#《概率论与数理统计》期末试卷 1

一、选择题，将正确答案填在括号内（每小题 3 分，共 12 分）

1．设随机事件 A 与 B 互不相容，且有 $P(A)>0, P(B)>0$，

则下列关系成立的是(　　).

A. A,B 相互独立　　　　B. A,B 不相互独立

C. A,B 互为对立事件　　　　D. A,B 不互为对立事件

2．设随机变量 X 的分布律为 $P\{X=k\}=\dfrac{k}{15}$，$k=1,2,3,4,5$，

则 $P\{\dfrac{1}{2}<X\le\dfrac{5}{2}\}$ =(　　)

A．$\dfrac{1}{5}$　　B．$\dfrac{2}{5}$　　C．$\dfrac{3}{5}$　　D．$\dfrac{4}{5}$

3．设随机变量 X 与 Y 的方差存在且不等于 0，则 $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

是 X 与 Y（　　).

A. 不相关的充分条件但不是必要条件　B. 独立的必要条件但不是充分条件

C. 不相关的充分必要条件　　　　D. 独立的充分必要条件

4. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_9$ 和 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_9$ 均来自正态总体 $N(0, 0.3^2)$ 的两个独立样本，则统

计量 $U=\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_9}{\sqrt{Y_1^2+Y_2^2+\cdots+Y_9^2}}$ 的分布是（　　).

A．$\chi^2(9)$；　　B．$t(9)$　　C．$F(9,9)$；　　D．不能确定

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1．设事件 A,B 满足 $P(A\cup B)=0.8$，$P(B)=0.4$，则 $P(A|\overline{B})=$________.

2．设 $X\sim N(2,\sigma^2)$，$P\{2<X<4\}=0.3$，则 $P\{X\le 0\}=$_________ .

3．设 X 与 Y 为两个随机变量，且 $P\{X\ge 0, Y\ge 0\}=\dfrac{3}{7}$，$P\{X\ge 0\}=P\{Y\ge 0\}=\dfrac{4}{7}$，

则 $P\{\max\{X,Y\}\ge 0\}=$_______ .

4.设 X，Y 是随机变量，且有 $E(X)=3, E(Y)=1$，$D(X)=4$，$D(Y)=9$，

X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=0.25$，则 $D(3X-Y+15)$ =________ .

5．设总体 X 具有分布律

X	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

其中$\theta(0<\theta<1)$为未知参数，已知取得了样本值

$x_1=1, x_2=2, x_3=1, x_4=3$，则$\theta$的矩估计值为________.

三、（本题 8 分）设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases} ax+b, & 0<x<1 \\ 0, & else \end{cases}$，

又已知$E(X)=1/3$，（1）求常数a和b；(2) 求 X 的分布函数$F(x)$.

四、（本题 12 分）设随机变量(X,Y)的概率分布律为：

Y \ X	0	1	2
-1	0.2	0.1	0.3
1	0.1	0.3	0

求：（1）关于$Z=XY$的分布律；（2）$E(X)$，$D(X)$，协方差$Cov(X,Y)$.

五、（本题 15 分）设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} Cxy, & 0<y<x<1 \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

（1）求常数C；（2）求关于 X 和关于Y的边缘概率密度 $f_X(x)$和 $f_Y(y)$；

（3）问 X 与Y是否相互独立？（4）求概率$P\{X+Y<1\}$.

六、（本题 8 分）一加法器同时收到 30 个噪声电压$V_k(k=1,2,\ldots,30)$，设它们是

相互独立的随机变量，且都在区间（0,10）上服从均匀分布，记$V=\sum_{k=1}^{30}V_k$，

求$P\{V>140\}$的近似值.（结果用标准正态分布函数$\Phi(x)$表示，$x>0$）

七、（本题 8 分）设总体 X 具有概率密度 $f(x;\lambda)=\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0, & 其它 \end{cases}$,其中$\lambda$是未知参

数.又$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自该总体的一个样本，$x_1,x_2,\cdots,x_n$为样本值.试求未知

参数λ的最大似然估计量$\hat{\lambda}$.

八、（本题 7 分）设两位化验员 A,B 独立地对某种聚合物含氯量用相同的方法各作 10 次测定，其测定值的样本方差依次为 $S_A^2=0.552,\ S_B^2=0.606$.设 σ_A^2,σ_B^2 分别为 A,B 所测定的测定值总体的方差，设总体均为正态的，设两样本独立，求方差比 σ_A^2/σ_B^2 的置信水平为 0.95 的置信区间.（$F_{0.025}(9,9)=4.03$, $F_{0.05}(9,9)=3.18$）（取两位小数）

九、（本题 7 分）某种电子元件的寿命 X（以小时计）服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，μ,σ^2 均未知，现测 25 只元件，计算得平均寿命 $\overline{x}=231.5$，标准差为 $s=30.5$，问是否有理由认为元件的平均寿命是 225（小时）（取 $\alpha=0.05$）.

（$t_{0.05}(24)=1.7109, t_{0.025}(24)=2.0639$）

十、（本题 8 分）设总体 X 具有概率密度 $f(x;\theta)=\begin{cases}e^{-(x-\theta)}, & x\ge\theta\\ 0, & 其它\end{cases}$,其中 θ 是未知参数， $X_1,X_2...,X_n$ 是总体 X 的一个简单随机样本，$(n>1)$，证明：

$\hat{\theta}_1=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-1$，$\hat{\theta}_2=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}-\dfrac{1}{n}$ 是 θ 的两个无偏估计量,

并确定哪个更有效.

《概率论与数理统计》期末试卷 2

一、选择题，将正确答案填在括号内（每小题 3 分，共 15 分）

1．设随机事件 A,B 满足 $P(B)=P(B|A)$，则下列结论中正确的是（　　）

A．A,B 互不相容；　　B．$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

C．$P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})$；　　D．$P(A)=P(B|A)$

2．已知连续型随机变量 X 的概率密度函数 $f(x)$ 是偶函数，$F(x)$ 是 X 的分布函数，则对任意实数 c，有 $F(-c)$ 等于（　　）

A．$F(c)$；　B．$\dfrac{1}{2}-\int_0^c f(x)dx$　C．$2F(c)-1$；　D．$1-\int_0^c f(x)dx$

3．设 X 与 Y 相互独立，有相同的分布律，

X	-1	1
P_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

则下列正确的是（　　）

A．$X=Y$；　B．$P(X=Y)=1$　C．$P(X=Y)=\frac{1}{4}$；　D．$P(X=Y)=\frac{1}{2}$

4．设随机变量 X 服从二项分布，且 $E(X)=2.4, D(X)=1.44$，则二项分布中的参数 n, p 的值为（　　）

A．$n=8, p=0.3$；　　B．$n=6, p=0.4$

C．$n=6, p=0.6$；　　D．$n=24, p=0.1$

5．设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中 σ^2 已知，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的一个样本，则 μ 的置信水平为 95%的置信区间为（　　）.

A．$(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{0.025}, \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{0.025})$；　B．$(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_{0.025}, \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_{0.025})$

C．$(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{0.05}, \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{0.05})$　D．$(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_{0.05}, \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_{0.05})$

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1．设事件 A, B 相互独立，且 $P(A)=0.6$，$P(B)=0.4$，则 $P(A\cup\overline{B})=$__ .

2．已知 $P(A)=0.7$，$P(B)=0.6$，$P(\overline{A}B)=0.3$，则 $P(A|B)=$________ .

3. 设随机变量 (X,Y) 的联合分布律为：

Y \ X	0	1
0	$\frac{2}{25}$	$\frac{4}{25}$
1	$\frac{3}{25}$	$\frac{16}{25}$

而 $F(x,y)$ 为 (X,Y) 的联合分布函数，则 $F(2,\frac{1}{2})=$__________ .

4.设随机变量 X 服从 $U(0,1)$ 的均匀分布，Y 服从参数为 $\lambda=3$ 的泊松分布，且 X 与 Y 相互独立，则 $D(2X-3Y)$ =__________ .

5．若随机变量 $X\sim N(1,\frac{4}{3})$，且由切比雪夫不等式得 $P(|X-1|<\varepsilon)\geq\frac{2}{3}$，则 ε 的值为 __________ .

三、（本题 11 分）设连续型随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases} kx, & 0\leq x<\frac{1}{2} \\ 6-6x, & \frac{1}{2}\leq x<1 \\ 0, & 其它 \end{cases}$，

（1）　确定常数 k；（2）求 X 的分布函数 $F(x)$；（3）$E(X)$.

四、（本题 17 分）设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}Cxy\,,0<x<1\,,x<y<1\\ 0\,,\text{其他}\end{cases},$$

（1）求常数C；

（2）求关于X和关于Y的边缘概率密度； 并问X与Y是否相互独立？

（3）求概率$P\{X+Y<1\}$；（4）$E(XY)$.

五、（本题 10 分）对于一住户而言，拥有汽车辆数是一个随机变量，设住户拥有汽车辆数X的分布律为：

X	0	1	2
p_k	0.1	0.8	0.1

若某小区有住户 400 户，各住户拥有汽车辆数相互独立，且服从同一分布， 求该小区汽 车辆数超过 390 的概率？（结果用标准正态分布函数$\Phi(x)$表示

六、（本题 12 分）设总体X具有概率密度$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}x^{(1-\theta)/\theta}, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$,其中

$0<\theta<+\infty$是未知参数.又$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自该总体X的样本，

$x_1,x_2,\cdots,x_n$为样本值.

(1)求未知参数θ的最大似然估计量$\hat{\theta}$；

（2）试问θ的最大似然估计量$\hat{\theta}$是否为θ的无偏估计量？需说明理由.

七、（本题 6 分）设某种清漆的干燥时间（以 h 计）服从正态分布$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，现随机地抽取 9 个样品，测得干燥时间的均值$\overline{x}=6$（小时），样本均方差$s=0.6$，σ^2为未知，求μ的置信水平为 95%的单侧置信上限.（$t_{0.025}(8)=2.3060$,$t_{0.025}(9)=2.2622$，$t_{0.05}(8)=1.8595$,精确到第二位小数).

八、（本题 8 分）用两种方法(A 和 B)测定冰自$-0.72\ {}^0C$转变为$0\ {}^0C$的水的融化热（以 cal/g 计），抽取容量都为 12 的方法 A 和方法 B 的样本，计算得样本方差分别为$s_A{}^2=0.9318$，$s_B{}^2=1.01$，设这两个样本相互独立，且分别来自正态总体$N(\mu_1,\sigma_1{}^2)$和$N(\mu_2,\sigma_2{}^2)$，$\mu_1,\mu_2,\sigma_1{}^2,\sigma_2{}^2$均未知，试检验假设（取$\alpha=0.05$）$H_0:\sigma_1{}^2=\sigma_2{}^2$，$H_1:\sigma_1{}^2\neq\sigma_2{}^2$

（$\chi^2_{0.025}(11)=21.92$，$\chi^2_{0.975}(11)=2.603$，$F_{0.025}(11,11)=3.48$，$F_{0.05}(11,11)=2.88$）

九、（本题 6 分）设 $X_1,X_2...,X_n$ 是总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本，记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，

$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，$T=\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2$，求 $E(T)$，$D(T)$.

《概率论与数理统计》期末试卷 1 参考答案

一、1．解：因随机事件 A 与 B 互不相容，$P(AB)=0$，又 $P(A)>0,P(B)>0$，

则 $P(AB)>0$，不符合 $P(AB)=P(A)P(B)$，故 A 与 B 不独立，故选(B).

2．解：因 $P\{\frac{1}{2}<X\le\frac{5}{2}\}=P\{X=1\}+P\{X=2\}=\frac{1}{15}+\frac{2}{15}=\frac{1}{5}$，故选(A)

3．解：因 $D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2Cov(X,Y)$，

而 $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$，X 与 Y 独立有 $E(XY)=E(X)E(Y)$，故选

（ B 和 C).

4. 解：由题意知 $X_1+X_2+\cdots+X_9\sim N(0,9\times0.3^2)$，

$$\frac{X_1+X_2+\cdots+X_9}{3\times0.3}\sim N(0,1)$$

$(\frac{Y_1}{0.3})^2+(\frac{Y_2}{0.3})^2+\cdots+(\frac{Y_9}{0.3})^2\sim\chi^2(9)$，故由 t 分布的定义，选（ B ）

二、 1．解：因 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，又

$$P(A|\overline{B})=\frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}=\frac{P(A\cup B)-P(B)}{1-0.4}=\frac{0.8-0.4}{0.6}=\frac{2}{3},$$

即 $P(A|\overline{B})=\frac{2}{3}$.

2．解：由正态分布的知识，其概率密度关于 $x=\mu=2$ 对称，则 $P\{X\le 2\}=0.5$

且 $P\{0<X<2\}=P\{2<X<4\}=0.3$，

故 $P\{X\le 0\}=P\{X\le 2\}-P\{0<X<2\}=0.5-0.3=0.2$.

3．解：由题意，X 取值 $X<0$ 和 $X\ge 0$，Y 取值 $Y<0$ 和 $Y\ge 0$，

根据联合分布律与边缘分布律的关系，知 $P\{X<0,Y\ge 0\}=\frac{4}{7}-\frac{3}{7}=\frac{1}{7}$

$P\{X\ge 0,Y<0\}=\frac{4}{7}-\frac{3}{7}=\frac{1}{7}$，故

$$P\{\max\{X,Y\}\ge 0\}=P\{X<0,Y\ge 0\}+P\{X\ge 0,Y<0\}+P\{X\ge 0,Y\ge 0\}$$

$$=\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{3}{7}=\frac{5}{7}\quad .$$

4. 解：因 $D(3X-Y+15)=D(3X-Y)=9D(X)+D(Y)-6Cov(X,Y)$

又 $Cov(X,Y)=\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}=0.25\times 2\times 3=1.5$

故 $D(3X-Y+15)=36$.

5．解：由矩估计，先计算 $E(X)=1\times\theta^2+2\times 2\theta(1-\theta)+3\times(1-\theta)^2=3-2\theta$

再令 $E(X)=3-2\theta=\overline{X}=\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}=\frac{7}{4}$，得 θ 的矩估计值为

$\hat{\theta}=\frac{5}{8}$.

三、解:（1）因为 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$，$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$

所以 $\int_0^1(ax+b)dx=1$，$\int_0^1x(ax+b)dx=\frac{1}{3}$，即

$a/2+b=1,a/3+b/2=1/3$，

得 $a=-2,b=2$

(2) X 的分布函数 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}0, & x\le 0\\ -x^2+2x, & 0<x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$

四、解：（1）关于 $Z=XY$ 的分布律：

Z	-2	-1	0	1	2
P	0.3	0.1	0.3	0.3	0

（2）关于 X 的边缘分布律：

X	0	1	2
P	0.3	0.4	0.3

故 $E(X)=1$, $E(X^2)=1.6$，$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=0.6$

$E(XY)=-0.4$，$E(Y)=-0.2$，$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=-0.2$

五、解：(1) $\because \int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=1$

即 $\int_0^1 dx\int_0^x Cxydy=1$，得 $C=8$

（2）关于 X 的边缘概率密度：$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy$

$$=\begin{cases}\int_0^x 8xydy, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}=\begin{cases}4x^3, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

关于 Y 的边缘概率密度：$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx$

$$=\begin{cases}\int_y^1 8xydx, & 0<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}=\begin{cases}4y(1-y^2), & 0<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

显然 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，所以 X 与 Y 不相互独立.

（3）$P\{X+Y<1\}=\iint\limits_{x+y<1}f(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{1}{2}}dy\int_y^{1-y}8xydx=\frac{1}{6}$

六、解：由题意 $E(V_k)=5, D(V_k)=\frac{100}{12}$

所求概率 $P\{\sum_{k-1}^{30}V_k>140\}=1-P\{\sum_{k-1}^{30}V_k\leq 140\}$

$$=1-P\{(\frac{\sum_{k=1}^{30}V_k-30\times 5}{\sqrt{30\times\frac{100}{12}}}\leq\frac{140-30\times 5}{\sqrt{30\times\frac{100}{12}}}\}$$

$$\approx 1-\Phi(-\sqrt{\frac{2}{5}})=\Phi(\frac{\sqrt{10}}{5})$$

七、解：似然函数 $L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\lambda)=\lambda^n e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i}$

取对数 $\ln L(\lambda)=n\ln\lambda-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i$

令 $\frac{d\ln L}{d\lambda}=\frac{n}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}x_i=0$，得 $\lambda=n/\sum_{i=1}^{n}x_i$

λ 的最大似然估计量 $\hat{\lambda} = n / \sum_{i=1}^{n} X_i$

八、解：由题意：$n_1 = n_2 = 10$，$1-\alpha = 0.95$，$\frac{\alpha}{2} = 0.025$

方差比 $\sigma_A^2 \big/ \sigma_B^2$ 的置信区间为：

$$(\frac{S_A^2}{S_B^2} \cdot \frac{1}{F_{0.025}(n_1 - 1, n_2 - 1)}, \quad \frac{S_A^2}{S_B^2} \cdot \frac{1}{F_{0.975}(n_1 - 1, n_2 - 1)})$$

即：（$\frac{0.552}{0.606} \cdot \frac{1}{4.03}, \frac{0.552}{0.606} \cdot 4.03$），

即置信区间为 $(0.23, 3.67)$

九、解：由题意：$n = 25$，需检验假设：$H_0 : \mu = \mu_0 = 225$，$H_1 : \mu \neq 225$

则拒绝域为：$\left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} \right| \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

而 $\left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} \right| = \left| \frac{231.5 - 225}{30.5 / 5} \right| = 1.066 < t_{0.025}(24) = 2.0639$

所以：接受 H_0，即有理由认为元件的平均寿命是 225（小时）。

十、 证明：因 $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x, \theta) dx = \theta + 1$， 故 $E(\hat{\theta}_1) = E(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i - 1) = \theta$ ，

而：$N = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ 的分布函数：

$$F_N(x) = \begin{cases} 1 - e^{n\theta - nx} & , x \geq \theta \\ 0 , x < \theta \end{cases},$$

其概率密度 $f_N(x) = \begin{cases} ne^{n\theta - nx} & , x \geq \theta \\ 0 , x < \theta \end{cases}$，故 $E(N) = \int_{-\infty}^{+\infty} z f_N(z) dz = \theta + \frac{1}{n}$

则 $E(\hat{\theta}_2) = E(\min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\} - \frac{1}{n}) = \theta$

故 $\hat{\theta}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i - 1$，$\hat{\theta}_2 = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\} - \frac{1}{n}$ 是 θ 的两个无偏估计量.

又 $E({X_i}^2) = E(X^2) = \theta^2 + 2\theta + 2$

$$D(\hat{\theta}_1) = D(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i - 1) = \frac{1}{n} D(X) = \frac{1}{n}$$

$$D(\hat{\theta}_2)=D(\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}-\frac{1}{n})=\theta^2+\frac{2\theta}{n}+\frac{2}{n^2}-(\theta+\frac{1}{n})^2=\frac{1}{n^2}$$

故 $\hat{\theta}_2=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}-\frac{1}{n}$ 比 $\hat{\theta}_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-1$ 更有效. $(n>1)$

《概率论与数理统计》期末试卷 2 参考答案

一、1．解：因 $P(B)=P(B|A)$，知 A,B 相互独立，故 $\overline{A},\overline{B}$ 也相互独立，

则 $P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})$，故选（ C ）

2．解：因连续型随机变量有 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$，若 $f(x)$ 是偶函数，

则 $\int_{-\infty}^{0}f(x)dx=\int_{0}^{+\infty}f(x)dx=\frac{1}{2}$，又 X 的分布函数 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$

故 $F(-c)=\int_{-\infty}^{-c}f(x)dx=\int_{c}^{+\infty}f(x)dx=\int_{0}^{+\infty}f(x)dx-\int_{0}^{c}f(x)dx$

$=\frac{1}{2}-\int_{0}^{c}f(x)dx$，故选（ B ）

3．解：由题意及独立知

$P\{X=Y\}=P\{X=-1\}P\{Y=-1\}+P\{X=1\}P\{Y=1\}$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，故选（ D ）

4．解：由题意 $E(X)=2.4=np, D(X)=1.44=np(1-p)$

得 $1-p=0.6$，故 $n=6, p=0.4$，选（ B ）

5．解：由题意，σ^2 已知，故选（ A ）.

二、1．解：因 $P(A\cup\overline{B})=P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})$

而事件 A,B 相互独立，知 $A,\overline{B}$ 也独立，

故 $P(A\cup\overline{B})=0.6+(1-0.4)-0.6\times(1-0.4)=0.84$，故填 0.84 .

2．解：因 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$，而 $P(AB)=P(B)-P(\overline{A}B)=0.6-0.3=0.3$，

故 $P(A|B)==\frac{0.3}{0.6}=\frac{1}{2}$，即填 $\frac{1}{2}$.

3. 解：由随机变量 (X,Y) 的分布函数的定义 $F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}$，故：

$$F(2,\frac{1}{2})=P\{X\le 2,Y\le\frac{1}{2}\}=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=1,Y=0\}$$

$=\frac{2}{25}+\frac{4}{25}=\frac{6}{25}$，故填$\frac{6}{25}$.

4. 解：因 X 与 Y 相互独立，故

$$D(2X-3Y)=2^2D(X)+(-3)^2D(Y)=4D(X)+9D(Y)$$

又 X 服从$U(0,1)$的均匀分布，故$D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{1}{12}$，

Y 服从参数为$\lambda=3$的泊松分布，故$D(Y)=\lambda=3$，故填

$D(2X-3Y)=27\frac{1}{3}$.

5. 解：由切比雪夫不等式，对任意$\varepsilon>0$，有$P(|X-E(X)|<\varepsilon)\ge 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$

由题意，得$1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}=1-\frac{4/3}{\varepsilon^2}=\frac{2}{3}$，得$\varepsilon=2$，故填 2 .

三、解:（1）因为$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$， 即 $\int_0^{\frac{1}{2}}kxdx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(6-6x)dx=1$ ， 得$k=2$

(2) X 的分布函数$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$

$$=\begin{cases}0 & ,x<0\\ \int_0^x 2tdt & ,0\le x<\frac{1}{2}\\ \int_0^{\frac{1}{2}}2xdx+\int_{\frac{1}{2}}^{x}(6-6t)dt & ,\frac{1}{2}\le x<1\\ 1 & ,x\ge 1\end{cases}=\begin{cases}0 & ,x<0\\ x^2 & ,0\le x<\frac{1}{2}\\ 6x-3x^2-2 & ,\frac{1}{2}\le x<1\\ 1 & ,x\ge 1\end{cases}$$

(3) $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^{\frac{1}{2}}x\cdot 2xdx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}x\cdot(6-6x)dx=\frac{7}{12}$

四、 解： (1)因 $\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=1$ ，即$\int_0^1dx\int_x^1Cxydy=1$，得$C=8$

（2）关于 X 的边缘概率密度 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy$

$$=\begin{cases}\int_x^1 8xydy\ , & 0<x<1\\ 0\ , & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}4x(1-x^2)\ , & 0<x<1\\ 0\ , & \text{其他}\end{cases}$$

关于Y 的边缘概率密度 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx$

$$=\begin{cases}\int_0^y 8xydx\ , 0<y<1 \\ 0\ ,\text{其他}\end{cases} = \begin{cases}4y^3\ , 0<y<1 \\ 0\ ,\text{其他}\end{cases}$$

显然 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，所以 X 与 Y 不相互独立.

(3) $P\{X+Y<1\}=\iint\limits_{x+y<1} f(x,y)dxdy=\int_0^{1/2}dx\int_x^{1-x}8xydy=\dfrac{1}{6}$

(4) $E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dy=\int_0^1 dx\int_x^1 xy\cdot 8xydy=\dfrac{4}{9}$

五、解：记 $X_i(i=1,2,\cdots,400)$ 为第 i 户住户的车辆数，由题意

$$E(X_i)=1\ ,\ E(X_i^{\ 2})=1.2\ ,\ D(X_i)=0.2$$

所求概率 $P\{\sum\limits_{i-1}^{400}X_i>390\}=1-P\{\sum\limits_{i-1}^{400}X_i\leq 390\}$

$$=1-P\{(\frac{\sum\limits_{i=1}^{400}X_i-400\times 1}{\sqrt{400\times 0.2}}\leq\frac{390-400\times 1}{\sqrt{400\times 0.2}}\}$$

$$\approx 1-\Phi(-\frac{10}{4\sqrt{5}})=1-(1-\Phi(\frac{\sqrt{5}}{2}))=\Phi(\frac{\sqrt{5}}{2})$$

六、解：(1)似然函数 $L(x_1,\cdots,x_n)=\prod\limits_{i=1}^{n}f(x_i)=(\dfrac{1}{\theta})^n\prod\limits_{i=1}^{n}x_i^{(1-\theta)/\theta}$

取对数：$\ln L(x_1,\cdots,x_n)=-n\ln\theta+\dfrac{1-\theta}{\theta}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i$

令 $\dfrac{d\ln L}{d\theta}=-\dfrac{n}{\theta}-\dfrac{1}{\theta^2}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i=0$，得 $\hat{\theta}=-\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i}{n}$

故 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}=-\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i}{n}$

(2)因 $E(\hat{\theta})=E(-\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i}{n})=-\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}E(\ln X_i)$；

故只要求 $E(\ln X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\ln xf(x;\theta)dx=\int_0^1\ln x\cdot\dfrac{x^{(1-\theta)/\theta}}{\theta}dx$

由分部积分得 $E(\ln X)=-\theta$；所以 $E(\hat{\theta})=\theta$；即 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计量.

七．解：这里 $\alpha=0.05$, $n=9$，故 μ 的置信水平为 95%的单侧置信上限

为：$\bar{x}+t_{\alpha}(n-1)\dfrac{s}{\sqrt{n}}=6+1.8595\cdot\dfrac{0.6}{3}\approx 6.37$

八． 解：这里 $\alpha=0.05$, $n_1=n_2=12$, ${s_A}^2=0.9318$， ${s_B}^2=1.01$

由题意检验假设 $H_0:{\sigma_1}^2={\sigma_2}^2$， $H_1:{\sigma_1}^2\neq{\sigma_2}^2$

则拒绝域为 $F=\dfrac{{s_A}^2}{{s_B}^2}\leq F^2_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$ 或

$F=\dfrac{{s_A}^2}{{s_B}^2}\geq F^2_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$

因 $F=\dfrac{{s_A}^2}{{s_B}^2}=\dfrac{0.9318}{1.01}\approx 0.9226$,

$F_{0.025}(11,11)=3.48$， $F_{0.9755}(11,11)=\dfrac{1}{F_{0.025}(11,11)}=\dfrac{1}{3.48}\approx 0.287$

而 $0.287<0.9226<3.48$，故不在拒绝域内（即接受 $H_0:{\sigma_1}^2={\sigma_2}^2$），

即可认为两总体方差相等.

九． 解：（1）易知 $E(\overline{X})=0$； $D(\overline{X})=\dfrac{1}{n}$； 得 $E(\overline{X}^2)=D(\overline{X})+[E(\overline{X})]^2=\dfrac{1}{n}$

而 $E(S^2)=\sigma^2=1$，得 $E(T)=0$

方法一：因 $\overline{X}$, S^2 相互独立

故 $D(T)=D(\overline{X}^2)+\dfrac{1}{n^2}D(S^2)$；

又 $(\dfrac{\overline{X}}{1/\sqrt{n}})^2\sim\chi^2(1)$ 得 $D(\overline{X}^2)=\dfrac{2}{n^2}$

$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=(n-1)S^2\sim\chi^2(n-1)$ 得 $D(S^2)=\dfrac{2}{n-1}$

得 $D(T)=D(\overline{X}^2)+\dfrac{1}{n^2}D(S^2)=\dfrac{2}{n(n-1)}$

方法二：因$T=\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2=(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)^2-\frac{1}{n(n-1)}(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2)$,

整理得$T=\frac{1}{n(n-1)}\sum_{1\le i<j\le n}X_iX_j$ ，则

$D(T)=D(X_1X_2+X_1X_3+\cdots+X_{n-1}X_n)=$

$D(X_1X_2)+D(X_1X_3)+\cdots+D(X_{n-1}X_n)$

$+2Cov(X_1X_2,X_1X_3)+\cdots+2Cov(X_{n-2}X_n,X_{n-1}X_n)$

而$Cov(X_1X_2,X_1X_3)=E(X_1^2X_2X_3)-E(X_1X_2)E(X_1X_3)$

由$X_1,X_2...,X_n$是总体$N(0,1)$的简单随机样本，知$E(X_i)=0$，

$D(X_i)=1$，且由独立性知$Cov(X_1X_2,X_1X_3)=0$，

$D(X_1X_2)=E(X_1^2X_2^2)-0=E(X_1^2)E(X_2^2)=1$，类似计算其他值，最后

代入得$D(T)=\frac{2}{n(n-1)}$