振动与波
波动光学

振动，机械波

光的干涉、衍射和偏振

狭义相对论

狭义相对论运动学

狭义相对论动力学

量子力学

量子物理基本原理、精细观测

光电器件、量子信息

第七章 振动

0701 机械振动 ★

—— 简谐振动

—— 振动的合成

—— 拍频

0702 李萨如图形

在相位测量中的应用（研讨）

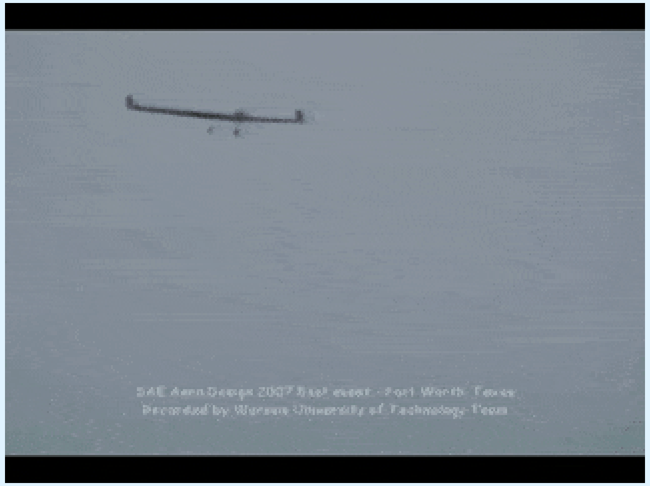
0703 非线性振动与混沌现象（自学）

01 自然界和工程中的振动现象

振动现象在生活中无处不在，

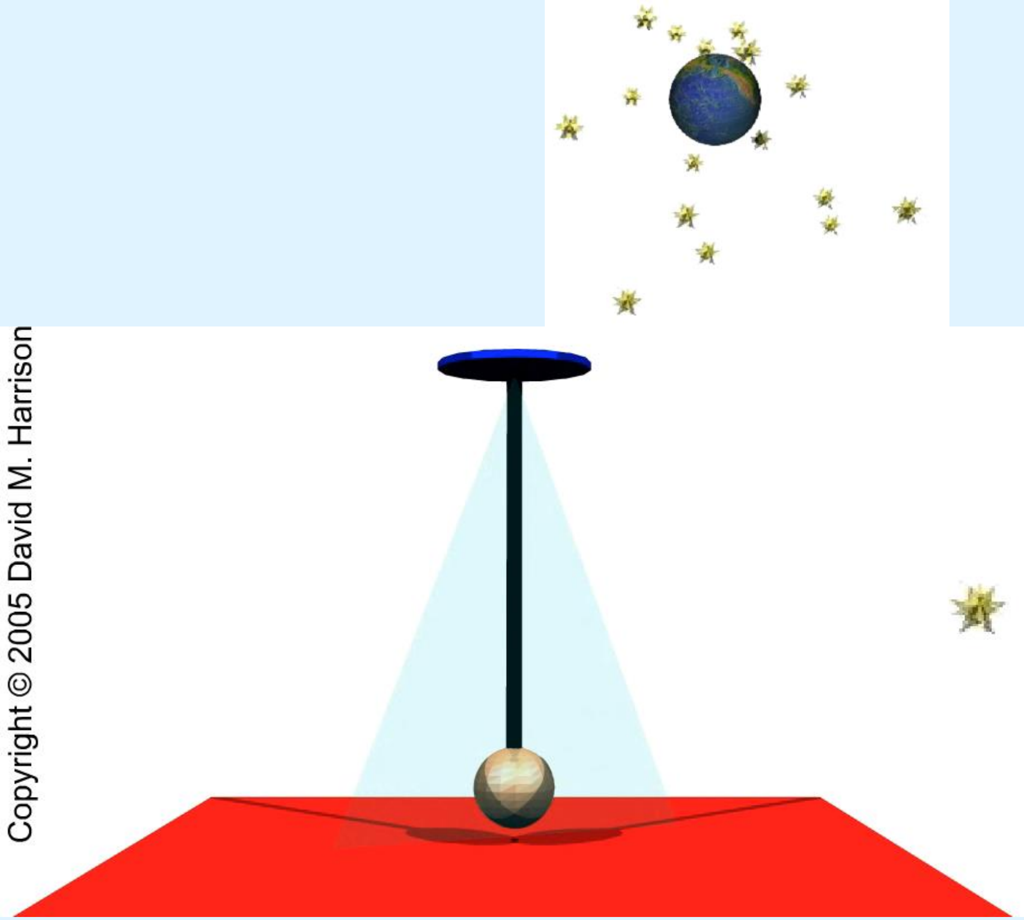
你能想到哪些现象与振动有关？

颤振导致垂尾疲劳破坏
（1998）



无人机颤振解体

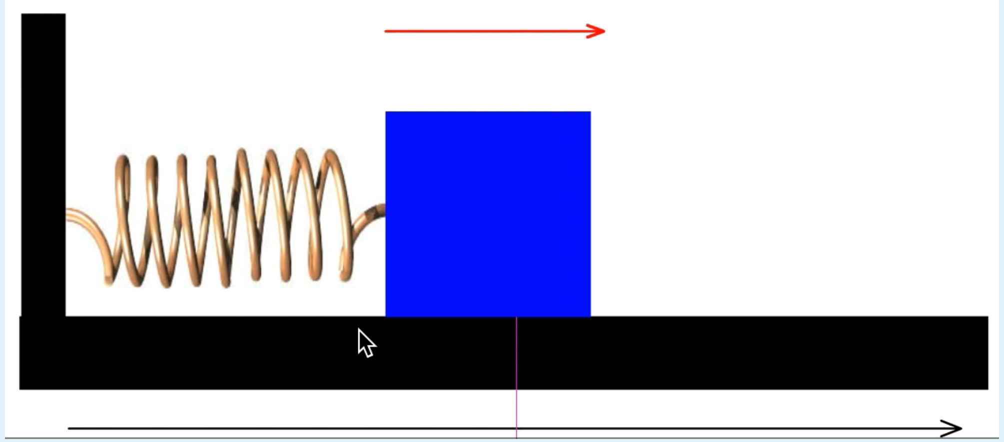
振动 —— 一个物理量在某一个值的附近作周期性变化

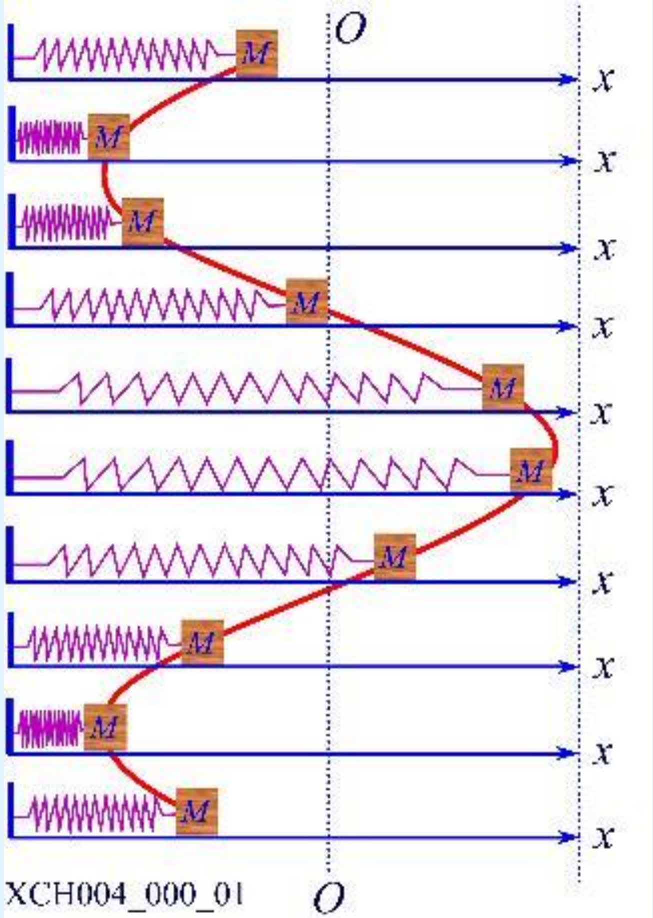


傅科摆 —— 1851年在巴黎伟人祠用长67米的摆做了实验

摆的周期T＝16.5 秒, 相对地球摆面转过0.05°

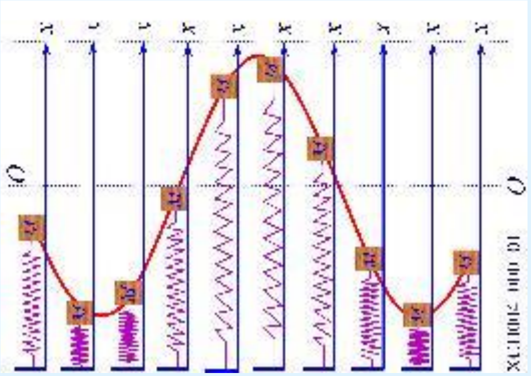
经过32小时，摆面转动一周 —— **地球在自转！**





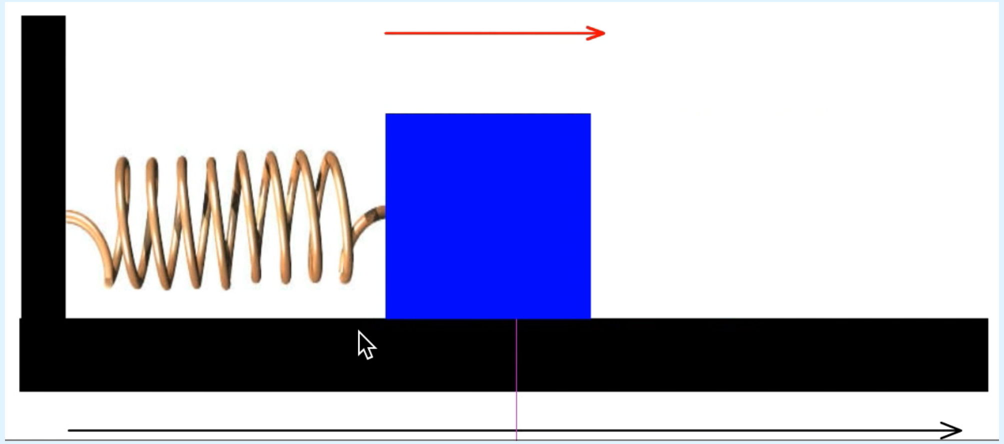
机械振动

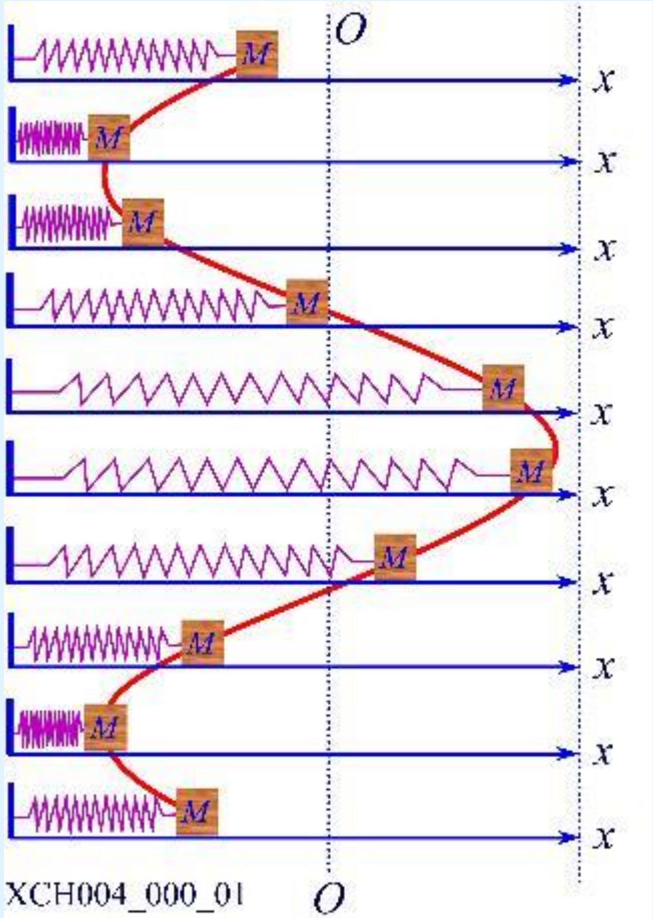
—— 物体在稳定平衡位置作往返运动



思考题

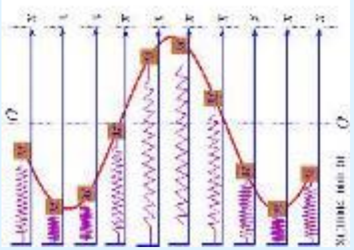
上图中横轴和纵轴代表的是什么？





机械振动

—— 物体在稳定平衡位置作往返运动



简谐振动

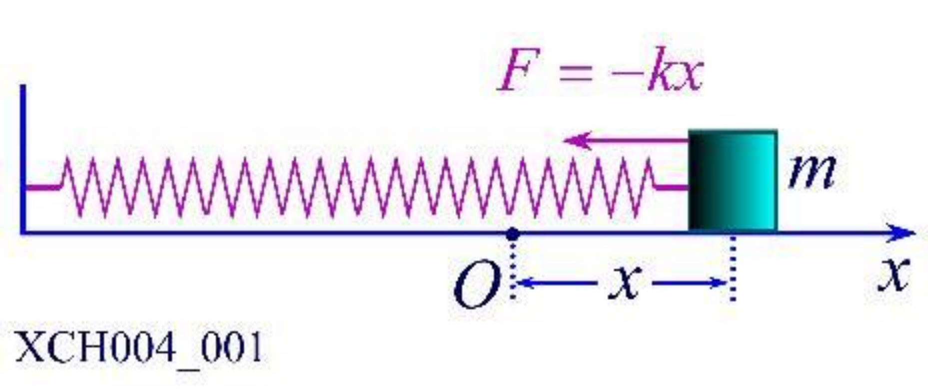
—— 物体运动的**位置与时间**关系按**余弦规律**变化

物体运动方程 $x = A\cos(\omega t + \varphi)$

02 简谐振动

一维弹簧振子 —— 物体**m**做一维运动

弹性力 $F=-kx$



动力学方程 $m\dfrac{d^2x}{dt^2}=-kx$

$\underline{\underline{\ddot{x}+\omega^2x=0}}$ $\omega^2=\dfrac{k}{m}$ —— 圆频率

质点的位移 $\underline{\underline{x=A\cos(\omega t+\varphi)}}$ —— 简谐运动方程

简谐振动的运动学方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2 x=0$$

$$x=A\cos(\omega t+\varphi)$$

——质点的位移

质点的速度

$$\upsilon=\frac{dx}{dt}=-\boxed{\omega A}\sin(\omega t+\varphi)$$

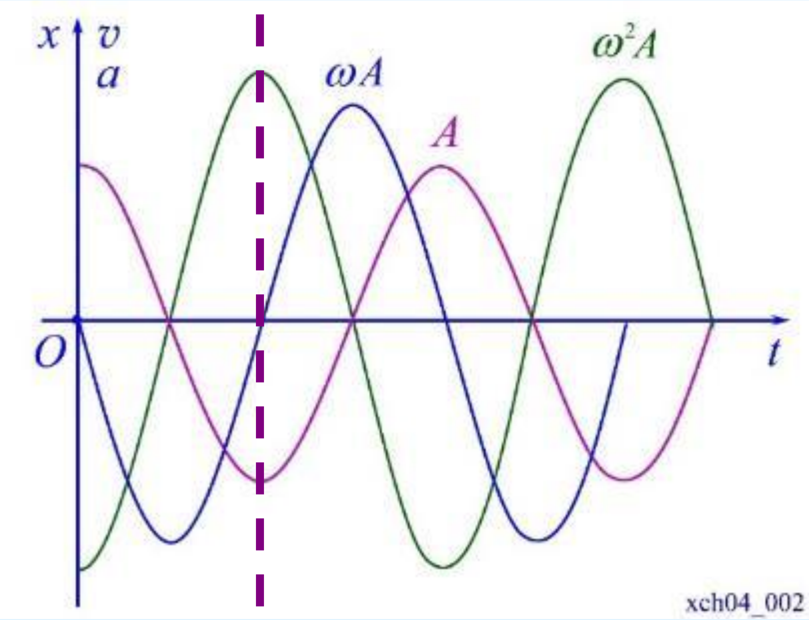
$$\upsilon=-\upsilon_{\max}\sin(\omega t+\varphi)$$

质点的加速度

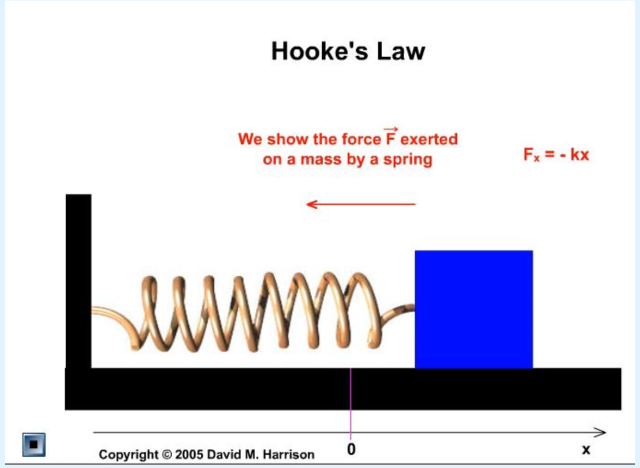
$$a=\frac{d^2x}{dt^2}=-\boxed{\omega^2 A}\cos(\omega t+\varphi)$$

$$=-\omega^2 x$$

$$a=-a_{\max}\cos(\omega t+\varphi)$$



描述简谐振动的物理量



简谐振动的运动方程 $x = A\cos(\omega t + \varphi)$

振幅A —— 位移最大值__恒为正

周期T —— 完成一次全振动所需的时间

令 $A\cos(\omega t + \varphi) = A\cos[\omega(t + T) + \varphi]$

$\omega T = 2\pi \longrightarrow T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

频率

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

对弹簧振子 $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

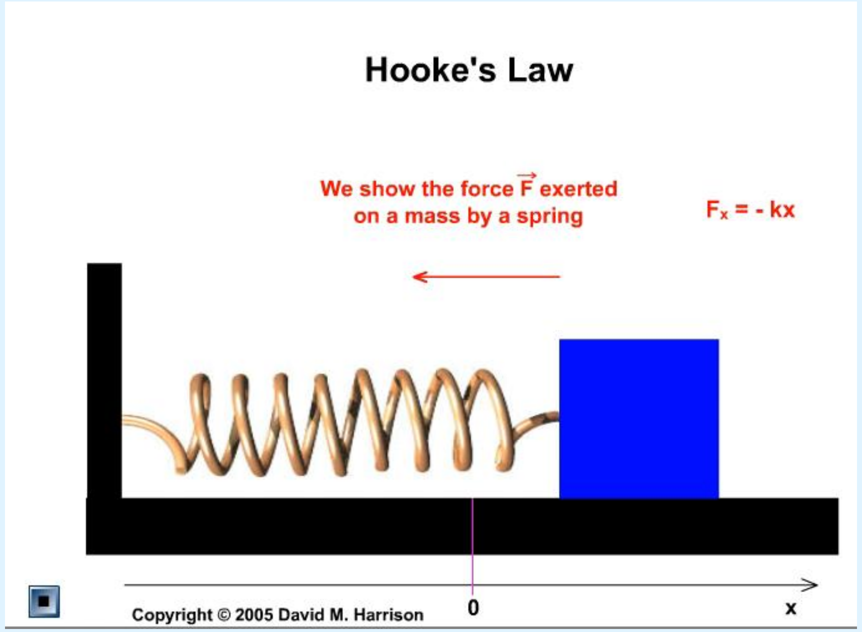
角频率 $\omega = 2\pi\nu$

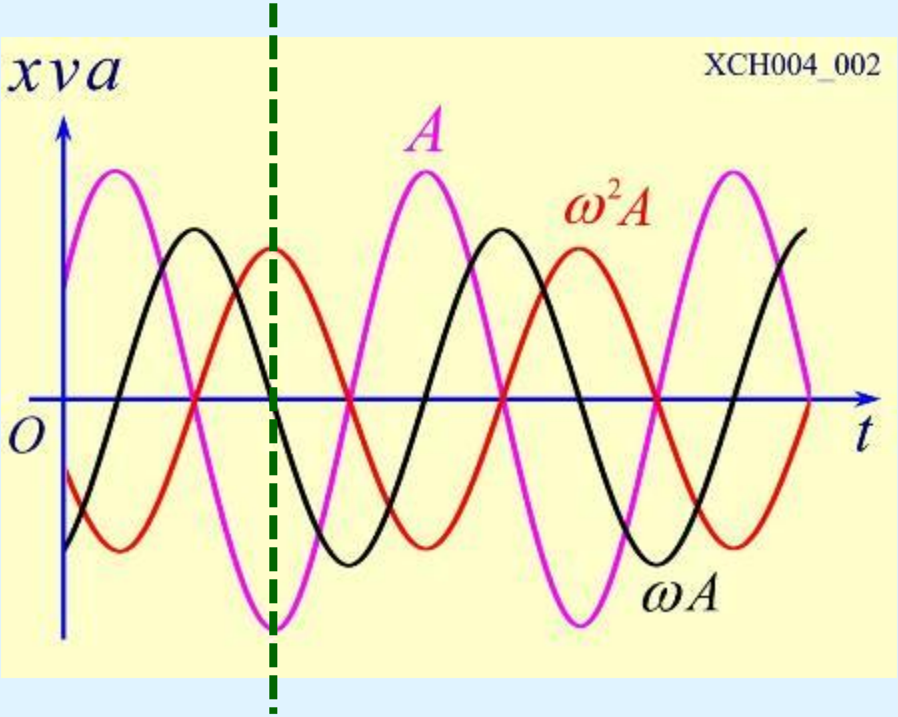
$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

φ —— 简谐运动的初相__决定开始运动的状态

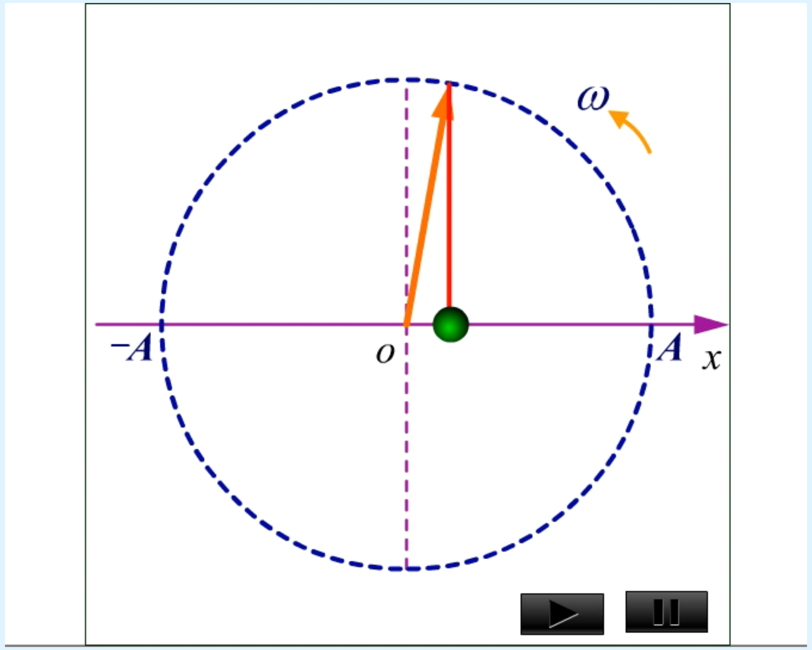
$\omega t + \varphi$ —— 决定任一时刻简谐运动的状态

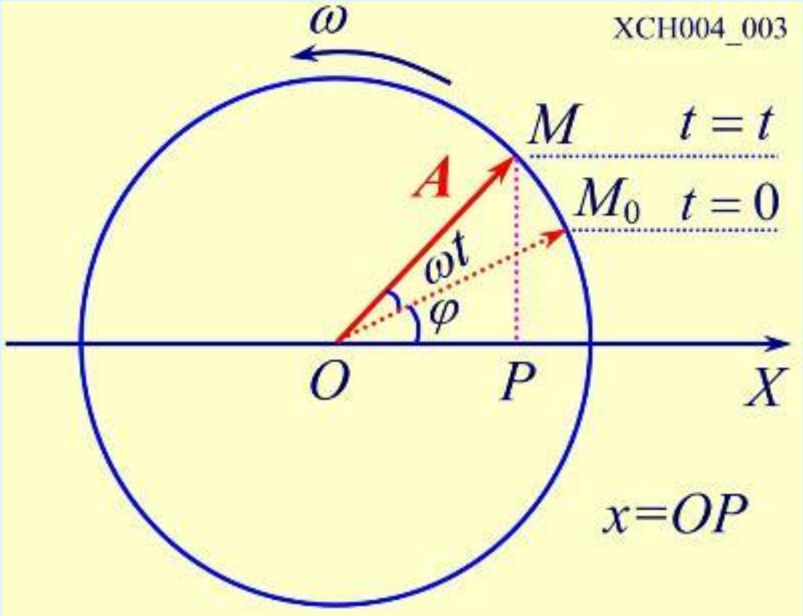
—— 简谐运动的相__相位





旋转矢量表示法

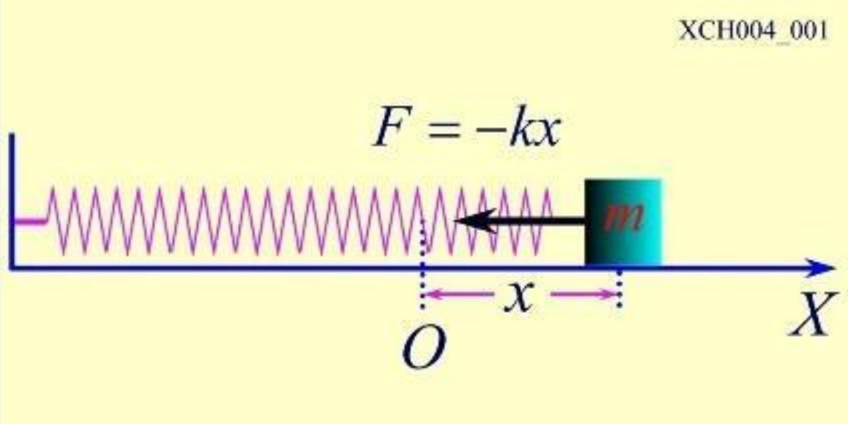




任一时刻在X轴上的投影 $x = A\cos(\omega t + \varphi)$

简谐振动的能量

—— 弹簧原长处势能为零



运动方程 $x = A\cos(\omega t+\varphi)$

动能 $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t+\varphi)$

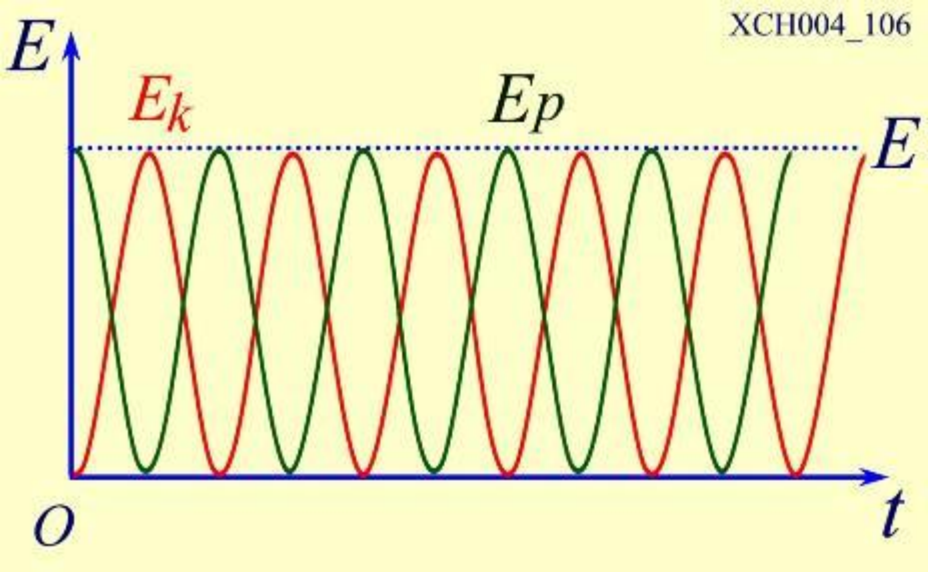
势能 $E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi)$

$\omega^2 = \frac{k}{m}$

机械能 $E = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2$ 简谐振动系统的总机械能守恒

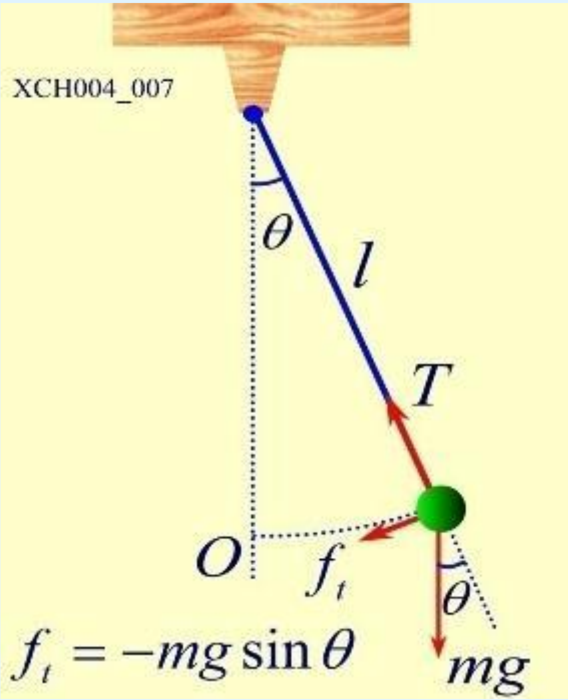
简谐振动 —— 动能、势能和机械能变化曲线

$$\begin{cases} E_k = \dfrac{1}{2} mA^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \\ E_p = \dfrac{1}{2} kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi) \\ E = E_k + E_p = \dfrac{1}{2} kA^2 \end{cases}$$



常见的简谐振动

☛ 单摆



转过角度θ时受到切向力

$f_t = -mg\sin\theta$　　角位移很小时 $\theta < 5^0$

$\therefore\ f_t = -mg\theta$　　$\sin\theta = \theta - \dfrac{1}{3!}\theta^3 - \cdots \approx \theta$

切向运动方程

$$-mg\theta = m\frac{d\upsilon}{dt} = m\frac{d(l\omega)}{dt} = ml\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

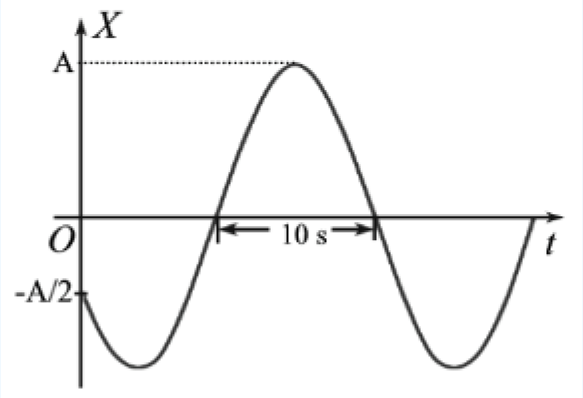
令 $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0}$$

—— 简谐运动的微分方程

例题7-1. 根据下图所示的质点振动曲线，写出振动方程



简谐振动方程 $x = A\cos(\omega t + \varphi)$

$T = 20s$

$\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{\pi}{10} rad/s$

$\therefore \; x = A\cos(\dfrac{\pi}{10}t + \varphi)$

试用旋转矢量法解题

$$\boxed{\begin{aligned} x_0 &= -\frac{1}{2}A \\ \upsilon_0 &= -\omega A\sin\varphi < 0 \end{aligned}} \Longrightarrow \boxed{\begin{aligned} \cos\varphi &= -\frac{1}{2} \\ \sin\varphi &> 0 \end{aligned}} \Longrightarrow \therefore \; \varphi = \frac{2\pi}{3}$$

$\therefore \; x = A\cos(\dfrac{\pi}{10}t + \dfrac{2\pi}{3})$

【例题7-2】一物体沿x轴作简谐振动，其速度最大值 $\upsilon_m = 3\times10^{-2}\,m/s$，振幅 $A = 2\times10^{-2}\,m$，若 $t = 2s$ 时，物体处于平衡位置且向x轴的负方向运动。求 1）振动周期T；2）加速度的最大值；3）振动方程

$$\upsilon_m = A\omega$$

$$\therefore\ \omega = 1.5\,rad/s$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{4\pi}{3} = 4.19s$$

$$\therefore\ a_m = A\omega^2 = 4.5\times10^{-2}\,m/s^2$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_{t=2} &= 0.02\cos(1.5\times2+\varphi) = 0 \\ \upsilon_0 &= -0.03\sin(1.5\times2+\varphi) < 0 \end{aligned}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} &\cos(3+\varphi) = 0 \\ &\sin\varphi > 0 \end{aligned}}$$

$$\therefore\ 3+\varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore\ \varphi = \frac{\pi}{2} - 3$$

$$\therefore\ x = 0.02\cos(1.5t + \frac{\pi}{2} - 3)(SI)$$

03 振动的合成

——> 同方向、同频率的简谐振动的合成 ★

——> 同方向、不同频率的简谐振动的合成

——> 相互垂直、同频率的简谐振动的合成

——> 相互垂直、不同频率的简谐振动的合成

1 同方向同频率的两个简谐振动的合成

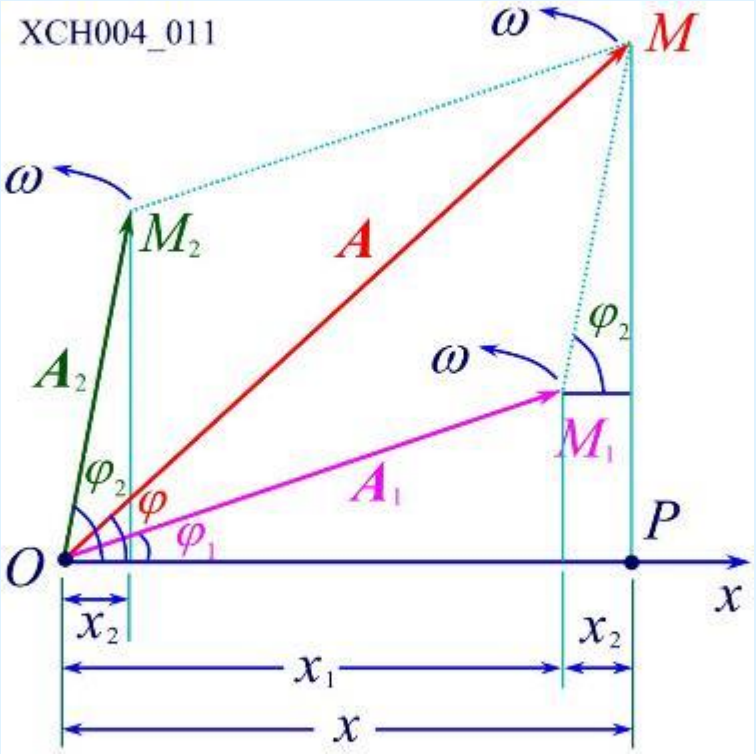
质点同时参与两个沿 x 方向独立的同频率的简谐运动

振动 1 $x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$

振动 2 $x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$

合成运动 $x = x_1 + x_2$

$$= A_1\cos(\omega t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$



旋转矢量的表示

$$\begin{cases} x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \\ x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2) \\ x = A\cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A\cos\varphi = A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2 \\ A\sin\varphi = A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2 \end{cases}$$

振动振幅 $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$

初相 $\varphi = \arctan\dfrac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$

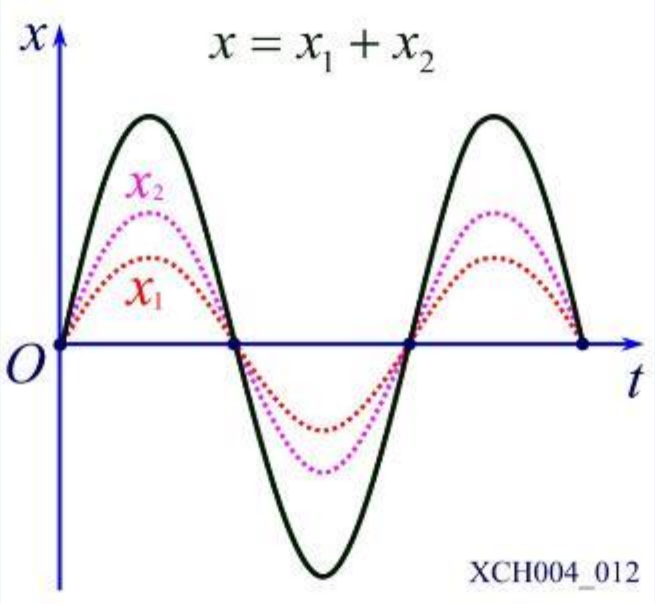
振幅 $A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$

什么时候振幅最大？

$$\cos(\varphi_2-\varphi_1)=1$$

$$\varphi_2-\varphi_1=2k\pi$$

$$A=A_1+A_2$$

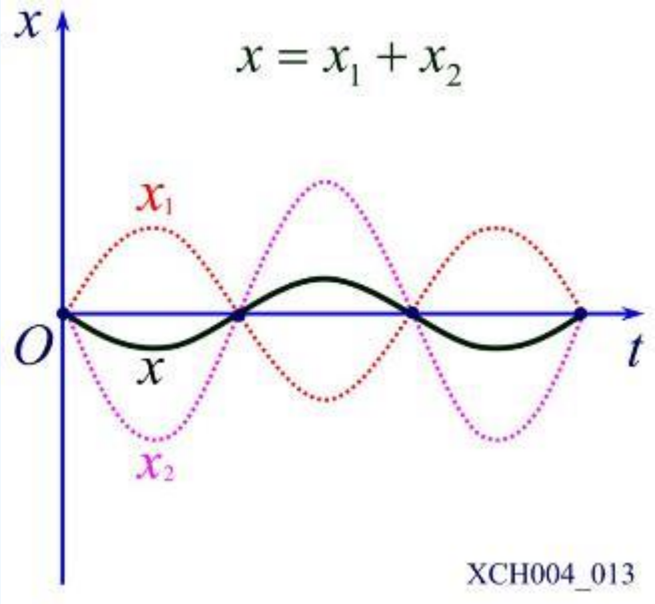


什么时候振幅最小？

$$\cos(\varphi_2-\varphi_1)=-1$$

$$\varphi_2-\varphi_1=(2k+1)\pi$$

$$A=\left|A_1-A_2\right|$$



一质点同时参与了三个简谐振动，它们的振动方程分别为：

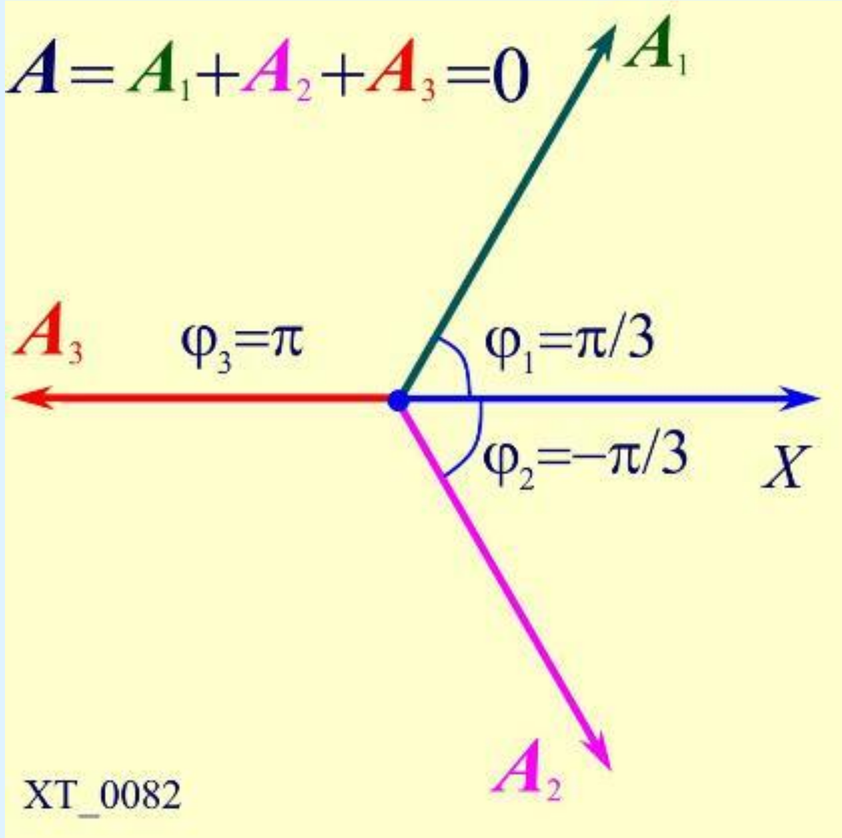
$$x_1 = A\cos(\omega t + \frac{\pi}{3})$$

$$x_2 = A\cos(\omega t + \frac{5\pi}{3})$$

$$x_3 = A\cos(\omega t + \pi)$$

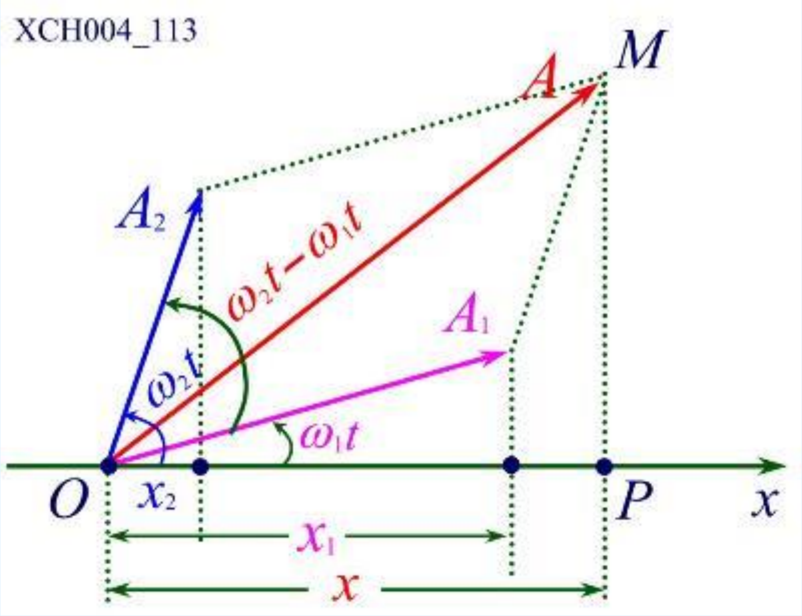
—— 合成运动的运动方程为

$$x = 0$$



2 同方向不同频率的两个简谐振动的合成

两个同方向频率不同简谐运动 $\begin{cases} x_1 = A_1\cos(w_1 t + j_{10}) \\ x_2 = A_2\cos(w_2 t + j_{20}) \end{cases}$



假设 $j_{10} = j_{20} = 0$

$$x = x_1 + x_2$$

$$= A_1\cos\omega_1 t + A_2\cos\omega_2 t$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\omega_2 t - \omega_1 t)}$$

—— 合成运动振幅随时间变化

—— 不是简谐运动

令 $A_1 = A_2 = A_0$

$$x = A_0 \cos\omega_1 t + A_0 \cos\omega_2 t$$

$$= 2A_0 \cos\frac{(\omega_2 - \omega_1)t}{2} \times \cos\frac{(\omega_2 + \omega_1)t}{2}$$

令 $\omega_2 + \omega_1 \geq |\omega_2 - \omega_1|$

$$A = 2A_0 \left|\cos\frac{(\omega_2 - \omega_1)t}{2}\right|$$ —— 缓慢变化

$$x = A\cos\frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1)t$$ —— 近似为简谐振动

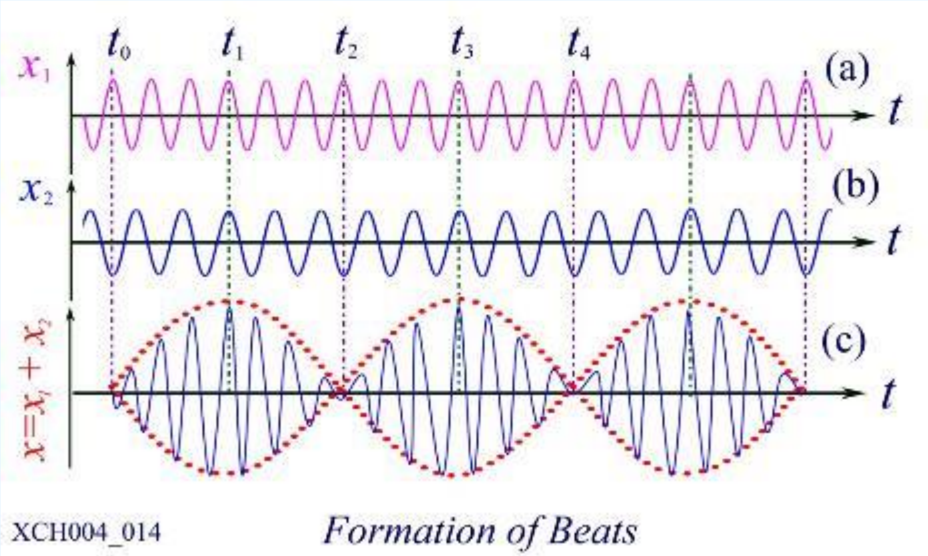
—— 合成振动近似为谐振动__产生“拍”效应

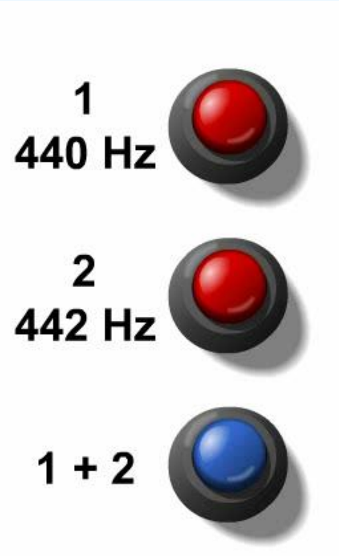
$$\begin{cases} x_1 = A_0\cos(\omega_1 t + \varphi_{10}) \\ x_2 = A_0\cos(\omega_2 t + \varphi_{20}) \\ \left|\omega_2 - \omega_1\right| << \omega_1,\ \omega_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = A\cos(\dfrac{\omega_2 + \omega_1}{2}t + \dfrac{\varphi_{20} + \varphi_{10}}{2}) \\ A = 2A_0\left|\cos(\dfrac{\omega_2 - \omega_1}{2}t + \dfrac{\varphi_{20} - \varphi_{10}}{2})\right| \end{cases}$$

$$\omega_{拍} = \left|\omega_2 - \omega_1\right|$$

$$\nu_{拍} = \left|\nu_2 - \nu_1\right|$$





合成振动近似为谐振动 —— 产生“拍”效应

作业：W1 简谐振动

3 相互垂直的简谐振动的合成

1 同频率相互垂直的两个简谐振动的合成

$$\left.\begin{aligned} &\textbf{\textit{x}}\ \text{轴方向}\quad x = A_1\cos(\omega t+\varphi_1) \\ &\textbf{\textit{y}}\ \text{轴方向}\quad y = A_2\cos(\omega t+\varphi_2) \end{aligned}\right\}\ \text{消去时间}$$

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_1}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$

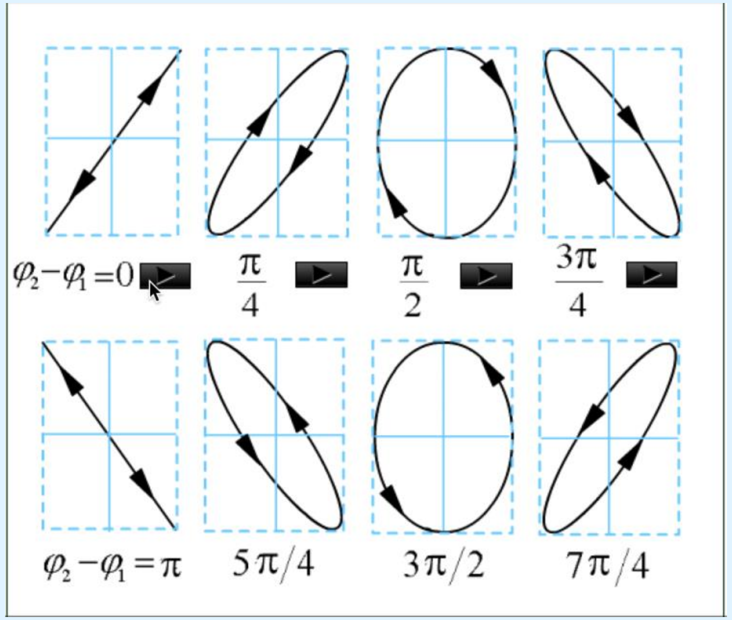
—— 合成运动轨迹方程

—— 椭圆方程

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_1}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$

1) 当 $\varphi_2-\varphi_1=0$ $\quad y=\frac{A_2}{A_1}x$

—— **1 3象限**



2) 当 $\varphi_2-\varphi_1=\pi$ $\quad y=-\frac{A_2}{A_1}x$

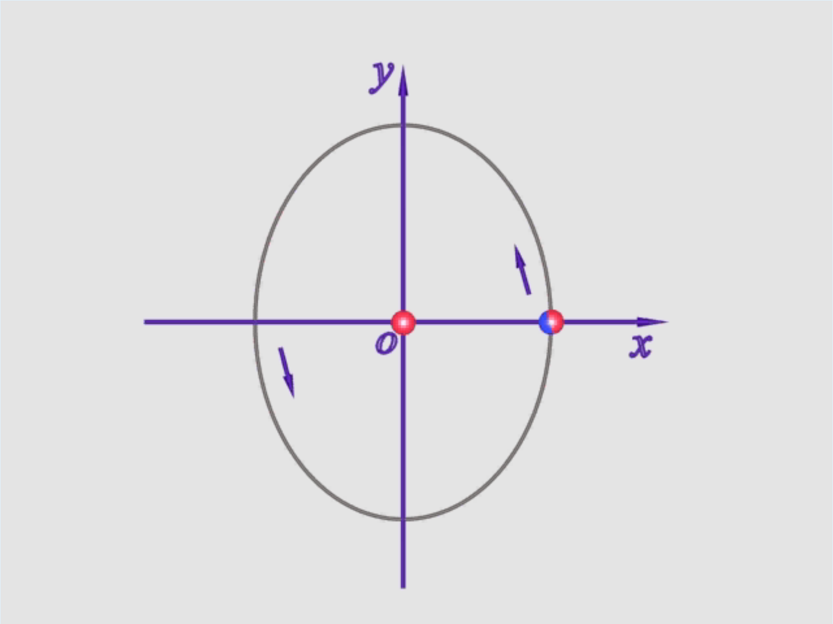
—— **2 4象限**

$$\xrightarrow{r=\sqrt{x^2+y^2}} r=\sqrt{A_1^2+A_2^2}\cos(\omega t+\varphi_0)$$ —— 简谐运动

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_1}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$

3) 当 $\varphi_2-\varphi_1=\dfrac{\pi}{2}$

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}=1$$ —— 顺时针

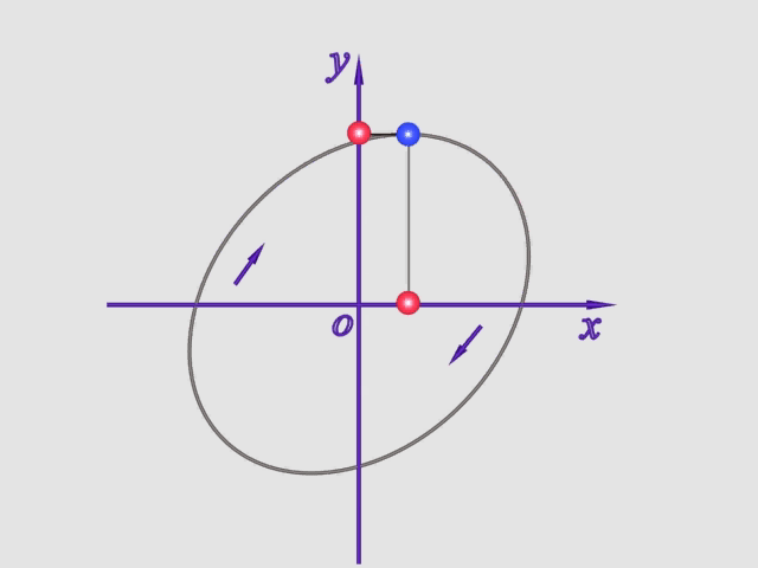


4) 当 $\varphi_2-\varphi_1=\dfrac{3\pi}{2}$

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}=1$$ —— 逆时针

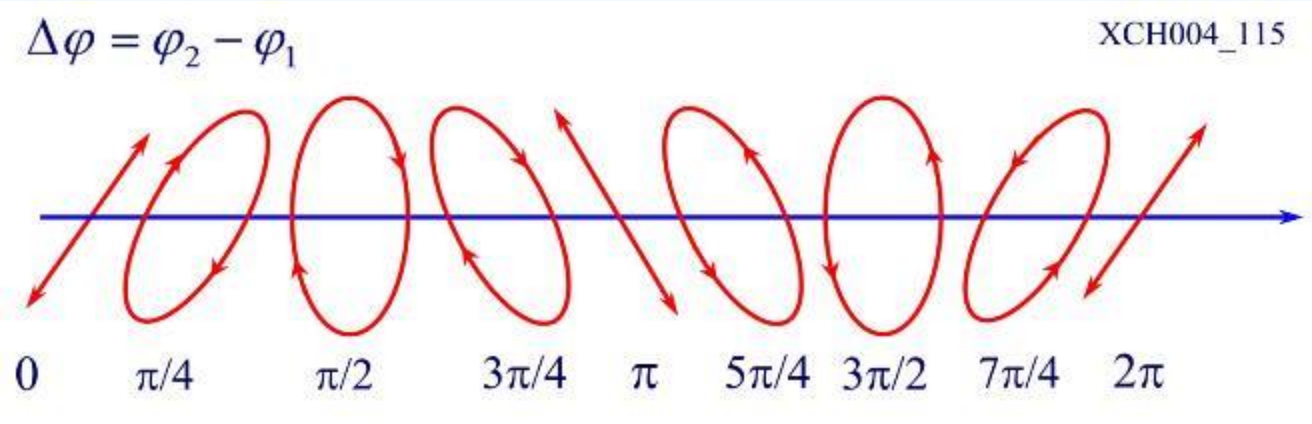
—— 运动被限制在一个矩形范围内

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_1}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$



5) 初相差$\varphi_2 - \varphi_1$ 为任意值

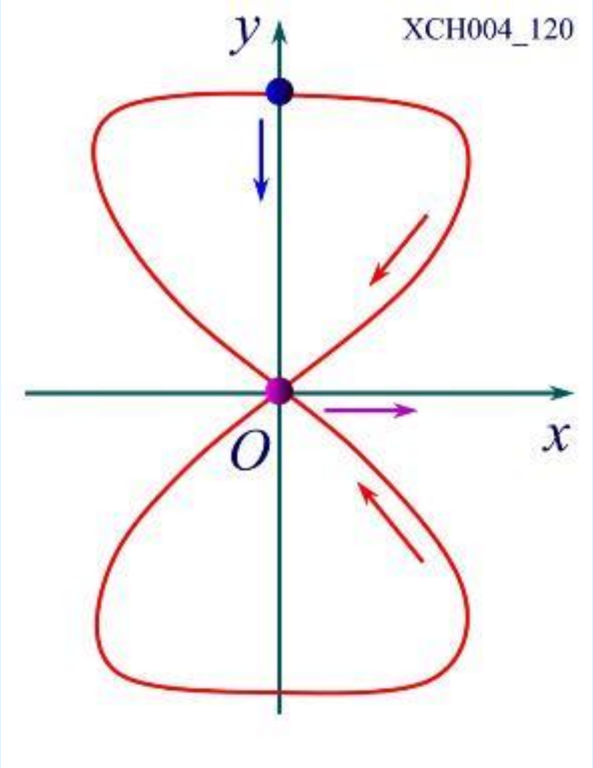
—— 轨迹为斜椭圆



4 不同频率相互垂直的两个简谐振动的合成

—— 合成运动轨迹与两个频率及初相差均有关

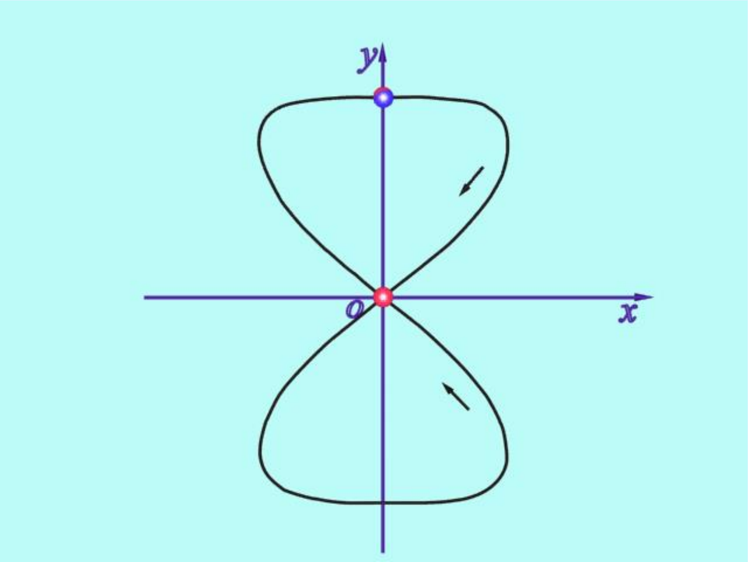
$$\begin{cases} x = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ y = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$



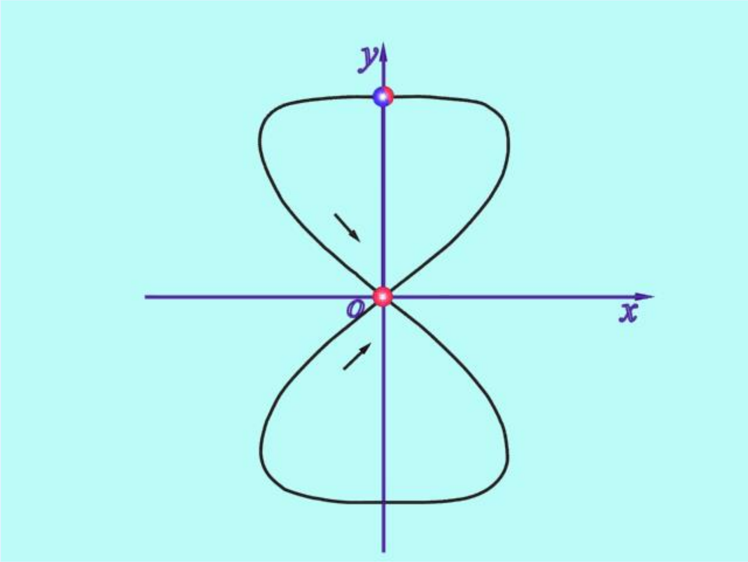
$$\begin{cases} \omega_1 : \omega_2 = 2:1 \\ \varphi_1 = 0 \\ \varphi_2 = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

—— 运动轨迹为李萨如图形

$$\begin{cases} x = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ y = A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$



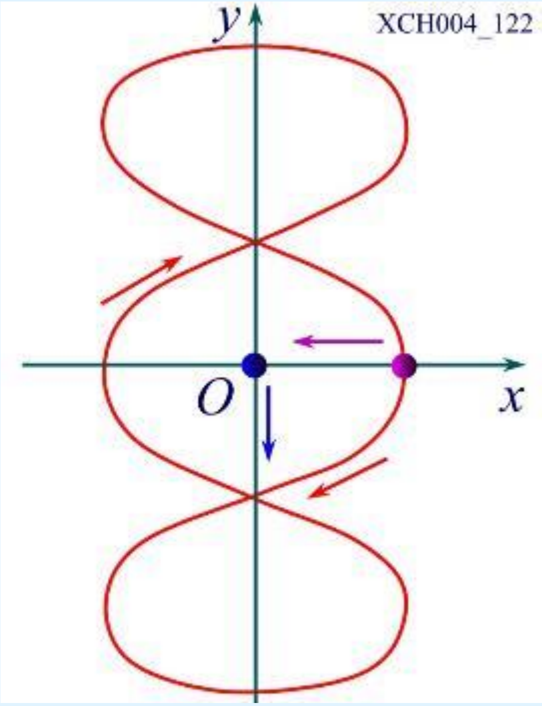
$$\begin{cases} \omega_1 : \omega_2 = 2:1 \\ \varphi_1 = 0 \\ \varphi_2 = \pi / 4 \end{cases}$$



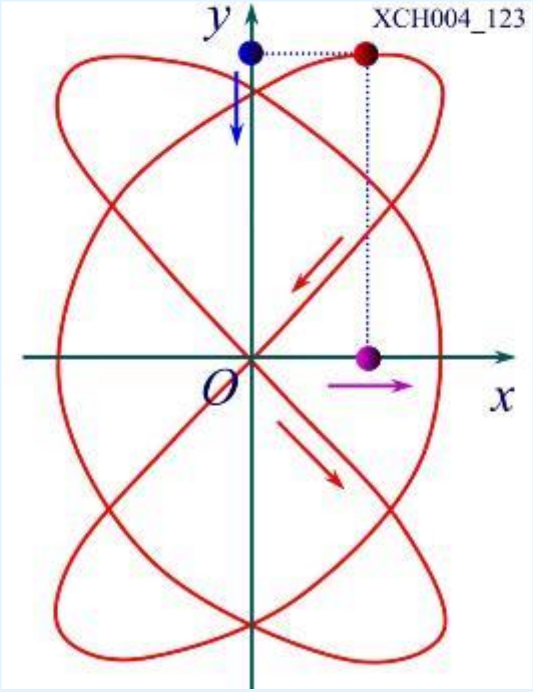
$$\begin{cases} \omega_1 : \omega_2 = 2:1 \\ \varphi_1 = 0 \\ \varphi_2 = 7\pi / 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ y = A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega_1 : \omega_2 = 3:1 \\ \varphi_1 = 0 \\ \varphi_2 = \dfrac{1}{4}\pi \end{cases}$$



$$\begin{cases} \omega_1 : \omega_2 = 3:2 \\ \varphi_1 = 0 \\ \varphi_2 = \dfrac{1}{4}\pi \end{cases}$$



两个频率不同__相互垂直简谐振动的合成 —— 李萨如图形

$$
\begin{cases}
x = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\
y = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\omega_1 : \omega_2 = 2:1 \\
\omega_1 : \omega_2 = 3:1 \\
\omega_1 : \omega_2 = 3:2
\end{cases}
$$