概率论与数理统计习题集

赵子轩

2024 年 9 月 27 日

目录

第一章　随机事件及其概率

1.1　随机事件

1.1.1　写出下列随机试验的样本空间:

(1) 抛一枚硬币, 观察正面和反面出现的情况;

(2) 抛三枚硬币, 观察正面和反面出现的情况;

(3) 连续抛一枚硬币, 直至出现正面为止;

(4) 抛一枚骰子, 观察出现的点数;

(5) 抛两枚骰子, 观察出现的点数;

(6) 抛两枚骰子, 记录出现的点数之和;

(7) 在一个箱子中装有 10 个同型号的某种零件, 其中有 3 个次品和 7 个合格品, 从该箱子中任取 3 个零件, 观察其中次品的个数;

(8) 记录某机场在一天内收到咨询电话的次数;

(9) 测试电视机的寿命;

(10) 口袋中有黑、白、红球各一个, 从中任取两个球; 先从中取出一个, 放回后再取出一个;

(11) 口袋中有黑、白、红球各一个, 从中任取两个球; 先从中取出一个, 不放回后再取出一个.

解: (1) $\Omega=\{0,1\}$, 其中 0 表示反面, 1 表示正面.

(2) $\Omega=\{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1),(1,0,0),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$

(3) $\Omega=\{(1),(0,1),(0,0,1),(0,0,0,1),\cdots\}$

(4) $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$

(5) $\Omega=\{(x,y)\mid x,y=1,2,3,4,5,6\}$

(6) $\Omega=\{2,3,4,\cdots,12\}$

(7) $\Omega=\{0,1,2,3\}$

(8) $\Omega=\{0,1,2,3,\cdots\}$

(9) $\Omega=[0,+\infty)$

(10) $\Omega=\{$黑黑, 黑白, 黑红, 白黑, 白白, 白红, 红黑, 红白, 红红$\}$

(11) $\Omega=\{$黑白, 黑红, 白黑, 白红, 红黑, 红白$\}$

1.1.2　设 A,B,C 为三事件, 试表示下列事件:

(1) A 发生, B,C 不发生;

(2) A,B,C 都发生;

(3) A,B,C 都不发生;

(4) A,B,C 中只有一个发生;

(5) A, B, C 中至少有一个发生;

(6) A, B, C 中至多有一个发生;

(7) A, B, C 中至少有一个不发生;

(8) A, B, C 中至多有两个发生;

(9) A, B, C 中至少有两个发生;

(10) A, B, C 中恰好有两个发生.

解: (1) $A\overline{B}\,\overline{C}$

(2) ABC

(3) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$

(4) $A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}\,C$

(5) $\Omega - \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} = \overline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}} = A \cup B \cup C$

(6) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} \cup A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}\,C$

(7) $\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$

(8) $\Omega - ABC = \overline{ABC} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$

(9) $AB \cup AC \cup BC$

(10) $AB\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup \overline{A}BC$

1.1.3 判断下列命题是否成立:

(1) $A - (B - C) = (A - B) \cup C$;

(2) 若 $AB = \emptyset$ 且 $C \subseteq A$, 则 $BC = \emptyset$;

(3) $(A \cup B) - B = A$;

(4) $(A - B) \cup B = A$.

解: (1)

$$\begin{aligned}
A - (B - C) &= A - B\overline{C} \\
&= A\overline{B\overline{C}} \\
&= A(\overline{B} \cup C) \\
&= (A\overline{B}) \cup (AC) \\
&= (A - B) \cup (AC) \\
&\neq (A - B) \cup C
\end{aligned}$$

命题 1 不成立.

(2) 成立.

(3)

$$(A \cup B) - B = (A \cup B)\overline{B} = (A\overline{B}) \cup (B\overline{B}) = A\overline{B} \neq A$$

命题 3 不成立.

(4)

$$(A - B) \cup B = (A\overline{B}) \cup B = (A \cup B)(\overline{B} \cup B) = A \cup B \neq A$$

命题 4 不成立.

1.2　随机事件的概率

1.2.1　设 A, B 是同一个试验中的两个事件, $P(A)=0.6, P(A-B)=0.2, P(A\cup B)=0.9$. 求 $P(\overline{AB}), P(B), P((\overline{A}\cup B)(A\cup\overline{B}))$.

解: 由于 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$, 所以

$$P(AB)=P(A)-P(A-B)=0.6-0.2=0.4$$

进而可得

$$P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-0.4=0.6$$

由于 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$, 所以

$$P(B)=P(A\cup B)-P(A)+P(AB)=0.9-0.6+0.4=0.7$$

由随机事件的运算性质可得

$$\begin{aligned}(\overline{A}\cup B)(A\cup\overline{B})&=[(\overline{A}\cup B)A]\cup[(\overline{A}\cup B)\overline{B}]\\&=(A\overline{A})\cup(AB)\cup(\overline{A}\,\overline{B})\cup(B\overline{B})\\&=(AB)\cup(\overline{A\cup B})\end{aligned}$$

又因为 $(AB)(\overline{A\cup B})=(AB)(\overline{A}\,\overline{B})=\varnothing$, 所以

$$\begin{aligned}P((\overline{A}\cup B)(A\cup\overline{B}))&=P((AB)\cup(\overline{A\cup B}))\\&=P(AB)+P(\overline{A\cup B})\\&=P(AB)+1-P(A\cup B)\\&=0.4+1-0.9\\&=0.5\end{aligned}$$

1.2.2　设 A 和 B 是同一试验 E 的两个随机事件, 证明: $1-P(\overline{A})-P(\overline{B})\leqslant P(AB)\leqslant P(A\cup B)$.

证明: 因为 $AB\subseteq A\subseteq(A\cup B)$, 所以

$$P(AB)\leqslant P(A\cup B)$$

因为

$$1-P(AB)=P(\overline{AB})=P(\overline{A}\cup\overline{B})\leqslant P(\overline{A})+P(\overline{B})$$

所以

$$1-P(\overline{A})-P(\overline{B})\leqslant P(AB)$$

□

1.2.3　已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}, P(AB)=0, P(AC)=P(BC)=\dfrac{1}{16}$. 则 A, B, C 中至少发生一个的概率是多少? A, B, C 都不发生的概率是多少?

解: 因为 $P(AB)=0$, 且 $ABC\subseteq AB$, 由概率的单调性可知 $P(ABC)=0$. 由概率的加法公式可得 A,B,C 中至少发生一个的概率为

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)\\&=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-0-\frac{1}{16}-\frac{1}{16}+0\\&=\frac{5}{8}\end{aligned}$$

A,B,C 都不发生的概率为

$$\begin{aligned}P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})&=P(\overline{A\cup B\cup C})\\&=1-P(A\cup B\cup C)\\&=1-\frac{5}{8}\\&=\frac{3}{8}\end{aligned}$$

1.2.4 抛两枚硬币, 求出现一个正面一个反面的概率.

解: 此试验的样本空间为 $\Omega=\{(正,正),(正,反),(反,正),(反,反)\}$, 样本点的个数为 4, 且每个样本点发生的可能性是相等的. 事件 “出现一个正面一个反面” 含有的样本点个数为 2, 根据古典概型可得该事件发生的概率为 $\frac{1}{2}$.

备注

如果将样本空间写成 $\Omega'=\{(正,正),(反,反),(一正一反)\}$, 这 3 个样本点不是等可能的, 不满足古典概型的条件.

1.2.5 从 $1,2,\cdots,10$ 这 10 个数字中任取 3 个, 求大小在中间的数字恰好为 5 的概率.

解: 从 10 个数字中任取 3 个, 共有 C_{10}^3 种取法. 如果大小在中间的数字恰好为 5, 必须有一个小于 5、一个等于 5、一个大于 5, 这样的取法有 $\mathrm{C}_4^1\mathrm{C}_1^1\mathrm{C}_5^1$ 种. 因此所求概率为

$$p=\frac{\mathrm{C}_4^1\mathrm{C}_1^1\mathrm{C}_5^1}{\mathrm{C}_{10}^3}=\frac{4\times1\times5}{120}=\frac{1}{6}$$

1.2.6 任取两个正整数, 求它们的和为偶数的概率.

解: 记取出偶数为 “0”, 取出奇数为 “1”, 则随机试验 “任取两个正整数” 的样本空间为

$$\Omega=\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$$

令事件 A 表示 “取出的两个正整数之和为偶数”, 则 $A=\{(0,0),(1,1)\}$, 从而所求概率为

$$P(A)=\frac{1}{2}$$

1.2.7 将 15 名新生 (其中有 3 名优秀生) 随机地分配到 3 个班级去, 其中一班 4 名, 二班 5 名, 三班 6 名. 求:

(1) 每个班级各分配到一名优秀生的概率;

(2) 3 名优秀生分配到一个指定班级的概率;

(3) 3 名优秀生分配到同一个班级的概率.

解: 将 15 名新生随机地分配给一班 4 名、二班 5 名、三班 6 名, 分法种类数为

$$\mathrm{C}_{15}^{4}\mathrm{C}_{11}^{5}\mathrm{C}_{6}^{6}=\frac{15!}{4!\cdot 11!}\frac{11!}{5!\cdot 6!}=\frac{15!}{4!\cdot 5!\cdot 6!}$$

(1) 将 3 名优秀生分配到三个班级的分法共有 $\mathrm{A}_3^3=3!$ 种, 将其余 12 名新生分配给一班 3 名、二班 4 名、三班 5 名的分法共有 $\mathrm{C}_{12}^{3}\mathrm{C}_{9}^{4}\mathrm{C}_{5}^{5}=\dfrac{12!}{3!\cdot 4!\cdot 5!}$ 种, 则每个班级各分配到一名优秀生的分法共有 $3!\cdot\dfrac{12!}{3!\cdot 4!\cdot 5!}=\dfrac{12!}{4!\cdot 5!}$ 种. 因此所求概率为

$$p=\frac{\dfrac{12!}{4!\cdot 5!}}{\dfrac{15!}{4!\cdot 5!\cdot 6!}}=\frac{24}{91}$$

(2) 如果将 3 名优秀生分配到一班, 则其余 12 名新生将分配给一班 1 名、二班 5 名、三班 6 名, 此时分法共有 $\mathrm{C}_{12}^{1}\mathrm{C}_{11}^{5}\mathrm{C}_{6}^{6}=\dfrac{12!}{5!\cdot 6!}$ 种, 所求概率为

$$p_1=\frac{\dfrac{12!}{5!\cdot 6!}}{\dfrac{15!}{4!\cdot 5!\cdot 6!}}=\frac{4}{455}$$

如果将 3 名优秀生分配到二班, 则其余 12 名新生将分配给一班 4 名、二班 2 名、三班 6 名, 此时分法共有 $\mathrm{C}_{12}^{4}\mathrm{C}_{8}^{2}\mathrm{C}_{6}^{6}=\dfrac{12!}{2!\cdot 4!\cdot 6!}$ 种, 所求概率为

$$p_2=\frac{\dfrac{12!}{2!\cdot 4!\cdot 6!}}{\dfrac{15!}{4!\cdot 5!\cdot 6!}}=\frac{2}{91}$$

如果将 3 名优秀生分配到三班, 则其余 12 名新生将分配给一班 4 名、二班 5 名、三班 3 名, 此时分法共有 $\mathrm{C}_{12}^{4}\mathrm{C}_{8}^{5}\mathrm{C}_{3}^{3}=\dfrac{12!}{3!\cdot 4!\cdot 5!}$ 种, 所求概率为

$$p_3=\frac{\dfrac{12!}{3!\cdot 4!\cdot 5!}}{\dfrac{15!}{4!\cdot 5!\cdot 6!}}=\frac{4}{91}$$

(3) 用 A_i 表示 “3 名优秀生全部分配到 i 班” $(i=1,2,3)$, 则事件 “3 名优秀生分配到同一个班级” 可以表示为 $A_1\cup A_2\cup A_3$. 又因为 $A_iA_j=\varnothing\,(i\neq j,i,j=1,2,3)$, 所以所求概率为

$$p=P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=\frac{4}{455}+\frac{2}{91}+\frac{4}{91}=\frac{34}{455}$$

1.2.8　抛两颗骰子, 求下列事件的概率:

(1) 点数之和为 6;

(2) 点数之和不超过 6;

(3) 至少有一个 6 点.

解：抛两颗骰子所得点数的样本空间为 $\Omega=\{(x,y)\mid x,y=1,2,3,4,5,6\}$, 样本点数量为 36.

(1) 令事件 A 为 "点数之和为 6", 则

$$A=\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$$

所以所求概率为

$$P(A)=\frac{5}{36}$$

(2) 令事件 B 为 "点数之和不超过 6", 则

$$\begin{aligned}B=\{&(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,2),(2,3),\\&(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(4,1),(4,2),(5,1)\}\end{aligned}$$

所以所求概率为

$$P(B)=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$$

(3) 令事件 C 为 "至少有一个 6 点", 则

$$\begin{aligned}C=\{&(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6),(6,6),\\&(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5)\}\end{aligned}$$

所以所求概率为

$$P(C)=\frac{11}{36}$$

1.2.9 考虑一元二次方程 $x^2+Bx+C=0$, 其中 B,C 分别是将一颗骰子连续抛两次先后出现的点数, 求该方程有实根的概率 p 和有重根的概率 q.

解：将一颗骰子连续抛两次所得点数的样本空间为 $\Omega=\{(B,C)\mid B,C=1,2,3,4,5,6\}$, 样本点数量为 36.

事件 "该方程有实根" 发生的条件为 $B^2-4C\geqslant 0$, 而

$$\begin{aligned}\{B^2-4C\geqslant 0\}=\{&(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1),(3,2),(4,2),(5,2),(6,2),\\&(4,3),(5,3),(6,3),(4,4),(5,4),(6,4),(5,5),(6,5),(5,6),(6,6)\}\end{aligned}$$

共有 19 个样本点, 因此

$$p=P(B^2-4C\geqslant 0)=\frac{19}{36}$$

事件 "该方程有重根" 发生的条件为 $B^2-4C=0$, 而

$$\{B^2-4C=0\}=\{(2,1),(4,4)\}$$

共有 2 个样本点, 因此

$$q=P(B^2-4C=0)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$$

1.2.10 从 N 个数字 $1,2,\cdots,N$ 中可重复地随机抽取 n 次, 求抽到的最大数字正好为 $k\,(1\leqslant k\leqslant N)$ 的概率.

解: 从 N 个数字中可重复地抽取 n 次, 共有 N^n 种取法.

记事件 B_i 为 “抽到的最大数字小于等于 i” ($i = 1, 2, \cdots, N$), 则 B_i 发生只需每次从 $1, 2, \cdots, i$ 中取数即可, 共有 i^n 种取法, 由古典概型可知

$$P(B_i) = \frac{i^n}{N^n}$$

记事件 A_k 为 “抽到的最大数字正好为 k”, 则 $A_k = B_k - B_{k-1}$, 且 $B_{k-1} \subseteq B_k$, 因此

$$\begin{aligned} P(A_k) &= P(B_k - B_{k-1}) \\ &= P(B_k) - P(B_{k-1}) \\ &= \frac{k^n}{N^n} - \frac{(k-1)^n}{N^n} \\ &= \frac{k^n - (k-1)^n}{N^n} \end{aligned}$$

1.2.11 在长度为 a 的线段内任取两点将其分为三段, 求它们可以构成一个三角形的概率.

解: 设分成的三段长度分别为 x, y 和 $a - x - y$, 则有

$$\begin{cases} 0 < x < a \\ 0 < y < a \\ 0 < a - x - y < a \end{cases}$$

其中 $0 < a - x - y < a$ 等价于 $0 < x + y < a$, 则样本空间为

$$\Omega = \{(x, y) \mid 0 < x < a,\ 0 < y < a,\ 0 < x + y < a\}$$

设事件 $A =$ “线段分成的三段可以构成三角形”. 由于三角形中任意两边之和大于第三边, 则事件 A 发生的条件为

$$\begin{cases} 0 < x < y + (a - x - y) \\ 0 < y < x + (a - x - y) \\ 0 < a - x - y < x + y \end{cases}$$

整理得

$$A = \{(x, y) \mid 0 < x < \frac{a}{2},\ 0 < y < \frac{a}{2},\ \frac{a}{2} < x + y < a\}$$

如图 1.1 所示. 则所求概率为

$$P(A) = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}a^2} = \frac{1}{4}$$

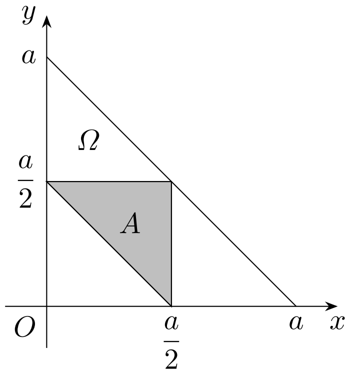

图 1.1

第二章　随机变量及其分布

第三章　二维随机变量及其分布

第四章　随机变量的数字特征

4.1　数学期望

4.2　方差

4.2.1　设 $g(x)$ 为随机变量 X 取值的集合上的非负不减函数, 且 $E(g(X))$ 存在, 证明: 对任意的 $\varepsilon > 0$, 有

$$P(X > \varepsilon) \leqslant \frac{E(g(X))}{g(\varepsilon)}$$

证明: 因为 $g(x)$ 是非负不减函数, 所以当 $x > \varepsilon$ 时有 $g(x) > g(\varepsilon)$, 进而有 $\frac{g(x)}{g(\varepsilon)} > 1$.

如果 X 是离散型随机变量, 设 X 的概率分布为 $P(X = x_k) = p_k, k = 1, 2, \cdots$, 则

$$P(X > \varepsilon) = \sum_{x_k > \varepsilon} p_k \leqslant \sum_{x_k > \varepsilon} \frac{g(x_k)}{g(\varepsilon)} p_k \leqslant \frac{1}{g(\varepsilon)} \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k) p_k = \frac{E(g(X))}{g(\varepsilon)}$$

如果 X 是连续型随机变量, 设 X 的概率密度函数为 $f(x)$, 则

$$P(X > \varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{g(x)}{g(\varepsilon)} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{g(\varepsilon)} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{E(g(X))}{g(\varepsilon)}$$

□