2024 年 HDU「概率论与数理统计」期中模拟

1 选择题（每题 2 分，共 20 分）

PROBLEM 1. 将一枚硬币独立地掷两次，有以下事件：$A_1 = \{$掷第一次出现正面$\}$, $A_2 = \{$掷第二次出现正面$\}$, $A_3 = \{$正、反面各出现一次$\}$，$A_4 = \{$正面出现两次$\}$，则事件

A. A_1, A_2, A_3 相互独立　B. A_2, A_3, A_4 相互独立　✔ A_1, A_2, A_3 两两独立　D. A_2, A_3, A_4 两两独立

SOLUTION. 因为 $P(A_i) = 1/2$，$P(A_1A_2) = P(A_1A_3) = P(A_2A_3) = \frac{1}{4}$，$P(A_1A_2A_3) = 0$，$P(A_2A_4) \neq P(A_2)P(A_4)$，所以 $P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2)$, $P(A_1A_3) = P(A_1)P(A_3)$, $P(A_2A_3) = P(A_2)P(A_3)$, $P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$，$A_1$, A_2, A_3 两两独立而不相互独立. A_2, A_3, A_4 不两两独立更不相互独立.

PROBLEM 2. 当事件 A 与 B 同时发生时，事件 C 必发生，则下列结论中，正确的是

A. $P(C) = P(AB)$　B. $P(C) = P(A \cup B)$　✔ $P(C) \geq P(A)+P(B)-1$　D. $P(C) \leq P(A)+P(B)-1$

SOLUTION. 因为事件 A 与 B 同时发生时，事件 C 必发生，即 $AB \subset C$，因此 $P(C) \geq P(AB)$. 又因 $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$，则 $P(C) \geq P(A) + P(B) - P(AB) \geq P(A) + P(B) - 1$.

PROBLEM 3. 设 $F_1(x)$, $F_2(x)$ 为两个分布函数，其相应的概率密度为 $f_1(x)$, $f_2(x)$ 是连续函数，则下列必为概率密度的是

A. $f_1(x)f_2(x)$　B. $2f_2(x)F_1(x)$　C. $f_1(x)F_2(x)$　✔ $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$

SOLUTION. 根据概率密度的性质，检验各选项得 $\int_{-\infty}^{+\infty} [f_1(x)F_2(x) + f_2(x)F_1(x)]\,\mathrm{d}x = F_1(x)F_2(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 1$.

PROBLEM 4. 设随机变量 X 和 Y 相互独立，且 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$, Y 的概率分布为 $P\{Y = 0\} = P\{Y = 1\} = 1/2$，记 $F_Z(z)$ 为随机变量 $Z = XY$ 的分布函数，则函数 $F_Z(z)$ 间断点个数为

A. 0　✔ 1　C. 2　D. 3

SOLUTION.

- 因为 X, Y 相互独立，则 $P\{X \cdot 0 \leq z|Y = 0\} = P\{X \cdot 0 \leq z\}$, $P\{X \cdot 1 \leq z|Y = 1\} = P\{X \leq z\}$.
- $F_Z(z) = P\{XY \leq z|Y = 0\}P\{Y = 0\} + P\{XY \leq z|Y = 1\}P\{Y = 1\} = \frac{1}{2}[P\{X \cdot 0 \leq z\} + P\{X \cdot 1 \leq z\}]$.
- 若 $z < 0$，则 $F_Z(z) = \frac{1}{2}\Phi(z)$；若 $z \geq 0$，则 $F_Z(z) = \frac{1}{2}[1 + \Phi(z)]$. 则 $z = 0$ 为间断点.

PROBLEM 5. 设随机变量 X 与 Y 独立且具有相同的分布，设 $P(X = 0) = P(X = 1) = 1/2$，则下列各式中正确的是

A. $P(X = Y) = 1/2$　B. $P(X = Y) = 1$　C. $P(XY = 0) = 1/4$　D. $P(X + Y = 1) = 1/4$

SOLUTION. $P(X = Y) = p(x = y = 1) + p(x = y = 0) = p(x = 0)p(y = 0) + p(x = 1)p(y = 1) = 1/2$.

Problem 6. 设随机变量 X 的分布函数 $F(X)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{1}{2}, & 0\le x<1\\ 1-e^{-x}, & x\ge 1\end{cases}$，则 $P\{X=1\}$ 等于

A. 0 B. $\frac{1}{2}$ ✔ $\frac{1}{2}-e^{-1}$ D. $1-e^{-1}$

Solution. $P\{X=1\}=P\{X\le 1\}-P\{X<1\}=F(1)-F(1-0)=1-e^{-1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-e^{-1}$.

Problem 7. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}1/3, & 0\le x<1\\ kx^2, & 1\le x\le 2\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

则常数 k 的值为

A. 1/7 B. 2/7 C. 3/14 D. 3/8

Solution. 对 $f(x)$ 积分得 $\int_0^1\frac{1}{3}\,\mathrm{d}x+\int_1^2 kx^2\,\mathrm{d}x=(1+7k)/3=1$，$k=2/7$.

Problem 8. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=0.2\Phi(x)+k\Phi\left(\frac{x-2}{4}\right)$，其中 $\Phi(x)$ 是标准正态分布的分布函数，k 为某个常数，那么 $E[X]$ 为

✔ 8/5 B. 4/5 C. 2 D. 1

Solution. 利用分布函数的归一化条件得 $k=1-0.2=0.8$，则 X 的概率密度函数为

$$f_X(x)=F'(x)=\frac{1}{5\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}+\frac{4}{5\sqrt{32\pi}}e^{-(x-2)^2/32}$$

根据正态分布的期望 $\int_{-\infty}^{+\infty}x\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-k)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x=k$ 得 $E[X]=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)\,\mathrm{d}x=\frac{0}{5}+\frac{8}{5}=\frac{8}{5}$.

Problem 9. 设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$（$\sigma>0$），记 $p=P(X\le\mu+\sigma^2)$，则

A. p 随 μ 的增加而增加 B. p 随 σ 的增加而增加 C. p 随 μ 的增加而减少 D. p 随 σ 的增加而减少

Solution. $(X-\mu)/\sigma$ 服从标准正态分布，$P(X\le\mu+\sigma^2)=P[(x-\mu)/\sigma\le\sigma]=\Phi(\sigma)$，所以本题选择 B 项.

Problem 10. 已知随机变量 $Z=\min\{X,Y\}$，其中 X，Y 相互独立，那么

A. $f_z(z)=f_x(z)f_y(z)$ B. $F_z(z)=F_x(z)F_y(z)$

C. $f_z(z)=(1-F_x(z))(1-F_y(z))$ ✔ $F_z(z)=1-(1-F_x(z))(1-F_y(z))$

Solution. $F_z(z)=P(Z<z)=P(\min\{X,Y\}<z)=1-P(\min\{X,Y\}\ge z)$，该式可以写成 $1-P(X\ge z,Y\ge z)=1-P(X\ge z)P(Y\ge z)$，即 $1-(1-F_x(z))(1-F_y(z))$.

2 填空题（每题 2 分，共 10 分）

Problem 11. 设两个相互独立的事件 A 和 B 都不发生的概率为 $\frac{1}{9}$，且 A 发生 B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相等，则 $P(A) = \underline{2/3}$.

Solution. 由于 A, B 相互独立，则 $P(AB) = P(A)P(B)$，且 $P(\overline{A}\,\overline{B}) = 1/9$, $P(A\overline{B}) = P(\overline{A}B)$. 则有

$$\begin{cases} P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(\overline{A+B}) = 1 - P(A+B) = \frac{1}{9} \\ P(A) - P(AB) = P(B) - P(AB) \end{cases}, \begin{cases} 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) = \frac{1}{9} \\ P(A) = P(B) \end{cases}$$

所以 $1 - 2P(A) + P^2(A) = 1/9$. 解得 $P(A) - 1 = \pm 1/3$, $P(A) = 4/3$（舍去）或 $P(A) = 2/3$.

Problem 12. 已知随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，且 $P\{X=0\} = e^{-1}$，则 $\lambda = \underline{1}$.

Solution. 因为 $X \sim \pi(\lambda)$, $P\{X = k\} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$（$\lambda > 0$）故 $P\{X = 0\} = \frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!} = e^{-1}$，则 $\lambda = 1$.

Problem 13. 设 $X \sim N(\mu, 10^2)$, $P(X > 85) = 1 - \Phi(1)$，则 $P(X > 65) = \underline{\Phi(1)}$.

Solution.

- 题目中已知 $X \sim N(\mu, 10^2)$，即 X 服从均值为 μ，方差为 $10^2 = 100$ 的正态分布.
- 给定 $P(X > 85) = 1 - \Phi(1)$. 根据正态分布的性质，X 的标准化后分布满足 $P\left(\frac{X-\mu}{10} > \frac{85-\mu}{10}\right) = 1 - \Phi(1)$.
- 由 $1 - \Phi(1) = P(Z > 1)$ 可得 $\frac{85-\mu}{10} = 1$，解得均值 $\mu = 75$.
- 要求 $P(X > 65)$，首先对 X 进行标准化 $P(X > 65) = P\left(\frac{X-75}{10} > \frac{65-75}{10}\right) = P(Z > -1)$.
- 由于 $P(Z > -1) = \Phi(1)$，最终结果为 $P(X > 65) = \Phi(1)$.

Problem 14 (2010 年全国考研题). 设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度，$f_2(x)$ 为 $[-1, 3]$ 上的均匀分布的概率密度，若 $f(x) = \begin{cases} af_1(x), & x \le 0 \\ bf_2(x), & x > 0 \end{cases}$，（$a > 0$, $b > 0$）为概率密度，则 a, b 应满足 $\underline{a/2 + 3b/4 = 1}$.

Solution. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} af_1(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} bf_2(x)\,\mathrm{d}x = 1$，那么得到 $a/2 + 3b/4 = 1$.

Problem 15. 已知随机变量 X 满足参数为 $\frac{3}{2}$ 的指数分布，期望 $E(2e^x - 1) = \underline{5}$.

Solution.

- 假设随机变量 X 满足参数为 $\lambda = \frac{3}{2}$ 的指数分布，则其概率密度函数为 $f_X(x) = \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}x}$（$x \ge 0$）.
- 要求 $E(2e^X - 1)$，根据期望的线性性质，可将其分解为 $E(2e^X - 1) = 2E(e^X) - E(1) = 2E(e^X) - 1$.
- 接下来计算 $E(e^X)$：$E(e^X) = \int_0^\infty e^x f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty e^x \cdot \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}x}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x}\,\mathrm{d}x = 3$.
- 最终得到：$E(2e^X - 1) = 2 \cdot 3 - 1 = 6 - 1 = 5$.

3 解答题（共 60 分）

PROBLEM 16 (本题 12 分). 设随机变量 X, Y 相互独立，它们的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0\\ 0, & \text{else}\end{cases},\quad f_Y(y)=\begin{cases}2y, & 0<y<1\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

1. 求 (X,Y) 的概率密度.
2. 求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

SOLUTION.

1. 由于 X, Y 相互独立，(X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}2ye^{-x}, & x>0,\ 0<y<1\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

2. (X,Y) 的正概率区域 D 与所求概率 $F_Z(z)=P\{X+Y\le z\}$ 的积分区域的公共部分有三种不同组合形式.

   - 当 $z<0$ 时，$F_z(z)=0$.
   - 当 $0\le z<1$ 时，$F_z(z)=\int_0^z \mathrm{d}x\int_0^{-x} 2ye^{-x}\,\mathrm{d}y=z^2-2z-2e^{-z}+2$.
   - 当 $z\ge 1$ 时，$F_Z(z)=1-\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{-y}^{+\infty} 2ye^{-x}\,\mathrm{d}x=1-2e^{-z}$.

   因此 $Z=X+Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=\begin{cases}2z+2e^{-z}-2, & 0<z<1\\ 2e^{-z}, & z>1\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

PROBLEM 17 (本题 12 分). 某厂产品有 70% 不需要调试即可以出厂，另外 30% 需要调试，调试后有 80% 的产品能出厂.

1. 求该厂产品能出厂的概率.
2. 任取一出厂产品，求未经调试的概率.

SOLUTION. A 表示产品能出厂,B_1 表示产品不需要调试,B_2 表示产品需要调试. 则 $P(B_1)=70\%$, $P(B_2)=30\%$, $P(A|B_1)=1$, $P(A|B_2)=0.8$.

1. 由全概率公式可知 $P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)=1\times 0.7+0.8\times 0.3=0.94$.
2. 由贝叶斯公式可得 $P(B_1|A)=P(A|B_1)P(B_1)/P(A)=1\times 0.7/0.94=0.74$.

PROBLEM 18 (本题 6 分). 设随机变量 X, Y 相互独立，且服从同一分布. 试证明

$$P\{a<\min(X,Y)\le b\}=[P\{X>a\}]^2-[P\{X>b\}]^2$$

SOLUTION. *Proof.* 设 $Z=\min(X,Y)$, X, Y 服从同一分布的分布函数为 $F(\cdot)$，则 Z 的分布函数为

$$F_Z(z)=P\{\min(X,Y)\le z\}=1-P\{\min(X,Y)>z\}=1-P\{X>z,Y>z\}$$

由于 X, Y 相互独立同分布，故 $F_Z(z)=1-[P(X\ge z)]^2$，$P\{a<\min(X,Y)\le b\}=F_Z(b)-F_Z(a)$. ∎

Problem 19 (本题 12 分). 今有甲乙两名射手轮流对同一目标进行射击，甲命中的概率为 p_1，乙命中的概率为 p_2，谁先命中谁获胜，分别求甲、乙两人获胜的概率.

Solution. 令 A, B 分别表示“甲获胜”、“乙获胜”，A_i, B_i（$i = 1, 2, \ldots$）分别表示“甲第 i 次射击命中”、“乙第 i 次射击命中”，则 $A = A_1 \cup \overline{A_1 B_1} A_2 \cup \overline{A_1 B_1 A_2 B_2} A_3 \cup \ldots$，$B = \overline{A_1} B_1 \cup \overline{A_1 B_1 A_2} B_2 \cup \overline{A_1 B_1 A_2 B_2 A_3} B_3 \cup \ldots$，因而

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1) + P(\overline{A}_1 \overline{B}_1 A_2) + \cdots = P(A_1) + P(\overline{A}_1) P(\overline{B}_1) P(A_2) + \cdots \\ &= p_1 + (1-p_1)(1-p_2)p_1 + \cdots = \frac{p_1}{1-(1-p_1)(1-p_2)} = \frac{p_1}{p_1+p_2-p_1p_2} \end{aligned}$$

因为 A 与 B 为互逆事件，所以 $P(B) = 1 - P(A) = \frac{(1-p_1)p_2}{p_1+p_2-p_1p_2}$.

Problem 20 (本题 18 分). 某单位招聘 155 人，按考试成绩录用，共有 523 人报名，假设报名者的考试成绩 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$. 已知 90 分以上的有 12 人，60 分以下的有 83 人，若从高分到低分依次录取，某人的考试成绩为 78 分，此人能否被录取？附数据：$\Phi(0.54) = 0.7054$, $\Phi(0.8) = 0.7881$, $\Phi(1.0) = 0.8413$, $\Phi(2.0) = 0.9771$.

Solution. 分别求出 $P\{X \le 90\}$, $P\{X < 60\}$，并标准化

- $P\{X \le 90\} = 1 - P\{X > 90\} = 1 - 12/523 \approx 0.9771$
- $P\{X < 60\} = 83/523 \approx 0.1587$
- $P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{90-\mu}{\sigma}\right\} = \Phi\left(\frac{90-\mu}{\sigma}\right) = 0.9771$
- $P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{60-\mu}{\sigma}\right\} = \Phi\left(\frac{60-\mu}{\sigma}\right) = 0.1587$

查表得 $\frac{90-\mu}{\sigma} \approx 2.0$, $\frac{\mu-60}{\sigma} \approx 1.0$. 联立解得 $\mu = 70$, $\sigma = 10$，则 $X \sim N(70, 10^2)$. 录取率为 $155/523 \approx 0.2964$.

解法 1. $P\{X > 78\} = 1 - P\{X \le 78\} = 1 - P\left\{\frac{X-70}{10} \le \frac{78-70}{10}\right\} = 1 - \Phi(0.8) \approx 0.2119 < 0.2964$，可以被录取.

解法 2. 设被录取者的最低分为 x_0，则 $P\{X > x_0\} = 0.2964$. 由于 $P\{X \le x_0\} = 1 - P\{X > x_0\} \approx 0.7036$.

$$P\{X \le x_0\} = P\left\{\frac{X-70}{10} \le \frac{x_0-70}{10}\right\} = P\left\{X^* \le \frac{x_0-70}{10}\right\} = \Phi\left(\frac{x_0-70}{10}\right) = 0.7036$$

则有 $\frac{x_0-70}{10} < 0.54$，解得 $x_0 < 75.4$，该人分数为 78 分，大于 75.4 分，可以被录取.