D　)

A. $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 互不相容　　B. $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相容

C. $P(AB)=P(A)P(B)$　　D. $P(A-B)=P(A)$

2．设随机变量 X 与 Y 相互独立，对应的分布函数为 $F_X(x)$，$F_Y(y)$，则函数 $Z=\min\{X,Y\}$ 的分布函数为(　C　).

A. $F_Z(z)=F_X(z)F_Y(z)$　　B. $F_Z(z)=(1-F_X(z))(1-F_Y(z))$

C. $F_Z(z)=1-[(1-F_X(z))(1-F_Y(z))]$　　D. $F_Z(z)=1-F_X(z)F_Y(z)$

3．对任意的两个随机变量 X 与 Y，若 $E(XY)=E(X)E(Y)$，则一定成立的是（　B　).

A. $D(XY)=D(X)D(Y)$　　B. $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

C. X 与 Y 相互独立　　D. X 与 Y 不相互独立

期末样卷分析

4. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_9$ 和 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_9$ 均来自正态总体 $N(0, 0.3^2)$ 的两个独立样本，

则统计量 $U = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_9}{\sqrt{Y_1^2 + Y_2^2 + \cdots + Y_9^2}}$ 的分布是（ B ）.

A. $\chi^2(9)$； B. $t(9)$ C. $F(9,9)$； D. 不能确定

5. 在假设检验中，显著性水平 α 表示（ B ）.

A. H_0 为真，但接受 H_0 的概率 B. H_0 为真，但拒绝 H_0 的概率

C. H_0 不真，但接受 H_0 的概率 D. 假设 H_0 的可信度

6. 某厂生产的某种型号的电机，其寿命长期以来服从方差 $\sigma^2 = 50^2$ 的正态分布. 现有一批这种电机，从它的生产情况来看，寿命的波动性有所变化. 现随机地取 26 只电机，测出其寿命的样本方差 $s^2 = 2800$，问能否认为这批电机的寿命的波动性较以往显著地偏大 $(\alpha = 0.05)$?对此检验问题应提出的假设为（ B ）.

A. $H_0: \sigma^2 \le 50^2 \quad H_1: \sigma^2 > 50^2$ B. $H_0: \sigma^2 \ge 50^2 \quad H_1: \sigma^2 < 50^2$

C. $H_0: \sigma^2 = 50^2 \quad H_1: \sigma^2 < 50^2$ D. $H_0: \sigma^2 = 50^2 \quad H_1: \sigma^2 \ne 50^2$

期末样卷分析

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设事件 A, B 相互独立，且满足 $P(A)=0.6$，$P(B)=0.4$，则 $P(A\cup B)=$ ___0.76___ .

2. 设 $X\sim N(3,\sigma^2)$，$P\{3<X<6\}=0.4$，则 $P\{X\le 0\}=$ ___0.1___ .

3. 设两个随机变量 X 与 Y 相互独立且服从同分布：$P\{X=-1\}=P\{Y=-1\}=\frac{1}{2}$，

   $P\{X=1\}=P\{Y=1\}=\frac{1}{2}$，则 $P\{X=Y\}=$ ___0.5___ .

4. 设 X，Y 是两个相互独立随机变量，且 $D(X)=5$，$D(Y)=12$，

   则 $D(3X-Y+15)=$ ___57___ .

5. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自该总体 X 的一个简单随机样本，记统计量 $T^2=C\cdot\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，

   若 T^2 是总体 X 方差 $D(X)$ 的无偏估计量，则 $C=$ ___1/(n-1)___ .

三

Y \ X	0	1	2
0	0.2	0.1	0.2
1	0.1	0.3	0.1

解：（1） XY 的边缘分布律为

XY	0	1	2
P	0.6	0.3	0.1

.........3 分

2） $P\{X+Y\le 1\}=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=0,Y=1\}+P\{X=1,Y=0\}=0.4$ ....2 分

（3）易知： $E(X)=0\times 0.3+1\times 0.4+2\times 0.3=1$ ....1 分

$E(X^2)=0^2\times 0.3+1^2\times 0.4+2^2\times 0.3=1.6$ ....1 分

故 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=1.6-1^2=0.6$ ....2 分

同理： $E(Y)=0\times 0.5+1\times 0.5=0.5$ ....1 分

$E(XY)=0\times 0.6+1\times 0.3+2\times 0.1=0.5$ ....1 分

故 $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0.5-1\times 0.5=0$ ....2 分

（4）因 $Cov(X,Y)=0$，知 $\rho_{XY}=0$ ....1 分

故 X 与 Y 是不相关的 ....1 分

四

解：（1）关于 X 的边缘概率密度 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$ ……1 分

$$=\begin{cases}\int_0^x 8xy\cdot dy\ ,\ 0<x<1\\ 0\ ,\ 其他\end{cases}\quad=\begin{cases}4x^3\ ,\ 0<x<1\\ 0\ ,\ 其他\end{cases}$$ ……3 分

关于 Y 的边缘概率密度 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$ ……1 分

$$=\begin{cases}\int_y^1 8xydx\ ,\ 0<y<1\\ 0,其他\end{cases}=\begin{cases}4y(1-y^2)\ ,\ 0<y<1\\ 0,其他\end{cases}$$ ……3 分

（2）易知 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，故 X 与 Y 不相互独立 ……2 分

（3） $E(X^2+Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}(x^2+y^2)f(x,y)dy$ ……2 分

$$=\int_0^1 dx\int_0^x (x^2+y^2)\cdot 8xydy=1$$ ……2 分

（或用 $E(X^2+Y^2)=E(X^2)+E(Y^2)=2/3+(1-2/3)=1$）

（4）因 $F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X+Y\le z\}$ ……1 分

$$故\ F_Z(z)=\begin{cases}0\ ,\ z<0\\ \int_0^{z/2}dy\int_y^{z-y}8xydx\ ,\ 0\le z<1\\ 1-\int_{z/2}^1 dx\int_{z-x}^x 8xydy\ ,\ 1\le z<2\\ 1\ ,\ z\ge 2\end{cases}=\begin{cases}0\ ,\ z<0\\ \dfrac{z^3}{6}\ ,\ 0\le z<1\\ 1-\dfrac{2z^2}{3}-\dfrac{z^4}{2}+\dfrac{z^5}{3}\ ,\ 1\le z<2\\ 1\ ,\ z\ge 2\end{cases}$$

期末样卷分析

五、（本题 8 分）设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_{100}$ 相互独立，且都服从相同的指数分布，概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-x/2}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$，试用中心极限定理求概率 $P\{\sum_{i=1}^{100} X_i > 180\}$ 的近似值.

（结果用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示， $x>0$ ）

解：由题意 $E(X_k)=2$，$D(X_k)=4$ ……2 分

所求概率 $P\{\sum_{i=1}^{100} X_i > 180\} = 1 - P\{\sum_{i=1}^{100} X_i \le 180\}$

$$= 1 - P\{(\frac{\sum_{k=1}^{100} X_k - 100\times 2}{\sqrt{100\times 4}} \le \frac{180-100\times 2}{\sqrt{400}}\}$$ ……4 分

$$\approx 1-\Phi(-1)=\Phi(1)$$ ……2 分

期末样卷分析

六、（本题 10 分）设总体 X 具有分布律：

X	1	2	3
P_k	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

其中 θ $(0<\theta<1)$ 为未知参数.已知取得了样本值 $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=1$, $x_4=3$，

试求 θ 的矩估计值和最大似然估计值.

解：（1）因 $E(X)=1\times\theta^2+2\times 2\theta(1-\theta)+3(1-\theta)^2=3-2\theta$ ……3 分

令 $E(X)=\overline{X}=\dfrac{1+2+1+3}{4}$，解得 θ 的矩估计值 $\hat{\theta}=\dfrac{5}{8}$ ……2 分

（2）似然函数 $L(x_1,x_2,x_3,x_4,\theta)=\theta^2\cdot 2\theta(1-\theta)\cdot\theta^2\cdot(1-\theta)^2=2\theta^5\cdot(1-\theta)^3$ ……2 分

取对数：$\ln L(\theta)=\ln 2+5\ln\theta+3\ln(1-\theta)$

令 $\dfrac{d\ln(\theta)}{d\theta}=\dfrac{5}{\theta}-\dfrac{3}{1-\theta}=0$，解得 θ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}=\dfrac{5}{8}$ ……3 分

期末样卷分析

七、（本题 8 分）有一大批糖果，现从中随机地取16袋,称其重量（以 g 计），计算得样本均值

$\bar{x}=502.5$,样本标准差 $s=4.0$.设袋装糖果的重量近似服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，

其中 μ,σ^2 均未知.求总体均值 μ 的置信水平为0.95的置信区间.（保留二位小数）

（$t_{0.05}(15)=1.7531$, $t_{0.05}(16)=1.7459$，$t_{0.025}(15)=2.1315$，$t_{0.025}(16)=2.1199$）.

解：这里 $\alpha=0.05$，$n=16$，故 μ 的置信水平为 95%的置信区间

为：$\bar{x}\pm t_{\alpha/2}(n-1)\dfrac{s}{\sqrt{n}}$ ……6 分

$=502.5\pm 2.1315\cdot\dfrac{4.0}{4}$ ……1 分

$\approx(500.37, 504.63)$ ……1 分

八、

证明：（1）似然函数 $L(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^n},0<x_i\le\theta\\ 0,其他\end{cases}$

由单调性知：参数 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ ……2 分

（2）设 $\hat{\theta}=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 的分布函数 $F_M(z)$

由题意 $F_M(z)=\prod_{i=1}^{n}F_X(z)=\begin{cases}0,z<0\\ \dfrac{z^n}{\theta^n},0\le z<\theta\\ 1,z\ge\theta\end{cases}$ ……1 分

其概率密度为 $f_M(z)=\begin{cases}\dfrac{nx^{n-1}}{\theta^n},0<z\le\theta\\ 0,其他\end{cases}$ ……1 分

故 $E(\hat{\theta})=\int_{-\infty}^{+\infty}zf_M(z)dz=\int_0^{\theta}nz^n/\theta^n dz=\dfrac{n}{n+1}\theta\ne\theta$ ……2 分

即参数 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 不是无偏估计量.