**§3.6 函数**

**习题3.6**

1. 设函数如下：



求，，，，，，。

**解**  =0 ={0}

=1 ={1}

={0，1，2，3，….}

={1}

={2,3,4}

2. 设函数，，证明

（1） （2）

**解** （1）设*y* ∈ *f*(A∪ B )

⇔(*x* ∈ A∪ B ∧ *y* **=***f*(*x*))  
 ⇔ ((*x* ∈ A ∨ *x* ∈ B) ∧ *y* **=***f*(*x*))

⇔ ((*x* ∈ A ∧ *y* **=***f*(*x*)) ∨ (*x* ∈ B ∧ *y* **=***f*(*x*)))  
 ⇔ ((*x* ∈ A∧ *y* **=***f*(*x*)) ∨ (*x* ∈ B ∧ *y* **=***f*(*x*)))  
 ⇔ *y* ∈ *f*(A ) ∨ *y* ∈ *f*( B )

⇔ *y* ∈ *f*(A ) ∪ *f*( B )

因此，。

（2）设*y* ∈ *f*(A ∩ B )

⇔ (*x* ∈ A ∩ B ∧ *y* **=***f*(*x*))  
 ⇔ (*x* ∈ A ∧ *x* ∈ B ∧ *y* **=***f*(*x*))

⇔ ((*x* ∈ A∧ *y* **=***f*(*x*)) ∧ (*x* ∈ B ∧ *y* **=***f*(*x*)))  
 ⇒ ((*x* ∈ A∧ *y* **=***f*(*x*)) ∧ (*x* ∈ B ∧ *y* **=***f*(*x*)))  
 ⇔ *y* ∈ *f*(A )∧ *y* ∈ *f*( B )

⇔ *y* ∈ *f*(A ) ∩ *f*( B )

因此，。

3. 设可逆函数，，证明

（1） （2）

**解** 因为*f*是可逆函数，则*f*是双射函数，既是满射函数又是单射函数，也就是*x*和*y*一一对应。

（1）设*x* ∈ *f-1*(A∪ B )

⇔存在唯一的*y*，使得(*x* ∈ A∪ B ∧ *y* **=***f*(*x*))  
 ⇔((*x* ∈ A ∨ *x* ∈ B) ∧ *y* **=***f*(*x*))

⇔((*x* ∈ A ∧ *y* **=***f*(*x*)) ∨ (*x* ∈ B ∧ *y* **=***f*(*x*)))  
 ⇔((*x* ∈ A∧ *x* **=***f-1*(*y*)) ∨ (*x* ∈ B ∧ *x* **=***f-1*(*y*)))  
 ⇔ *x*∈ *f-1* (A ) ∨ *x*∈*f-1* ( B )

⇔ *x*∈ *f-1* (A )∪*f-1* ( B )

因此，。

（2）设*x* ∈ *f-1*(A∩ B )

⇔存在唯一的*y*，使得(*x* ∈ A∩ B ∧ *y* **=***f*(*x*))  
 ⇔((*x* ∈ A ∨ *x* ∈ B) ∧ *y* **=***f*(*x*))

⇔((*x* ∈ A ∧ *y* **=***f*(*x*)) ∧ (*x* ∈ B ∧ *y* **=***f*(*x*)))  
 ⇔((*x* ∈ A∧ *x* **=***f-1*(*y*)) ∧ (*x* ∈ B ∧ *x* **=***f-1*(*y*)))  
 ⇔ *x*∈ *f-1* (A ) ∧ *x*∈*f-1* ( B )

⇔ *x*∈ *f-1* (A ) ∩ *f-1* ( B )

因此，。

4. 给定函数和集合如下：

（1）

（2）

（3）

（4）

（5）

（6）

（7）

（8）

对以上每一组函数和集合，分别回答以下问题：

（a）求在下的像和在下的原像。

（b）是不是满射、单射和双射？

（c）如果是双射，求的逆函数。

**解**

（1）={8}，={4}，*f*是双射函数，其逆函数就是它自已。

（2）={2}，={0，1}，*f*是双射函数，*f*-1(*y*)=log2*y*。

（3）={<5,6>}，={2}，*f*是单射函数，但不是满射函数。

（4），，不是满射，是单射。

（5）={1，2}，={-1，1}，*f*是满射，但不是单射。

（6）=（1/4,3/4），=[0,1/2]，*f*是双射函数，*f*-1(*y*)=2*y*-0.5。

（7）={1,2/3}，={1}，*f*不是满射，是单射。

（8），，不是满射，是单射。

5. 设和分别是元集和元集，试就三种情况：求解下列问题：

（1）从到的单射函数有多少个？ （2）从到的双射函数有多少个？

**解** （1）：不存在，

：个 ，

：个。

（2）：不存在，

 ：个 ，

 ：不存在。

6. 设，即是从到的函数，且有

， ， 

求，，， ，，。

**解**  (*n*)= *n2+ n+1*

(*n*)=*f*(*g*(*n*))= *f*(*2n*)= *2n+*1

(*n*)= *g* (*f* (*n*))= *g* (*n+*1)= *2n+*2

(*n*)= *g* (*h* (*n*))=

(*n*)= *h* (*g* (*n*))=0

(*n*)= *h。*(*g*。*f*(*n*))=

7. 设，证明是双射并求出其逆函数。

**证明**： ，令，，则，所以是满射。

若，则， ，从而，即，所以是单射。

从而是双射，其逆函数为：

