

概率论与数理统计习题集

赵子轩

2024 年 12 月 12 日

目录

第一章 随机事件及其概率	1
1.1 随机事件	1
1.2 随机事件的概率	3
第二章 随机变量及其分布	16
2.1 随机变量及其分布函数	16
2.2 离散型随机变量及其概率分布	16
2.3 连续型随机变量及其概率密度函数	16
2.4 常用的概率分布	16
第三章 二维随机变量及其分布	18
第四章 随机变量的数字特征	19
4.1 数学期望	19
4.2 方差	19

第一章 随机事件及其概率

1.1 随机事件

1.1.1 写出下列随机试验的样本空间:

- (1) 抛一枚硬币, 观察正面和反面出现的情况;
- (2) 抛三枚硬币, 观察正面和反面出现的情况;
- (3) 连续抛一枚硬币, 直至出现正面为止;
- (4) 抛一枚骰子, 观察出现的点数;
- (5) 抛两枚骰子, 观察出现的点数;
- (6) 抛两枚骰子, 记录出现的点数之和;
- (7) 在一个箱子中装有 10 个同型号的某种零件, 其中有 3 个次品和 7 个合格品, 从该箱子中任取 3 个零件, 观察其中次品的个数;
- (8) 记录某机场在一天内收到咨询电话的次数;
- (9) 测试电视机的寿命;
- (10) 口袋中有黑、白、红球各一个, 从中任取两个球; 先从中取出一个, 放回后再取出一个;
- (11) 口袋中有黑、白、红球各一个, 从中任取两个球; 先从中取出一个, 不放回后再取出一个.

解: (1) $\Omega = \{0, 1\}$, 其中 0 表示反面, 1 表示正面.

(2) $\Omega = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$

(3) $\Omega = \{(1), (0, 1), (0, 0, 1), (0, 0, 0, 1), \dots\}$

(4) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(5) $\Omega = \{(x, y) \mid x, y = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(6) $\Omega = \{2, 3, 4, \dots, 12\}$

(7) $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$

(8) $\Omega = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

(9) $\Omega = [0, +\infty)$

(10) $\Omega = \{\text{黑黑}, \text{黑白}, \text{黑红}, \text{白白}, \text{白红}, \text{红黑}, \text{红白}, \text{红红}\}$

(11) $\Omega = \{\text{黑白}, \text{黑红}, \text{白黑}, \text{白红}, \text{红黑}, \text{红白}\}$

1.1.2 设 A, B, C 为三事件, 试表示下列事件:

- (1) A 发生, B, C 不发生;
- (2) A, B, C 都发生;
- (3) A, B, C 都不发生;
- (4) A, B, C 中只有一个发生;

- (5) A, B, C 中至少有一个发生;
 (6) A, B, C 中至多有一个发生;
 (7) A, B, C 中至少有一个不发生;
 (8) A, B, C 中至多有两个发生;
 (9) A, B, C 中至少有两个发生;
 (10) A, B, C 中恰好有两个发生.

解: (1) $A\overline{B}\overline{C}$
 (2) ABC
 (3) $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$
 (4) $A\overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\overline{B}C$
 (5) $\Omega - \overline{A}\overline{B}\overline{C} = \overline{\overline{A}\overline{B}\overline{C}} = A \cup B \cup C$
 (6) $\overline{A}\overline{B}\overline{C} \cup A\overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\overline{B}C$
 (7) $\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$
 (8) $\Omega - ABC = \overline{ABC} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$
 (9) $AB \cup AC \cup BC$
 (10) $AB\overline{C} \cup \overline{A}BC \cup A\overline{B}C$

1.1.3 判断下列命题是否成立:

- (1) $A - (B - C) = (A - B) \cup C$;
 (2) 若 $AB = \emptyset$ 且 $C \subseteq A$, 则 $BC = \emptyset$;
 (3) $(A \cup B) - B = A$;
 (4) $(A - B) \cup B = A$.

解: (1)

$$\begin{aligned}
 A - (B - C) &= A - B\overline{C} \\
 &= \overline{A\overline{B}\overline{C}} \\
 &= A(\overline{B} \cup C) \\
 &= (A\overline{B}) \cup (AC) \\
 &= (A - B) \cup (AC) \\
 &\neq (A - B) \cup C
 \end{aligned}$$

命题 1 不成立.

(2) 成立.

(3)

$$(A \cup B) - B = (A \cup B)\overline{B} = (A\overline{B}) \cup (B\overline{B}) = A\overline{B} \neq A$$

命题 3 不成立.

(4)

$$(A - B) \cup B = (A\overline{B}) \cup B = (A \cup B)(\overline{B} \cup B) = A \cup B \neq A$$

命题 4 不成立.

1.1.4 证明下列事件的运算公式:

(1) $A = AB \cup A\bar{B}$;

(2) $A \cup B = A \cup \bar{A}B$.

证明: (1) $AB \cup A\bar{B} = A(B \cup \bar{B}) = A\Omega = A$

(2) 由 (1) 可得 $B = AB \cup \bar{A}B$, 因此

$$\begin{aligned} A \cup B &= A \cup (AB \cup \bar{A}B) \\ &= (A \cup AB) \cup \bar{A}B \\ &= A(\Omega \cup B) \cup \bar{A}B \\ &= A \cup \bar{A}B \end{aligned}$$

□

1.2 随机事件的概率

1.2.1 设 A, B 是同一个试验中的两个事件, $P(A) = 0.6, P(A - B) = 0.2, P(A \cup B) = 0.9$. 求 $P(\bar{A}\bar{B}), P(B), P((\bar{A} \cup B)(A \cup \bar{B}))$.

解: 由于 $P(A - B) = P(A) - P(AB)$, 所以

$$P(AB) = P(A) - P(A - B) = 0.6 - 0.2 = 0.4$$

进而可得

$$P(\bar{A}\bar{B}) = 1 - P(AB) = 1 - 0.4 = 0.6$$

由于 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$, 所以

$$P(B) = P(A \cup B) - P(A) + P(AB) = 0.9 - 0.6 + 0.4 = 0.7$$

由随机事件的运算性质可得

$$\begin{aligned} (\bar{A} \cup B)(A \cup \bar{B}) &= [(\bar{A} \cup B)A] \cup [(\bar{A} \cup B)\bar{B}] \\ &= (A\bar{A}) \cup (AB) \cup (\bar{A}\bar{B}) \cup (B\bar{B}) \\ &= (AB) \cup (\bar{A} \cup \bar{B}) \end{aligned}$$

又因为 $(AB)(\bar{A} \cup \bar{B}) = (AB)(\bar{A}\bar{B}) = \emptyset$, 所以

$$\begin{aligned} P((\bar{A} \cup B)(A \cup \bar{B})) &= P((AB) \cup (\bar{A} \cup \bar{B})) \\ &= P(AB) + P(\bar{A} \cup \bar{B}) \\ &= P(AB) + 1 - P(A \cup B) \\ &= 0.4 + 1 - 0.9 \\ &= 0.5 \end{aligned}$$

1.2.2 设 A 和 B 是同一试验 E 的两个随机事件, 证明: $1 - P(\bar{A}) - P(\bar{B}) \leq P(AB) \leq P(A \cup B)$.

证明: 因为 $AB \subseteq A \subseteq (A \cup B)$, 所以

$$P(AB) \leq P(A \cup B)$$

因为

$$1 - P(AB) = P(\overline{AB}) = P(\overline{A \cup B}) \leq P(\bar{A}) + P(\bar{B})$$

所以

$$1 - P(\bar{A}) - P(\bar{B}) \leq P(AB)$$

□

1.2.3 已知 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}$, $P(AB) = 0$, $P(AC) = P(BC) = \frac{1}{16}$. 则 A, B, C 中至少发生一个的概率是多少? A, B, C 都不发生的概率是多少?

解: 因为 $P(AB) = 0$, 且 $ABC \subseteq AB$, 由概率的单调性可知 $P(ABC) = 0$. 由概率的加法公式可得 A, B, C 中至少发生一个的概率为

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 0 - \frac{1}{16} - \frac{1}{16} + 0 \\ &= \frac{5}{8} \end{aligned}$$

A, B, C 都不发生的概率为

$$\begin{aligned} P(\overline{A \cup B \cup C}) &= P(\overline{A \cup B \cup C}) \\ &= 1 - P(A \cup B \cup C) \\ &= 1 - \frac{5}{8} \\ &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

1.2.4 抛两枚硬币, 求出现一个正面一个反面的概率.

解: 此试验的样本空间为 $\Omega = \{(\text{正}, \text{正}), (\text{正}, \text{反}), (\text{反}, \text{正}), (\text{反}, \text{反})\}$, 样本点的个数为 4, 且每个样本点发生的可能性是相等的. 事件“出现一个正面一个反面”含有的样本点个数为 2, 根据古典概型可得该事件发生的概率为 $\frac{1}{2}$.

备注

如果将样本空间写成 $\Omega' = \{(\text{正}, \text{正}), (\text{反}, \text{反}), (\text{一正一反})\}$, 这 3 个样本点不是等可能的, 不满足古典概型的条件.

1.2.5 任取两个正整数, 求它们的和为偶数的概率.

解: 记取出偶数为“0”, 取出奇数为“1”, 则随机试验“任取两个正整数”的样本空间为

$$\Omega = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$$

令事件 A 表示“取出的两个正整数之和为偶数”, 则 $A = \{(0, 0), (1, 1)\}$, 从而所求概率为

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

1.2.6 从 n 个数字 $1, 2, \dots, n$ 中任取 3 个, 求大小在中间的数字恰好为 k ($1 < k < n$) 的概率.

解: 从 n 个数字中任取 3 个, 共有 C_n^3 种取法. 如果大小在中间的数字恰好为 k , 必须有一个小于 k 、一个等于 k 、一个大于 k , 这样的取法有 $C_{k-1}^1 C_1^1 C_{n-k}^1$ 种. 因此所求概率为

$$p = \frac{C_{k-1}^1 C_1^1 C_{n-k}^1}{C_n^3} = \frac{6(k-1)(n-k)}{n(n-1)(n-2)}$$

1.2.7 将 15 名新生 (其中有 3 名优秀生) 随机地分配到 3 个班级去, 其中一班 4 名, 二班 5 名, 三班 6 名. 求:

- (1) 每个班级各分配到一名优秀生的概率;
- (2) 3 名优秀生分配到一个指定班级的概率;
- (3) 3 名优秀生分配到同一个班级的概率.

解: 将 15 名新生随机地分配给一班 4 名、二班 5 名、三班 6 名, 共有 $C_{15}^4 C_{11}^5 C_6^6$ 种分法.

(1) 将 3 名优秀生分配到三个班级的分法共有 A_3^3 种, 将其余 12 名新生分配给一班 3 名、二班 4 名、三班 5 名的分法共有 $C_{12}^3 C_9^4 C_5^5$ 种, 则每个班级各分配到一名优秀生的分法共有 $A_3^3 C_{12}^3 C_9^4 C_5^5$ 种. 因此所求概率为

$$p = \frac{A_3^3 C_{12}^3 C_9^4 C_5^5}{C_{15}^4 C_{11}^5 C_6^6} = \frac{24}{91}$$

(2) 如果将 3 名优秀生分配给一班, 则其余 12 名新生将分配给一班 1 名、二班 5 名、三班 6 名, 此时分法共有 $C_{12}^1 C_{11}^5 C_6^6$ 种, 所求概率为

$$p_1 = \frac{C_{12}^1 C_{11}^5 C_6^6}{C_{15}^4 C_{11}^5 C_6^6} = \frac{4}{455}$$

如果将 3 名优秀生分配给二班, 则其余 12 名新生将分配给一班 4 名、二班 2 名、三班 6 名, 此时分法共有 $C_{12}^4 C_8^2 C_6^6$ 种, 所求概率为

$$p_2 = \frac{C_{12}^4 C_8^2 C_6^6}{C_{15}^4 C_{11}^5 C_6^6} = \frac{2}{91}$$

如果将 3 名优秀生分配给三班, 则其余 12 名新生将分配给一班 4 名、二班 5 名、三班 3 名, 此时分法共有 $C_{12}^4 C_8^5 C_3^3$ 种, 所求概率为

$$p_3 = \frac{C_{12}^4 C_8^5 C_3^3}{C_{15}^4 C_{11}^5 C_6^6} = \frac{4}{91}$$

(3) 用 A_i 表示“3 名优秀生全部分配到 i 班” ($i = 1, 2, 3$), 则事件“3 名优秀生分配给同一个班级”可以表示为 $A_1 \cup A_2 \cup A_3$. 又因为 $A_i A_j = \emptyset$ ($i \neq j, i, j = 1, 2, 3$), 所以所求概率为

$$p = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{4}{455} + \frac{2}{91} + \frac{4}{91} = \frac{34}{455}$$

1.2.8 抛两颗骰子, 求下列事件的概率:

- (1) 点数之和为 6;
- (2) 点数之和不超过 6;
- (3) 至少有一个 6 点.

解: 抛两颗骰子所得点数的样本空间为 $\Omega = \{(x, y) \mid x, y = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 样本点数量为 36.

(1) 令事件 A 为“点数之和为 6”, 则

$$A = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$$

所以所求概率为

$$P(A) = \frac{5}{36}$$

(2) 令事件 B 为“点数之和不超过 6”, 则

$$B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 3), \\ (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (5, 1)\}$$

所以所求概率为

$$P(B) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

(3) 令事件 C 为“至少有一个 6 点”, 则

$$C = \{(1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6), (6, 6), \\ (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5)\}$$

所以所求概率为

$$P(C) = \frac{11}{36}$$

1.2.9 考虑一元二次方程 $x^2 + Bx + C = 0$, 其中 B, C 分别是将一颗骰子连续抛两次先后出现的点数, 求该方程有实根的概率 p 和有重根的概率 q .

解: 将一颗骰子连续抛两次所得点数的样本空间为 $\Omega = \{(B, C) \mid B, C = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 样本点数量为 36.

事件“该方程有实根”发生的条件为 $B^2 - 4C \geq 0$, 而

$$\{B^2 - 4C \geq 0\} = \{(2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (6, 2), \\ (4, 3), (5, 3), (6, 3), (4, 4), (5, 4), (6, 4), (5, 5), (6, 5), (5, 6), (6, 6)\}$$

共有 19 个样本点, 因此

$$p = P(B^2 - 4C \geq 0) = \frac{19}{36}$$

事件“该方程有重根”发生的条件为 $B^2 - 4C = 0$, 而

$$\{B^2 - 4C = 0\} = \{(2, 1), (4, 4)\}$$

共有 2 个样本点, 因此

$$q = P(B^2 - 4C = 0) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

1.2.10 从 N 个数字 $1, 2, \dots, N$ 中可重复地随机抽取 n 次, 求抽到的最大数字正好为 k ($1 \leq k \leq N$) 的概率.

解: 从 N 个数字中可重复地抽取 n 次, 共有 N^n 种取法.

记事件 B_i 为“抽到的最大数字小于等于 i ” ($i = 1, 2, \dots, N$), 则 B_i 发生只需每次从 $1, 2, \dots, i$ 中取数即可, 共有 i^n 种取法, 由古典概型可知

$$P(B_i) = \frac{i^n}{N^n}$$

记事件 A_k 为“抽到的最大数字正好为 k ”, 则 $A_k = B_k - B_{k-1}$, 且 $B_{k-1} \subseteq B_k$, 因此

$$\begin{aligned} P(A_k) &= P(B_k - B_{k-1}) \\ &= P(B_k) - P(B_{k-1}) \\ &= \frac{k^n}{N^n} - \frac{(k-1)^n}{N^n} \\ &= \frac{k^n - (k-1)^n}{N^n} \end{aligned}$$

1.2.11 从一副 52 张的扑克牌中任取 4 张, 求下列事件的概率:

- (1) 全是黑桃;
- (2) 同花;
- (3) 没有两张同一花色;
- (4) 同色.

解: 从 52 张扑克牌中任取 4 张的取法有 C_{52}^4 种.

(1) 一副扑克牌中有 13 张黑桃, 从中取出 4 张的取法有 C_{13}^4 种, 因此所求概率为

$$p_1 = \frac{C_{13}^4}{C_{52}^4} = \frac{11}{4165}$$

(2) 取出的 4 张牌全是某一特定花色的取法有 C_{13}^4 种, 而一副扑克牌有 4 种花色, 则 4 张牌同花的取法有 $4C_{13}^4$ 种, 因此所求概率为

$$p_2 = \frac{4C_{13}^4}{C_{52}^4} = \frac{44}{4165}$$

(3) “没有两张同一花色” 需要从 4 种花色中各取一张, 取法有 13^4 种, 因此所求概率为

$$p_3 = \frac{13^4}{C_{52}^4} = \frac{2197}{20825}$$

(4) 一副扑克牌中有红色和黑色牌各 26 张, 取出 4 张同色牌的取法有 $2C_{26}^4$ 种, 因此所求概率为

$$p_4 = \frac{2C_{26}^4}{C_{52}^4} = \frac{92}{833}$$

1.2.12 把 10 本书任意地放在书架上, 求其中指定的 4 本书放在一起的概率.

解: 把 10 本书任意地放在书架上, 共有 A_{10}^{10} 种放法. 当其中指定的 4 本书放在一起时, 将这 4 本书看作一个整体, 与其他 6 本书一起放在书架上, 有 A_7^7 种放法; 放在一起的 4 本书又有不同的顺序, 有 A_4^4 种放法. 因此“其中指定的 4 本书放在一起”共有 $A_7^7 A_4^4$ 种放法, 所求概率为

$$p = \frac{A_7^7 A_4^4}{A_{10}^{10}} = \frac{7! \times 4!}{10!} = \frac{1}{30}$$

1.2.13 n 个人随机地围一圆桌而坐, 求甲、乙两人相邻而坐的概率.

解:

解法一: n 个人围坐, 共有 $\frac{A_n^n}{n} = (n-1)!$ 种坐法. 当甲、乙两人相邻而坐时, 将甲、乙两人看作整体, 有 $\frac{A_{n-1}^{n-1}}{n-1} A_2^2 = 2(n-2)!$ 种坐法. 因此所求概率为

$$p = \frac{2(n-2)!}{(n-1)!} = \frac{2}{n-1}$$

解法二: 设甲先坐好, 再考虑乙的坐法. 此时乙总共有 $n-1$ 个位置可坐, 且这 $n-1$ 个位置都是等可能的, 而乙与甲相邻有 2 个位置, 因此所求概率为

$$p = \frac{2}{n-1}$$

1.2.14 同时掷 5 枚骰子, 求下列事件的概率:

- (1) 每枚都不一样;
- (2) 其中 2 枚相同 (成对), 另外 3 枚各不相同且与成对的 2 枚也不同;
- (3) 出现两组成对的骰子;
- (4) 其中 3 枚相同, 另外 2 枚不同;
- (5) 其中 4 枚相同;
- (6) 5 枚全部相同.

解: 同时掷 5 枚骰子共有 6^5 种不同情况.

$$(1) p_1 = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{6^5} = \frac{5}{54}$$

$$(2) p_2 = \frac{C_5^2 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{6^5} = \frac{25}{54}$$

(3) 将 5 枚骰子分成 3 组, 其中 2 组包含 2 枚骰子, 另外一组只有 1 个骰子, 这样的分法有 $\frac{C_5^2 C_3^2}{2} = 15$ 种. 这三组骰子出现的点数不同, 有 $6 \times 5 \times 4 = 120$ 种情况, 因此所求概率为

$$p_3 = \frac{15 \times 120}{6^5} = \frac{25}{108}$$

$$(4) p_4 = \frac{C_5^3 \times 6 \times 5 \times 4}{6^5} = \frac{25}{162}$$

$$(5) p_5 = \frac{C_5^4 \times 6 \times 5}{6^5} = \frac{25}{1296}$$

$$(6) p_6 = \frac{6}{6^5} = \frac{1}{1296}$$

1.2.15 (接草成环问题) 把 $2n$ 根草紧握在手中, 仅露出它们的头和尾, 然后随机地把 $2n$ 个头两两相接, $2n$ 个尾也两两相接. 求放开手后 $2n$ 根草恰巧连成一个环的概率.

解: 先将头两两相接, 此时所有接法都是等价的, 如图 1.1 所示, 所以只需考虑尾的接法.

$2n$ 个尾两两相接, 先任选 1 个尾, 再从剩下的 $2n - 1$ 个尾中任选 1 个尾相接; 然后从剩下的 $2n - 2$ 个尾中任选 1 个, 与 $2n - 3$ 个尾中的任意 1 个相接; 以此类推, 将 $2n$ 个尾两两相接共有 $2n(2n - 1)(2n - 2)(2n - 3) \times \cdots \times 2 \times 1 = (2n)!$ 种方法.

如果要成环, 在从 $2n$ 个尾中任选 1 个之后, 剩下的 $2n - 1$ 个尾中有一个不能选择, 所以只能从其余 $2n - 2$ 个尾中任选 1 个相接; 然后从剩下的 $2n - 2$ 个尾中任选 1 个, 与 $2n - 4$ 个尾中的任意 1 个相接; 以此类推, 成环的方法共有 $2n(2n - 2)(2n - 2)(2n - 4) \times \cdots \times 2 \times 1$ 种. 因此所求概率为

$$\begin{aligned} p &= \frac{2n(2n - 2)(2n - 2)(2n - 4) \times \cdots \times 2 \times 1}{(2n)!} \\ &= \frac{[2n(2n - 2)(2n - 4) \times \cdots \times 2][(2n - 2)(2n - 4) \times \cdots \times 1]}{(2n)!} \\ &= \frac{2^n n! \times 2^{n-1} (n - 1)!}{(2n)!} \\ &= \frac{2^{2n-1} n! (n - 1)!}{(2n)!} \end{aligned}$$

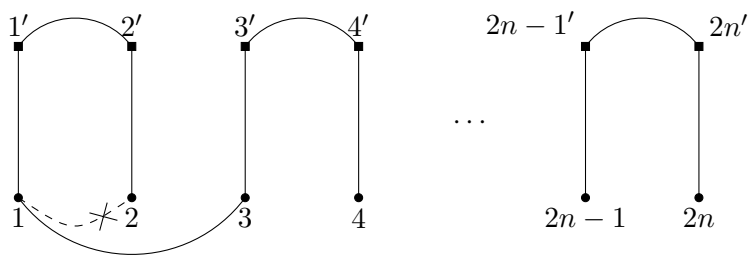


图 1.1 接草成环问题

1.2.16 把 n 个“0”与 m ($m \leq n + 1$) 个“1”随机地排列, 求没有两个“1”连在一起的概率.

解: 总共 $m + n$ 个位置, 选择其中 n 个放“0”, 其余 m 个位置放“1”, 总的排列数为 C_{m+n}^n . 如果“没有两个‘1’连在一起”, 需要将“1”放在 n 个“0”之间的空隙中, 共有 $n + 1$ 个位置, 此时排列数为 C_{n+1}^m . 因此所求概率为

$$p = \frac{C_{n+1}^m}{C_{m+n}^n} = \frac{n!(n + 1)!}{(n - m + 1)!(m + n)!}$$

1.2.17 (插板法) 将 n 个完全相同的球随机地放入 N 个盒子中, 求:

- (1) 某个指定的盒子中恰好有 k ($0 \leq k \leq n$) 个球的概率;
- (2) 恰好有 m ($N - n \leq m \leq N - 1$) 个空盒的概率;
- (3) 某指定的 m 个盒子中恰好有 j 个球的概率.

解: 将 n 个球排成一行, 向其中插入 $N-1$ 块板, 分成 N 个区域, 每个区域可以看成是一个盒子. 因此“将 n 个完全相同的球随机地放入 N 个盒子中”就相当于将 n 个球和 $N-1$ 块板随机地排成一行, 由 1.2.16 可知, 共有 C_{n+N-1}^n 种情况.

(1) 某个指定的盒子中有 k 个球, 其余 $n-k$ 个球随机放入 $N-1$ 个盒子中, 共有 $C_{n-k+N-2}^{n-k}$ 种情况, 因此所求概率为

$$p_1 = \frac{C_{n-k+N-2}^{n-k}}{C_{n+N-1}^n} = \frac{(N-1)n!(n-k+N-2)!}{(n-k)!(n+N-1)!}$$

(2) 先从 N 个盒子中选出 m 个作为空盒, 有 C_N^m 种取法. 然后将 n 个球放入剩下的 $N-m$ 个盒子, 并且不能有空盒, 可以先向每个盒子放 1 个球, 再将其余 $n-N+m$ 个球随机放入 $N-m$ 个盒子中, 此时有 $C_{(n-N+m)+(N-m-1)}^{n-N+m} = C_{n-1}^{n-N+m}$ 种情况. 综上, 所求概率为

$$p_2 = \frac{C_N^m C_{n-1}^{n-N+m}}{C_{n+N-1}^n}$$

(3) 将 j 个球放入指定的 m 个盒子中, 有 C_{m+j-1}^j 种放法; 另外 $n-j$ 个球放入其余 $N-m$ 个盒子, 有 $C_{n-j+N-m-1}^{n-j}$ 种放法. 因此所求概率为

$$p_3 = \frac{C_{m+j-1}^j C_{n-j+N-m-1}^{n-j}}{C_{n+N-1}^n}$$

1.2.18 (配对问题) 一个晚会有 n 个人参加, 每个人带了一件礼物, 且各人带的礼物都不相同. 每人从放在一起的 n 件礼物中随机抽取一件, 求至少有一人抽到自己礼物的概率.

解: 设事件 $A_i =$ “第 i 个人抽到自己的礼物”, $i = 1, 2, \dots, n$, 则所求概率为 $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$. 因为

$$P(A_1) = P(A_2) = \dots = P(A_n) = \frac{1}{n}$$

$$P(A_1 A_2) = P(A_1 A_3) = \dots = P(A_{n-1} A_n) = \frac{1}{n(n-1)}$$

$$P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1 A_2 A_4) = \dots = P(A_{n-2} A_{n-1} A_n) = \frac{1}{n(n-1)(n-2)}$$

...

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = \frac{1}{n!}$$

所以由概率的加法公式得

$$\begin{aligned} & P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \\ &= n \cdot \frac{1}{n} - C_n^2 \frac{1}{n(n-1)} + C_n^3 \frac{1}{n(n-1)(n-2)} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} \\ &= 1 - \frac{n!}{2!(n-2)!} \frac{1}{n(n-1)} + \frac{n!}{3!(n-3)!} \frac{1}{n(n-1)(n-2)} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} \\ &= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

备注

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 此概率的极限为 $1 - e^{-1} \approx 0.6321$. 这表明, 即使人数很多, 事件“至少有一个入抽到自己礼物”也不是必然事件.

1.2.19 一个质点从平面上某点开始, 等可能地向上、下、左、右四个方向随机游动, 每次游动的距离为 1. 求经过 $2n$ 次游动后, 质点回到出发点的概率.

解: 因为每次游动都等可能地向 4 个方向随机游动, 所以经过 $2n$ 次游动后的终点有 4^{2n} 种可能.

如果质点回到出发点, 则上下游动次数相等、左右游动次数相等. 设上、下游动各 k 次, 左右游动各 $n - k$ 次, 当 k 固定时有 $C_{2n}^k C_{2n-k}^k C_{2n-2k}^{n-k}$ 种可能性, 因此事件“质点回到出发点”的样本点个数为

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n C_{2n}^k C_{2n-k}^k C_{2n-2k}^{n-k} &= \sum_{k=0}^n \frac{(2n)!}{k!(2n-k)!} \frac{(2n-k)!}{k!(2n-2k)!} \frac{(2n-2k)!}{(n-k)!(n-k)!} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(2n)!}{(k!)^2 [(n-k)!]^2} \\ &= \frac{(2n)!}{n!n!} \sum_{k=0}^n \left[\frac{n!}{k!(n-k)!} \right]^2 \\ &= C_{2n}^n \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 \end{aligned}$$

为了计算 $\sum_{k=0}^n (C_n^k)^2$, 考虑等式

$$(1+x)^n (1+x)^n = (1+x)^{2n}$$

将两端用二项式定理展开, 得

$$\left[\sum_{i=0}^n C_n^i x^i \right] \left[\sum_{j=0}^n C_n^j x^j \right] = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k x^k$$

比较两端 x^n 项的系数可得

$$\sum_{i=0}^n C_n^i C_n^{n-i} = C_{2n}^n$$

又因为 $C_n^i = C_n^{n-i}$, 所以有

$$\sum_{i=0}^n (C_n^i)^2 = C_{2n}^n$$

因此, 事件“质点回到出发点”的样本点个数为

$$C_{2n}^n \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 = (C_{2n}^n)^2$$

所求概率为

$$p = \frac{(C_{2n}^n)^2}{4^{2n}}$$

1.2.20 (会面问题) 甲乙两人约定在下午 6 时到 7 时之间在某处会面, 并约定先到者应等候另一个人 20 分钟, 过时即可离去. 求两人能会面的概率.

解: 设 x 和 y 分别表示甲、乙两人到达约会地点的时间, 则样本空间为

$$\Omega = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 60, 0 \leq y \leq 60\}$$

设事件 $A =$ “甲乙两人能够会面”, 则

$$A = \{(x, y) \mid |x - y| \leq 20\}$$

由图 1.2 可知, Ω 的面积为 60^2 , A 的面积为 $60^2 - 40^2$, 因此

$$P(A) = \frac{60^2 - 40^2}{60^2} = \frac{5}{9}$$

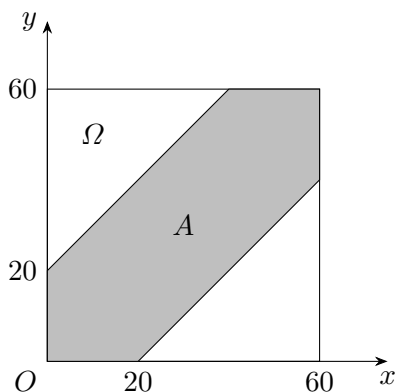


图 1.2

1.2.21 甲乙两艘轮船驶向一个不能同时停泊两艘轮船的码头, 它们在一昼夜内到达的时间是等可能的. 如果甲船的停泊时间是一小时, 乙船的停泊时间是两小时, 求它们中任何一艘都不需要等候码头空出的概率是多少?

解: 设甲、乙到达码头的的时间分别为 x, y , 则样本空间为

$$\Omega = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 24, 0 \leq y \leq 24\}$$

设事件 $A =$ “甲乙都不需要等候码头空出”, 该事件可以分为两种情况. 如果甲先到达, 则乙的到达时间应至少比甲晚一小时, 即 $y \geq x+1$; 如果乙先到达, 则甲至少比乙晚到两小时, 即 $x \geq y+2$. 综合两种情况, 事件 A 可以表示为

$$A = \{(x, y) \mid y \geq x+1 \text{ 或 } y \leq x-2\}$$

如图 1.3 所示, 所求概率为

$$P(A) = \frac{\frac{23^2}{2} + \frac{22^2}{2}}{24^2} = \frac{1013}{1152}$$

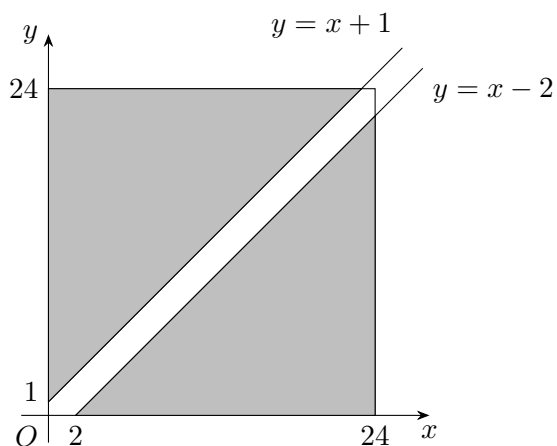


图 1.3

1.2.22 在长度为 a 的线段内任取两点将其分为三段, 求它们可以构成一个三角形的概率.

解: 设分成的三段长度分别为 x, y 和 $a - x - y$, 则有

$$\begin{cases} 0 < x < a \\ 0 < y < a \\ 0 < a - x - y < a \end{cases}$$

其中 $0 < a - x - y < a$ 等价于 $0 < x + y < a$, 则样本空间为

$$\Omega = \{(x, y) \mid 0 < x < a, 0 < y < a, 0 < x + y < a\}$$

设事件 $A =$ “线段分成的三段可以构成三角形”. 由于三角形中任意两边之和大于第三边, 则事件 A 发生的条件为

$$\begin{cases} 0 < x < y + (a - x - y) \\ 0 < y < x + (a - x - y) \\ 0 < a - x - y < x + y \end{cases}$$

整理得

$$A = \{(x, y) \mid 0 < x < \frac{a}{2}, 0 < y < \frac{a}{2}, \frac{a}{2} < x + y < a\}$$

如图 1.4 所示. 则所求概率为

$$P(A) = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{a}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}a^2} = \frac{1}{4}$$

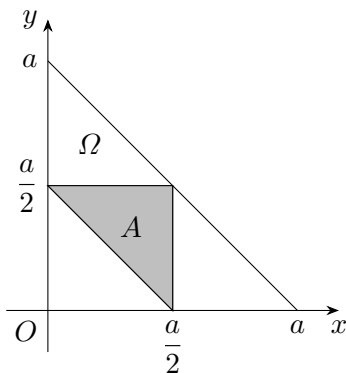


图 1.4

1.2.23 在平面上画有间隔为 d 的等距平行线, 向平面任意投掷一个边长为 a, b, c (均小于 d) 的三角形, 求三角形与平行线相交的概率.

解: 三角形与平行线相交有三种情况: 三角形的一个顶点在平行线上、一条边与平行线重合、两条边与平行线相交. 由几何概型可知, 前两种情况出现的概率为零, 所以只需考虑两条边与平行线相交的概率. 记 P_{ab}, P_{bc}, P_{ac} 分别为两条边 ab, bc, ac 与平行线相交的概率, 则所求概率为

$$p = P_{ab} + P_{bc} + P_{ac}$$

设 P_a, P_b, P_c 分别为边 a, b, c 与平行线相交的概率, 由蒲丰投针问题可得

$$P_a = \frac{2a}{\pi d}, P_b = \frac{2b}{\pi d}, P_c = \frac{2c}{\pi d}$$

a 与平行线相交又能分成两种情况: ab 与平行线相交、 ac 与平行线相交. 因此

$$P_a = P_{ab} + P_{ac}$$

同理可得

$$P_b = P_{ab} + P_{bc}$$

$$P_c = P_{ac} + P_{bc}$$

因此, 三角形与平行线相交的概率为

$$p = P_{ab} + P_{bc} + P_{ac} = \frac{1}{2}(P_a + P_b + P_c) = \frac{a + b + c}{\pi d}$$

备注

本题是蒲丰投针问题的推广. 该问题可以进一步推广到多边形及圆的情形.

在平面上画有间隔为 d 的等距平行线, 向平面任意投掷一个周长为 S_n 的凸多边形, 且该凸多边形的直径小于 d (凸多边形的直径是指多边形上任意两点之间的最大距离), 则该凸多边形与平行线相交的概率为 $\frac{S_n}{\pi d}$.

在平面上画有间隔为 d 的等距平行线, 向平面任意投掷一个半径为 r ($2r < d$) 的圆, 则该圆

与平行线相交的概率为 $\frac{2r}{d}$.

1.2.24 在半径为 R 的圆内画平行弦, 如果这些弦与垂直于弦的直径的交点在该直径上的位置是等可能的, 求任意画弦的长度大于 R 的概率.

解: 设弦的中点与圆心的距离为 x , 则样本空间为

$$\Omega = \{x \mid 0 \leq x \leq R\}$$

弦长为 $2\sqrt{R^2 - x^2}$, 当弦长大于 R 时有 $2\sqrt{R^2 - x^2} > R$, 即 $x < \frac{\sqrt{3}}{2}R$. 因此所求概率为

$$p = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}R}{R} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

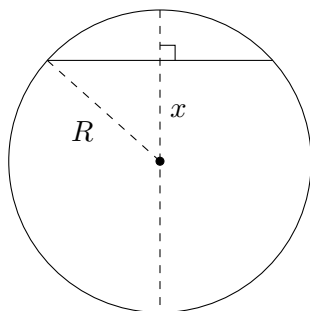


图 1.5

第二章 随机变量及其分布

2.1 随机变量及其分布函数

2.2 离散型随机变量及其概率分布

2.2.1 将 3 个球随机地放入 4 个杯子中, 求杯子中球的最大个数 X 的概率分布.

解: 将 3 个相同的球随机地放入 4 个不同的杯子中, 共有 4^3 种情况.

X 所有可能的取值为 1,2,3. 当 $X = 1$ 时, 3 个球被放入不同的杯子中, 第一个球放入 4 个杯子中的任意一个, 第二个球放入剩下 3 个杯子中的任意一个, 第三个球放入剩下 2 个杯子中的任意一个, 共有 $4 \times 3 \times 2 = 24$ 种情况. 因此

$$P(X = 1) = \frac{24}{4^3} = \frac{3}{8}$$

当 $X = 3$ 时, 3 个球被放入同一个杯子中, 此时有 4 种情况, 因此

$$P(X = 3) = \frac{4}{4^3} = \frac{1}{16}$$

由于 $P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 1$, 所以

$$P(X = 2) = 1 - P(X = 1) - P(X = 3) = 1 - \frac{3}{8} - \frac{1}{16} = \frac{9}{16}$$

综上, X 的概率分布为

X	1	2	3
P	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{16}$

2.3 连续型随机变量及其概率密度函数

2.4 常用的概率分布

2.4.1 (巴拿赫问题) 某人有两盒火柴, 每盒都有 n 根. 每次使用时, 任取一盒并从中抽出一根. 当此人第一次抽到空盒时, 另一盒中恰有 r ($0 \leq r \leq n$) 根火柴的概率是多少?

解：设两盒火柴分别为 A, B, 由对称性知, 只需计算事件 $A =$ “抽到 A 盒为空, 此时 B 盒中恰有 r 根火柴” 的概率, 所求概率是此概率的 2 倍.

事件 A 的发生可以分成两个阶段: 前 $2n - r$ 次中 A 盒抽到 n 次、B 盒抽到 $n - r$ 次, 第 $2n - r + 1$ 次抽到 A 盒. 由于每次抽到 A 盒或 B 盒的概率都是 $\frac{1}{2}$, 所以

$$P(A) = C_{2n-r}^n \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-r} \cdot \frac{1}{2} = \frac{C_{2n-r}^n}{2^{2n-r+1}}$$

进而可得所求概率为

$$p = 2P(A) = \frac{C_{2n-r}^n}{2^{2n-r}}$$

备注

巴拿赫问题的本质是: 当第 $n + 1$ 次抽到某盒火柴时, 求总的抽取次数为 $2n - r + 1$ 的概率. 设随机变量 X 为第 $n + 1$ 次抽到 A 盒时的总抽取次数, 则 X 服从帕斯卡分布 $Nb(n + 1, \frac{1}{2})$, 因此有

$$P(A) = P(X = 2n - r + 1) = C_{2n-r+1-1}^{n+1-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-r+1-(n+1)} = \frac{C_{2n-r}^n}{2^{2n-r+1}}$$

通过巴拿赫问题可以得到下列等式:

$$\sum_{r=0}^n \frac{C_{2n-r}^n}{2^{2n-r}} = 1$$

第三章 二维随机变量及其分布

第四章 随机变量的数字特征

4.1 数学期望

4.2 方差

4.2.1 设 $g(x)$ 为随机变量 X 取值的集合上的非负不减函数, 且 $E(g(X))$ 存在, 证明: 对任意的 $\varepsilon > 0$, 有

$$P(X > \varepsilon) \leq \frac{E(g(X))}{g(\varepsilon)}$$

证明: 因为 $g(x)$ 是非负不减函数, 所以当 $x > \varepsilon$ 时有 $g(x) > g(\varepsilon)$, 进而有 $\frac{g(x)}{g(\varepsilon)} > 1$.

如果 X 是离散型随机变量, 设 X 的概率分布为 $P(X = x_k) = p_k, k = 1, 2, \dots$, 则

$$P(X > \varepsilon) = \sum_{x_k > \varepsilon} p_k \leq \sum_{x_k > \varepsilon} \frac{g(x_k)}{g(\varepsilon)} p_k \leq \frac{1}{g(\varepsilon)} \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k) p_k = \frac{E(g(X))}{g(\varepsilon)}$$

如果 X 是连续型随机变量, 设 X 的概率密度函数为 $f(x)$, 则

$$P(X > \varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{+\infty} f(x) dx \leq \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{g(x)}{g(\varepsilon)} f(x) dx \leq \frac{1}{g(\varepsilon)} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx = \frac{E(g(X))}{g(\varepsilon)}$$

□