**§4.4 子群与陪集**

**习题4.4**

1. 给出群的全部子群。

**解** 两个非平凡子群是：和，两个平凡子群是：和。

2．设是群，是其子群，任给，令



证明：是的子群（称为的共轭子群）

证：由群G的封闭性和逆元知，任意的H中的元素*a\*h\*a-1***∈** G，并且*a\*e\*a-1* **=*e*∈** *aHa-1,*因此*aHa-1是*G的非空子集。

对任意的*a\*h1\* a-1* **，** *a\*h2\* a-1* **∈** *aHa-1 ，*得*h1***，** *h2***∈** *H，*因为H是子群，据子群定理有*h1\* (h2*)-1**∈** *H*，因此对*a\*h1\* a-1* **\***（ *a\*h2\* a-1* ）-1= *a\*h1\* a-1* **\*** *a\*(h2*)-1*\* a-1*

**=** *a\*h1\* (a-1* **\*** *a*)*\*(h2*)-1*\* a-1 = a\*h1\*(h2*)-1*\* a-1* **∈** *aH a-1*

由子群的判定定理知， *aHa-1是*G的子群

3．设是群，是的子集，证明是的子群当且仅当，这里

 

证:

1. 对任意的*h1，h2***∈** *H，*有*h1\**(*h2* )-1= *h1\*h3* (因为H-1=H，所以存在*h3* **∈** *H，*使得

*h3*= (*h2* )-1)= *h4* **∈**H (因为H2 =H，所以存在*h4* **∈** *H，*使得*h4*= *h1\*h3* )，因此H是G的子群。

(2)若H是G的子群，有*e* **∈**H，则对任意的*h***∈**H，也有*h-1***∈**H。因此，*h=e\*h* **∈**H2，*h=* （*h-1*)-1**∈** H-1,从而得H **⊆** H2, H **⊆** H-1，另一方面，由子群的封闭性和逆元知，任意的 *h1\*h2* **∈** *H，h*-1 **∈** *H，*从而得H2**⊆**H, H-1**⊆**H。

综上所述， H2=H,H-1=H

4．集合在“模20加法”下构成群。设是由元素5生成的的子群。

（1）求的每个元素及其次数。 （2）求在中的所有左陪集。

**解** （1），的次数分别为：1，4，2，4。

（2）在中的所有左陪集如下：

，，

，

5．求12阶循环群的子群在中的所有左陪集。

**解** 所有左陪集如下：

，，

6．证明6阶群必含有3次元。

设G是6阶群，由拉格朗日定理的推论1可知 G 中的元素只能是1阶、2阶、3阶或6阶元。

若G中含有6阶元，设这个6 阶元是a，则a2是3阶元。

若G中不含6阶元，下面证明G中必含有3阶元。如若不然，G中只含1阶和2阶元，即 a∈G，有a2＝e，由命题可知G是交换群。 取G中两个不同的2阶元a和b，

令 H＝{e,a,b, ab } 易证H 是G的子群， 但| H |=4，| G |=6，与拉格朗日定理矛盾。

因此，6阶群必含有3次元。

7．证明偶数阶群必含2次元。

**解** 设是偶数阶群，若它无二次元，则对中的非单位元，有



所以，中的元素，除单位元外，其他都是成对出现的，所以中的元素是偶数个，矛盾。故偶数阶群必含2次元。

8．设为虚数单位，即，令



证明在矩阵乘法下构成群，并

（1）给出的运算表。 （2）找出的所有子群。

（3）证明的所有子群都是正规子群。

解：的运算表如下：

设*a*= , *b*=

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *a* | *-a* | *b* | *-b* |  | - |  | - |
| *a* | *a* | *-a* | *b* | *-b* |  | - |  | - |
| *-a* | *-a* | *a* | *-b* | *b* |  |  |  |  |
| *b* | *b* | *-b* | *-a* | *a* |  | - |  | - |
| *-b* | *-b* | *b* | *a* | *-a* |  |  |  |  |
|  |  |  | - |  | *-a* | *a* | *b* | *-b* |
|  |  |  |  |  | *a* | *-a* | *-b* | *b* |
|  |  |  |  | - | *-b* | *b* | *-a* | *a* |
|  |  |  | - |  | *b* | *-b* | *a* | -*a* |

（2）找出的所有子群有：{ *a* }，{*a,-a,b,-b,c,-c,d,-d*},{*a,-a*},{*a,-a,b,-b*},{*a,-a,c,-c*},{*a,-a,d,-d*}

（3）上述的所有子群都满足左陪集和右陪集相等。所以都是正规子群。

9．设是群，和是其子群，若或是正规子群，则，其中

， 

证明：任意的*h*\**k*∈HK，得*h*∈H，*k*∈K，因为和是子群，则每个元素都存在逆元，对任意的*h*∈H，都有*h-1*∈H，*k*∈H，都有*k-1*∈K，

从而任意的*h1*\**k1, h2*\**k2*∈HK，*(h1*\**k1)\* (h2*\**k2)-1= h1*\**k1\* k2-1* \* *h2-1*

*= (h1*\* *h2-1)* \* *( h2*\* (*k1\* k2-)1* \* *h2-1)，*由于是子群，是正规子群得*h1*\* *h2-1*∈H，*h2*\* (*k1\* k2-)1* \* *h2-1*∈K，从而*(h1*\**k1)\* (h2*\**k2)-1= h1*\**k1\* k2-1* \* *h2-1= (h1*\* *h2-1)* \* *( h2*\* (*k1\* k2-)1* \* *h2-1)* ∈HK，得HK是子群，同理可得KH也是子群。

所以*h*\**k=*（*h-1*）*-1*\*（*k-1*）*-1=（ k-1*\* *h-1*）*-1*∈KH，得HK**⊆** KH

同理可得*k*\**h=*（*k-1*）*-1*\*（*h -1*）*-1=（ h -1*\* *k-1*）*-1*∈HK，得KH **⊆** HK

所以HK=KH。

10．设是群，是其子群，证明是正规子群当且仅当对任意的，都有。

证明：

由书上的定理4.19得，*a*H*a*-1 **⊆** H。

另一方面，任意的*h***∈**H，因此*h=e\*h\*e-1***∈** *a*H*a*-1，得H**⊆** *a*H*a*-1。

所以，。

11．令是整数加群。求商群，和，其中，集合，。

解：

商群={[0]，[1]，[2]，[3]},

商群={[0]，[1]，[2]，[3]，[4]，[5]，[6]，[7]，[8]，[9]，[10]，[11] },

商群={[0]，[4]，[8] }。

12．设是群，定义映射为，证明是的自同构当且仅当是交换群。

证明：

（1） （*x\*y*）=（*x\*y*）*-1= y-1*\* *x-1=* （*y*）\* （*x*）

因为G是交换群，所以（*x\*y*）=（*x\*y*）*-1= y-1*\* *x-1=* （*y*）\* （*x*）

= （*x*）\*（*y*），所以是自同态映射。

若（*x*）=（*y*）则得*x-1*=*y-1*，从而*x*=*y*，所以是单自同态。

对任意的（*x*）= *x-1，*非常明显，是满自同态。

从而，是的自同构。

（2）任取*x,y*∈G,则(*x*-1)=*x*, (*y*-1)=*y*，

因此*x\*y*=(*x*-1)\* (*y*-1)= (*x*-1\* *y*-1)= (*x*-1\* *y*-1)-1= *y \** *x*  
因此G为交换群。

13．设和分别是阶群和阶群，若从到存在单同态，证明，即是的因子。

证明：

假设从到存在单同态映射，则|(G)|=|G|=*m*

据定理知，(G)是H的子群，又据拉格朗日定理知，是的因子。

14．设是从群到群的同态映射，对任意的，记，试问和的次数是否一定相同？如果不同，它们之间有何关系？

解：设|*a*|=*n* ,

则*bn*=(*an*)= (*e*)

但由于只是同态映射，不一定是单射，因此和的次数不一定相同，但的次数一定是的次数的因子。