**§4.6 环与域**

**习题4.6**

1．设。证明关于复数的加法和乘法构成环，称为高斯整数环。

证明：

1. A中任意二个元素*a+bi*和 *c+di，*都有（*a+bi*）+（*c+di*）=*a+c*+(*b+d*) *i*仍属于A，满足封闭性要求。

（2）+满足结合律。

（3）有单位元0。

（4）每个元素*a+bi*都有逆元-*a-bi*

（5）+满足交换律。

所以<A,+>是交换群。

（6）（*a+bi*）×（*c+di*）=*ac-bd*+(*ad+bc*) *i*仍属于A

（（*a+bi*）×（*c+di*））×（*w+ti*）=( *ac-bd*)w-(*ad+bc*)t+(( *ac-bd*)t+(*ad+bc*)w) *i=*

*acw -bdw*-*adt-bc*t+(*act-bd*t+*adw+bc*w) *i*

而（*a+bi*）×*（*（*c+di*））×（*w+ti*）=（*a+bi*）×*（cw-dt+(ct+dw)i*）

*= acw -bdw*-*adt-bc*t+(*act-bd*t+*adw+bc*w) *i*

所以<A, ×>是半群。

（7）二个运算满足分配律。

综上所述，关于复数的加法和乘法构成环。

2．设为实数，称为实数域上的次多项式，令

。

证明关于多项式的加法和乘法构成环，称为实数域上的多项式环。

证明：

1. 任意的二个多项式（*a0+a1x+a2x2+….+anxn*）+（*b0+b1x+b2x2+….+bnxn*）

= *a0+ b0*+( *a1+ b1*)*x+….+* ( *am+ bm*)*xm*+….+ *anxn*仍然属于A，满足封闭性要求。

1. 加法满足结合律和交换律。
2. 有单位无0。
3. 每个多顶式*a0+a1x+a2x2+….+anxn*都有逆元-*a0-a1x-a2x2-….-anxn*

所以关于多项式的加法是交换群。

1. （*a0+a1x+a2x2+….+anxn*）×（*b0+b1x+b2x2+….+bnxn*）

= *a0 b0*+( *a1b0+ a0b1*)*x+*….+ *anbnxn+m*，满足封闭性要求。

1. 乘法满足结合律。
2. 二个运算满足分配律。

综上所述，关于多项式的加法和乘法构成环。

3．判断下列集合和给定运算是否构成环、整环和域，如果不能构成，请说明理由。

（1），运算为复数的加法和乘法。

（2），运算为实数的加法和乘法。

（3），运算为实数的加法和乘法。

（4）≥，运算为实数的加法和乘法。

（5），运算为实数的加法和乘法。

解：

1. 是环，是整环，也是域。
2. 是环，是整环，不是域。因为不是所有元素都有逆元。
3. 是环，是整环，不是域。因为不是所有元素都有逆元。
4. 是环，是整环，不是域。因为不是所有元素都有逆元。
5. 是环，是整环，是域。

4．设和是含么环中的两个可逆元，证明：

（1）可逆，且

（2）可逆，且

证明：

设其单位元为*e*，则

（1）（-*a*）(-*a*)-1=(-*a*)-1（-*a*）=*e*

所以

（2）（*ab*）(*b*-1*a*-1)= (*b*-1*a*-1) （*ab*）=*e*

所以

5．在域中解下列方程和方程组：

（1）

（2）

解：

1. *x*=4 mod 5
2. *x*=1 mod 5， *y*=2mod5， *z*=4 mod 5