杭州电子科技大学学生考试卷（ A ）卷

考试课程	离散数学	考试日期	年 月 日	成 绩			
课程号	A0604420	教师号		任课教师姓名			
考生姓名		学号（8位）		年级		专业	

一．填空题 (10 题，每题 2 分，共 20 分)

1. 设 p：明天天晴，q：我们去爬山。命题“只有明天天晴，我们才去爬山”可以符号化为（ $q \to p$ ）。
2. 公式 $(p \to q) \wedge (\neg(p \wedge r) \vee p)$ 的成假赋值为（ 100, 101 ）。
3. 当 p, q 的真值为 1, r 的真值为 0 时，命题公式 $(p \wedge q \wedge \neg r) \leftrightarrow ((\neg p \vee \neg q) \to r)$ 的真值为（ 1 ）。
4. 设 p：小雪选学英语，q：小雪选学德语。命题“小雪只能选学英语或只能选学德语”可以符号化为（ $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ ）。
5. 公式 $q \to (p \to r)$ 与 $(p \wedge q) \to r$（ 是 ）等值式。(“是”或“不是”)
6. 公式 A 含有三个命题变项 p, q, r，且它的成真赋值为 010，011，101，则它的主合取范式为（ $M_0 \wedge M_1 \wedge M_4 \wedge M_6 \wedge M_7$ ）。
7. 如果 $|A|=n$，则 $|P(A)|$ = 2^n
8. 设 X = {-2, 0, 2}, Y = { -2, -1, 2, 4, 6 }, W = {4, 6, 8, 10 }，则 $(X \cup Y) \oplus W$ = ______________

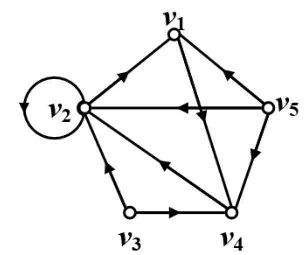
解 $X \cup Y$ = {-2, -1, 0, 2, 4, 6}

$(X \cup Y) - W$ = {-2, -1, 0, 2}

$W - (X \cup Y)$ = {8, 10}

$(X \cup Y) \oplus W$ = {-2, -1, 0, 2, 8, 10}

9. 有向图 D 如下图所示，则 $\Delta(D)$= 6，$\Delta^+(D)$= 3，$\delta^-(D)$= 0，入度最大的顶点是 v_2。



10. 无向图 G 为上图 D 的基图，G 中删除顶点 v_2 和 v_4 后得到的图为 G'，则 G' 中的连通分支数为 2 。

二．综合题 (8 题，每题 10 分，共 80 分)

1. 用真值表法求下列公式的成真赋值和成假赋值。(10 分)

$$(p \vee q) \to (p \wedge r)$$

解：

p,q,r	$p \vee q$	$p \wedge r$	$(p \vee q) \to (p \wedge r)$
0 0 0	0	0	1
0 0 1	0	0	1
0 1 0	1	0	0
0 1 1	1	0	0
1 0 0	1	0	0
1 0 1	1	1	1
1 1 0	1	0	0
1 1 1	1	1	1

由真值表成真赋值为 000, 001, 101, 111

成假赋值为 010, 011, 100, 110

2. 用等值推演法求下列公式的主析取范式。（10 分）

$$(p \to q) \wedge (q \to r)$$

解：

$$\begin{aligned}
&(p \to q) \wedge (q \to r) \\
&\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \\
&\Leftrightarrow ((\neg p \vee q) \wedge \neg q) \vee ((\neg p \vee q) \wedge r) \\
&\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r) \\
&\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r)
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
&\neg p \wedge \neg q \\
&\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \wedge (r \vee \neg r) \\
&\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \\
&\Leftrightarrow m_1 \vee m_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\neg p \wedge r \\
&\Leftrightarrow (\neg p \wedge r) \wedge (\neg q \vee q) \\
&\Leftrightarrow (\neg p \wedge r \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge r \wedge q) \\
&\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \\
&\Leftrightarrow m_1 \vee m_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&q \wedge r \\
&\Leftrightarrow (q \wedge r) \wedge (p \vee \neg p) \\
&\Leftrightarrow (q \wedge r \wedge p) \vee (q \wedge r \wedge \neg p) \\
&\Leftrightarrow (p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \\
&\Leftrightarrow m_7 \vee m_3
\end{aligned}$$

综上，主析取范式为$(p \to q) \wedge (q \to r) \Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_3 \vee m_7$.

3. 在自然推理系统 P 中构造证明下面的推理证明。（10 分）

前提：$\neg p \vee (q \to r)$，$\neg s \vee p$，q

结论：$s \to r$

解：方法一：直接证明

① $\neg p \vee (q \to r)$ 前提引入

② $p \to (q \to r)$ ①置换

③ $\neg s \vee p$ 前提引入

④ $s \to p$ ③置换

⑤ $s \to (q \to r)$ ②④假言三段论

⑥ $\neg s \vee \neg q \vee r$ ⑤置换

⑦ $q \to (s \to r)$ ⑥置换

⑧ q 前提引入

⑨ $s \to r$ ⑦⑧假言推理

方法二：附加前提引入

① s 附加前提引入

② $\neg s \vee p$ 前提引入

③ p ①②析取三段论

④ $\neg p \vee (q \to r)$ 前提引入

⑤ $q \to r$ ③④析取三段论

⑥ q 前提引入

⑦ r ⑤⑥假言推理

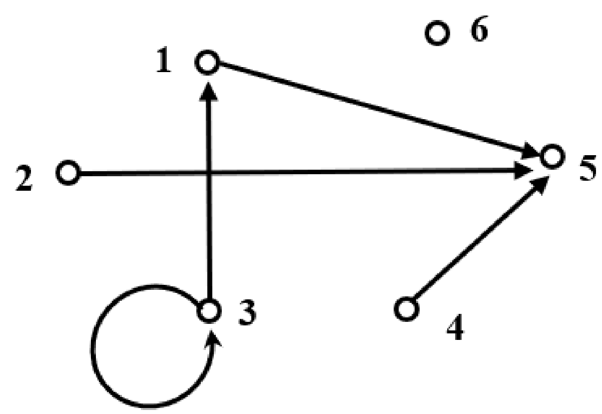
4．设 $A = \{1, 3, 4\}$, $R = \{ <x, y> \mid x, y \in A$ 且 $x+3y \le 10 \}$，求出 dom R 和 R^{-1}。 (10 分)

解 $R = \{<1, 1>, <1, 3>, <3, 1>, <4, 1>\}$

dom $R = \{ 1, 3, 4 \}$

$R^{-1} = \{<1, 1>, <3, 1>, <1, 3>, <1, 4>\}$

5. 设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，R 为 A 上的关系，R 的关系图如图所示。求 $r(R), s(R), t(R)$ 的集合表达式。 (10 分)



解：

$R = \{ <1, 5>, <2, 5>, <3, 1>, <3, 3>, <4, 5> \}$

$R^2 = R \circ R = \{ <1, 5>, <2, 5>, <3, 1>, <3, 3>, <4, 5> \}$

$\circ \{ <1, 5>, <2, 5>, <3, 1>, <3, 3>, <4, 5> \}$

$= \{ <3, 5>, <3, 1>, <3, 3> \}$

$R^3 = R^2 \circ R = \{ <3, 5>, <3, 1>, <3, 3> \}$

$\circ \{ <1, 5>, <2, 5>, <3, 1>, <3, 3>, <4, 5> \}$

$= \{ <3, 5>, <3, 1>, <3, 3> \}$

$= R^2$

同理： $R^2 = R^3 = R^4 = R^5 = \ldots\ldots$

$r(R) = R \cup I_A = \{ <1, 5>, <2, 5>, <3, 1>, <3, 3>, <4, 5> \} \cup$

$\{ <1, 1>, <2, 2>, <3, 3>, <4, 4>, <5, 5>, <6, 6> \}$

$= \{<1, 1>, <1, 5>, <2, 2>, <2, 5>, <3, 1>, <3, 3>, <4, 4>, <4, 5>, <5, 5>,$

$<6, 6> \}$

$s(R) = R \cup R^{-1} = \{ <1, 5>, <2, 5>, <3, 1>, <3, 3>, <4, 5> \} \cup$

$\{ <5, 1>, <5, 2>, <1, 3>, <3, 3>, <5, 4> \}$

$= \{ <1, 5>, <5, 1>, <2, 5>, <5, 2>, <3, 1>, <1, 3>, <3, 3>,$

$<4, 5>, <5, 4> \}$

$t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4 = R \cup R^2$

$= \{ <1, 5>, <2, 5>, <3, 1>, <3, 3>, <4, 5> \} \cup \{ <3, 5>, <3, 1>, <3, 3> \}$

$= \{ <1, 5>, <2, 5>, <3, 1>, <3, 3>, <3, 5>, <4, 5> \}$

6. 设 $A=\{ a, b, c, d \}$, A 上的关系为

$R = \{ <a, b>, <b, a>, <c, d>, <d, c> \} \cup I_A$

(1).证明 R 是等价关系；(3 分)

(2).求出 A 中各元素的等价类；(4 分)

(3).求出商集 A/R；(3 分)

解：

(1).

$\forall x \in A$， 有 $<x, x> \in R$， 满足自反性

$\forall x, y \in A$，若 $<x, y> \in R$，则有$<y, x> \in R$，满足对称性

$\forall x, y, z \in A$，若 $<x, y> \in R$, $<y, z> \in R$，则有 $<x, z> \in R$，满足传递性

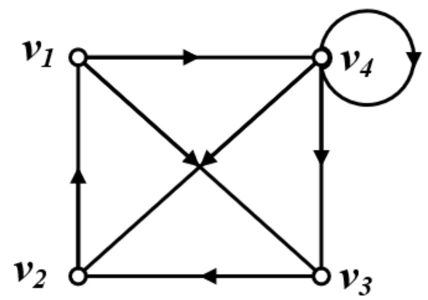
(2).

$[a]_R = \{ a, b \}$； $[b]_R = \{ a, b \}$；

$[c]_R = \{ c, d \}$； $[d]_R = \{ c, d \}$；

(3). $A/R = \{ \{ a, b \}, \{ c, d \} \}$

7 有向图 D 如下图所示，求解下面各问题。（10 分）



(1) 写出该图的邻接矩阵 A。

(2) D 中 v_1 到 v_2 长度为 2 的通路有几条？

(3) D 中长度为 2 的回路有几条？

解：（1）

$$A=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&1&1\end{bmatrix}$$

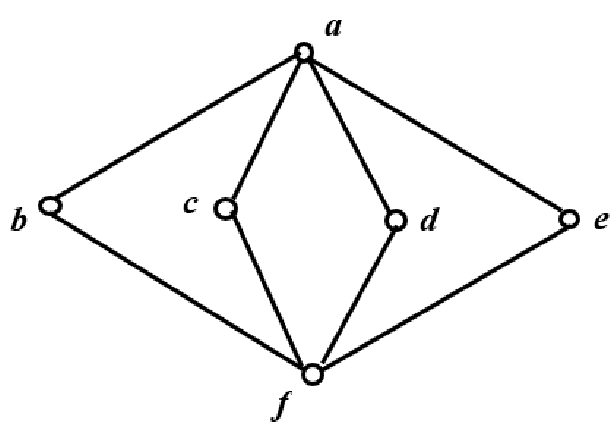
（2）

$$A^2=\begin{bmatrix}0&2&1&1\\0&0&1&1\\1&0&0&0\\1&2&1&1\end{bmatrix}$$

故 v_1 到 v_2 长度为 2 的通路有 2 条。

（3）根据 A^2 对角线元素，长度为 2 的回路有 1 条。

8. 无向图 G 如下图所示，求解下面 2 个问题。 (10 分)



（1） 判断 G 是否为哈密顿图并说明理由。

（2） 求 G 的点连通度$\kappa(G)$和边连通度$\lambda(G)$。

解：（1）G 不是哈密顿图。理由如下：

取 $V_1=\{a, f\}$,则 $G-V_1$ 是 4 个孤立点，

$p(G-V_1) = 4 >| V_1|=2$，不满足哈密顿图的必要条件，

故该图不是哈密顿图。

（2）顶点数最少的点割集$\{a, f\}$，点连通度$\kappa(G)=2$

删掉任何一条边，图仍然连通，删掉(a, b)和(b, f)之后，图不连通，边连通度$\lambda(G)=2$