概率论与数理统计习题集

赵子轩

2024 年 12 月 14 日

目录

第一章　随机事件及其概率

1.1　随机事件

1.1.1　写出下列随机试验的样本空间:

(1) 抛一枚硬币, 观察正面和反面出现的情况;

(2) 抛三枚硬币, 观察正面和反面出现的情况;

(3) 连续抛一枚硬币, 直至出现正面为止;

(4) 抛一枚骰子, 观察出现的点数;

(5) 抛两枚骰子, 观察出现的点数;

(6) 抛两枚骰子, 记录出现的点数之和;

(7) 在一个箱子中装有 10 个同型号的某种零件, 其中有 3 个次品和 7 个合格品, 从该箱子中任取 3 个零件, 观察其中次品的个数;

(8) 记录某机场在一天内收到咨询电话的次数;

(9) 测试电视机的寿命;

(10) 口袋中有黑、白、红球各一个, 从中任取两个球; 先从中取出一个, 放回后再取出一个;

(11) 口袋中有黑、白、红球各一个, 从中任取两个球; 先从中取出一个, 不放回后再取出一个.

解: (1) $\Omega=\{0,1\}$, 其中 0 表示反面, 1 表示正面.

(2) $\Omega=\{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1),(1,0,0),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$

(3) $\Omega=\{(1),(0,1),(0,0,1),(0,0,0,1),\cdots\}$

(4) $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$

(5) $\Omega=\{(x,y)\mid x,y=1,2,3,4,5,6\}$

(6) $\Omega=\{2,3,4,\cdots,12\}$

(7) $\Omega=\{0,1,2,3\}$

(8) $\Omega=\{0,1,2,3,\cdots\}$

(9) $\Omega=[0,+\infty)$

(10) $\Omega=\{$黑黑, 黑白, 黑红, 白黑, 白白, 白红, 红黑, 红白, 红红$\}$

(11) $\Omega=\{$黑白, 黑红, 白黑, 白红, 红黑, 红白$\}$

1.1.2　设 A,B,C 为三事件, 试表示下列事件:

(1) A 发生, B,C 不发生;

(2) A,B,C 都发生;

(3) A,B,C 都不发生;

(4) A,B,C 中只有一个发生;

(5) A, B, C 中至少有一个发生;

(6) A, B, C 中至多有一个发生;

(7) A, B, C 中至少有一个不发生;

(8) A, B, C 中至多有两个发生;

(9) A, B, C 中至少有两个发生;

(10) A, B, C 中恰好有两个发生.

解: (1) $A\overline{B}\,\overline{C}$

(2) ABC

(3) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$

(4) $A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}\,C$

(5) $\Omega - \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} = \overline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}} = A \cup B \cup C$

(6) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} \cup A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}\,C$

(7) $\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$

(8) $\Omega - ABC = \overline{ABC} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$

(9) $AB \cup AC \cup BC$

(10) $AB\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup \overline{A}BC$

1.1.3 判断下列命题是否成立:

(1) $A - (B - C) = (A - B) \cup C$;

(2) 若 $AB = \varnothing$ 且 $C \subseteq A$, 则 $BC = \varnothing$;

(3) $(A \cup B) - B = A$;

(4) $(A - B) \cup B = A$.

解: (1)

$$\begin{aligned} A - (B - C) &= A - B\overline{C} \\ &= A\overline{B\overline{C}} \\ &= A(\overline{B} \cup C) \\ &= (A\overline{B}) \cup (AC) \\ &= (A - B) \cup (AC) \\ &\neq (A - B) \cup C \end{aligned}$$

命题 1 不成立.

(2) 成立.

(3)

$$(A \cup B) - B = (A \cup B)\overline{B} = (A\overline{B}) \cup (B\overline{B}) = A\overline{B} \neq A$$

命题 3 不成立.

(4)

$$(A - B) \cup B = (A\overline{B}) \cup B = (A \cup B)(\overline{B} \cup B) = A \cup B \neq A$$

命题 4 不成立.

1.1.4 证明下列事件的运算公式:

(1) $A = AB \cup A\overline{B}$;

(2) $A \cup B = A \cup \overline{A}B$.

证明: (1) $AB \cup A\overline{B} = A(B \cup \overline{B}) = A\Omega = A$

(2) 由 (1) 可得 $B = AB \cup \overline{A}B$, 因此

$$\begin{aligned} A \cup B &= A \cup (AB \cup \overline{A}B) \\ &= (A \cup AB) \cup \overline{A}B \\ &= A(\Omega \cup B) \cup \overline{A}B \\ &= A \cup \overline{A}B \end{aligned}$$

□

1.2 随机事件的概率

1.2.1 设 A, B 是同一个试验中的两个事件, $P(A) = 0.6, P(A - B) = 0.2, P(A \cup B) = 0.9$. 求 $P(\overline{AB}), P(B), P((\overline{A} \cup B)(A \cup \overline{B}))$.

解: 由于 $P(A - B) = P(A) - P(AB)$, 所以

$$P(AB) = P(A) - P(A - B) = 0.6 - 0.2 = 0.4$$

进而可得

$$P(\overline{AB}) = 1 - P(AB) = 1 - 0.4 = 0.6$$

由于 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$, 所以

$$P(B) = P(A \cup B) - P(A) + P(AB) = 0.9 - 0.6 + 0.4 = 0.7$$

由随机事件的运算性质可得

$$\begin{aligned} (\overline{A} \cup B)(A \cup \overline{B}) &= [(\overline{A} \cup B)A] \cup [(\overline{A} \cup B)\overline{B}] \\ &= (A\overline{A}) \cup (AB) \cup (\overline{A}\,\overline{B}) \cup (B\overline{B}) \\ &= (AB) \cup (\overline{A \cup B}) \end{aligned}$$

又因为 $(AB)(\overline{A \cup B}) = (AB)(\overline{A}\,\overline{B}) = \varnothing$, 所以

$$\begin{aligned} P((\overline{A} \cup B)(A \cup \overline{B})) &= P((AB) \cup (\overline{A \cup B})) \\ &= P(AB) + P(\overline{A \cup B}) \\ &= P(AB) + 1 - P(A \cup B) \\ &= 0.4 + 1 - 0.9 \\ &= 0.5 \end{aligned}$$

1.2.2 设 A 和 B 是同一试验 E 的两个随机事件, 证明: $1-P(\overline{A})-P(\overline{B})\leqslant P(AB)\leqslant P(A\cup B)$.

证明: 因为 $AB\subseteq A\subseteq(A\cup B)$, 所以

$$P(AB)\leqslant P(A\cup B)$$

因为

$$1-P(AB)=P(\overline{AB})=P(\overline{A}\cup\overline{B})\leqslant P(\overline{A})+P(\overline{B})$$

所以

$$1-P(\overline{A})-P(\overline{B})\leqslant P(AB)$$

□

1.2.3 已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}, P(AB)=0, P(AC)=P(BC)=\dfrac{1}{16}$. 则 A,B,C 中至少发生一个的概率是多少? A,B,C 都不发生的概率是多少?

解: 因为 $P(AB)=0$, 且 $ABC\subseteq AB$, 由概率的单调性可知 $P(ABC)=0$. 由概率的加法公式可得 A,B,C 中至少发生一个的概率为

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)\\&=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-0-\frac{1}{16}-\frac{1}{16}+0\\&=\frac{5}{8}\end{aligned}$$

A,B,C 都不发生的概率为

$$\begin{aligned}P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})&=P(\overline{A\cup B\cup C})\\&=1-P(A\cup B\cup C)\\&=1-\frac{5}{8}\\&=\frac{3}{8}\end{aligned}$$

1.2.4 设事件 A 和 B 互不相容, 且 $P(A)=0.3, P(B)=0.5$, 求以下事件的概率:

(1) A 与 B 中至少有一个发生;

(2) A 和 B 都发生;

(3) A 发生但 B 不发生.

解: 因为 A 和 B 互不相容, 所以 $AB=\varnothing, P(AB)=0$.

(1) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)=0.3+0.5=0.8$

(2) $P(AB)=0$

(3) $P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(A)=0.3$

1.2.5 某城市中共发行 3 种报纸 A, B, C. 在这城市的居民中有 45% 订阅 A 报、35% 订阅 B 报、30% 订阅 C 报, 10% 同时订阅 A 报 B 报、8% 同时订阅 A 报 C 报、5% 同时订阅 B 报 C 报、3% 同时订阅 A, B, C 报. 求以下事件的概率:

(1) 只订阅 A 报的;

(2) 只订阅一种报纸的;

(3) 至少订阅一种报纸的;

(4) 不订阅任何一种报纸的.

解: 设事件 A, B, C 分别表示订阅 A, B, C 报, 根据条件可得 $P(A) = 0.45, P(B) = 0.35, P(C) = 0.3, P(AB) = 0.1, P(AC) = 0.08, P(BC) = 0.05, P(ABC) = 0.03$.

(1)

$$\begin{aligned} P(\text{只订阅 A 报}) &= P(A\overline{B}\,\overline{C}) \\ &= P(A(\overline{B \cup C})) \\ &= P(A - (B \cup C)) \\ &= P(A) - P(A(B \cup C)) \\ &= P(A) - P(AB \cup AC) \\ &= P(A) - [P(AB) + P(AC) - P(ABC)] \\ &= 0.45 - (0.1 + 0.08 - 0.03) \\ &= 0.3 \end{aligned}$$

(2)

$$P(\text{只订阅一种报纸}) = P(A\overline{B}\,\overline{C}) + P(\overline{A}B\overline{C}) + P(\overline{A}\,\overline{B}\,C)$$

其中

$$\begin{aligned} P(\overline{A}\,B\,\overline{C}) &= P(B) - P(AB) - P(BC) + P(ABC) = 0.35 - 0.1 - 0.05 + 0.03 = 0.23 \\ P(\overline{A}\,\overline{B}\,C) &= P(C) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) = 0.3 - 0.08 - 0.05 + 0.03 = 0.2 \end{aligned}$$

因此

$$P(\text{只订阅一种报纸}) = 0.3 + 0.23 + 0.2 = 0.73$$

(3)

$$\begin{aligned} P(\text{至少订阅一种报纸}) &= P(A \cup B \cup C) \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC) \\ &= 0.45 + 0.35 + 0.3 - 0.1 - 0.05 - 0.08 + 0.03 \\ &= 0.9 \end{aligned}$$

(4) $P(\text{不订阅任何一种报纸}) = P(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - P(A \cup B \cup C) = 1 - 0.9 = 0.1$

1.2.6 抛两枚硬币, 求出现一个正面一个反面的概率.

解: 此试验的样本空间为 $\Omega = \{(\text{正}, \text{正}), (\text{正}, \text{反}), (\text{反}, \text{正}), (\text{反}, \text{反})\}$, 样本点的个数为 4, 且每个样本点发生的可能性是相等的. 事件“出现一个正面一个反面”含有的样本点个数为 2, 根据古典概型可得该事件发生的概率为 $\dfrac{1}{2}$.

备注

如果将样本空间写成 $\Omega' = \{(\text{正},\text{正}),(\text{反},\text{反}),(\text{一正一反})\}$, 这 3 个样本点不是等可能的, 不满足古典概型的条件.

1.2.7 任取两个正整数, 求它们的和为偶数的概率.

解: 记取出偶数为 "0", 取出奇数为 "1", 则随机试验 "任取两个正整数" 的样本空间为

$$\Omega = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$$

令事件 A 表示 "取出的两个正整数之和为偶数", 则 $A = \{(0,0),(1,1)\}$, 从而所求概率为

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

1.2.8 抛两颗骰子, 求下列事件的概率:

(1) 点数之和为 6;

(2) 点数之和不超过 6;

(3) 至少有一个 6 点.

解: 抛两颗骰子所得点数的样本空间为 $\Omega = \{(x,y) \mid x,y = 1,2,3,4,5,6\}$, 样本点数量为 36.

(1) 令事件 A 为 "点数之和为 6", 则

$$A = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$$

所以所求概率为

$$P(A) = \frac{5}{36}$$

(2) 令事件 B 为 "点数之和不超过 6", 则

$$\begin{gathered} B = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,2),(2,3), \\ (2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(4,1),(4,2),(5,1)\} \end{gathered}$$

所以所求概率为

$$P(B) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

(3) 令事件 C 为 "至少有一个 6 点", 则

$$\begin{gathered} C = \{(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6),(6,6), \\ (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5)\} \end{gathered}$$

所以所求概率为

$$P(C) = \frac{11}{36}$$

1.2.9 考虑一元二次方程 $x^2 + Bx + C = 0$, 其中 B, C 分别是将一颗骰子连续抛两次先后出现的点数, 求该方程有实根的概率 p 和有重根的概率 q.

解: 将一颗骰子连续抛两次所得点数的样本空间为 $\Omega = \{(B, C) \mid B, C = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 样本点数量为 36.

事件 "该方程有实根" 发生的条件为 $B^2 - 4C \geqslant 0$, 而

$$\begin{aligned}\{B^2 - 4C \geqslant 0\} = \{&(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1),(3,2),(4,2),(5,2),(6,2),\\&(4,3),(5,3),(6,3),(4,4),(5,4),(6,4),(5,5),(6,5),(5,6),(6,6)\}\end{aligned}$$

共有 19 个样本点, 因此

$$p = P(B^2 - 4C \geqslant 0) = \frac{19}{36}$$

事件 "该方程有重根" 发生的条件为 $B^2 - 4C = 0$, 而

$$\{B^2 - 4C = 0\} = \{(2,1),(4,4)\}$$

共有 2 个样本点, 因此

$$q = P(B^2 - 4C = 0) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

1.2.10 从 n 个数字 $1, 2, \cdots, n$ 中任取 3 个, 求大小在中间的数字恰好为 $k\,(1 < k < n)$ 的概率.

解: 从 n 个数字中任取 3 个, 共有 C_n^3 种取法. 如果大小在中间的数字恰好为 k, 必须有一个小于 k、一个等于 k、一个大于 k, 这样的取法有 $\mathrm{C}_{k-1}^1\mathrm{C}_1^1\mathrm{C}_{n-k}^1$ 种. 因此所求概率为

$$p = \frac{\mathrm{C}_{k-1}^1\mathrm{C}_1^1\mathrm{C}_{n-k}^1}{\mathrm{C}_n^3} = \frac{6(k-1)(n-k)}{n(n-1)(n-2)}$$

1.2.11 从 $0, 1, 2, \cdots, 9$ 十个数字中任意选出三个不同的数字, 求下列事件的概率:

(1) $A_1 =$ "三个数字中不含 0 和 5";

(2) $A_2 =$ "三个数字中不含 0 或 5";

(3) $A_3 =$ "三个数字中含 0 但不含 5".

解: 从十个数字中任意选出三个不同的数字, 共有 C_{10}^3 种取法.

(1) 要使事件 A_1 发生, 可以从 0 和 5 之外的八个数字中选出三个数字, 有 C_8^3 种取法. 因此

$$P(A_1) = \frac{\mathrm{C}_8^3}{\mathrm{C}_{10}^3} = \frac{7}{15}$$

(2) 设事件 $A =$ "三个数字中不含 0", $B =$ "三个数字中不含 5", 则

$$P(A) = P(B) = \frac{\mathrm{C}_9^3}{\mathrm{C}_{10}^3} = \frac{7}{10}$$

$$P(AB) = P(A_1) = \frac{7}{15}$$

进而有

$$P(A_2) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{7}{10} + \frac{7}{10} - \frac{7}{15} = \frac{14}{15}$$

(3) 要使事件 A_3 发生, 可以先选出 0, 再从 0 和 5 之外的八个数字中选出两个数字, 有 C_8^2 种取法. 因此

$$P(A_3) = \frac{\mathrm{C}_8^2}{\mathrm{C}_{10}^3} = \frac{7}{30}$$

1.2.12 从数字 $1,2,\cdots,9$ 中可重复地任取 n 次, 求几次所取数字的乘积能被 10 整除的概率.

解: 从 9 个数字中可重复地任取 n 次, 共有 9^n 种取法. 要使事件 "几次所取数字的乘积能被 10 整除" 发生, 需要至少取到一次 5 且至少取到一次偶数. 设事件 $A=$"至少取到一次 5", $B=$"至少取到一次偶数", 易得

$$P(\overline{A})=\frac{8^n}{9^n}$$
$$P(\overline{B})=\frac{5^n}{9^n}$$
$$P(\overline{A}\,\overline{B})=\frac{4^n}{9^n}$$

所求概率为

$$\begin{aligned}P(AB)&=P(\overline{\overline{A}\cup\overline{B}})\\&=1-P(\overline{A}\cup\overline{B})\\&=1-[P(\overline{A})+P(\overline{B})-P(\overline{A}\,\overline{B})]\\&=1-\frac{8^n+5^n-4^n}{9^n}\end{aligned}$$

1.2.13 从 N 个数字 $1,2,\cdots,N$ 中可重复地任取 n 次, 求抽到的最大数字正好为 $k\,(1\leqslant k\leqslant N)$ 的概率.

解: 从 N 个数字中可重复地抽取 n 次, 共有 N^n 种取法.

记事件 B_i 为 "抽到的最大数字小于等于 i" $(i=1,2,\cdots,N)$, 则 B_i 发生只需每次从 $1,2,\cdots,i$ 中取数即可, 共有 i^n 种取法, 由古典概型可知

$$P(B_i)=\frac{i^n}{N^n}$$

记事件 A_k 为 "抽到的最大数字正好为 k", 则 $A_k=B_k-B_{k-1}$, 且 $B_{k-1}\subseteq B_k$, 因此

$$\begin{aligned}P(A_k)&=P(B_k-B_{k-1})\\&=P(B_k)-P(B_{k-1})\\&=\frac{k^n}{N^n}-\frac{(k-1)^n}{N^n}\\&=\frac{k^n-(k-1)^n}{N^n}\end{aligned}$$

1.2.14 将 15 名新生 (其中有 3 名优秀生) 随机地分配到 3 个班级去, 其中一班 4 名, 二班 5 名, 三班 6 名. 求:

(1) 每个班级各分配到一名优秀生的概率;

(2) 3 名优秀生分配到一个指定班级的概率;

(3) 3 名优秀生分配到同一个班级的概率.

解: 将 15 名新生随机地分配给一班 4 名、二班 5 名、三班 6 名, 共有 $\mathrm{C}_{15}^4\mathrm{C}_{11}^5\mathrm{C}_6^6$ 种分法.

(1) 将 3 名优秀生分配到三个班级的分法共有 A_3^3 种, 将其余 12 名新生分配给一班 3 名、二班 4 名、三班 5 名的分法共有 $\mathrm{C}_{12}^3\mathrm{C}_9^4\mathrm{C}_5^5$ 种, 则每个班级各分配到一名优秀生的分法共有

$A_3^3C_{12}^3C_9^4C_5^5$ 种. 因此所求概率为

$$p=\frac{A_3^3C_{12}^3C_9^4C_5^5}{C_{15}^4C_{11}^5C_6^6}=\frac{24}{91}$$

(2) 如果将 3 名优秀生分配到一班, 则其余 12 名新生将分配给一班 1 名、二班 5 名、三班 6 名, 此时分法共有 $C_{12}^1C_{11}^5C_6^6$ 种, 所求概率为

$$p_1=\frac{C_{12}^1C_{11}^5C_6^6}{C_{15}^4C_{11}^5C_6^6}=\frac{4}{455}$$

如果将 3 名优秀生分配到二班, 则其余 12 名新生将分配给一班 4 名、二班 2 名、三班 6 名, 此时分法共有 $C_{12}^4C_8^2C_6^6$ 种, 所求概率为

$$p_2=\frac{C_{12}^4C_8^2C_6^6}{C_{15}^4C_{11}^5C_6^6}=\frac{2}{91}$$

如果将 3 名优秀生分配到三班, 则其余 12 名新生将分配给一班 4 名、二班 5 名、三班 3 名, 此时分法共有 $C_{12}^4C_8^5C_3^3$ 种, 所求概率为

$$p_3=\frac{C_{12}^4C_8^5C_3^3}{C_{15}^4C_{11}^5C_6^6}=\frac{4}{91}$$

(3) 用 A_i 表示 “3 名优秀生全部分配到 i 班” $(i=1,2,3)$, 则事件 “3 名优秀生分配到同一个班级” 可以表示为 $A_1\cup A_2\cup A_3$. 又因为 $A_iA_j=\varnothing\,(i\neq j,i,j=1,2,3)$, 所以所求概率为

$$p=P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=\frac{4}{455}+\frac{2}{91}+\frac{4}{91}=\frac{34}{455}$$

1.2.15 从一副 52 张的扑克牌中任取 4 张, 求下列事件的概率:

(1) 全是黑桃;

(2) 同花;

(3) 没有两张同一花色;

(4) 同色.

解: 从 52 张扑克牌中任取 4 张的取法有 C_{52}^4 种.

(1) 一副扑克牌中有 13 张黑桃, 从中取出 4 张的取法有 C_{13}^4 种, 因此所求概率为

$$p_1=\frac{C_{13}^4}{C_{52}^4}=\frac{11}{4165}$$

(2) 取出的 4 张牌全是某一特定花色的取法有 C_{13}^4 种, 而一副扑克牌有 4 种花色, 则 4 张牌同花的取法有 $4C_{13}^4$ 种, 因此所求概率为

$$p_2=\frac{4C_{13}^4}{C_{52}^4}=\frac{44}{4165}$$

(3)“没有两张同一花色” 需要从 4 种花色中各取一张, 取法有 13^4 种, 因此所求概率为

$$p_3=\frac{13^4}{C_{52}^4}=\frac{2197}{20825}$$

(4) 一副扑克牌中有红色和黑色牌各 26 张, 取出 4 张同色牌的取法有 $2\mathrm{C}_{26}^4$ 种, 因此所求概率为

$$p_4 = \frac{2\mathrm{C}_{26}^4}{\mathrm{C}_{52}^4} = \frac{92}{833}$$

1.2.16 把 10 本书任意地放在书架上, 求其中指定的 4 本书放在一起的概率.

解: 把 10 本书任意地放在书架上, 共有 A_{10}^{10} 种放法. 当其中指定的 4 本书放在一起时, 将这 4 本书看作一个整体, 与其他 6 本书一起放在书架上, 有 A_7^7 种放法; 放在一起的 4 本书又有不同的顺序, 有 A_4^4 种放法. 因此 "其中指定的 4 本书放在一起" 共有 $\mathrm{A}_7^7\mathrm{A}_4^4$ 种放法, 所求概率为

$$p = \frac{\mathrm{A}_7^7\mathrm{A}_4^4}{\mathrm{A}_{10}^{10}} = \frac{7! \times 4!}{10!} = \frac{1}{30}$$

1.2.17 n 个人随机地围一圆桌而坐, 求甲、乙两人相邻而坐的概率.

解:

解法一: n 个人围坐, 共有 $\dfrac{\mathrm{A}_n^n}{n} = (n-1)!$ 种坐法. 当甲、乙两人相邻而坐时, 将甲、乙两人看作整体, 有 $\dfrac{\mathrm{A}_{n-1}^{n-1}}{n-1}\mathrm{A}_2^2 = 2(n-2)!$ 种坐法. 因此所求概率为

$$p = \frac{2(n-2)!}{(n-1)!} = \frac{2}{n-1}$$

解法二: 设甲先坐好, 再考虑乙的坐法. 此时乙总共有 $n-1$ 个位置可坐, 且这 $n-1$ 个位置都是等可能的, 而乙与甲相邻有 2 个位置, 因此所求概率为

$$p = \frac{2}{n-1}$$

1.2.18 同时掷 5 枚骰子, 求下列事件的概率:

(1) 每枚都不一样;

(2) 其中 2 枚相同 (成对), 另外 3 枚各不相同且与成对的 2 枚也不同;

(3) 出现两组成对的骰子;

(4) 其中 3 枚相同, 另外 2 枚不同;

(5) 其中 4 枚相同;

(6) 5 枚全部相同.

解: 同时掷 5 枚骰子共有 6^5 种不同情况.

(1) $p_1 = \dfrac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{6^5} = \dfrac{5}{54}$

(2) $p_2 = \dfrac{\mathrm{C}_5^2 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{6^5} = \dfrac{25}{54}$

(3) 将 5 枚骰子分成 3 组, 其中 2 组包含 2 枚骰子, 另外一组只有 1 个骰子, 这样的分法有 $\dfrac{\mathrm{C}_5^2\mathrm{C}_3^2}{2} = 15$ 种. 这三组骰子出现的点数不同, 有 $6 \times 5 \times 4 = 120$ 种情况, 因此所求概率为

$$p_3 = \frac{15 \times 120}{6^5} = \frac{25}{108}$$

(4) $p_4 = \dfrac{C_5^3 \times 6 \times 5 \times 4}{6^5} = \dfrac{25}{162}$

(5) $p_5 = \dfrac{C_5^4 \times 6 \times 5}{6^5} = \dfrac{25}{1296}$

(6) $p_6 = \dfrac{6}{6^5} = \dfrac{1}{1296}$

1.2.19 箱子里有 n 双不同尺码的鞋子. 从中任取 $2r$ $(2r \leqslant n)$ 只, 求下列事件的概率.

(1) $A_0 =$ "没有一双成对的鞋";

(2) $A_1 =$ "只有一对鞋子";

(3) $A_2 =$ "恰有两对鞋子";

(4) $A_r =$ "有 r 对鞋子".

解: 从 $2n$ 只鞋子中任取 $2r$ 只, 共有 C_{2n}^{2r} 种可能.

(1) 要使 A_0 发生, 可以先从 n 双鞋子中任取 $2r$ 双, 再从每双鞋中各取一只, 共有 $C_n^{2r} \cdot 2^{2r}$ 种可能. 因此

$$P(A_0) = \frac{2^{2r} C_n^{2r}}{C_{2n}^{2r}}$$

(2) 要使 A_1 发生, 可以先从 n 双鞋子中任取 1 双, 再从剩下的 $n-1$ 双鞋中任取 $2r-2$ 双, 最后从选出的 $2r-2$ 双中各取一只, 共有 $C_n^1 C_{n-1}^{2r-2} \cdot 2^{2r-2}$ 种可能. 因此

$$P(A_1) = \frac{2^{2r-2} C_n^1 C_{n-1}^{2r-2}}{C_{2n}^{2r}} = \frac{2^{2r-2} n C_{n-1}^{2r-2}}{C_{2n}^{2r}}$$

(3) 要使 A_2 发生, 可以先从 n 双鞋子中任取 2 双, 再从剩下的 $n-2$ 双鞋中任取 $2r-4$ 双, 最后从选出的 $2r-4$ 双中各取一只, 共有 $C_n^2 C_{n-2}^{2r-4} \cdot 2^{2r-4}$ 种可能. 因此

$$P(A_2) = \frac{2^{2r-4} C_n^2 C_{n-2}^{2r-4}}{C_{2n}^{2r}} = \frac{2^{2r-5} n(n-1) C_{n-2}^{2r-4}}{C_{2n}^{2r}}$$

(4) 从 n 双鞋子中任取 r 双, 共有 C_n^r 种可能, 因此

$$P(A_r) = \frac{C_n^r}{C_{2n}^{2r}}$$

1.2.20 (接草成环问题) 把 $2n$ 根草紧握在手中, 仅露出它们的头和尾, 然后随机地把 $2n$ 个头两两相接, $2n$ 个尾也两两相接. 求放开手后 $2n$ 根草恰巧连成一个环的概率.

解: 先将头两两相接, 此时所有接法都是等价的, 如图 1.1 所示, 所以只需考虑尾的接法.

$2n$ 个尾两两相接, 先任选 1 个尾, 再从剩下的 $2n-1$ 个尾中任选 1 个尾相接; 然后从剩下的 $2n-2$ 个尾中任选 1 个, 与 $2n-3$ 个尾中的任意 1 个相接; 以此类推, 将 $2n$ 个尾两两相接共有 $2n(2n-1)(2n-2)(2n-3) \times \cdots \times 2 \times 1 = (2n)!$ 种方法.

如果要成环, 在从 $2n$ 个尾中任选 1 个之后, 剩下的 $2n-1$ 个尾中有一个不能选择, 所以只能从其余 $2n-2$ 个尾中任选 1 个相接; 然后从剩下的 $2n-2$ 个尾中任选 1 个, 与 $2n-4$ 个尾中的任意 1 个相接; 以此类推, 成环的方法共有 $2n(2n-2)(2n-2)(2n-4) \times \cdots \times 2 \times 1$ 种. 因

此所求概率为

$$
\begin{aligned}
p &= \frac{2n(2n-2)(2n-2)(2n-4)\times\cdots\times 2\times 1}{(2n)!}\\
&= \frac{[2n(2n-2)(2n-4)\times\cdots\times 2][(2n-2)(2n-4)\times\cdots\times 1]}{(2n)!}\\
&= \frac{2^n n!\times 2^{n-1}(n-1)!}{(2n)!}\\
&= \frac{2^{2n-1}n!(n-1)!}{(2n)!}
\end{aligned}
$$

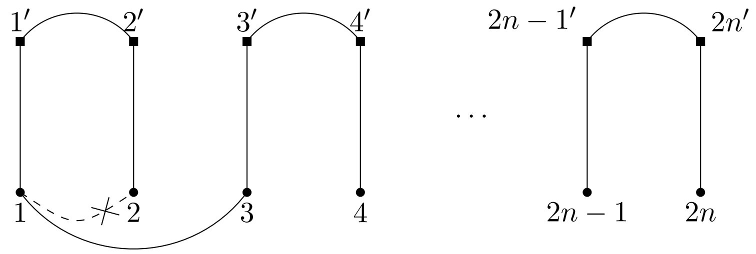

图 1.1 接草成环问题

1.2.21 把 n 个 “0” 与 $m\,(m \leqslant n+1)$ 个 “1” 随机地排列, 求没有两个 “1” 连在一起的概率.

解: 总共 $m+n$ 个位置, 选择其中 n 个放 “0”, 其余 m 个位置放 “1”, 总的排列数为 C_{m+n}^{n}. 要使事件 “没有两个 ‘1’ 连在一起” 发生, 需要将 “1” 放在 n 个 “0” 之间的空隙中, 共有 $n+1$ 个位置, 此时排列数为 C_{n+1}^{m}. 因此所求概率为

$$
p = \frac{\mathrm{C}_{n+1}^{m}}{\mathrm{C}_{m+n}^{n}} = \frac{n!(n+1)!}{(n-m+1)!(m+n)!}
$$

1.2.22 (插板法) 将 n 个完全相同的球随机地放入 N 个盒子中, 求:

(1) 某个指定的盒子中恰好有 $k\,(0 \leqslant k \leqslant n)$ 个球的概率;

(2) 恰好有 $m\,(N-n \leqslant m \leqslant N-1)$ 个空盒的概率;

(3) 某指定的 m 个盒子中恰好有 j 个球的概率.

解: 将 n 个球排成一行, 向其中插入 $N-1$ 块板, 分成 N 个区域, 每个区域可以看成一个盒子. 因此 “将 n 个完全相同的球随机地放入 N 个盒子中” 就相当于将 n 个球和 $N-1$ 块板随机地排成一行, 由 1.2.21 可知, 共有 C_{n+N-1}^{n} 种情况.

(1) 某个指定的盒子中有 k 个球, 其余 $n-k$ 个球随机放入 $N-1$ 个盒子中, 共有 $\mathrm{C}_{n-k+N-2}^{n-k}$ 种情况, 因此所求概率为

$$
p_1 = \frac{\mathrm{C}_{n-k+N-2}^{n-k}}{\mathrm{C}_{n+N-1}^{n}} = \frac{(N-1)n!(n-k+N-2)!}{(n-k)!(n+N-1)!}
$$

(2) 先从 N 个盒子中选出 m 个作为空盒, 有 C_N^m 种取法. 然后将 n 个球放入剩下的 $N-m$ 个盒子, 并且不能有空盒, 可以先向每个盒子放 1 个球, 再将其余 $n-N+m$ 个球随机放入 $N-m$

个盒子中, 此时有 $\mathrm{C}_{(n-N+m)+(N-m-1)}^{n-N+m}=\mathrm{C}_{n-1}^{n-N+m}$ 种情况. 综上, 所求概率为

$$p_2=\frac{\mathrm{C}_N^m\mathrm{C}_{n-1}^{n-N+m}}{\mathrm{C}_{n+N-1}^n}$$

(3) 将 j 个球放入指定的 m 个盒子中, 有 C_{m+j-1}^j 种放法; 另外 $n-j$ 个球放入其余 $N-m$ 个盒子, 有 $\mathrm{C}_{n-j+N-m-1}^{n-j}$ 种放法. 因此所求概率为

$$p_3=\frac{\mathrm{C}_{m+j-1}^j\mathrm{C}_{n-j+N-m-1}^{n-j}}{\mathrm{C}_{n+N-1}^n}$$

1.2.23 (配对问题) 一个晚会有 n 个人参加, 每个人带了一件礼物, 且各人带的礼物都不相同. 每人从放在一起的 n 件礼物中随机抽取一件, 求至少有一个人抽到自己礼物的概率.

解: 设事件 $A_i=$ "第 i 个人抽到自己的礼物", $i=1,2,\cdots,n$, 则所求概率为 $P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)$. 因为

$$P(A_1)=P(A_2)=\cdots=P(A_n)=\frac{1}{n}$$

$$P(A_1A_2)=P(A_1A_3)=\cdots=P(A_{n-1}A_n)=\frac{1}{n(n-1)}$$

$$P(A_1A_2A_3)=P(A_1A_2A_4)=\cdots=P(A_{n-2}A_{n-1}A_n)=\frac{1}{n(n-1)(n-2)}$$

$$\cdots$$

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=\frac{1}{n!}$$

所以由概率的加法公式得

$$\begin{aligned}&P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)\\=&\,n\cdot\frac{1}{n}-\mathrm{C}_n^2\frac{1}{n(n-1)}+\mathrm{C}_n^3\frac{1}{n(n-1)(n-2)}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}\\=&\,1-\frac{n!}{2!(n-2)!}\frac{1}{n(n-1)}+\frac{n!}{3!(n-3)!}\frac{1}{n(n-1)(n-2)}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}\\=&\,1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}\end{aligned}$$

备注

当 $n\to\infty$ 时, 此概率的极限为 $1-e^{-1}\approx0.6321$. 这表明, 即使人数很多, 事件 "至少有一个人抽到自己礼物" 也不是必然事件.

1.2.24 一个质点从平面上某点开始, 等可能地向上、下、左、右四个方向随机游动, 每次游动的距离为 1. 求经过 $2n$ 次游动后, 质点回到出发点的概率.

解: 因为每次游动都等可能地向 4 个方向随机游动, 所以经过 $2n$ 次游动后的终点有 4^{2n} 种可能.

如果质点回到出发点, 则上下游动次数相等、左右游动次数相等. 设上、下游动各 k 次, 左、右游动各 $n-k$ 次, 当 k 固定时有 $\mathrm{C}_{2n}^k\mathrm{C}_{2n-k}^k\mathrm{C}_{2n-2k}^{n-k}$ 种可能性, 因此事件 "质点回到出发点" 的

样本点个数为

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_{2n}^{k}\mathrm{C}_{2n-k}^{k}\mathrm{C}_{2n-2k}^{n-k}&=\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n)!}{k!(2n-k)!}\frac{(2n-k)!}{k!(2n-2k)!}\frac{(2n-2k)!}{(n-k)!(n-k)!}\\&=\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n)!}{(k!)^2[(n-k)!]^2}\\&=\frac{(2n)!}{n!n!}\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{n!}{k!(n-k)!}\right]^2\\&=\mathrm{C}_{2n}^{n}\sum_{k=0}^{n}(\mathrm{C}_{n}^{k})^2\end{aligned}$$

为了计算 $\sum\limits_{k=0}^{n}(\mathrm{C}_{n}^{k})^2$, 考虑等式

$$(1+x)^n(1+x)^n=(1+x)^{2n}$$

将两端用二项式定理展开, 得

$$\left[\sum_{i=0}^{n}\mathrm{C}_{n}^{i}x^i\right]\left[\sum_{j=0}^{n}\mathrm{C}_{n}^{j}x^j\right]=\sum_{k=0}^{2n}\mathrm{C}_{2n}^{k}x^k$$

比较两端 x^n 项的系数可得

$$\sum_{i=0}^{n}\mathrm{C}_{n}^{i}\mathrm{C}_{n}^{n-i}=\mathrm{C}_{2n}^{n}$$

又因为 $\mathrm{C}_{n}^{i}=\mathrm{C}_{n}^{n-i}$, 所以有

$$\sum_{i=0}^{n}(\mathrm{C}_{n}^{i})^2=\mathrm{C}_{2n}^{n}$$

因此, 事件 “质点回到出发点” 的样本点个数为

$$\mathrm{C}_{2n}^{n}\sum_{k=0}^{n}(\mathrm{C}_{n}^{k})^2=(\mathrm{C}_{2n}^{n})^2$$

所求概率为

$$p=\frac{(\mathrm{C}_{2n}^{n})^2}{4^{2n}}$$

1.2.25　口袋中有 $n-1$ 个黑球和 1 个白球, 每次从口袋中随机地摸出一球, 并换入一个黑球. 问第 k 次摸球时, 摸到黑球的概率是多少?

解: 设事件 $A_k=$“第 k 次摸球时摸到黑球”. 直接计算 $P(A_k)$ 很困难, 可以先算 $P(\overline{A_k})$.

由于只有 1 个白球, 且不会放入白球, 所以如果第 k 次摸球时摸到白球, 前 $k-1$ 次就不能摸到白球, 即前 $k-1$ 次摸到的全是黑球, 因此

$$P(\overline{A_k})=\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}\frac{1}{n}=\frac{(n-1)^{k-1}}{n^k}$$

所求概率为

$$P(A_k) = 1 - P(\overline{A_k}) = 1 - \frac{(n-1)^{k-1}}{n^k}$$

1.2.26 (会面问题) 甲乙两人约定在下午 6 时到 7 时之间在某处会面, 并约定先到者应等候另一个人 20 分钟, 过时即可离去. 求两人能会面的概率.

解: 设 x 和 y 分别表示甲、乙两人到达约会地点的时间, 则样本空间为

$$\Omega = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 60, 0 \leqslant y \leqslant 60\}$$

设事件 $A =$ "甲乙两人能够会面", 则

$$A = \{(x,y) \mid |x-y| \leqslant 20\}$$

由图 1.2 可知, Ω 的面积为 60^2, A 的面积为 $60^2 - 40^2$, 因此

$$P(A) = \frac{60^2 - 40^2}{60^2} = \frac{5}{9}$$

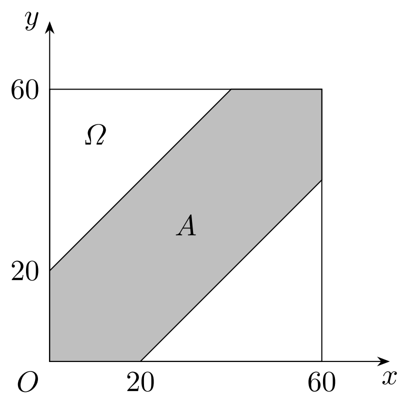

图 1.2

1.2.27 甲乙两艘轮船驶向一个不能同时停泊两艘轮船的码头, 它们在一昼夜内到达的时间是等可能的. 如果甲船的停泊时间是一小时, 乙船的停泊时间是两小时, 求它们中任何一艘都不需要等候码头空出的概率是多少?

解: 设甲、乙到达码头的时间分别为 x, y, 则样本空间为

$$\Omega = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 24, 0 \leqslant y \leqslant 24\}$$

设事件 $A =$ "甲乙都不需要等候码头空出", 该事件可以分为两种情况. 如果甲先到达, 则乙的到达时间应至少比甲晚一小时, 即 $y \geqslant x+1$; 如果乙先到达, 则甲至少比乙晚到两小时, 即 $x \geqslant y+2$. 综合两种情况, 事件 A 可以表示为

$$A = \{(x,y) \mid y \geqslant x+1 \text{ 或 } y \leqslant x-2\}$$

如图 1.3 所示, 所求概率为

$$P(A)=\frac{\dfrac{23^2}{2}+\dfrac{22^2}{2}}{24^2}=\frac{1013}{1152}$$

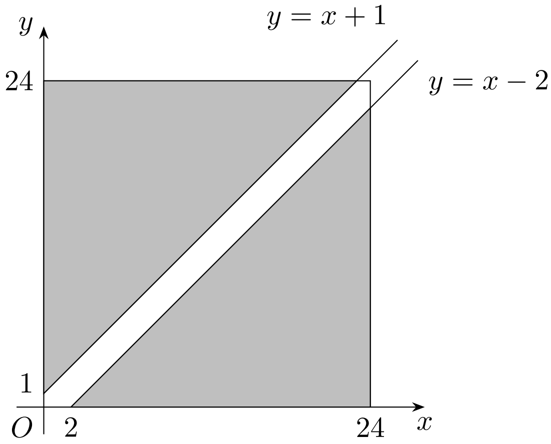

图 1.3

1.2.28 在长度为 a 的线段内任取两点将其分为三段, 求它们可以构成一个三角形的概率.

解: 设分成的三段长度分别为 x, y 和 $a-x-y$, 则有

$$\begin{cases}0<x<a\\0<y<a\\0<a-x-y<a\end{cases}$$

其中 $0<a-x-y<a$ 等价于 $0<x+y<a$, 则样本空间为

$$\Omega=\{(x,y)\mid 0<x<a,\ 0<y<a,\ 0<x+y<a\}$$

设事件 $A=$"线段分成的三段可以构成三角形". 由于三角形中任意两边之和大于第三边, 则事件 A 发生的条件为

$$\begin{cases}0<x<y+(a-x-y)\\0<y<x+(a-x-y)\\0<a-x-y<x+y\end{cases}$$

整理得

$$A=\{(x,y)\mid 0<x<\frac{a}{2},\ 0<y<\frac{a}{2},\ \frac{a}{2}<x+y<a\}$$

如图 1.4 所示. 则所求概率为

$$P(A)=\frac{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}{\dfrac{1}{2}a^2}=\frac{1}{4}$$

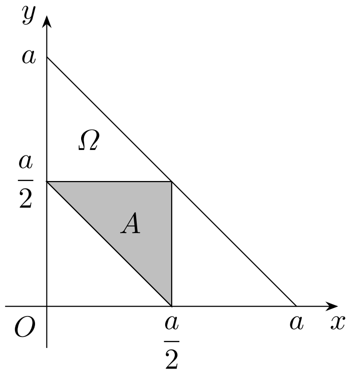

图 1.4

1.2.29 在平面上画有间隔为 d 的等距平行线, 向平面任意投掷一个边长为 a,b,c (均小于 d) 的三角形, 求三角形与平行线相交的概率.

解: 三角形与平行线相交有三种情况: 三角形的一个顶点在平行线上、一条边与平行线重合、两条边与平行线相交. 由几何概型可知, 前两种情况出现的概率为零, 所以只需考虑两条边与平行线相交的概率. 记 P_{ab}, P_{bc}, P_{ac} 分别为两条边 ab, bc, ac 与平行线相交的概率, 则所求概率为

$$p = P_{ab} + P_{bc} + P_{ac}$$

设 P_a, P_b, P_c 分别为边 a, b, c 与平行线相交的概率, 由蒲丰投针问题可得

$$P_a = \frac{2a}{\pi d}, P_b = \frac{2b}{\pi d}, P_c = \frac{2c}{\pi d}$$

a 与平行线相交又能分成两种情况: ab 与平行线相交、ac 与平行线相交. 因此

$$P_a = P_{ab} + P_{ac}$$

同理可得

$$P_b = P_{ab} + P_{bc}$$

$$P_c = P_{ac} + P_{bc}$$

因此, 三角形与平行线相交的概率为

$$p = P_{ab} + P_{bc} + P_{ac} = \frac{1}{2}(P_a + P_b + P_c) = \frac{a+b+c}{\pi d}$$

备注

本题是蒲丰投针问题的推广. 该问题可以进一步推广到多边形及圆的情形.

在平面上画有间隔为 d 的等距平行线, 向平面任意投掷一个周长为 S_n 的凸多边形, 且该凸多边形的直径小于 d (凸多边形的直径是指多边形上任意两点之间的最大距离), 则该凸多边形与平行线相交的概率为 $\dfrac{S_n}{\pi d}$.

在平面上画有间隔为 d 的等距平行线, 向平面任意投掷一个半径为 $r\,(2r < d)$ 的圆, 则该圆

与平行线相交的概率为 $\dfrac{2r}{d}$.

1.2.30 在半径为 R 的圆内画平行弦, 如果这些弦与垂直于弦的直径的交点在该直径上的位置是等可能的, 求任意画弦的长度大于 R 的概率.

解： 设弦的中点与圆心的距离为 x, 则样本空间为

$$\Omega = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant R\}$$

弦长为 $2\sqrt{R^2 - x^2}$, 当弦长大于 R 时有 $2\sqrt{R^2-x^2} > R$, 即 $x < \dfrac{\sqrt{3}}{2}R$. 因此所求概率为

$$p = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}R}{R} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

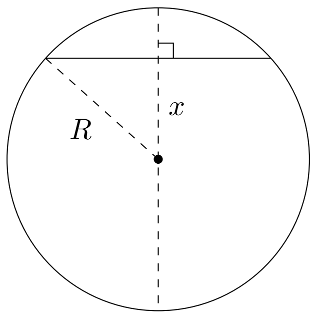

图 1.5

第二章　随机变量及其分布

2.1 随机变量及其分布函数

2.2 离散型随机变量及其概率分布

2.2.1　将 3 个球随机地放入 4 个杯子中, 求杯子中球的最大个数 X 的概率分布.

解: 将 3 个相同的球随机地放入 4 个不同的杯子中, 共有 4^3 种情况.

X 所有可能的取值为 1,2,3. 当 $X=1$ 时, 3 个球被放入不同的杯子中, 第一个球放入 4 个杯子中的任意一个, 第二个球放入剩下 3 个杯子中的任意一个, 第三个球放入剩下 2 个杯子中的任意一个, 共有 $4\times3\times2=24$ 种情况. 因此

$$P(X=1)=\frac{24}{4^3}=\frac{3}{8}$$

当 $X=3$ 时, 3 个球被放入同一个杯子中, 此时有 4 种情况, 因此

$$P(X=3)=\frac{4}{4^3}=\frac{1}{16}$$

由于 $P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1$, 所以

$$P(X=2)=1-P(X=1)-P(X=3)=1-\frac{3}{8}-\frac{1}{16}=\frac{9}{16}$$

综上, X 的概率分布为

X	1	2	3
P	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{16}$

2.3 连续型随机变量及其概率密度函数

2.4 常用的概率分布

2.4.1 (巴拿赫问题)　某人有两盒火柴, 每盒都有 n 根. 每次使用时, 任取一盒并从中抽出一根. 当此人第一次抽到空盒时, 另一盒中恰有 r $(0\leqslant r\leqslant n)$ 根火柴的概率是多少?

解: 设两盒火柴分别为 A, B, 由对称性知, 只需计算事件 $A=$"抽到 A 盒为空, 此时 B 盒中恰有 r 根火柴" 的概率, 所求概率是此概率的 2 倍.

事件 A 的发生可以分成两个阶段: 前 $2n-r$ 次中 A 盒抽到 n 次、B 盒抽到 $n-r$ 次, 第 $2n-r+1$ 次抽到 A 盒. 由于每次抽到 A 盒或 B 盒的概率都是 $\frac{1}{2}$, 所以

$$P(A)=\mathrm{C}_{2n-r}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-r}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\mathrm{C}_{2n-r}^{n}}{2^{2n-r+1}}$$

进而可得所求概率为

$$p=2P(A)=\frac{\mathrm{C}_{2n-r}^{n}}{2^{2n-r}}$$

备注

巴拿赫问题的本质是: 当第 $n+1$ 次抽到某盒火柴时, 求总的抽取次数为 $2n-r+1$ 的概率. 设随机变量 X 为第 $n+1$ 次抽到 A 盒时的总抽取次数, 则 X 服从帕斯卡分布 $Nb(n+1,\frac{1}{2})$, 因此有

$$P(A)=P(X=2n-r+1)=\mathrm{C}_{2n-r+1-1}^{n+1-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-r+1-(n+1)}=\frac{\mathrm{C}_{2n-r}^{n}}{2^{2n-r+1}}$$

通过巴拿赫问题可以得到下列等式:

$$\sum_{r=0}^{n}\frac{\mathrm{C}_{2n-r}^{n}}{2^{2n-r}}=1$$

第三章　二维随机变量及其分布

第四章　随机变量的数字特征

4.1　数学期望

4.2　方差

4.2.1　设 $g(x)$ 为随机变量 X 取值的集合上的非负不减函数, 且 $E(g(X))$ 存在, 证明: 对任意的 $\varepsilon > 0$, 有

$$P(X > \varepsilon) \leqslant \frac{E(g(X))}{g(\varepsilon)}$$

证明： 因为 $g(x)$ 是非负不减函数, 所以当 $x > \varepsilon$ 时有 $g(x) > g(\varepsilon)$, 进而有 $\dfrac{g(x)}{g(\varepsilon)} > 1$.

如果 X 是离散型随机变量, 设 X 的概率分布为 $P(X = x_k) = p_k, k = 1, 2, \cdots$, 则

$$P(X > \varepsilon) = \sum_{x_k > \varepsilon} p_k \leqslant \sum_{x_k > \varepsilon} \frac{g(x_k)}{g(\varepsilon)} p_k \leqslant \frac{1}{g(\varepsilon)} \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k) p_k = \frac{E(g(X))}{g(\varepsilon)}$$

如果 X 是连续型随机变量, 设 X 的概率密度函数为 $f(x)$, 则

$$P(X > \varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{g(x)}{g(\varepsilon)} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{g(\varepsilon)} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{E(g(X))}{g(\varepsilon)}$$

□