**§3.4 等价关系与划分**

**习题3.4**

1. 对于给定的集合和其上的二元关系，判断是否为等价关系。

（1）为实数集，，。

（2），，。

（3），即正整数集，，。

（4），集合的基数，，。

1. ，集合和满足，，。

**解**

1. 不是等价关系的，因为*x-x*=0，不满足自反性。
2. 不是等价关系，不是传递的，例如<1,3>∈*R*,<3,2>∈*R*,但是<1,2>因为1+2=3却不属于R。

（3）不是等价关系，不是自反的，如2\*2=4是偶数。

（4）1）因为∀*x*∈A, *x*⊆ *x*得*x*R*x*，所以R是自反的。

2）对∀*x, y*∈A,若*x*R*y*得*x* ⊆ *y ∨ y* ⊆*x*

则 *y* ⊆*x∨ x* ⊆ *y*得*y*R*x*, 所以R是对称的。

3）但是R不是传递的。举个例子，若*x* ⊆ *y 且z*⊆*y，*虽然满足*x*R*y*且*y*R*z*，但是不一定满足*x* ⊆ *z且z*⊆*x*,也就是得不到*x*R*z*。

因为R是自反的，对称的，不是传递的，所以R不是等价关系。

（5）1）因为∀*x*∈A, *x* ⊕ *x*=⊆ C得*x*R*x*，所以R是自反的。

2）对∀*x, y*∈A,若*x*R*y*得*x* ⊕ *y* ⊆ C

则 *y* ⊕ *x* =*x* ⊕ *y* ⊆ C得*y*R*x*, 所以R是对称的。

3）∀*x, y，z*∈A,若*x*R*y*且*y*Rz则 *x* ⊕ *y* ⊆ C且*y* ⊕ *z* ⊆ C

从而 *x* ⊕ *z*= (*x* ⊕ *z*)⊕Ø= (*x* ⊕ *z*)⊕ (*y* ⊕ *y*)= (*x* ⊕ *y*)⊕ (*y* ⊕ *z*) ⊆(*x* ⊕ *y*) ∪ (*y* ⊕ *z*)

⊆C，得*x*R*z*,所以R是传递的。

因为R是自反的，对称的，传递的，所以R是等价关系。

2. 设，对于上的等价关系



画出的关系图，并求出中各元素关于的等价类。

**解** 的关系图如下：

c

a

b

d

中各元素关于的等价类分别为：

，

3. 给出模6同余关系，并求出所有的模6同余类。

**解** 模6同余关系

所有的模6同余类为：



即











4. 设，判断下列关系是否等价关系，若是等价关系，试给出它的等价类。

（1）

（2）

**解**

（1）

1）因为∀<*x1，x2>*∈A, 满足*x1+x2*= *x2+ x1* 得<< *x1*，*x2*>，< *x1*，*x2*>> ∈R，所以R是自反的。

2）对∀<*x1，x2>,*<*y1，y2>*∈A, 若<< *x1*，*x2*>，< *y1*，*y2*>> ∈R，则满足*x1+y2*= *x2+ y1*,

从而得*y1+x2*= *y2+ x1*,也就是<< *y1*，*y2*>，< *x1*，*x2*> > ∈R，所以R是对称的。

3）对∀<*x1，x2>,*<*y1，y2>，*<*z1，z2>*∈A, 若<< *x1*，*x2*>，< *y1*，*y2*>> ∈R且

<< *y1*，*y2*>，<*z1，z2>*> ∈R，则满足*x1+y2*= *x2+ y1*, *y1+z2*= *y2+ z1* ,

从而得*x1+z2*= *x2+ z1*,也就是<< *x1*，*x2*>，< *x1*，*x2*> >∈R，所以R是传递的。

因为R是自反的，对称的，传递的，所以R是等价关系。

共有二个等价类。{<*0，2>，*<*2，4>，*<*4，6>，….*}和{<*1，2>，*<*3，4>，*<*5，6>，….*}

（2）因为∀<*x1，x2>*∈A, 满足*x1+x1x2+ x2* 所以<< *x1*，*x2*>，< *x1*，*x2*>>∉R，所以R不是自反的。

所以R不是等价关系。

5. 假如和是集合上的等价关系，问下面的关系是否一定是等价关系，是的给予证明，不是的举出反例。

（1） （2）

（3） （4）

（5） （6）

**解**

（1）依据书中表3.2知，若R和S是等价关系，即R和S是自反的，对称的，传递的。则是自反的，对称的，但不一定是传递的。所以不一定是等价关系。

（2）依据书中表3.2知，若R和S是等价关系，即R和S是自反的，对称的，传递的。则是自反的，对称的，传递的。所以是等价关系。

（3）依据书中表3.2知，若R和S是等价关系，即R和S是自反的，对称的，传递的。则不是自反的，是对称的，不是传递的。所以不是等价关系。

（4）依据书中表3.2知，若R和S是等价关系，即R和S是自反的，对称的，传递的。则不是自反的，对称的，不是传递的。所以不是等价关系。

（5）不一定是等价关系，例如：取集合及其上的等价关系



有，它不是对称的，从而不是等价关系。

（6）一定是等价关系，证明如下：

，因为是自反的，所以，从而，即是自反的；

，有，因为是对称的，所以，从而，即是对称的；

，有，因为是传递的，所以，从而，即是传递的；

综上所述，若是集合上的等价关系，则一定是等价关系。

6. 当我们构造一个关系的自反闭包的对称闭包的传递闭包时，一定得到一个等价关系吗？是的请证明，不是的请举出反例。

**解** 一定能得到等价关系。

对于*tsr(R)*来说，*r(R)*是自反的，则*sr(R)*是对称的，自反的。*tsr(R)*是传递的，对称的，自反的，所以就是等价关系。

7. 假如和是集合上的等价关系，和分别是对应于和的划分。证明当且仅当是的加细。（如果在划分中的每个集合都是划分中某个集合的子集，则叫做的加细）

**证明** （1）由推出是的加细，这就是要证明对于中的任何集合，在中都存在集合，使得。

因为中的任何集合是中的某个元素关于等价关系的等价类，即

****

现构造

****

它是中元素关于等价关系的等价类，从而是中的一个集合。又由于，所以有。

（2）由是的加细推出，这就是要证明如果对于中的任何集合，在中都存在集合，使得，那么。

****，有，所以在中存在集合，使得。

根据条件，在中存在集合使得，从而。由于是中某个元素关于等价关系的等价类，根据等价类的定义，有****。所以。