**§4.3 群**

**习题4.3**

1. 设是所有形如



的矩阵组成的集合， \*表示矩阵乘法。试问是半群吗？是有么半群吗？这里是实数。

**解** 任取中的2个元素 、、

∵ ＝

∴ 是一个代数系统。且因为矩阵的乘法满足结合律，所以是半群。

又因为，只要＝1，则

\*＝＝

对任何的成立，即是左单位元（不论取什么值）。但右单位元不存在，因为不论，取什么值，

＝＝

不可能对任何的成立。

所以单位元不存在（事实上，若单位元存在，则左、右单位元都存在且相等还唯一），所以不是有么半群。

2. 在自然数集合上定义运算和如下：

， 

试问和是半群吗？是有么半群吗？

**解**

是半群，有单位元0，是有幺半群。

是半群，没有单位元，不是有幺半群。

3. 设为整数集合，在上定义二元运算如下：



问关于运算能否构成群？为什么？

**解**

（1）整数集合Z非空。

（2） *x* ∗ *y* = *x* + *y* − 2∈ Z ，满足封闭性要求。

（3）因为∀*x*, *y，z* ∈ Z ,都有

(*x* ∗ *y* )\**z*=( *x* + *y* − 2)+*z*-2 =*x* + *y* +*z*− 4

*x* ∗ (*y* \**z*)= *x* +( *y* +*z*− 2)-2 =*x* + *y* +*z*− 4

\*满足结合律

（4）因为\*满足交换律

设*x* ∗ *y* = *x* + *y* − 2=*y* 得*x*=2,即单位元为2

（5）设*x*的逆元为*y*

则*x* ∗ *y* = *x* + *y* − 2=2 得*y*=4-*x* ∈ *Z*

综上所述，⟨Z, ∗⟩是群。

4. ，证明是群，这里是复合运算。

**解**

因为*x*∈G，所以G非空。

又因为 (*ax*+*b*)。(*cx*+*d*)= *c*(*ax+b*)+*d= cax+cb*+*d*∈G,满足封闭性要求。

复合运算满足结合律。

有单位元*x*

对任何元素*ax*+*b*来说，逆元是∈G

所以，是群。

5. 设。在上定义六个函数如下：

 

 

 

令为这六个函数构成的集合，是复合运算。

（1）给出的运算表。 （2）验证是群。

**解** （1）的运算表如下：

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

（2）从上运算表可以看出，运算具有封闭性，满足结合律，单位元为，每个元都有逆元，所以构成群。

6. 在群中计算下列元素的幂：

** **

** **

** **

**解  **

** **

** **

7.在群中，证明

， ，

**解** 因为群满足结合律。*xm*表示*m*个*x*进行\*运算*，*所以容易证明

， ，

8. 设，对于上的二元运算“模7乘法”：



构成群。请

（1）给出的运算表。 （2）验证构成群。

（3）给出每个元的次数。

**解** （1）

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** |
| **1** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| **2** | 2 | 4 | 6 | 1 | 3 | 5 |
| **3** | 3 | 6 | 2 | 5 | 1 | 4 |
| **4** | 4 | 1 | 5 | 2 | 6 | 3 |
| **5** | 5 | 3 | 1 | 6 | 4 | 2 |
| **6** | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

（2）由运算表可知，满足封闭性要求，满足结合律，有单位元1，1的逆元是1，2的逆元是4，3的逆元5，4的逆元是2，5的逆元是3，6的逆元是6，所以是群。

（3）|1|=1，|2|=3=|4|，|3|=|5|=6，|6|=2。

9．设是群，若有，证明为交换群。

证：对任意的*x*,*y* 由于群的封闭性得*y* \* *x*

从而*x*2=*e， y*2=*e,* (*y* \* *x*)2 =*e*

因此，对 *x*\**y=e* \*(*x*\**y*) \* *e*

=(*y* \**y*) \*(*x*\**y*) \*(*x*\**x*)

= *y* \*(*y* \**x*) 2 \**x*

*= y* \*e\**x*

*= y* \**x*

所以，是交换群。

10．设是群，证明是交换群的充要条件是有。

**解** 必要性：如果是交换群， 有是显然的。

充分性：根据得，再由消去律得，即交换律成立，所以是交换群。

11．设是有限半群，且满足消去律，证明是群。

**解** 对于，考虑集合



由封闭性可知。又由于是有限集，所以也是有限集。故

必有，使得



所以有



由消去律可得



这表明是左单位元，同理可证它是右单位元，所以是单位元。又因为



所以，有逆元。因此，是群。

12．设是群，，证明



证：

由书上的例子得知，|*a\*b*|=|*b\*a*|，从而

|*a\*b\*c*|=| *a\**(*b\*c*) |=|(*b\*c*) *\* a* |=| *b\*c\* a* |

|*a\*b\*c*|=|( *a\*b*)*\*c* |=| *c* *\** (*b\* a*) |=| *c\* b\* a* |

13．设是群，且。如果且与互质，证明。

证： (*a*\**b*)*k*=*ak*\**bk*

设|*a*\**b*|=*d,*而(*a*\**b*)*nm*=*anm*\**bnm=e,*所以*d*|*nm(1)*

(*a*\**b*)*d=* *ad* \**bd=e* **⇒** *ad* =*b-d* **⇒** *adm* =*b-dm* **=**(*bm*)*-d=e*

所以*n*|*dm*且*n*和*m*互质**⇒** *n*|*d*

同理， *m*|*d*

又因为*n*和*m*互质

所以*nm|d*(2)

据(1)(2)得， *d=nm*