**§3.2 二元关系及其运算**

**习题3.2**

1. 设，求。

**解** ***ρ***(*A*)={ ∅，{∅}，{{∅}}，{∅，{∅}}}

*A*×***ρ***(*A*) = {<∅,∅>, <∅,{∅}>，<∅,{{∅}}>，<∅,{∅，{∅}}>，<{∅},∅>, <{∅},{∅}>，<{∅},{{∅}}>，<{∅},{∅，{∅}}>}

2. 设是任意集合，若，是否一定有成立？为什么？

**解** 当时，若，不一定成立；

当时，若，则一定成立，反证如下：

若不成立，则存在；又因为，所以存在，这样，序偶，与矛盾。

3. 列出集合上的恒等关系，全域关系，小于或等于关系，整除关系所包含的序偶。

**解** ，







4. 设，求出下列关系（列出其中的序偶）及其定义域和值域。

（1）

（2）

（3）

（4）

**解**

1. R1={<1，2>，<1，4>，<1，6>，<2，1>，<2，2>，<2，4>，<2，6>，<4，1>，<4，2>，<4，4>，<4，6>，<6，1>,<6，2>,<6，4>,<6，6>} ，

定义域和值域都是{1，2，4，6}。

（2）R2={<1，2>，<2，1>} ，

定义域和值域都是{1，2}。

（3）R3={<1，1>，<2，1>，<2，2>，<4，1>，<4，2>，<4，4>，<6，1>，<6，6>} ，

定义域和值域都是{1，2，4，6}。

（4）R4={<1，1>，<1，2>，<2，1>，<2，2>，<4，1>，<4，2>，<6，1>，<6，2>} ，

定义域是{1，2，4，6}，值域是{1，2}。

5.设集合A={0，1，2，3}，给出上的二元关系 的关系矩阵和关系图。

**解** MR=

0. .1

3. .2

6. 设，和是上的二元关系：





求下列关系及其关系矩阵和关系图。

（1） （2）

（3） （4）

（5） （6）

（7） （8）

**解**

（1）

（2）={*<b，d>*}

（3）



（4）={*<a，a>，<a，b>*}

（5）={*<a，d>，<a，c>}*

（6）

（7）={*<a，a>，<a，b>，<a，d>*}

（8）={<*a，a>，< b，a* >*，< d，b*>}

他们的关系矩阵分别如下：

***M*** R∪S = ，***M*** R ∩S =

***M*** RC = ，***M*** R -S =

***M*** R 。S = ， ***M*** S 。R =

***M*** R 2= ， ***M*** R-1 =

他们的关系图分别如下：

a

a

b

b

d

c

c

d

a

c

a

b

d

b

c

d

a

b

c

a

b

d

d

c

a

b

d

c

a

b

c

d

7. 设是从集合到集合的关系，是从集合到集合的一个关系，是从集合到集合的一个关系，证明下列等式。

（1）

（2）

（3）

（4）

**解** （1）设<*x*,*y*>∈ R◦(S1∪S2)

⇔∃*t*(<*x*,*t*>∈ R∧<*t*,*y>*∈ S1 ∪S2)

⇔∃*t*(<*x*,*t*>∈ R∧(<*t*,*y>*∈ S1∨<*t*,*y>*∈S2))

⇔∃*t*((<*x*,*t*>∈ R∧<*t*,*y>*∈ S1) ∨ (<*x*,*t*>∈ R∧ <*t*,*y>*∈S2))

⇔∃*t*((<*x*,*t*>∈ R∧<*t*,*y>*∈ S1) ∨ ∃*t* (<*x*,*t*>∈ R∧ <*t*,*y>*∈S2))

⇔<*x*,*y*>∈ R◦S1 ∨ <*x*,*y*>∈ R◦ S2

⇔<*x*,*y*>∈ R◦S1 ∪ R◦ S2

所以，。

（2）







所以，。

（3）设<*x*,*y*>∈ (S1∪S2) ◦T

⇔∃*t*(<*x*,*t*>∈ S1 ∪S2∧<*t*,*y>*∈T)

⇔∃*t*((<*x*,*t*>∈ S1∨<*x*,*t*>∈ S2)∧<*t*,*y>*∈T)

⇔∃*t*((<*x*,*t*>∈ S1∧<*t*,*y>*∈T) ∨ (<*x*,*t*>∈ S2∧ <*t*,*y>*∈T))

⇔∃*t*((<*x*,*t*>∈ S1∧<*t*,*y>*∈T) ∨ ∃*t* (<*x*,*t*>∈ S2∧ <*t*,*y>*∈T))

⇔<*x*,*y*>∈ S1◦T ∨ <*x*,*y*>∈ S2◦T

⇔<*x*,*y*>∈ S1◦T∪S2◦T

所以，。

（4）<*x*,*y*>∈ (S1∩S2) ◦T

⇔∃*t*(<*x*,*t*>∈ S1 ∩S2∧<*t*,*y>*∈T)

⇔∃*t*((<*x*,*t*>∈ S1∧<*x*,*t*>∈ S2)∧<*t*,*y>*∈T)

⇔∃*t*((<*x*,*t*>∈ S1∧<*t*,*y>*∈T) ∧ (<*x*,*t*>∈ S2∧ <*t*,*y>*∈T))

∃*t*((<*x*,*t*>∈ S1∧<*t*,*y>*∈T) ∧ ∃*t* (<*x*,*t*>∈ S2∧ <*t*,*y>*∈T))

⇔<*x*,*y*>∈ S1◦T∧<*x*,*y*>∈ S2◦T

⇔<*x*,*y*>∈ S1◦T∩S2◦T

所以，。

8. 设和都是从集合到集合的一个关系，证明下列等式。

（1） （2）

（3） （4）

（5）

**解**

（1）设<*x*,*y*>∈ ( R∪S)-1

⇔<*y*,*x*>∈ R∪S ⇔<*y*,*x*>∈ R∨<*y*,*x*>∈S

⇔<*x*,*y*>∈ R-1∨<*x*,*y*>∈S-1 ⇔<*x*,*y*>∈ R-1∪S-1

所以，。

（2）设<*x*,*y*>∈ ( R∩S)-1

⇔<*y*,*x*>∈ R∩S ⇔<*y*,*x*>∈ R∧<*y*,*x*>∈S

⇔<*x*,*y*>∈ R-1∧<*x*,*y*>∈S-1 ⇔<*x*,*y*>∈ R-1∩S-1

所以，。

（3）设<*x*,*y*>∈ (RC)-1

⇔<*y*,*x*>∈RC ⇔<*y*,*x*> ∉ R

⇔<*x*,*y*>∉ R-1 ⇔<*x*,*y*>∈(R-1) C

所以，。

（4）设<*x*,*y*>∈ ( R-S)-1

⇔<*y*,*x*>∈ R-S ⇔ <*y*,*x*>∈ R∧<*y*,*x*>∉ S

⇔<*x*,*y*>∈ R-1∧<*x*,*y*>∉ S-1 ⇔<*x*,*y*>∈ R-1-S-1

所以，。

（5）设<*x*,*y*>∈ (R ⊕ S)-1

⇔<*y*,*x*>∈ R ⊕ S ⇔ <*y*,*x*>∈ R - S∨<*y*,*x*>∈S -R

⇔（<*y*,*x*>∈ R∧<*y*,*x*>∉ S）∨（<*y*,*x*>∈ S∧<*y*,*x*>∉ R）

⇔（<*x*,*y*>∈ R-1∧<*x*,*y*>∉ S-1 ）∨（<*x*,*y*>∈ S-1∧<*x*,*y*>∉ R-1 ）

⇔ <*x*,*y*>∈ （R-1-S-1）∪（S-1-R-1）

⇔ <*x*,*y*>∈R-1⊕ S-1

所以，。