**§2.2 谓词公式及其解释**

**习题2.2**

1. 指出下列谓词公式的指导变元、量词辖域、约束变元和自由变元。

（1）

（2）

（3）

**解** （1）中的*x*是指导变元；量词的辖域是，其中*x*是约束变元，*y*是自由变元。

（2）中的*x*，中的*y*都是指导变元；的辖域是，的辖域是；其中中的*x*是的约束变元，*y*是自由变元；中的*x*是自由变元，*y*是约束变元。

（3）中的*x*，中的*y* 以及中的*x*都是指导变元；的辖域是，的辖域是，的辖域是；其中中的*x，y*都是约束变元；中的*y*是约束变元；*z*是自由变元，中的*x*为约束变元，*y，z*是自由变元。

2. 设个体域，请给出两种不同的解释和，使得下面谓词公式在下都是真命题，而在下都是假命题。

（1） （2）

**解**（1）解释：个体域，。

（2）解释：个体域，。

3. 对下面的谓词公式，分别给出一个使其为真和为假的解释。

（1）

（2）

**解** （1）成真解释：个体域D＝{1,2,3},,,。

成假解释：个体域D＝{1,2,3},，，。

（2）成真解释：个体域D＝{1,2,3}，，，。

成假解释：个体域D＝{1,2,3},，，。

4. 给定解释如下：

个体域（这里为实数集合）。

个体常元。

二元函数。

二元谓词，。

在解释下，下列公式的含义是什么？哪些成为命题哪些不成为？成为命题的其真值又如何？

（1）

（2）

（3）

（4）

**解**（1）公式被解释成“”，为真命题。

（2）公式被解释成“”，为假命题。

（3）公式被解释成“”，为真命题。

（4）公式被解释成“”，为假命题。

5. 判断下列谓词公式哪些是永真式，哪些是永假式，哪些是可满足式，并说明理由。

（1） （2）

（3） （4）

（5） （6）

（7） （8）

（9） （10）

**解**（1）因为当存在某个使取1时一定取1，所以公式是为永真式。

（2）因为当=1时，只能说明存在某个使取1，并不能说明都为1，所以公式是为可满足式。

（3）取解释：个体域为自然数集合，。在下公式的前件与后件均为真，所以公式为真，即不是永假式。取解释：个体域仍为自然数集合，但取为。在下公式不成为命题，即不是永真式。综合知公式为可满足式。

（4）因为当∀*x*P(*x*)取值为1时，说明所有的P(*x*)值都为1，因此公式是永真式。

（5）取解释：个体域为自然数集合，。在下，对任意的，为真而为假，所以公式为假，即不是永真式。取解释：个体域仍为自然数集合，但取为。在下，对任意的，为假而为真，所以公式为真，即不是永假式。综合知公式为可满足式。

（6）若∀*x*∀*yP*(*x,y*)=1时，说明对任意的*x*和任意的*y*都有*P*(*x,y*)=1，也就说明了对任意的*y*和任意的*x*也都有*P*(*x,y*)=1，也就是说∀*y* ∀*xP*(*x,y*)=1，从而公式为永真式。

（7）公式为永真式，用非形式化的反证法证明如下：若公式非永真，则存在一个解释，使得取1而取0。取0表明存在某对使得取0，从而也应取0。这与前面说取1矛盾。故公式是永真式。

（8）取解释I：个体域D = {1,2,3}，谓词P(*x*,*y*) : *x* = *y*，在I下，∀*x*∃*y*P(*x*,*y*)=1，但是∃*x*∀*y*P(*x*,*y*)=0，因此公式为可满足式。

（9）设为任意一个解释，个体域为。若取1，即存在，使得为真，从而为真，故为真。所以在解释下公式为真，由的任意性可知，公式为永真式。

（10）取解释I：个体域D = {1,2,3}，谓词P(*x*,*y*) : *x* > *y*，在I下，=0，但是若取解释I’：个体域D = {1,2,3}，谓词P(*x*,*y*) : *x*= *y*，在I下，=1，因此公式为可满足式。

6. 判断下列谓词公式哪些是永真式，哪些是永假式，哪些是可满足式，并说明理由。

（1）

（2）

（3）

（4）

（5）

（6）

（7）

**解**

1. 任给解释I（相应的个体域为D），在I下，若∀*x*（P(*x*)=0时，公式的值

为真。若∀*x*（P(*x*)=1时，则对任意的*x*，P(*x*)，也就是说对任意的*x*，P(*x*)，即∀*x*P(*x*)=1且∀*x*Q(*x*)=1，也就是∀*x*P(*x*)∀*y*Q(*y*)=1。由I的任意知，公式为永真式。

（2）若有一个解释I（相应的个体域为D），在I下，若∀*x*（P(*x*)=0时，公式的值为真。若∀*x*（P(*x*)=1时，则对任意的*x*，P(*x*)，举个例子，若*a,b*是个体域中的元素，P(*a*) 满足P(*a*)=1，但是∀*x*P(*x*)=0且∀*y*Q(*y*)=0，即∀*x*P(*x*)∀*y*Q(*y*)=0。所以公式是可满足式。

（3）该谓词公式是¬(*p*→*q*)∧*q*的代换实例,所以该谓词公式是永假式。

（4）用反证法，若公式非永真，则存在一个解释，使得对某个有取1而取0。取0表明取1而取0，即存在某个使取0，从而取0。这与前面说取1矛盾。故公式是永真式。

（5）用反证法，若公式非永真，则存在一个解释，

使得为0，则， 取0表明取1而取0，即存在某个使取0，前面的，说明对所有的*x*，当取1时值也一定为1。这与前面存在某个使取0相矛盾，故公式是永真式。

（6）该谓词公式是¬(*p*→（*q*→*p*）)的代换实例,所以该谓词公式是永假式。

（7）该谓词公式是*p*→（*q*→*p*）的代换实例,所以该谓词公式是永真式。

7. 给出一个非闭式的永真式，给出一个非闭式的永假式，给出一个非闭式的可满足式。

**解** （1） 永真式

（2） 永假式

（3）*P*(*x*) 可满足式