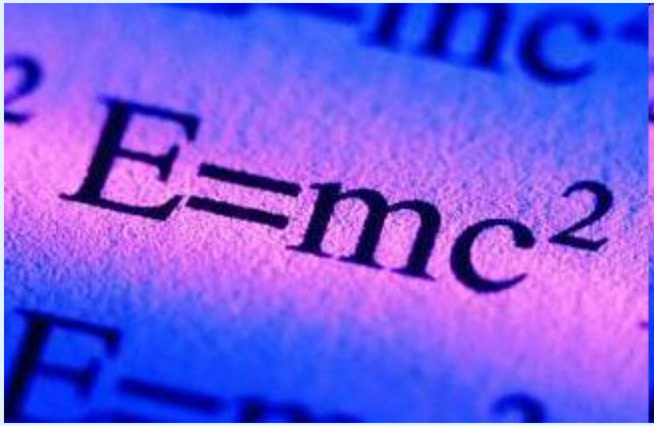
# 相对论

狭义相对论，给出物体在高速运动下的运动规律，揭示了质量和能量相当，给出了质能关系式。



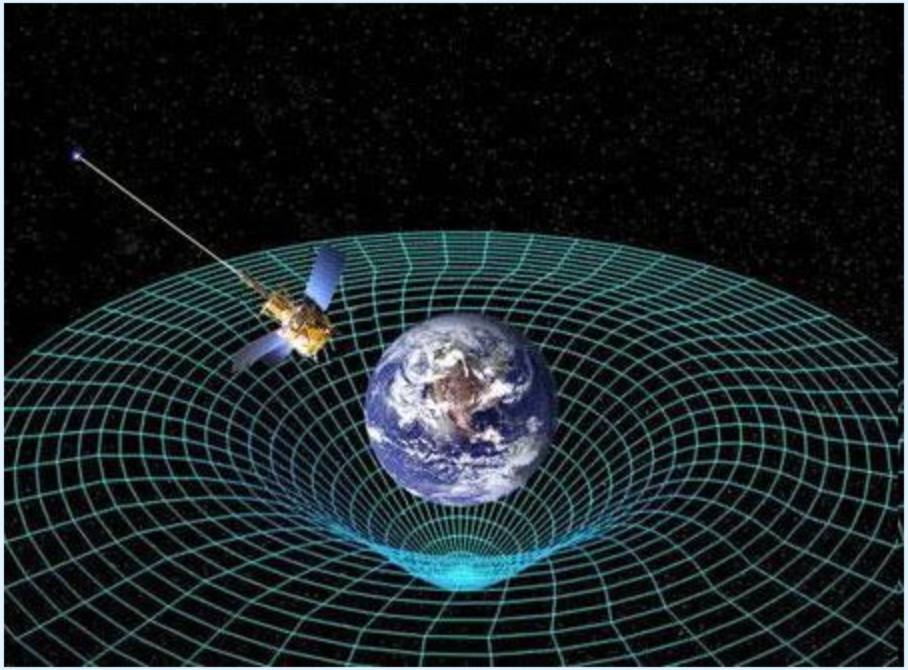

广义相对论，建立了完善的引力理论

曾给出四个著名的预言：

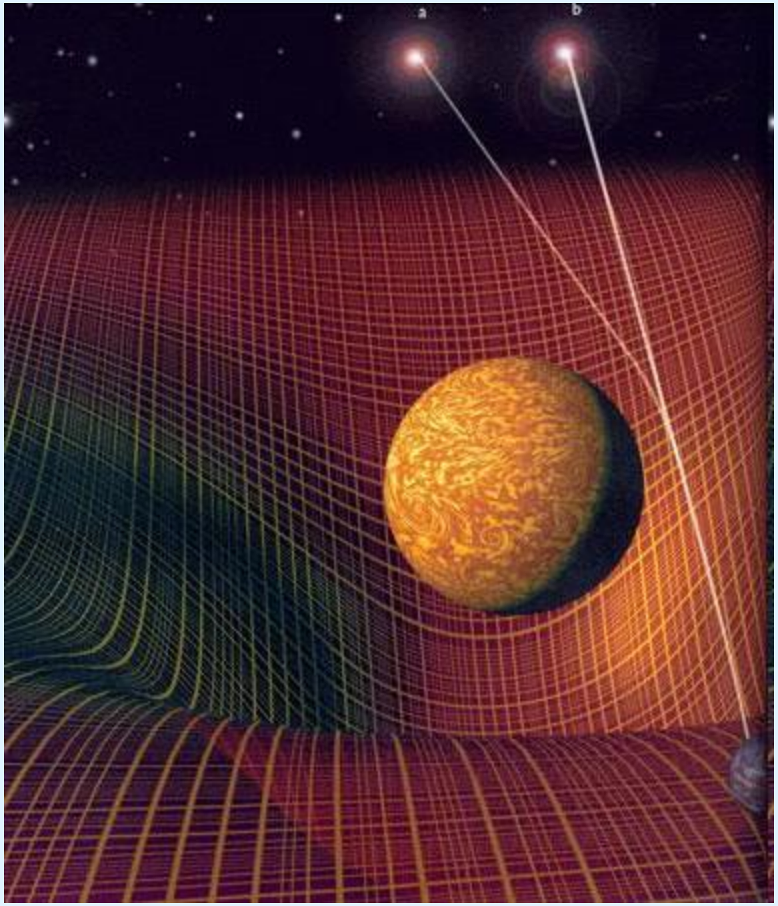
光线弯曲、引力红移、黑洞存在、引力波存在。

## 验证相对论的实验

1.日食观测队证实了光线经过太阳时发生了偏离，1.72±0.11角秒

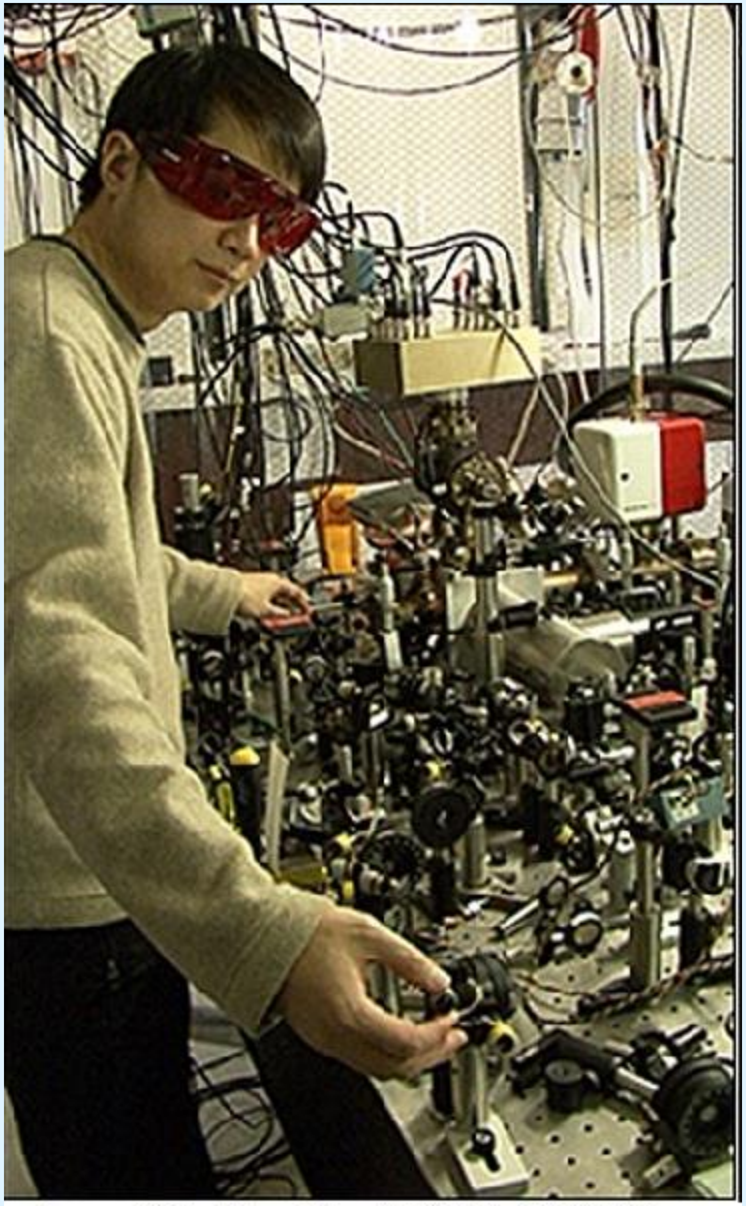


空间弯曲 引力探测器



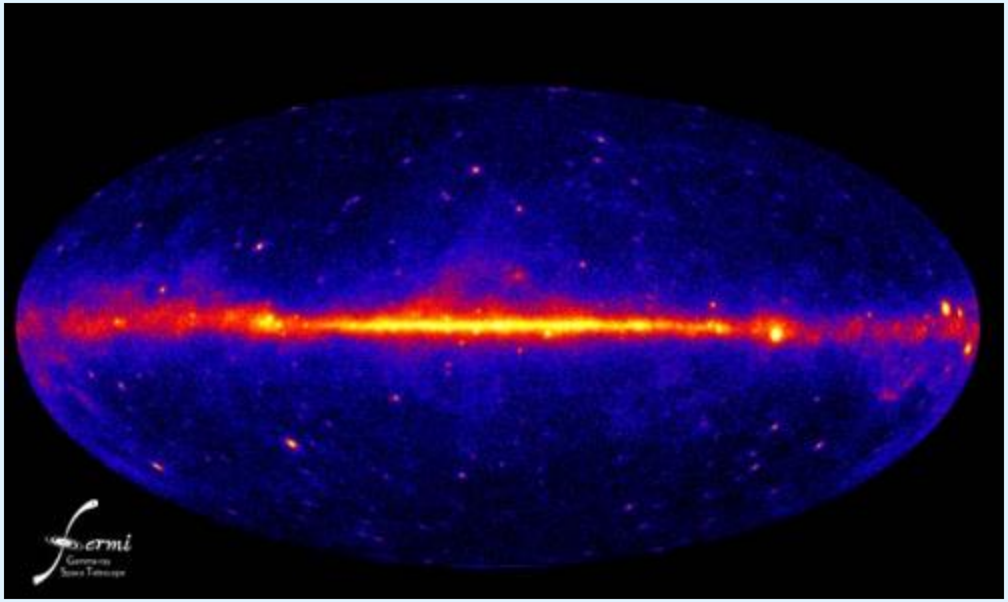
星光在太阳引力场中弯曲

2. 高海拔地区的时间流逝得会快一些；高速运动的钟走得慢。



James Chin-Wen Chou和世界上最准的钟

## 3. 费米广域望远镜观测到短伽马射线爆发



# 科普片，一个有趣的实验

# 第十二章 相对论

01 狭义相对论基本原理

02 粒子物理技术

03 广义相对论简介（选读）

# 12.1 狭义相对论基本原理

**01 光速不变原理**

**02 狭义相对论原理**

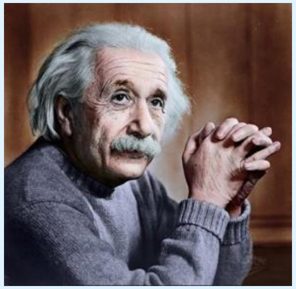
**02 狭义相对论时空观**

同时性的相对性

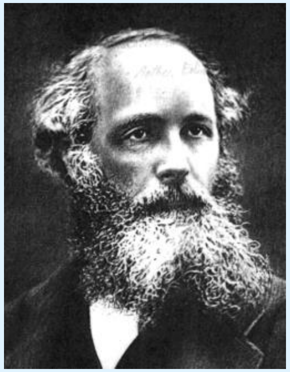
时间的相对性 —— 时间膨胀效应

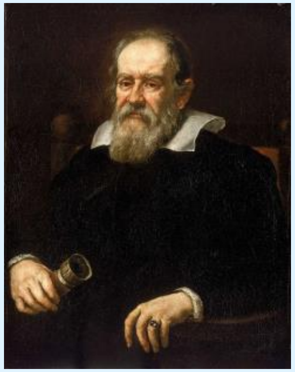
空间的相对性 —— 长度收缩效应

# 01 光速不变原理



✔ 爱因斯坦思考之一





—— 谁对谁错 ——

真空中电磁场的波动方程

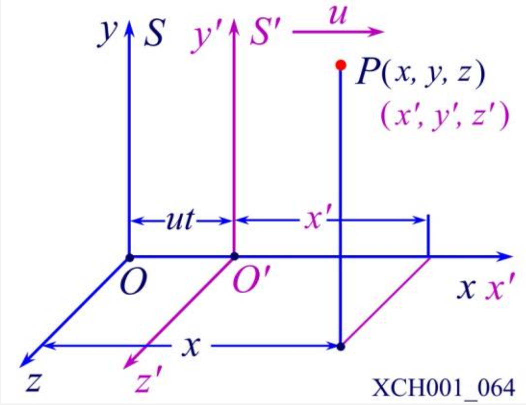
$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla^2 \vec{B} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

真空中的光速 $c$

不因参考系选取

的不同而不同

**方程不具备协变性**

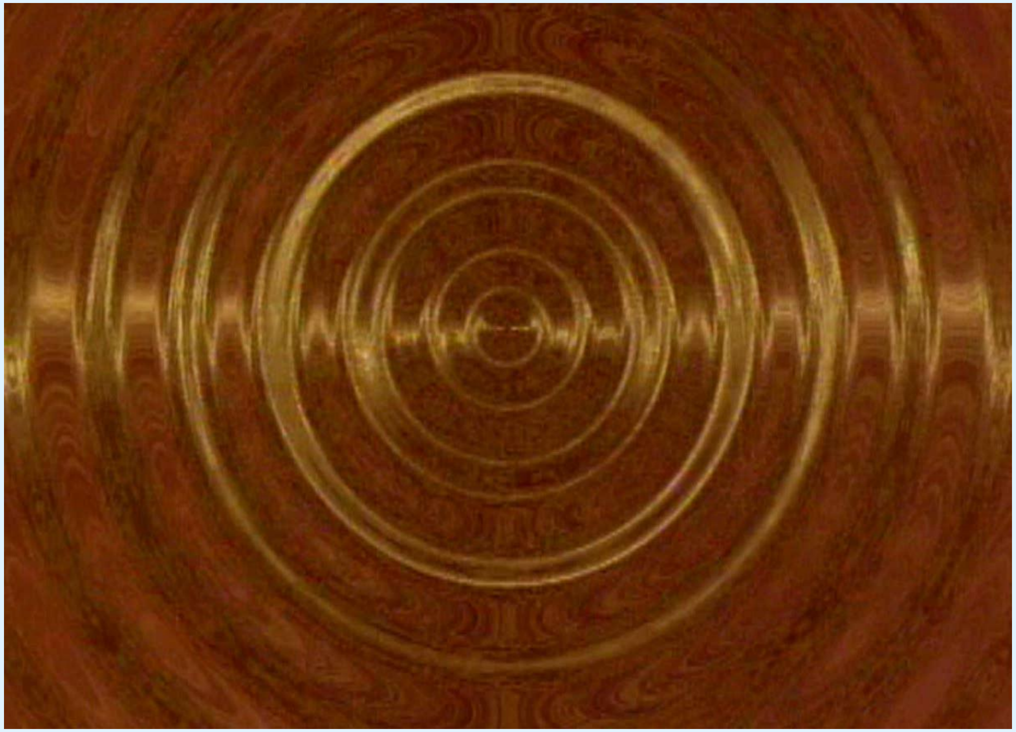



伽利略变换

$$\begin{cases} \vec{r}' = \vec{r} - \vec{u}t \\ \vec{v}' = \vec{v} - \vec{u} \\ \vec{a}' = \vec{a} \end{cases}$$

## ✌ 爱因斯坦思考之二 —— 光速与参考系有关吗？

**爱因斯坦的理想实验** —— 接近光速运动的人观察光波



光波仍以光速传播！

**光速不可越法则**

物体运动的速度

不可能超过光速

$$c = 2.998 \times 10^8 m/s$$

## 爱因斯坦思考之三 —— 存在“以太”吗？

1) 以太充满宇宙透明而**密度很小**！
以太具有**高弹性**！ 

2) 电磁波是横波 —— 以太是固体

电磁波 $\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \vec{B} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \\ c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \end{cases}$

 **传播介质** 

3) 以太静止不动的空间 ——

绝对空间(特殊参照系)

迈克尔孙-莫雷实验提出了否定以太参考系的证据

## 02 狭义相对性原理

1905年爱因斯坦 —— 提出两个基本假设

**假设 I　物理学定律在所有惯性参考系都是等价的**

**—— 爱因斯坦相对性原理**

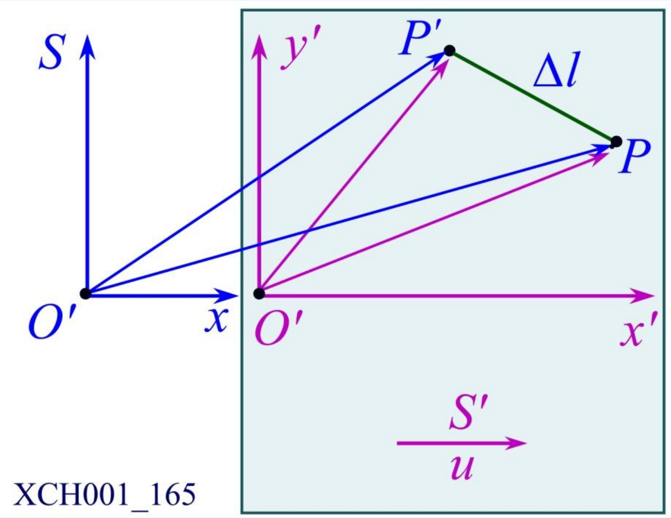
**假设 II　所有惯性参考系中，真空中光速为恒量**

**—— 与光源和观察者运动状态无关**

**—— 光速不变原理**

# 03 狭义相对论时空观

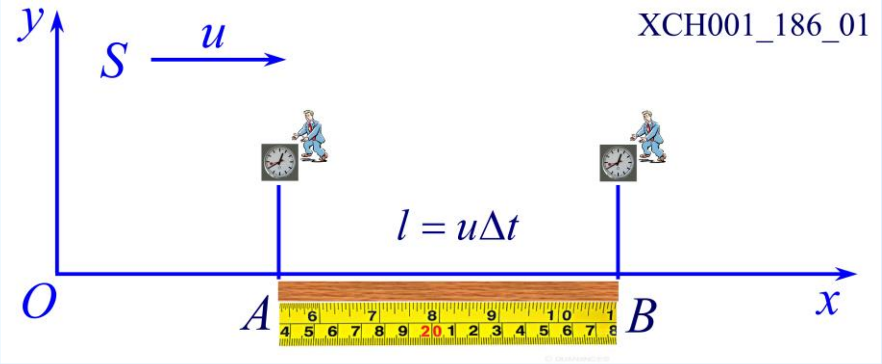
## 1 牛顿绝对时空观

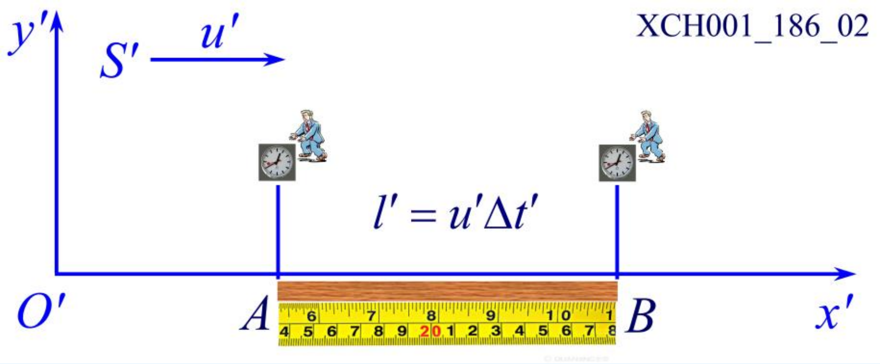



☛ 空间和时间独立存在的

☛ 距离和时间的测量与参考系无关！

☛ 长度测量？



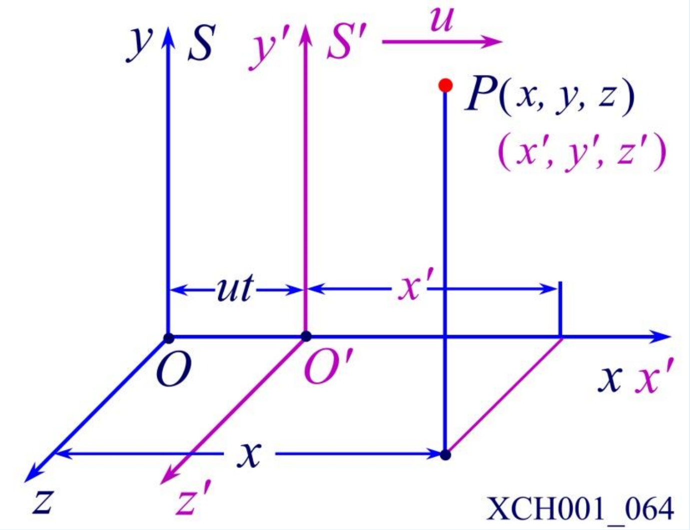

$$l = u\Delta t \overset{?}{=\!=} l' = u'\Delta t'$$ —— 长度相等

## 2 力学相对性原理 —— 伽利略相对性原理

—— 经典力学定律在任何惯性参考系中数学形式不变

**伽利略变换 —— 基于绝对时空观**

惯性参考系 *S*和*S'*



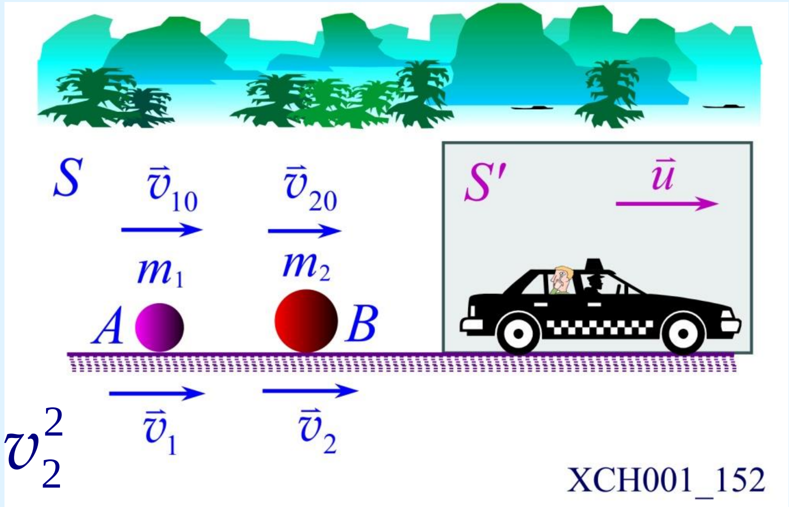

$t = t' = 0$ —— *S*和*S'*系重合

**坐标变换** $\begin{cases} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$ $\Longrightarrow$ $\begin{cases} \vec{r}' = \vec{r} - \vec{u}t \\ \vec{v}' = \vec{v} - \vec{u} \\ \vec{a}' = \vec{a} \end{cases}$

## 2 动量守恒与动能守恒具有伽利略变换不变性

✌ 对心弹性碰撞遵守的守恒定律具有伽利略变换不变性。

☞ 两球和车的运动在同一方向




地面参考系$S$中动量和动能守恒

$$\begin{cases} m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = m_1 v_1 + m_2 v_2 \\ \dfrac{1}{2} m_1 v_{10}^2 + \dfrac{1}{2} m_2 v_{20}^2 = \dfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \dfrac{1}{2} m_2 v_2^2 \end{cases}$$

速度变换

碰撞前后球 A

$$\begin{cases} v_{10} = u + \boxed{v'_{10}} \\ v_1 = u + \boxed{v'_1} \end{cases}$$

碰撞前后球 B

$$\begin{cases} v_{20} = u + \boxed{v'_{20}} \\ v_2 = u + \boxed{v'_2} \end{cases}$$

车厢参考系$S'$

$$\begin{cases} m_1(u+v'_{10})+m_2(u+v'_{20})=m_1(u+v'_1)+m_2(u+v'_2) \\ \frac{1}{2}m_1(u+v'_{10})^2+\frac{1}{2}m_2(u+v'_{20})^2=\frac{1}{2}m_1(u+v'_1)^2+\frac{1}{2}m_2(u+v'_2)^2 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} m_1v'_{10}+m_2v'_{20}=m_1v'_1+m_2v'_2 \\ \frac{1}{2}m_1v'^2_{10}+\frac{1}{2}m_2v'^2_{20}=\frac{1}{2}m_1v'^2_1+\frac{1}{2}m_2v'^2_2 \end{cases}}$$

**伽利略坐标变换 —— 力学守恒定律具有相同的数学形式**

**—— 力学定律具有协变性**

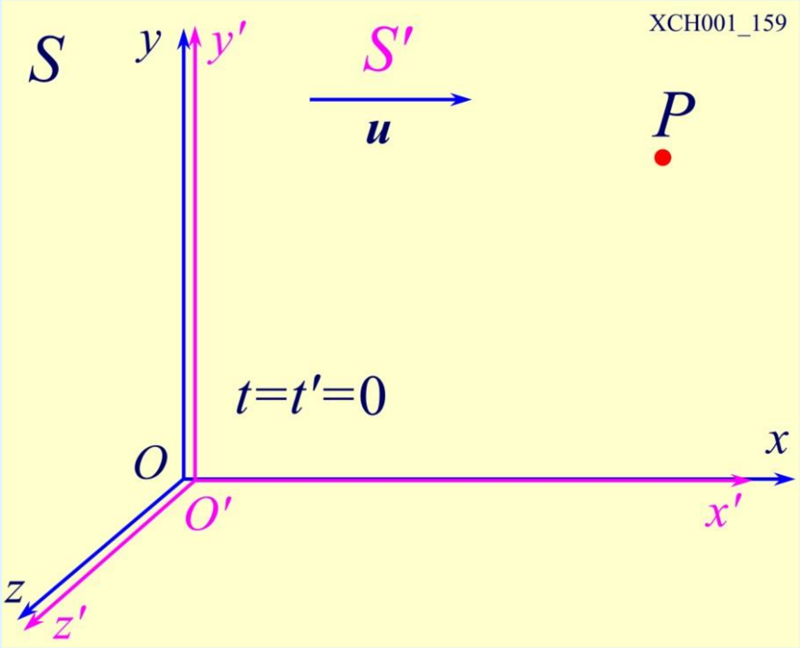
**—— 所有惯性参考系都是等价的**

# 洛伦兹变换

## 洛仑兹坐标变换式

惯性系S和S' —— S'沿X轴以恒定速度u相对于S运动

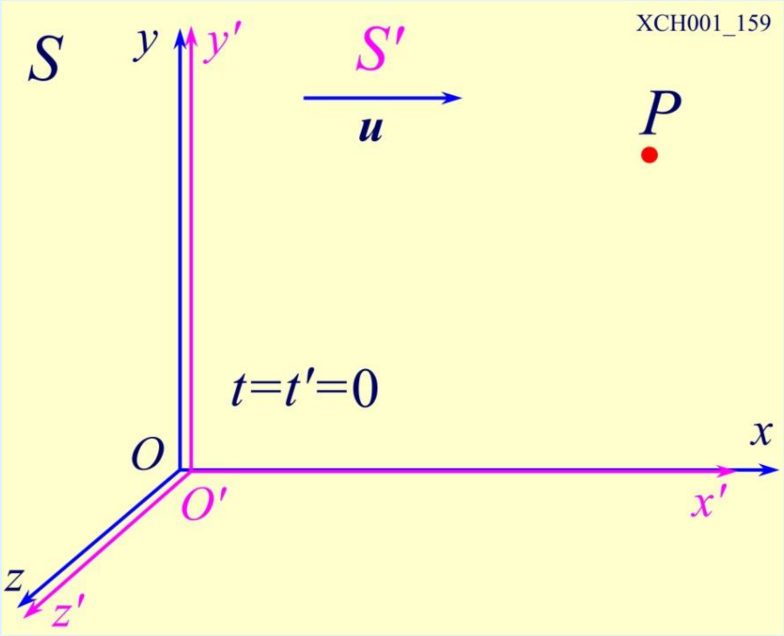
$t = t' = 0$ S系和S'系重合

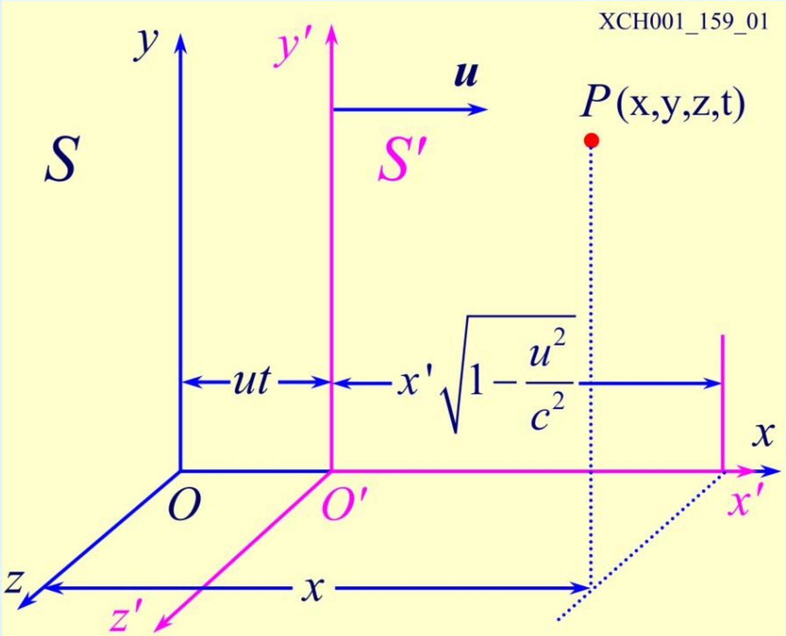



假设存在一个事件

—— 不依赖任何参考系

—— 发生在 P点




—— S参考系中P事件的时空坐标 $P(x, y, z, t)$

—— S’参考系中P事件的时空坐标 $P(x', y', z', t')$

参考系S和S’—— S’系沿X轴以恒定速度u相对于S系运动

—— 事件P的时空坐标变换

洛仑兹坐标正变换

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - ut}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t - \dfrac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}} \end{cases}$$

洛伦兹坐标逆变换

$$\begin{cases} x = \dfrac{x' + ut'}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \dfrac{t' + \dfrac{u}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}} \end{cases}$$

洛仑兹坐标变换

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - ut}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t - \dfrac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}} \end{cases}$$

☛ 两个事件的时空坐标为线性关系

—— 一个事件在两个参考系中的坐标是一一对应的

☛ 当 $u << c$ $\quad \dfrac{u}{c} \longrightarrow 0$

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - ut}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t - \dfrac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

——洛伦兹坐标变换式退化为伽利略坐标变换式

洛仑兹坐标变换

$$
\begin{cases}
x' = \dfrac{x - ut}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}} \\
y' = y \\
z' = z \\
t' = \dfrac{t - \dfrac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}
\end{cases}
$$

☛ 当 $u > c$ $\sqrt{1-u^2/c^2}$ 为虚数——物体极限速度为光速

物理基本定律在洛伦兹变换下具有不变性

物理定律的数学表达式具有协变性

空间间隔

$$\begin{cases} \Delta x' = \dfrac{\Delta x - u\Delta t}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} \\ \Delta y' = \Delta y \\ \Delta z' = \Delta z \\ \Delta t' = \dfrac{\Delta t - \dfrac{u}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta x = \dfrac{\Delta x' + u\Delta t'}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} \\ \Delta y = \Delta y' \\ \Delta z = \Delta z' \\ \Delta t = \dfrac{\Delta t' + \dfrac{u}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} \end{cases}$$

时间间隔

## 3 狭义相对论时空观

同时的相对性

时间膨胀

长度缩短

【例题12-1】我们来考察两个事件的同时关系。如图所示，飞船平行于地面以可与光速比拟的速率$u$作匀速直线运动。地面上一女生在与迎面而来的男生相遇那一刻，递给男生一束鲜花。接着两人背向行走，相距100米的时候，彼此又转头回望了一下。以地面为参照系，递接鲜花和相互回望都是同时发生的，问以飞船为参照系，它们还都是同时事件吗？

设地面为K系，飞船为K‘系，K’相对K系x轴方向的运动速度为u

（1）递花

$$\Delta x = 0$$

$$\Delta t = 0$$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = 0$$

（2）回望

$$\Delta x \neq 0$$

$$\Delta t = 0$$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \neq 0$$

**同时是相对的！**

【例题12-2】现在来考察两个事件的先后关系。两个惯性坐标系类似于上例，地面上杭州、北京各有一名婴儿出生，宇航员观测到北京孩子先出生，问地球上观测如何？

设地面为K系，飞船为K’系，K’相对K系x轴方向的运动速度为u

事件1 杭州婴儿出生

事件2 北京婴儿出生

$$\Delta x = x_2 - x_1 > 0$$

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \frac{\Delta t - \dfrac{u}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}} < 0$$

$1)\Delta t < 0$ $\quad$ $\Delta t' < 0$

$2)\Delta t = 0$ $\quad$ $\Delta t' < 0$

$3)\Delta t > 0$

$\Delta t'$ 不一定<0

当 $0 < \Delta t < \dfrac{u}{c^2}\Delta x$

才满足 $\Delta t' < 0$

此时时序反转

【例题12-3】实验测得静止π±介子的寿命为2.603×10-8s。又测得以0.91c高速直线飞行的π±介子，平均飞行距离是17.135m。试计算飞行π±介子的平均寿命。

实验室为K系，相对π±介子静止的为K’系，
K’相对K系x轴方向的运动速度为u

$$\Delta x' = 0$$

$$\Delta x \neq 0$$

$$\Delta t' = \tau_0 = 2.603\times 10^{-8} s$$

$$\Delta t = \frac{\Delta t' + \frac{u}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

**时间延缓效应**

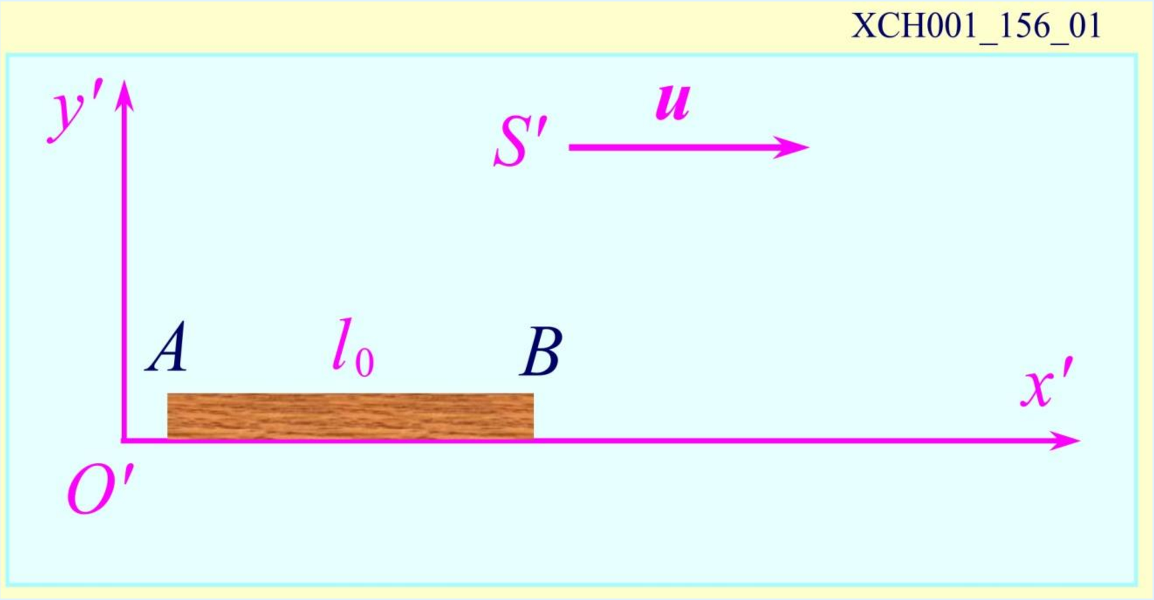
**—— 动钟变慢**

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} > \tau_0$$

# 长度收缩 —— 运动方向上动尺变短

—— 惯性参考系S’以速度相对于惯性参考系S运动

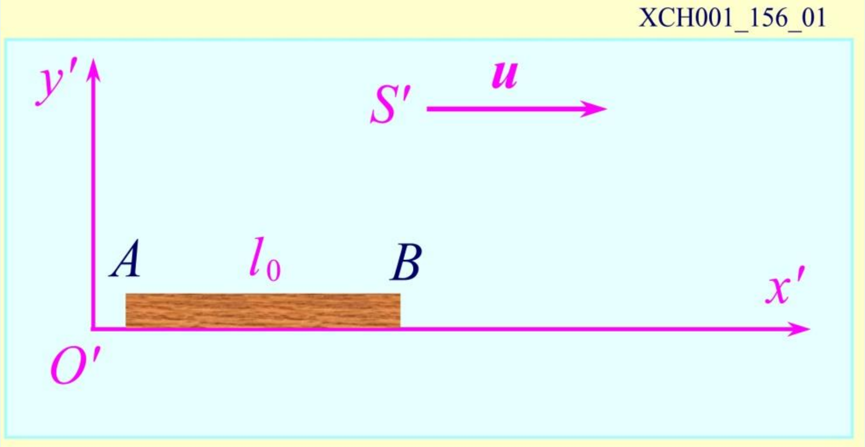
—— S’中的棒AB静止 ____ 固定在S’的X轴上



## 相对静止的参考系S'系中 —— AB长度的测量

1) 以原点O'为参考__直接测量AB两点的坐标 $x'_B$ $and$ $x'_A$

AB的长度 $l_0 = x'_B - x'_A$




—— 不依赖于测量的时间 $t'$

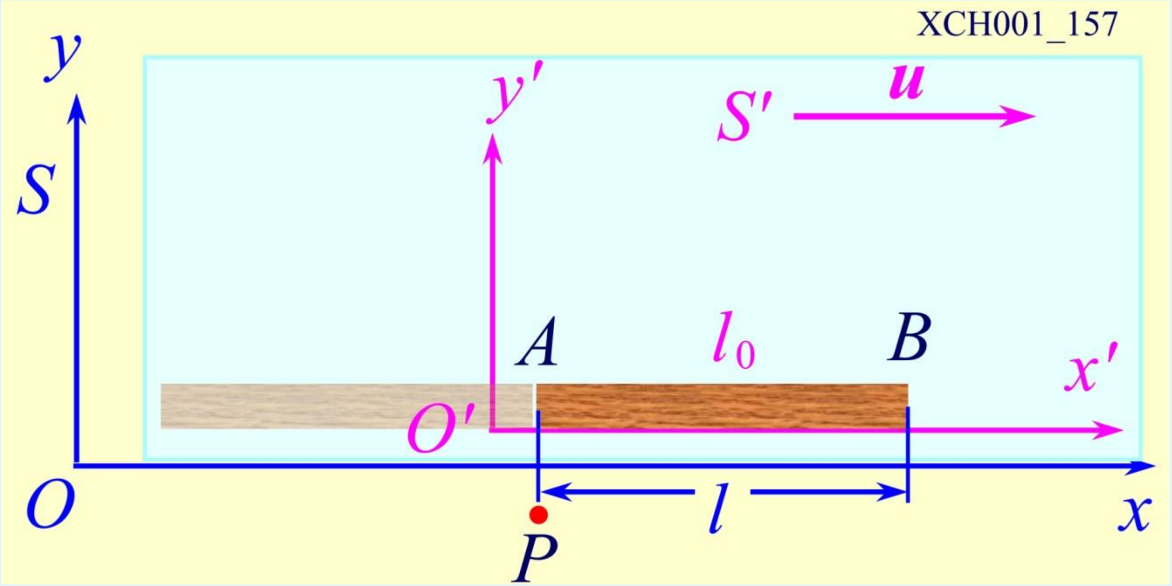
—— 在AB相对静止的所有惯性参考系中__测量长度相同

$l_0$ —— AB的本征长度

## 相对运动的参考系S系中 —— AB长度的测量

**S** 系 — 同时不同地　　$\Delta t = t_2 - t_1 = 0$

$$l = x_B - x_A$$



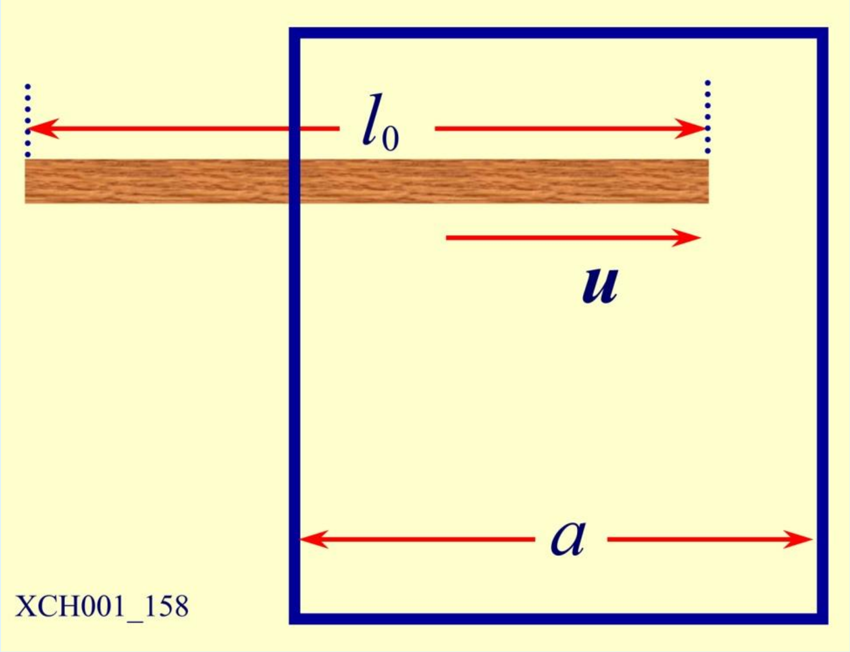
$$\begin{cases} \Delta x = \dfrac{\Delta x' + u\Delta t'}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} \\ \Delta t = \dfrac{\Delta t' + \dfrac{u}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta x' = \dfrac{\Delta x - u\Delta t}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} \\ \Delta t' = \dfrac{\Delta t - \dfrac{u}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} \end{cases}$$

$$l = x_B - x_A = \Delta x$$

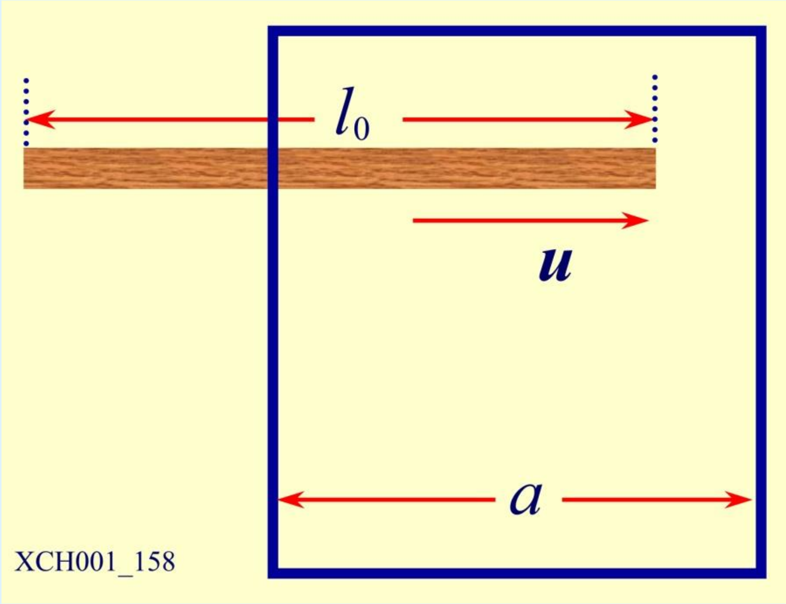
$$\Delta t = t_2 - t_1 = 0$$

$$l_0 = x'_B - x'_A = \Delta x' = \frac{\Delta x - u\Delta t}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} \qquad l_0 = \gamma l > l$$

例题 一门宽为a，一固定长度为$l_0$ ( $l_0$ > a ) 的水平细杆在门外贴近门的平面内沿其长度方向匀速运动。若站在门外的观察者认为此杆的两端可同时被拉进此门，则该杆相对于门的运动速率u至少为多少？



——地面上测得细杆的长度 $l = l_0\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}$




根据题意 $a = l_0\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}$

最小速度 $u = c\sqrt{1-\left(\dfrac{a}{l_0}\right)^2}$

✌ 例题 μ子是一种不稳定的粒子，在其静止的参考系中观察，它的平均寿命是2.196×$10^{-6}$s，过后就衰变为电子和中微子。宇宙射线在大气层上产生μ子的速率为u=0.998c。μ子可穿透9000m厚的大气层到达实验室。理论计算与实验观察是否一致?

$$2.196\times 10^{-6}\times 0.998\times 3\times 10^{8}=657.5m<9000m$$

地面上，时间间隔变长

时间膨胀

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^{2}}}=15.8$$

$$\tau=\gamma\tau_{0}=15.8\times 2.196\times 10^{-6}=3.48\times 10^{-5}s$$

$$L=\tau u=10388m>9000m$$

✌ 例题 μ子是一种不稳定的粒子，在其静止的参考系中观察，它的平均寿命是2.196×$10^{-6}$s，过后就衰变为电子和中微子。宇宙射线在大气层上产生μ子的速率为u=0.998c。μ子可穿透9000m厚的大气层到达实验室。理论计算与实验观察是否一致?

$$2.196\times 10^{-6}\times 0.998\times 3\times 10^{8}=657.5m<9000m$$

从长度缩短的观点解，地球相对μ子跑

$$g=\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^{2}}}=15.8$$

$$L=\frac{L_0}{g}=\frac{9000}{15.8}=569.62<657.5m$$

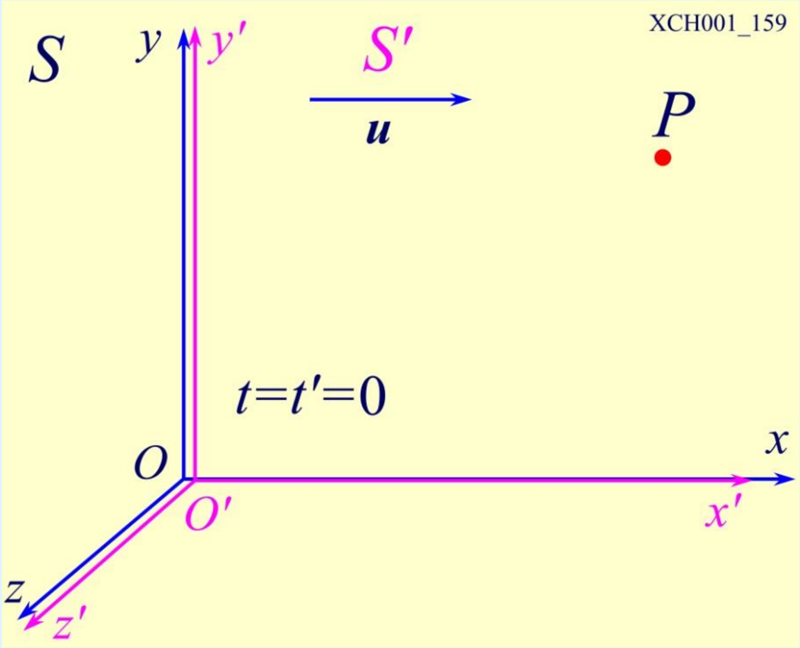
# 作业：W9 狭义相对论的时空观

## * 洛伦兹坐标变换式的推导

洛仑兹坐标变换式

惯性系S和S' —— S'沿X轴以恒定速度u相对于S运动

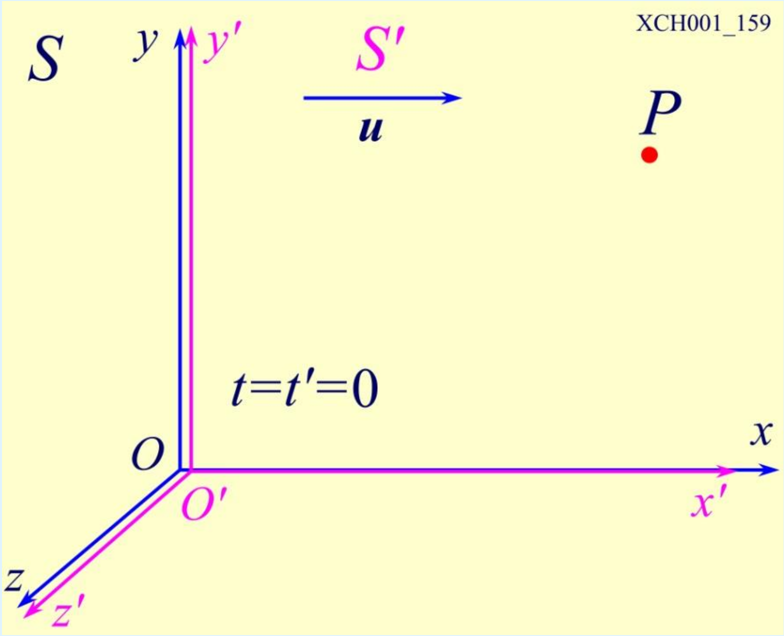
$t = t' = 0$ S系和S'系重合

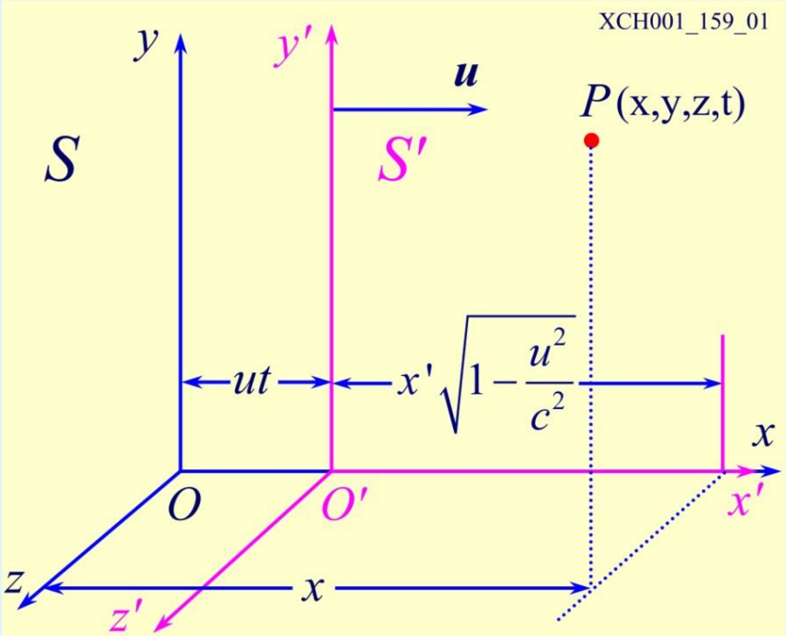



假设存在一个事件

—— 不依赖任何参考系

—— 发生在 P点




—— **S参考系中P事件的时空坐标** $P(x, y, z, t)$

—— **S'参考系中P事件的时空坐标** $P(x', y', z', t')$

公设：时间和空间都是均匀的

因此，时间和空间之间的变换关系必须是线性关系

$$x = k(x' + \upsilon t')$$

$$x' = k'(x - \upsilon t) \xrightarrow{k' = k} x' = k(x - \upsilon t)$$

$$xx' = k^2 (x - \upsilon t)(x' + \upsilon t')$$

根据狭义相对论的相对性原理，S系和S'系是等价的

根据光速不变原理，假设光信号在O与O'重合的瞬间(t=t'=0)就由重合点沿Ox轴前进，那么在任一瞬时t(由S'系量度则是t')，光信号到达点的坐标对两个坐标系来说，分别是 $x = ct$ $\quad x' = ct'$

$$c^2 tt' = k^2 tt'(c - \upsilon)(c + \upsilon)$$

$$\therefore k = \frac{c}{\sqrt{c^2 - \upsilon^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{\upsilon}{c})^2}}$$

$$x = \frac{x' + \upsilon t'}{\sqrt{1 - (\frac{\upsilon}{c})^2}} \qquad x' = \frac{x - \upsilon t}{\sqrt{1 - (\frac{\upsilon}{c})^2}}$$

$$x=\frac{x'+\upsilon t'}{\sqrt{1-(\frac{\upsilon}{c})^2}} \qquad x'=\frac{x-\upsilon t}{\sqrt{1-(\frac{\upsilon}{c})^2}}$$

消去x'得

$$x\sqrt{1-(\frac{\upsilon}{c})^2}=\frac{x-\upsilon t}{\sqrt{1-(\frac{\upsilon}{c})^2}}+\upsilon t'$$

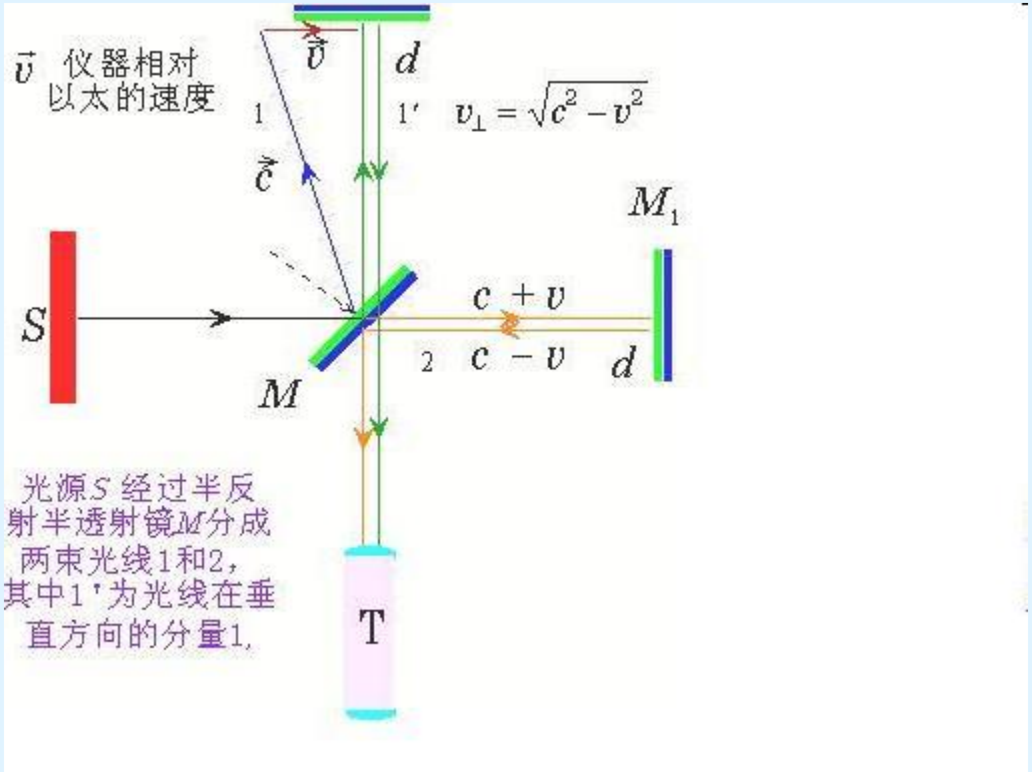
$$t'=\frac{t-\frac{\upsilon}{c^2}x}{\sqrt{1-(\frac{\upsilon}{c})^2}}$$

消去x得

$$t=\frac{t'-\frac{\upsilon}{c^2}x'}{\sqrt{1-(\frac{\upsilon}{c})^2}}$$

# 迈克尔逊-莫雷实验

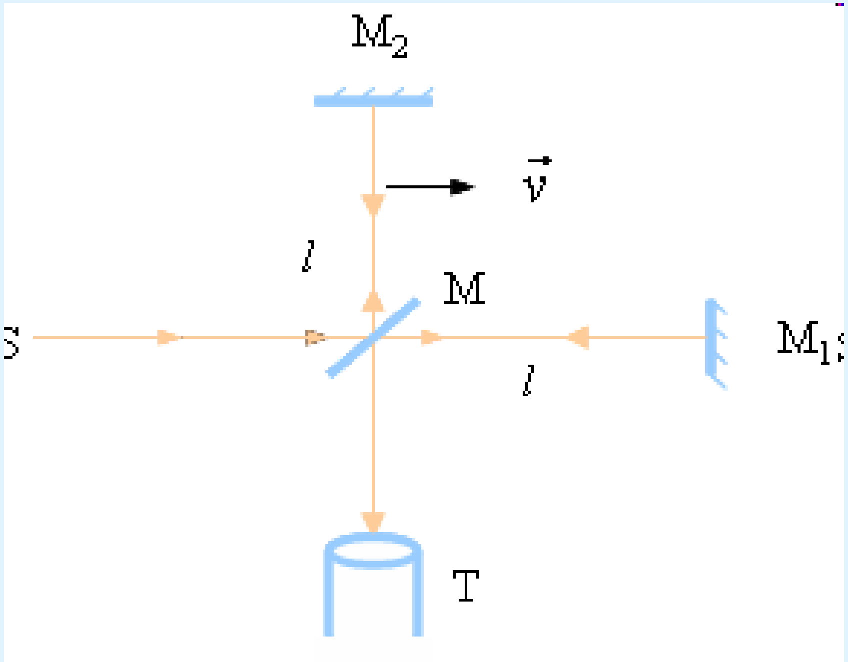
实验的基本思想:地球以30千米/秒的速度通过以太运动，地面上的观察者将会感到“太阳风”，并且其运动方向要随季节而异

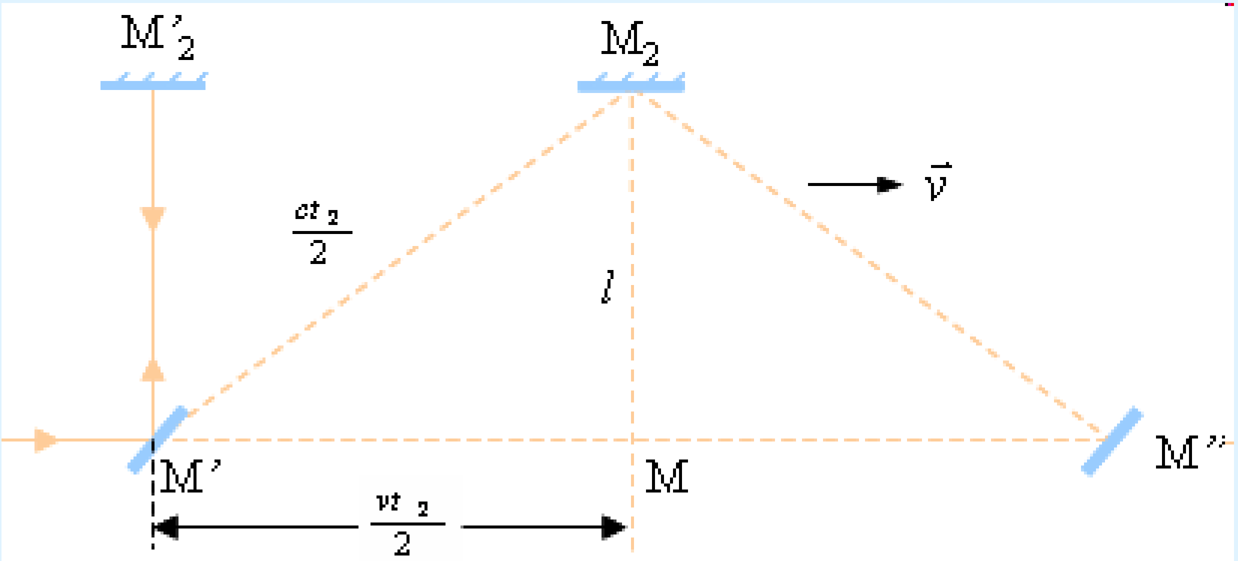



实验时先使干涉仪的一臂与地球的运动方向平行，另一臂与地球的运动方向垂直，按照经典的理论，在运动的系统中，光速应该各向不同，因而可看到干涉条纹；再使整个仪器转过 $\pi/2$，就应该发现条纹的移动，由条纹移动的总数，就可算出地球运动的速度 $v$.

当地球相对于以太的速度为$v$运动时，可看出光线$MM_1$和$M_1M$间犹为如顺水和逆水行舟，它相对于仪器的速度应各自为$(c-v)$和$(c+v)$，如果$MM_1$的长度为$l$时，那么光通过距离$MM_1+M_1M$所需的时间为:

$$t_1 = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v} = \frac{2cl}{c^2+v^2} = \frac{2l}{c}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1}$$

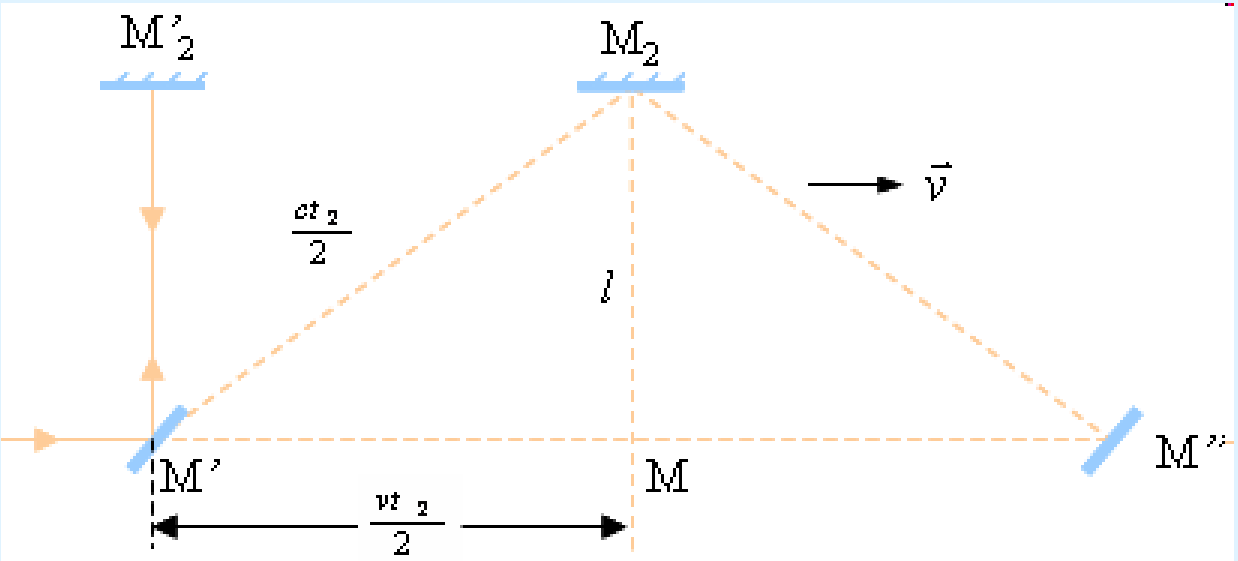





光往返于$MM_2$和$M_2M$间犹为横渡流水，在以太系看来光所走路经为$M'M_2M''$，当$MM_2$的长度为$l$时，光通过距离$M'M_2+M_2M''$所需的时间是$t_2$，即

$$t_2=\frac{2l}{\sqrt{c^2-v^2}}=\frac{2l}{c}(1-\frac{v^2}{c^2})^{-1/2}$$

则 $$(\frac{ct_2}{2})^2=l^2+(\frac{vt_2}{2})^2$$




因为 $v^2/c^2 \ll 1$，故作二项式展开，得

$$t_1 = \frac{2l}{c}(1 + v^2/c^2)$$

$$t_2 = \frac{2l}{c}(1 + \frac{v^2}{2c^2})$$

所以两束光到达的时间不同