**§4.5 循环群、置换群**

**习题4.5**

1. 证明循环群一定是交换群，举例说明交换群不一定是循环群。

证明：对于循环群<*a*>来说，任意的*am\*at=am+t= at\*am*,所以是交换群。

但是交换群不一定是循环群，例：交换群*G* = { *e*, *a*, *b*, *c* }，*G*中的元素除单位元*e*外，*a*, *b*, *c*都是2次元，但此群并不是循环群。

2．证明由1的次复根的全体所组成的集合在复数的乘法下构成阶循环群。

**解** 由代数的知识可知，1的次复根的全体所组成的集合为



，有。若，则；若，则存在，使得，而 。因此关于数的乘法是封闭的。故是代数系统。

数的乘法运算满足结合律。故是半群。

因为，有，所以是的么元。故是有幺半群。

，存在，使得

，所以的逆元存在。故是群。

因为，故是群的一个生成元，因此是循环群。

3．阶数为5、6、14、15的循环群的生成元分别有多少个？

设是阶数为5的循环群的生成元，因在比5小的正整数中有且仅有2，3，4与5互质，所以也是生成元，因此生成元个数为4。

设是阶数为6的循环群的生成元，因在比6小的正整数中有且仅有5与6互质，所以也是生成元，因此生成元个数为2。

设是阶数为14的循环群的生成元，因在比14小的正整数中有且仅有3，5，9，11，13与14互质，所以也是生成元，因此生成元个数为6。

设是阶数为15的循环群的生成元，因在比15小的正整数中有且仅有2，4，8，11，13，14与15互质，所以也是生成元，因此生成元个数为7。

4．设，对于上的二元运算“模12乘法”：



（1）证明构成群； （2）求出的所有子群；

（3）求中每个元素的次数； （4）是循环群吗？

解：

列出运算表如下

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **1** | **5** | **7** | **11** |
| **1** | 1 | 5 | 7 | 11 |
| **5** | 5 | 1 | 11 | 7 |
| **7** | 7 | 11 | 1 | 5 |
| **11** | 11 | 7 | 5 | 1 |

1. 由运算表知，满足封闭性要求，结合律，单位元是1，每个元素都有逆元：1的逆元是1，5的逆元5，7的逆元是7，11逆元的11。所以构成群。
2. 所有子群为：{1}，{1，5，7，11}，{1，5}，{1，7}，{1，11}.

（3）|1|=1，|5|=|7|=|11|=2。

（4）不是循环群。

5．设是循环群，和是它的两个子群。证明  
，这里是和的最小公倍数。

，则根据定理，应是的倍数，也应是的倍数，从而应是和的最小公倍数的倍数，所以。

，则应是和的最小公倍数的倍数，从而是的倍数，也是的倍数，所以，，即。

6．设是从群到群的同态映射，证明若是循环群，则也是循环群。

证明：

因为G是循环群 所以存在生成元*a*属于G，对于任何*x*属于G， 则存在*x=an*。

又因为是从群到群的同态映射，则对任何*y*属于(G)都存在*x*属于G，有*y=**(x)=* *( an)=*(( *a*))*n*。所以也是循环群。

7．设5阶置换为

 

计算，，，，。

= =

= =

=



8.设，写出上的所有4元置换。

解：共有24个置换。分别为：

（1），（12），（13），（14），（23），（24），（34），（12）（34），（13）（24），（14）（23），

（123），（132），（234），（243），（124），（142），（134），（143），（1234），（1432），（1342），（1243），（1342），（1423）

9．列出4元对称群的运算表，求出单位元，每个元的逆元，每个元的次数以及它的所有子群。

解：运算表略。

单位元是（1）

有2个平凡子群，另外28个非平凡子群：9个2阶子群，4个3阶子群，3个4阶循环子群，4个与klein群同构的4阶子群，4个和S3同构的6阶子群，3个8阶子群，1个12阶子群。