**§3.3 二元关系的性质与闭包**

**习题3.3**

1. 确定下列整数集合上的关系是否是自反的、反自反的、对称的、反对称的和传递的，其中，当且仅当

（1） （2）

（3） （4）

（5） （6）

（7）是的倍数 （8）与都是负的或都是非负的

**解**

1. 不是自反的，是反自反的，是对称的，不是反对称的，不是传递的。
2. 不是自反的，也不是反自反的，是对称的，不是反对称的，是传递的。
3. 不是自反的，是反自反的，是对称的，不是反对称的，不是传递的。
4. 是自反的，不是反自反的，是对称的，不是反对称的，是传递的。
5. 不是自反的，不是反自反的，不是对称的，是反对称的，不是传递的。
6. 不是自反的，也不是反自反的，不是对称的，是反对称的，不是传递的。
7. 是自反的，不是反自反的，不是对称的，是反对称的，是传递的。
8. 是自反的，不是反自反的，是对称的，不是反对称的，是传递的。

2. 设，

（1）给出上的一个关系，要求既不是自反的又不是反自反的；

（2）给出上的一个关系，要求既是对称的又是反对称的；

（3）给出上的一个关系，要求既不是对称的又不是反对称的；

（4）给出上的一个关系，要求是传递的但不是传递的。

**解**

（1）R = {⟨*a*,*a*⟩,⟨*b*,*b*⟩,⟨*b*,*c*⟩}

（2）R = {⟨*a*,*a*⟩,⟨*b*,*b*⟩,⟨*c*,*c*⟩}

（3）R = {⟨*a*,*a*⟩,⟨*a*,*b*⟩,⟨*b*,*a*⟩,⟨*b*,*c*⟩}

（4）R = {⟨*a*,*a*⟩,⟨*b*,*c*⟩}

3. 根据下列关系的关系矩阵判断它们是否是自反的？反自反的？对称的？反对称的？传递的？并求出相应的关系，画出相应的关系图。







**解** 假设A={*a，b，c*}

1. R1是自反的，不是反自反的，不是对称的，也不是反对称的，不是传递的。

R1={⟨*a*,*a*⟩,⟨*a*,*b*⟩,⟨*b*,*a*⟩,⟨*b*,*b*⟩,⟨*b*,*c*⟩,⟨*c*,*a*⟩,⟨*c*,*c*⟩}

b

a

c

1. R2不是自反的，不是反自反的，不是对称的，是反对称的，是传递的。

R2={⟨*a*,*a*⟩,⟨*a*,*b*⟩,⟨*c*,*a*⟩,⟨*c*,*b*⟩}

b

a

c

1. R3是自反的，不是反自反的，是对称的，不是反对称的，是传递的。

R3={⟨*a*,*a*⟩,⟨*a*,*b*⟩,⟨*a*,*c*⟩,⟨*b*,*a*⟩,⟨*b*,*b*⟩,⟨*b*,*c*⟩,⟨*c*,*a*⟩,⟨*c*,*b*⟩,⟨*c*,*c*⟩}

b

a

c

1. R4是自反的，不是反自反的，不是对称的，不是反对称的，是传递的。

R4={⟨*a*,*a*⟩,⟨*a*,*b*⟩,⟨*a*,*c*⟩,⟨*b*,*b*⟩,⟨*b*,*c*⟩,⟨*c*,*b*⟩,⟨*c*,*c*⟩}

b

a

c

1. R5不是自反的，不是反自反的，不是对称的，不是反对称的，不是传递的。

R5={⟨*a*,*b*⟩,⟨*a*,*c*⟩,⟨*b*,*a*⟩,⟨*b*,*b*⟩,⟨*b*,*c*⟩,⟨*c*,*a*⟩}

a

b

c

1. R6不是自反的，不是反自反的，是对称的，不是反对称的，不是传递的。

R6={⟨*a*,*a*⟩,⟨*a*,*b*⟩,⟨*a*,*c*⟩,⟨*b*,*a*⟩,⟨*c*,*a*⟩}

b

a

c

1. R7是自反的，不是反自反的，不是对称的，是反对称的，不是传递的。

R7={⟨*a*,*a*⟩,⟨*a*,*c*⟩,⟨*b*,*a*⟩,⟨*b*,*b*⟩,⟨*c*,*b*⟩,⟨*c*,*c*⟩}

b

a

c

1. R8是自反的，不是反自反的，是对称的，不是反对称的，不是传递的。

R8={⟨*a*,*a*⟩,⟨*a*,*b*⟩,⟨*b*,*a*⟩,⟨*b*,*b*⟩,⟨*b*,*c*⟩,⟨*c*,*b*⟩,⟨*c*,*c*⟩}

b

a

c

1. R9不是自反的，不是反自反的，是对称的，不是反对称的，不是传递的。

R9={⟨*a*,*b*⟩,⟨*a*,*c*⟩,⟨*b*,*a*⟩,⟨*b*,*c*⟩,⟨*c*,*a*⟩,⟨*c*,*b*⟩,⟨*c*,*c*⟩}

a

b

c

4. 设和是集合上的二元关系，试证表3.2的有关论断，即：

（1）当和是自反的，则、、和也是自反的；而和则不一定。

（2）当和是反自反的，则、、和也是反自反的；而和则不一定。

（3）当和是对称的，则、、、和也是对称的；而则不一定。

（4）当和是反对称的，则、和也是反对称的；而、和则不一定。

（5）当和是传递的，则和也是传递的。而、、和则不一定。

**解**

（1）因为和是自反的，所以，都有，从而，都有、、和，所以他们也是自反的。

而和则不一定是自反的，例如：取集合及其上的自反关系和，而和都不是自反的。

（2）因为和是反自反的，所以，都有<*a*,*a*> ∉ *R*∧<*a*,*a*> ∉ *S*，从而，都有<*a*,*a*> ∉ 、<*a*,*a*> ∉ 、<*a*,*a*> ∉ *R-S*和<*a*,*a*> ∉ ，所以他们也是反自反的。

而和R。S则不一定是反自反的，例如：取集合及其上的反自反关系

R={⟨*a*,*b*⟩，⟨*a*,*c*⟩，⟨*b*,*a*⟩}和S={⟨*b*,*c*⟩，⟨*c*,*a*⟩，⟨*c*,*b*⟩}，

其RC={⟨*a*,*a*⟩，⟨*b*,*b*⟩，⟨*b*,*c*⟩，⟨*c*,*a*⟩，⟨*c*,*b*⟩，⟨*c*,*c*⟩}却是自反的，不是反自反的。

R。S={⟨*a*,*a*⟩，⟨*a*,*b*⟩，⟨*a*,*c*⟩}也不是反自反的。

（3）因为和是对称的，所以，若则，若则，从而，若，则；若，则；若，则；若，则；若，则，所以他们也是对称的。

而则不一定是对称的，例如：取集合及其上的对称关系和，而不是对称的。

（4））因为和是反对称的，所以当*ab*时，若有<*a*,*b*>∈*R*则<*b*,*a*> ∉ *R*，若有<*a*,*b*> ∈*S*则<*b*,*a*> ∉ *S*，从而当，都有<*a*,*b*>∈、<*a*,*b*>∈*R-S*和<*a*,*b*>∈，都有<*b*,*a*> ∉，<*b*,*a*> ∉*R-S，*<*b*,*a*> ∉，所以他们也是反对称的。

而、和R。S则不一定是反对称的，例如：取集合及其上的反对称关系R={⟨*a*,*b*⟩,⟨*a*,*c*⟩,⟨*c*,*c*⟩}和S={⟨*b*,*c*⟩,⟨*c*,*a*⟩,⟨*a*,*b*⟩}，

其RC={⟨*a*,*a*⟩,⟨*b*,*a*⟩⟨*b*,*b*⟩,⟨*b*,*c*⟩,⟨*c*,*a*⟩,⟨*c*,*b*⟩}却不是反对称的。= R={⟨*a*,*b*⟩,⟨*a*,*c*⟩,⟨*c*,*c*⟩，⟨*b*,*c*⟩,⟨*c*,*a*⟩}不是反对称的。R。S={⟨*a*,*a*⟩，⟨*a*,*c*⟩,⟨*c*,*a*⟩}也不是反对称的。

（5）因为当和是传递的，说明R2⊆R，S2⊆S，则（*R*∩*S*）2⊆ R2∩ S2⊆ *R*∩*S*，所以*R*∩*S*是传递的。（R-1）2⊆ R-1，所以R-1也是传递的。

但是、、和则不一定是传递的。例如：取集合及其上的传递关系R={⟨*a*,*b*⟩，⟨*a*,*c*⟩，⟨*c*,*c*⟩}和S={⟨*b*,*c*⟩，⟨*c*,*a*⟩，⟨*b*,*a*⟩}，但是={⟨*a*,*b*⟩，⟨*a*,*c*⟩，⟨*c*,*c*⟩，⟨*b*,*c*⟩，⟨*c*,*a*⟩，⟨*b*,*a*⟩}却不是传递的，

同样，={⟨*a*,*a*⟩，⟨*b*,*a*⟩，⟨*b*,*b*⟩，⟨*b*,*c*⟩，⟨*c*,*a*⟩，⟨*c*,*b*⟩}不是传递的。

={⟨*a*,*a*⟩，⟨*a*,*c*⟩，⟨*c*,*a*⟩}不是传递的。

5. 设及其上的关系，求自反闭包、对称闭包和传递闭包。

**解** 自反闭包

对称闭包

传递闭包

6. 设关系，求包含的最小关系使得它是

（1）自反的和传递的。 （2）对称的和传递的。

（3）自反的、对称的和传递的。

**解** （1）用公式rt(R)= {⟨1,1⟩,⟨1,2⟩,⟨1,4⟩,⟨2,2⟩,⟨3,3⟩,⟨4,1⟩,⟨4,2⟩,⟨4,4⟩}

（2）用公式ts(R)= {⟨1,1⟩,⟨1,2⟩,⟨1,4⟩,⟨2,1⟩,⟨2,2⟩,⟨2,4⟩,⟨3,3⟩,⟨4,1⟩,⟨4,2⟩,⟨4,4⟩}

（3）用公式rts(R)= {⟨1,1⟩,⟨1,2⟩,⟨1,4⟩,⟨2,1⟩,⟨2,2⟩,⟨2,4⟩,⟨3,3⟩,⟨4,1⟩,⟨4,2⟩,⟨4,4⟩}

7. 根据下列关系的关系矩阵分别求出它们的自反闭包、对称闭包和传递闭包的关系矩阵。

 

**解** 两个关系的闭包的关系矩阵分别如下：

，，

，，

8. 设的关系图如图3.5所示，试给出自反闭包、对称闭包和传递闭包的关系图。

a

b

c

d

e

**图3.5 习题9的图**

解 ：据上面的关系图得R={⟨*a*,*b*⟩，⟨*b*,*c*⟩，⟨*b*,*e*⟩，⟨*c*,*d*⟩，⟨*d*,*c*⟩，⟨*e*,*e*⟩}，从而得

*r(R)*={⟨*a*,*a*⟩，⟨*a*,*b*⟩，⟨*b*,*b*⟩，⟨*b*,*c*⟩，⟨*b*,*e*⟩，⟨*c*,*c*⟩，⟨*c*,*d*⟩，⟨*d*,*c*⟩，⟨*d*,*d*⟩，⟨*e*,*e*⟩},其关系图如下

a

b

d

c

e

*s(R)*={⟨*a*,*b*⟩，⟨*b*,*a*⟩，⟨*b*,*c*⟩，⟨*b*,*e*⟩，⟨*c*,*b*⟩，⟨*c*,*d*⟩，⟨*d*,*c*⟩，⟨*e*,*b*⟩，⟨*e*,*e*⟩}，其关系图如下

b

a

c

d

e

*t(R)*={ ⟨*a*,*c*⟩，⟨*a*,*e*⟩，⟨*b*,*d*⟩，⟨*b*,*e*⟩，⟨*c*,*c*⟩，⟨*d*,*d*⟩，⟨*e*,*e*⟩},其关系图如下

b

a

c

d

e

9. 设是集合上的关系，

（1）若是自反的，证明和也是自反的。

（2）若是对称的，证明和也是对称的。

（3）若是传递的，证明也是传递的。

**解**

1. 若是自反的，则IA⊆，则IA⊆⊆，IA⊆⊆，从而和也

是自反的。

1. 若是对称的，则R-1=R，(R2)-1= (R-1)2=R2,…, (Rn)-1= (R-1)n=Rn,

则-1=（R∪IA）-1=R-1∪IA-1= R∪IA，所以也是对称的。

-1=（R∪R2∪R3∪…）-1= R-1 ∪(R2)-1∪(R3)-1∪…=，所以也是对称的。

（3）若是传递的，则R2⊆，从而2=（R∪IA）2=R2∪R∪IA= R∪IA，所以也是传递的。

10. 设和是集合上的关系，且，证明

，，

**解：** 以证明为例，另二个证明过程非常相似，只需要将其中的传递改为自反或对称即可。

因为S⊆，R⊆*t()*,得S⊆*t()*，*t(R)*是传递的，又因为*t(S)*是包含S的最小传递关系，所以。