**§2.3 谓词公式的等价演算**

**习题2.3**

1. 将下列命题符号化，要求用两种不同的等价形式。

（1）没有小于负数的正数。 （2）相等的两个角未必都是对顶角。

**解** （1）令*F*(*x*)：*x*小于负数，*G*(*x*)：*x*是正数.

¬∃*x*(*F*(*x*)∧*G*(*x*))=∀*x*¬ (*F*(*x*)∧*G*(*x*))

=∀*x*(*F*(*x*)→ ¬*G*(*x*))

（2）令*F*(*x,y*)：*x*和*y*角相等，*G*(*x,y*)：*x*和*y*是对顶角。

¬∀*x*∀*y*(*F*(*x,y*)→ *G*(*x,y*))=∃*x*∃*y* ¬( *F*(*x,y*)→ *G*(*x,y*))

=∃*x*∃*y* (*F*(*x,y*)∧¬ *G*(*x,y*))

2. 利用非形式化方法证明下列等价式。

（1） （2）

（3） （4）

1. 

**解**

（1）任给解释（相应的个体域记为），在下，若¬∃*x*A(*x*)取值0，则∃*x*A(*x*)取值

1，因此存在，使得取值1，即取值0，从而∀*x*¬ A(*x*)取值0；若¬∃*x*A(*x*)取值1，则∃*x*A(*x*)取值0，因此对任意的，都取值0，即对任意的， 都取值1，从而∀*x*¬ A(*x*)取值1。由解释I的任意性可知（1）式成立。

（2）任给解释（相应的个体域记为），在下，若∀*x*(A(*x*) ∨B)取值1，则对任意的，都有A(*x*) ∨B取值1，也就是分二种情况：对任意的，都有A(*x*)取值1 或B=1，得∀*x*A(*x*)=1或B=1，以上二种情况都能得到∀*x*A(*x*) ∨B=1。若∀*x*(A(*x*) ∨B)取值0，则存在*a*， A(*a*) ∨B取值0，即存在*a*， A(*a*)取值0并且 B也取值0，得∀*x*A(*x*)=0且B=0，因此∀*x*A(*x*) ∨B=0。由解释的任意性知（2）式成立。

（3）任给解释（相应的个体域记为），在下，若∃*x* (A(*x*)B)取值0，则对任意的，都有A(*x*)B取值0，也就是分二种情况：对任意的，都有A(*x*)取值0 或B=0，得

∃*x* A(*x*)=0或B=0，以上二种情况都能得到∃*x* A(*x*) B=0。若∃*x* (A(*x*) B)取值1，则存在*a*， A(*a*)B取值1，即存在*a*， A(*a*)取值1并且 B也取值1，得∃*x*A(*x*)=1且B=1，因此∃*x* A(*x*) B=1。由解释的任意性知（3）式成立。

（4）任给解释（相应的个体域记为），在下，若∃*x* (A(*x*)∨B)取值0，则对任意的，都有A(*x*)∨B取值0，即对任意的，都有A(*x*)取值0且B=0，得∃*x*A(*x*)=0且B=0，因此∃*x* A(*x*)∨B=0。若∃*x* (A(*x*)∨B)取值1，则存在*a*，A(*a*)∨B取值1，也就是分二种情况：存在*a*，A(*a*)=1 或B=1，得∃*x* A(*x*)=1或B=1，以上二种情况都能得到∃*x* A(*x*)∨B=1。由解释的任意性知（4）式成立。

（5）任给解释（相应的个体域记为），在下，若∃*x* (A(*x*)∨B(*x*))取值0，则对任意的，都有A(*x*)∨B(*x*)取值0，即对任意的，都有A(*x*)取值0且任意的，B(*x*)=0，得∃*x*A(*x*)=0且∃*x*B(*x*)=0，因此∃*x* A(*x*)∨ ∃*x* B(*x*)=0。若∃*x* (A(*x*)∨B(*x*))取值1，则存在*a*，A(*a*)∨B(*a*)取值1，也就是分二种情况：存在*a*，A(*a*)=1 或存在*a*，B(*a*)=1，得∃*x* A(*x*)=1或∃*x* B(*x*)=1，以上二种情况都能得到∃*x* A(*x*)∨ ∃*x* B(*x*)=1。由解释的任意性知（5）式成立。

3.设、和都是谓词，证明下列各等价式

（1）

（2）

（3）

（4）

**证明**：（1）左边＝





＝右边

（2）左边＝





＝右边

（3）左边＝





＝右边

（4）左边＝

＝

＝

＝＝右边