**第4章：代数结构**

**§4.1 代数运算**

**习题4.1**

1. 判断下列集合对所给的二元运算是否封闭。

（1）集合关于普通加法和普通乘法运算，其中是正整数。

（2）集合关于普通加法和普通乘法运算。

（3）集合关于普通加法和普通乘法运算。

（4）集合关于普通加法和普通乘法运算。

（5）阶实可逆矩阵集合关于矩阵加法和矩阵乘法运算。

对于封闭的二元运算，判断它们是否满足交换律、结合律和分配律，并在存在的情况下求出它们的单位元、零元和所有可逆元素的逆元。

**解**

（1）封闭。满足交换律、结合律和分配律，普通加法单位元0，没有零元，每个元素的逆元是其相反数。普通乘法零元是0，如果*n*=1时有单位元1，只有1有逆元1自已，其他元素没有逆元。如果*n*>1时，没有单位元。

（2）对普通加法不满足封闭。对普通乘法满足封闭性，满足交换律、结合律。没有零元，单位元是1，只有1有逆元1自已，其他元素没有逆元。

（3）对普通加法不满足封闭。对普通乘法满足封闭性，满足交换律、结合律。零元是0，单位元是1，只有1有逆元1自已，0没有逆元。

（4）对普通加法不满足封闭。对普通乘法满足封闭性，满足交换律、结合律。没有零元和单位元。

（5）封闭。矩阵加法运算满足交换律、结合律，矩阵乘法满足结合律，不满足交换律。矩阵加法和矩阵乘法满足分配律。矩阵加法有单位元*n*阶零矩阵，没有零元，每个矩阵的逆元是其相反矩阵。矩阵乘法零元是*n*阶零矩阵，单位元是*n*阶单位矩阵，奇异矩阵没有逆元，非奇异矩阵有逆元，即其逆矩阵。

2. 判断下列集合对所给的二元运算是否封闭。

（1）正实数集合和\*运算，其中\*运算定义为：



（2）。\*运算定义为：



对于封闭的二元运算，判断它们是否满足交换律、结合律和等幂律，并在存在的情况下求出它们的单位元、零元和所有可逆元素的逆元。

**解** （1）不封闭，例如：

（2）封闭。

不满足交换律：

满足结合律：，

满足等幂律：

都是左单位元，但无右单位元。

都是右零元，但无左零元。

因为无单位元，所以无逆元。

3. 设，这里是有理数集合，\*为上的二元运算，，



（1）\*运算在上是否可交换、可结合？是否为等幂的？

（2）\*运算是否有单位元、零元？如果有，请指出，并求中所有可逆元素的逆元。

（3）\*运算在上是否满足消去律？

**解** （1）因为<*x，y*>\*<*u，v*>=<*xu，xv+y*> ,所以<*x，y*>\*<*u，v*>\*<*x，y*>,不满足交换律。

又因为(<*u，v*>\*<*y，x*>)\*<*w，t*>=<*uxw，uxt+uy+v*> ,

<*u，v*>\*(<*y，x*>\*<*w，t*>)=<*uxw，uxt+uy+v*> ,从而满足结合律。

<*x，y*>\*<*x，y*>=<*x2，xy+y*><*x，y*>，所以不满足等幂律。

（2）有单位元<*1，0*>，没有零元。当*u*不为0时，<*u，v*>的逆元是<1/*u，-v/u*>。

（3）满足消去律。

4. 为实数集合，定义以下六个函数。有

 

 

 

（1）指出哪些函数是上的二元运算。

（2）若是上的二元运算，说明是否是可交换的、可结合的、等幂的？

（3）若是上的二元运算，在存在的情况下求出单位元、零元以及每个可逆元素的逆元。

1. 若是上的二元运算，说明是否满足消去律。

**解**

（1）*f1*, *f2*, *f3*, *f4*, *f5*, *f6*都是R上的二元运算。

（2）*f1*：可交换，可结合，不等幂，满足消去律。单位元0，无零元，每个元素的逆元是其相反数。

（3）*f2*：不可交换，不可结合，不等幂，无单位元，无零元。

（4）*f3*：可交换，不可结合，不等幂，无单位元，无零元。

（5）*f4*：可交换，可结合，不等幂，满足消去律。单位元1，零元0，除0外每个元素的逆元是其倒数。

（6）*f5*：可交换，可结合，等幂，无单位元，无零元。

（7）*f6*：可交换，可结合，等幂，无单位元，无零元。

5. 设，问下面定义的运算\*在上是否封闭？对于封闭的二元运算，请说明运算是否满足交换律、结合律，并在存在的情况下求出运算的单位元、零元和所有可逆元素的逆元。

（1），表示与的最大公因数。

（2），表示与的最小公倍数。

（3）大于等于和的最小整数。

（4）质数的个数，其中。

**解** （1）封闭。满足交换律，满足结合律，满足等幂律。无单位元，1是零元。因为无单位元，所以无逆元。

（2）不封闭，例如：

（3）封闭。满足交换律，满足结合律，满足等幂律。1是单位元，10是零元。1的逆元为1，其他无逆元。

（4）封闭。不满足交换律，不满足结合律，不满足等幂律。无单位元，无零元。因为无单位元，所以无逆元。