概率论与数理统计习题集

赵子轩

2024 年 9 月 18 日

目录

第一章　随机事件及其概率

1.1　随机事件

1.1.1　写出下列随机试验的样本空间：

(1) 抛一枚硬币，观察正面和反面出现的情况；

(2) 抛三枚硬币，观察正面和反面出现的情况；

(3) 连续抛一枚硬币，直至出现正面为止;

(4) 抛一枚骰子，观察出现的点数；

(5) 抛两枚骰子，观察出现的点数；

(6) 抛两枚骰子，记录出现的点数之和；

(7) 在一个箱子中装有 10 个同型号的某种零件，其中有 3 个次品和 7 个合格品，从该箱子中任取 3 个零件，观察其中次品的个数；

(8) 记录某机场在一天内收到咨询电话的次数；

(9) 测试电视机的寿命；

(10) 口袋中有黑、白、红球各一个，从中任取两个球；先从中取出一个，放回后再取出一个；

(11) 口袋中有黑、白、红球各一个，从中任取两个球；先从中取出一个，不放回后再取出一个.

解：(1) $\Omega=\{0,1\}$，其中 0 表示反面，1 表示正面.

(2) $\Omega=\{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1),(1,0,0),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$

(3) $\Omega=\{(1),(0,1),(0,0,1),(0,0,0,1),\cdots\}$

(4) $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$

(5) $\Omega=\{(x,y)\mid x,y=1,2,3,4,5,6\}$

(6) $\Omega=\{2,3,4,\cdots,12\}$

(7) $\Omega=\{0,1,2,3\}$

(8) $\Omega=\{0,1,2,3,\cdots\}$

(9) $\Omega=[0,+\infty)$

(10) $\Omega=\{$黑黑, 黑白, 黑红, 白黑, 白白, 白红, 红黑, 红白, 红红$\}$

(11) $\Omega=\{$黑白, 黑红, 白黑, 白红, 红黑, 红白$\}$

1.1.2　设 A,B,C 为三事件，试表示下列事件：

(1) A 发生，B,C 不发生；

(2) A,B,C 都发生；

(3) A,B,C 都不发生；

(4) A,B,C 中只有一个发生；

(5) A, B, C 中至少有一个发生；

(6) A, B, C 中至多有一个发生；

(7) A, B, C 中至少有一个不发生；

(8) A, B, C 中至多有两个发生；

(9) A, B, C 中至少有两个发生；

(10) A, B, C 中恰好有两个发生.

解：(1) $A\overline{B}\,\overline{C}$

(2) ABC

(3) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$

(4) $A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}C$

(5) $\Omega - \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} = \overline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}} = A \cup B \cup C$

(6) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} \cup A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}C$

(7) $\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$

(8) $\Omega - ABC = \overline{ABC} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$

(9) $AB \cup AC \cup BC$

(10) $AB\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup \overline{A}BC$

1.1.3 判断下列命题是否成立：

(1) $A - (B - C) = (A - B) \cup C$；

(2) 若 $AB = \varnothing$ 且 $C \subseteq A$，则 $BC = \varnothing$；

(3) $(A \cup B) - B = A$；

(4) $(A - B) \cup B = A$.

解：(1)

$$\begin{aligned} A - (B - C) &= A - B\overline{C} \\ &= A\overline{B\overline{C}} \\ &= A(\overline{B} \cup C) \\ &= (A\overline{B}) \cup (AC) \\ &= (A - B) \cup (AC) \\ &\neq (A - B) \cup C \end{aligned}$$

命题 1 不成立.

(2) 成立.

(3)

$$(A \cup B) - B = (A \cup B)\overline{B} = (A\overline{B}) \cup (B\overline{B}) = A\overline{B} \neq A$$

命题 3 不成立.

(4)

$$(A - B) \cup B = (A\overline{B}) \cup B = (A \cup B)(\overline{B} \cup B) = A \cup B \neq A$$

命题 4 不成立.

1.2　随机事件的概率

1.2.1　设 A, B 是同一个试验中的两个事件，$P(A)=0.6$，$P(A-B)=0.2$，$P(A\cup B)=0.9$. 求 $P(\overline{AB}), P(B), P((\overline{A}\cup B)(A\cup\overline{B}))$.

解：由于 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$，所以

$$P(AB)=P(A)-P(A-B)=0.6-0.2=0.4$$

进而可得

$$P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-0.4=0.6$$

由于 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，所以

$$P(B)=P(A\cup B)-P(A)+P(AB)=0.9-0.6+0.4=0.7$$

由随机事件的运算性质可得

$$\begin{aligned}(\overline{A}\cup B)(A\cup\overline{B})&=[(\overline{A}\cup B)A]\cup[(\overline{A}\cup B)\overline{B}]\\&=(A\overline{A})\cup(AB)\cup(\overline{A}\,\overline{B})\cup(B\overline{B})\\&=(AB)\cup(\overline{A\cup B})\end{aligned}$$

又因为 $(AB)(\overline{A\cup B})=(AB)(\overline{A}\,\overline{B})=\varnothing$，所以

$$\begin{aligned}P((\overline{A}\cup B)(A\cup\overline{B}))&=P((AB)\cup(\overline{A\cup B}))\\&=P(AB)+P(\overline{A\cup B})\\&=P(AB)+1-P(A\cup B)\\&=0.4+1-0.9\\&=0.5\end{aligned}$$

1.2.2　设 A 和 B 是同一试验 E 的两个随机事件，证明：$1-P(\overline{A})-P(\overline{B})\leqslant P(AB)\leqslant P(A\cup B)$.

证明：因为 $AB\subseteq A\subseteq(A\cup B)$，所以

$$P(AB)\leqslant P(A\cup B)$$

因为

$$1-P(AB)=P(\overline{AB})=P(\overline{A}\cup\overline{B})\leqslant P(\overline{A})+P(\overline{B})$$

所以

$$1-P(\overline{A})-P(\overline{B})\leqslant P(AB)$$

□

1.2.3　抛两枚硬币，求出现一个正面一个反面的概率.

解：此试验的样本空间为 $\Omega = \{(正, 正), (正, 反), (反, 正), (反, 反)\}$，样本点的个数为 4，且每个样本点发生的可能性是相等的. 事件“出现一个正面一个反面”含有的样本点个数为 2，根据古典概型可得该事件发生的概率为 $\dfrac{1}{2}$.

备注

如果将样本空间写成 $\Omega' = \{(正, 正), (反, 反), (一正一反)\}$，这 3 个样本点不是等可能的，不满足古典概型的条件.