**§4.2 代数系统**

**习题4.2**

1．对以下给定的代数系统和以及映射，说明是否为代数系统到的同态映射。如果是，说明是否为单同态，满同态和同构。

（1），，其中为非零实数的集合，＋和×分别表示实数加法和实数乘法运算。



（2），，其中，为复数集合，＋和×分别表示复数加法和实数乘法运算。



**解** （1）因为，当，都为偶数，有，

当，都为奇数，有，

当，一个为偶数一个为奇数，有，

所以不是群到的同态。

（2）因为，，



从而，



所以不是群到的同态。

2．代数系统和，其中，×表示实数乘法运算，映射定义如下：



证明是从到的同态映射。

证明：

因为任意的二个整数*x,y*，若（*x*×*y*）=1时，说明*x,y*都是2的整数次，从而（*x*×*y*）=（*x*）×（*y*）=1，若（*x*×*y*）=0时，说明*x,y*至少有一个不是2的整数次，也满足（*x*×*y*）=（*x*）×（*y*）=0。

因此，是从到的同态映射。

3．代数系统，，其中＋和×分别表示实数的加法和实数乘法运算，映

射定义如下：



证明是从到的单同态，但不是同构。

证明：

因为对于R中的任意二个元素*x*和*y*，满足（*x*×*y*）=10(*x×y*)=10*x*×10*y*=（*x*）×（*y*），所以是同态映射。

若（*x*）=（*y*），即10*x*=10*y*则*x*=*y*，因此是单射。

但对任意的一个实数y，不一定存在*x*，使得*y*=10*x*，因此不是满射的。

从而是从到的单同态，但不是同构。

4．是整数加法代数系统，是任意一个代数系统，对于中的任一固定元素，令，证明是从到的同态映射。

证明：

因为对于Z中的任意二个整数*x*和*y*，满足*g*（*x*\**y*）=*a*(*x\*y*)= *a x*\**a y*=*g*（*x*）\**g*（*y*），

因此是从到的同态映射。

5．是实数加法代数系统，是模为1的复数对于乘法运算的代数系统，这两个代数系统同态吗？同构吗？请说明理由。

解：

对于R中任意的二个实数*x,y*，则分别存在模为1的复数*a+bi*和*c+di*，满足=1，=1，使得（*x*）=*a+bi，*（*y*）=*c+di*

因为（*a+bi*）×（*c+di*）=*ac-bd*+(*ad+bc*) *i* 也满足=1，但是满足（*x+y*）=（*a+bi*）×（*c+di*）=*ac-bd*+(*ad+bc*) *i*。所以是同态映射。但不是同构，因为不满足满射。

6．和分别是正整数对于加法和乘法构成的代数系统，试问从到，从到都存在同态映射吗？说明理由。

**解** →的同态映射如下：



而→不存在同态映射，这可用反证法进行证明。

若存在→的同态映射，则有：



特别地令，则得到，这与是→的映射矛盾，所以→不存在同态映射。

7．设是从代数系统到代数系统的同态映射，是从代数系统

到代数系统的同态映射，证明复合函数是从代数系统

到代数系统的同态映射。

证明：对G中任意的元素*x*和*y*，因为（*x*\**y*）=*g*(*f*(*x*\**y*))= *g*(*f*(*x)*  *f*(*y)*))

= *g*(*f*(*x))* ◊*g (f*(*y)*)= （*x*）◊（*y*）

因此，复合函数是从代数系统到代数系统的同态映射。

8．设、是代数系统，都是二元运算，是从到的同态映射，则

（1）是上的运算，即是代数系统。

（2）如果在上满足交换律，则在上也满足交换律。

（3）如果在上满足结合律，则在上也满足结合律。

（4）如果是的零元，则是的零元。

证明：

1. 因为是从到的同态映射，所以是非空的。

又因为上任意的二个元素*x*和*y*，分别存在*a,b*∈G，使得,(*b*)=*y*。

于是*x**y=*(*a*) (*b*)= ( *a\*b*) ∈，即是代数系统。

（2）因为上任意的二个元素*x*和*y*，分别存在*a,b*∈G，使得,(*b*)=*y*。

于是*x**y=*(*a*) (*b*)= ( *a\*b*) =( *b \*a*) =(*b*)  (*a*)= *y**x*。则在上也满足交换律。

（3）因为上任意的三个元素*x*，*y，z*，分别存在*a,b,c*∈G，使得,(*b*)=*y，*(*c*)=*z*。于是*x*(*y**z)=*(*a*) ((*b*) (*c*))= ( *a\*(b\*c)*) =( *(a \*b)\*c*) =((*a*) (*b*)) (*c*)= *(x**y)**z。*则在上也满足结合律。

（4）对任意的，存在，使得。于是

 (*a*)= (\**a*)=

即是的左零元。同理可证是的右零元，所以是的零元。