概率论与数理统计习题集

赵子轩

2024 年 12 月 10 日

目录

第一章　随机事件及其概率

1.1　随机事件

1.1.1　写出下列随机试验的样本空间:

(1) 抛一枚硬币, 观察正面和反面出现的情况;

(2) 抛三枚硬币, 观察正面和反面出现的情况;

(3) 连续抛一枚硬币, 直至出现正面为止;

(4) 抛一枚骰子, 观察出现的点数;

(5) 抛两枚骰子, 观察出现的点数;

(6) 抛两枚骰子, 记录出现的点数之和;

(7) 在一个箱子中装有 10 个同型号的某种零件, 其中有 3 个次品和 7 个合格品, 从该箱子中任取 3 个零件, 观察其中次品的个数;

(8) 记录某机场在一天内收到咨询电话的次数;

(9) 测试电视机的寿命;

(10) 口袋中有黑、白、红球各一个, 从中任取两个球; 先从中取出一个, 放回后再取出一个;

(11) 口袋中有黑、白、红球各一个, 从中任取两个球; 先从中取出一个, 不放回后再取出一个.

解: (1) $\Omega=\{0,1\}$, 其中 0 表示反面, 1 表示正面.

(2) $\Omega=\{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1),(1,0,0),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$

(3) $\Omega=\{(1),(0,1),(0,0,1),(0,0,0,1),\cdots\}$

(4) $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$

(5) $\Omega=\{(x,y)\mid x,y=1,2,3,4,5,6\}$

(6) $\Omega=\{2,3,4,\cdots,12\}$

(7) $\Omega=\{0,1,2,3\}$

(8) $\Omega=\{0,1,2,3,\cdots\}$

(9) $\Omega=[0,+\infty)$

(10) $\Omega=\{$黑黑, 黑白, 黑红, 白黑, 白白, 白红, 红黑, 红白, 红红$\}$

(11) $\Omega=\{$黑白, 黑红, 白黑, 白红, 红黑, 红白$\}$

1.1.2　设 A,B,C 为三事件, 试表示下列事件:

(1) A 发生, B,C 不发生;

(2) A,B,C 都发生;

(3) A,B,C 都不发生;

(4) A,B,C 中只有一个发生;

(5) A, B, C 中至少有一个发生;

(6) A, B, C 中至多有一个发生;

(7) A, B, C 中至少有一个不发生;

(8) A, B, C 中至多有两个发生;

(9) A, B, C 中至少有两个发生;

(10) A, B, C 中恰好有两个发生.

解: (1) $A\overline{B}\,\overline{C}$

(2) ABC

(3) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$

(4) $A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}\,C$

(5) $\Omega - \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} = \overline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}} = A \cup B \cup C$

(6) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} \cup A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}\,C$

(7) $\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$

(8) $\Omega - ABC = \overline{ABC} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$

(9) $AB \cup AC \cup BC$

(10) $AB\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup \overline{A}BC$

1.1.3 判断下列命题是否成立:

(1) $A - (B - C) = (A - B) \cup C$;

(2) 若 $AB = \emptyset$ 且 $C \subseteq A$, 则 $BC = \emptyset$;

(3) $(A \cup B) - B = A$;

(4) $(A - B) \cup B = A$.

解: (1)

$$
\begin{aligned}
A - (B - C) &= A - B\overline{C} \\
&= A\overline{B\overline{C}} \\
&= A(\overline{B} \cup C) \\
&= (A\overline{B}) \cup (AC) \\
&= (A - B) \cup (AC) \\
&\neq (A - B) \cup C
\end{aligned}
$$

命题 1 不成立.

(2) 成立.

(3)

$$(A \cup B) - B = (A \cup B)\overline{B} = (A\overline{B}) \cup (B\overline{B}) = A\overline{B} \neq A$$

命题 3 不成立.

(4)

$$(A - B) \cup B = (A\overline{B}) \cup B = (A \cup B)(\overline{B} \cup B) = A \cup B \neq A$$

命题 4 不成立.

1.1.4 证明下列事件的运算公式:

(1) $A = AB \cup A\overline{B}$;

(2) $A \cup B = A \cup \overline{A}B$.

证明: (1) $AB \cup A\overline{B} = A(B \cup \overline{B}) = A\Omega = A$

(2) 由 (1) 可得 $B = AB \cup \overline{A}B$, 因此

$$\begin{aligned} A \cup B &= A \cup (AB \cup \overline{A}B) \\ &= (A \cup AB) \cup \overline{A}B \\ &= A(\Omega \cup B) \cup \overline{A}B \\ &= A \cup \overline{A}B \end{aligned}$$

□

1.2 随机事件的概率

1.2.1 设 A, B 是同一个试验中的两个事件, $P(A) = 0.6, P(A - B) = 0.2, P(A \cup B) = 0.9$. 求 $P(\overline{AB}), P(B), P((\overline{A} \cup B)(A \cup \overline{B}))$.

解: 由于 $P(A - B) = P(A) - P(AB)$, 所以

$$P(AB) = P(A) - P(A - B) = 0.6 - 0.2 = 0.4$$

进而可得

$$P(\overline{AB}) = 1 - P(AB) = 1 - 0.4 = 0.6$$

由于 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$, 所以

$$P(B) = P(A \cup B) - P(A) + P(AB) = 0.9 - 0.6 + 0.4 = 0.7$$

由随机事件的运算性质可得

$$\begin{aligned} (\overline{A} \cup B)(A \cup \overline{B}) &= [(\overline{A} \cup B)A] \cup [(\overline{A} \cup B)\overline{B}] \\ &= (A\overline{A}) \cup (AB) \cup (\overline{A}\,\overline{B}) \cup (B\overline{B}) \\ &= (AB) \cup (\overline{A \cup B}) \end{aligned}$$

又因为 $(AB)(\overline{A \cup B}) = (AB)(\overline{A}\,\overline{B}) = \varnothing$, 所以

$$\begin{aligned} P((\overline{A} \cup B)(A \cup \overline{B})) &= P((AB) \cup (\overline{A \cup B})) \\ &= P(AB) + P(\overline{A \cup B}) \\ &= P(AB) + 1 - P(A \cup B) \\ &= 0.4 + 1 - 0.9 \\ &= 0.5 \end{aligned}$$

1.2.2 设 A 和 B 是同一试验 E 的两个随机事件, 证明: $1-P(\overline{A})-P(\overline{B}) \leqslant P(AB) \leqslant P(A\cup B)$.

证明: 因为 $AB \subseteq A \subseteq (A\cup B)$, 所以

$$P(AB) \leqslant P(A\cup B)$$

因为

$$1-P(AB) = P(\overline{AB}) = P(\overline{A}\cup\overline{B}) \leqslant P(\overline{A}) + P(\overline{B})$$

所以

$$1-P(\overline{A})-P(\overline{B}) \leqslant P(AB)$$

□

1.2.3 已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}, P(AB)=0, P(AC)=P(BC)=\dfrac{1}{16}$. 则 A,B,C 中至少发生一个的概率是多少? A,B,C 都不发生的概率是多少?

解: 因为 $P(AB)=0$, 且 $ABC\subseteq AB$, 由概率的单调性可知 $P(ABC)=0$. 由概率的加法公式可得 A,B,C 中至少发生一个的概率为

$$\begin{aligned} P(A\cup B\cup C) &= P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC) \\ &= \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-0-\frac{1}{16}-\frac{1}{16}+0 \\ &= \frac{5}{8} \end{aligned}$$

A,B,C 都不发生的概率为

$$\begin{aligned} P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}) &= P(\overline{A\cup B\cup C}) \\ &= 1-P(A\cup B\cup C) \\ &= 1-\frac{5}{8} \\ &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

1.2.4 抛两枚硬币, 求出现一个正面一个反面的概率.

解: 此试验的样本空间为 $\Omega=\{$(正, 正), (正, 反), (反, 正), (反, 反)$\}$, 样本点的个数为 4, 且每个样本点发生的可能性是相等的. 事件"出现一个正面一个反面"含有的样本点个数为 2, 根据古典概型可得该事件发生的概率为 $\dfrac{1}{2}$.

备注

如果将样本空间写成 $\Omega'=\{$(正, 正), (反, 反), (一正一反)$\}$, 这 3 个样本点不是等可能的, 不满足古典概型的条件.

1.2.5 从 n 个数字 $1,2,\cdots,n$ 中任取 3 个, 求大小在中间的数字恰好为 $k\,(1<k<n)$ 的概率.

解: 从 n 个数字中任取 3 个, 共有 C_n^3 种取法. 如果大小在中间的数字恰好为 k, 必须有一个小于 k、一个等于 k、一个大于 k, 这样的取法有 $\mathrm{C}_{k-1}^1\mathrm{C}_1^1\mathrm{C}_{n-k}^1$ 种. 因此所求概率为

$$p=\frac{\mathrm{C}_{k-1}^1\mathrm{C}_1^1\mathrm{C}_{n-k}^1}{\mathrm{C}_n^3}=\frac{6(k-1)(n-k)}{n(n-1)(n-2)}$$

1.2.6　任取两个正整数, 求它们的和为偶数的概率.

解: 记取出偶数为 "0", 取出奇数为 "1", 则随机试验 "任取两个正整数" 的样本空间为

$$\Omega=\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$$

令事件 A 表示 "取出的两个正整数之和为偶数", 则 $A=\{(0,0),(1,1)\}$, 从而所求概率为

$$P(A)=\frac{1}{2}$$

1.2.7　将 15 名新生 (其中有 3 名优秀生) 随机地分配到 3 个班级去, 其中一班 4 名, 二班 5 名, 三班 6 名. 求:

(1) 每个班级各分配到一名优秀生的概率;

(2) 3 名优秀生分配到一个指定班级的概率;

(3) 3 名优秀生分配到同一个班级的概率.

解: 将 15 名新生随机地分配给一班 4 名、二班 5 名、三班 6 名, 共有 $\mathrm{C}_{15}^4\mathrm{C}_{11}^5\mathrm{C}_6^6$ 种分法.

(1) 将 3 名优秀生分配到三个班级的分法共有 A_3^3 种, 将其余 12 名新生分配给一班 3 名、二班 4 名、三班 5 名的分法共有 $\mathrm{C}_{12}^3\mathrm{C}_9^4\mathrm{C}_5^5$ 种, 则每个班级各分配到一名优秀生的分法共有 $\mathrm{A}_3^3\mathrm{C}_{12}^3\mathrm{C}_9^4\mathrm{C}_5^5$ 种. 因此所求概率为

$$p=\frac{\mathrm{A}_3^3\mathrm{C}_{12}^3\mathrm{C}_9^4\mathrm{C}_5^5}{\mathrm{C}_{15}^4\mathrm{C}_{11}^5\mathrm{C}_6^6}=\frac{24}{91}$$

(2) 如果将 3 名优秀生分配到一班, 则其余 12 名新生将分配给一班 1 名、二班 5 名、三班 6 名, 此时分法共有 $\mathrm{C}_{12}^1\mathrm{C}_{11}^5\mathrm{C}_6^6$ 种, 所求概率为

$$p_1=\frac{\mathrm{C}_{12}^1\mathrm{C}_{11}^5\mathrm{C}_6^6}{\mathrm{C}_{15}^4\mathrm{C}_{11}^5\mathrm{C}_6^6}=\frac{4}{455}$$

如果将 3 名优秀生分配到二班, 则其余 12 名新生将分配给一班 4 名、二班 2 名、三班 6 名, 此时分法共有 $\mathrm{C}_{12}^4\mathrm{C}_8^2\mathrm{C}_6^6$ 种, 所求概率为

$$p_2=\frac{\mathrm{C}_{12}^4\mathrm{C}_8^2\mathrm{C}_6^6}{\mathrm{C}_{15}^4\mathrm{C}_{11}^5\mathrm{C}_6^6}=\frac{2}{91}$$

如果将 3 名优秀生分配到三班, 则其余 12 名新生将分配给一班 4 名、二班 5 名、三班 3 名, 此时分法共有 $\mathrm{C}_{12}^4\mathrm{C}_8^5\mathrm{C}_3^3$ 种, 所求概率为

$$p_3=\frac{\mathrm{C}_{12}^4\mathrm{C}_8^5\mathrm{C}_3^3}{\mathrm{C}_{15}^4\mathrm{C}_{11}^5\mathrm{C}_6^6}=\frac{4}{91}$$

(3) 用 A_i 表示 "3 名优秀生全部分配到 i 班" $(i=1,2,3)$, 则事件 "3 名优秀生分配到同一个班级" 可以表示为 $A_1\cup A_2\cup A_3$. 又因为 $A_iA_j=\varnothing\,(i\neq j,i,j=1,2,3)$, 所以所求概率为

$$p=P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=\frac{4}{455}+\frac{2}{91}+\frac{4}{91}=\frac{34}{455}$$

1.2.8 抛两颗骰子, 求下列事件的概率:

(1) 点数之和为 6;

(2) 点数之和不超过 6;

(3) 至少有一个 6 点.

解: 抛两颗骰子所得点数的样本空间为 $\Omega = \{(x, y) \mid x, y = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 样本点数量为 36.

(1) 令事件 A 为 "点数之和为 6", 则

$$A = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$$

所以所求概率为

$$P(A) = \frac{5}{36}$$

(2) 令事件 B 为 "点数之和不超过 6", 则

$$\begin{aligned} B = \{&(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 3), \\ &(2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (5, 1)\} \end{aligned}$$

所以所求概率为

$$P(B) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

(3) 令事件 C 为 "至少有一个 6 点", 则

$$\begin{aligned} C = \{&(1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6), (6, 6), \\ &(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5)\} \end{aligned}$$

所以所求概率为

$$P(C) = \frac{11}{36}$$

1.2.9 考虑一元二次方程 $x^2 + Bx + C = 0$, 其中 B, C 分别是将一颗骰子连续抛两次先后出现的点数, 求该方程有实根的概率 p 和有重根的概率 q.

解: 将一颗骰子连续抛两次所得点数的样本空间为 $\Omega = \{(B, C) \mid B, C = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 样本点数量为 36.

事件 "该方程有实根" 发生的条件为 $B^2 - 4C \geqslant 0$, 而

$$\begin{aligned} \{B^2 - 4C \geqslant 0\} = \{&(2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (6, 2), \\ &(4, 3), (5, 3), (6, 3), (4, 4), (5, 4), (6, 4), (5, 5), (6, 5), (5, 6), (6, 6)\} \end{aligned}$$

共有 19 个样本点, 因此

$$p = P(B^2 - 4C \geqslant 0) = \frac{19}{36}$$

事件 "该方程有重根" 发生的条件为 $B^2 - 4C = 0$, 而

$$\{B^2 - 4C = 0\} = \{(2, 1), (4, 4)\}$$

共有 2 个样本点, 因此

$$q = P(B^2 - 4C = 0) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

1.2.10 从 N 个数字 $1,2,\cdots,N$ 中可重复地随机抽取 n 次, 求抽到的最大数字正好为 $k\,(1 \leqslant k \leqslant N)$ 的概率.

解: 从 N 个数字中可重复地抽取 n 次, 共有 N^n 种取法.

记事件 B_i 为 "抽到的最大数字小于等于 i" $(i = 1,2,\cdots,N)$, 则 B_i 发生只需每次从 $1,2,\cdots,i$ 中取数即可, 共有 i^n 种取法, 由古典概型可知

$$P(B_i) = \frac{i^n}{N^n}$$

记事件 A_k 为 "抽到的最大数字正好为 k", 则 $A_k = B_k - B_{k-1}$, 且 $B_{k-1} \subseteq B_k$, 因此

$$\begin{aligned} P(A_k) &= P(B_k - B_{k-1}) \\ &= P(B_k) - P(B_{k-1}) \\ &= \frac{k^n}{N^n} - \frac{(k-1)^n}{N^n} \\ &= \frac{k^n - (k-1)^n}{N^n} \end{aligned}$$

1.2.11 从一副 52 张的扑克牌中任取 4 张, 求下列事件的概率:

(1) 全是黑桃;

(2) 同花;

(3) 没有两张同一花色;

(4) 同色.

解: 从 52 张扑克牌中任取 4 张的取法有 C_{52}^4 种.

(1) 一副扑克牌中有 13 张黑桃, 从中取出 4 张的取法有 C_{13}^4 种, 因此所求概率为

$$p_1 = \frac{\mathrm{C}_{13}^4}{\mathrm{C}_{52}^4} = \frac{11}{4165}$$

(2) 取出的 4 张牌全是某一特定花色的取法有 C_{13}^4 种, 而一副扑克牌有 4 种花色, 则 4 张牌同花的取法有 $4\mathrm{C}_{13}^4$ 种, 因此所求概率为

$$p_2 = \frac{4\mathrm{C}_{13}^4}{\mathrm{C}_{52}^4} = \frac{44}{4165}$$

(3)"没有两张同一花色" 需要从 4 种花色中各取一张, 取法有 13^4 种, 因此所求概率为

$$p_3 = \frac{13^4}{\mathrm{C}_{52}^4} = \frac{2197}{20825}$$

(4) 一副扑克牌中有红色和黑色牌各 26 张, 取出 4 张同色牌的取法有 $2\mathrm{C}_{26}^4$ 种, 因此所求概率为

$$p_4 = \frac{2\mathrm{C}_{26}^4}{\mathrm{C}_{52}^4} = \frac{92}{833}$$

1.2.12 把 10 本书任意地放在书架上, 求其中指定的 4 本书放在一起的概率.

解: 把 10 本书任意地放在书架上, 共有 A_{10}^{10} 种放法. 当其中指定的 4 本书放在一起时, 将这 4 本书看作一个整体, 与其他 6 本书一起放在书架上, 有 A_7^7 种放法; 放在一起的 4 本书又有不同的顺序, 有 A_4^4 种放法. 因此 "其中指定的 4 本书放在一起" 共有 $\mathrm{A}_7^7\mathrm{A}_4^4$ 种放法, 所求概率为

$$p = \frac{\mathrm{A}_7^7\mathrm{A}_4^4}{\mathrm{A}_{10}^{10}} = \frac{7! \times 4!}{10!} = \frac{1}{30}$$

1.2.13 n 个人随机地围一圆桌而坐, 求甲、乙两人相邻而坐的概率.

解:

解法一: n 个人围坐, 共有 $\dfrac{\mathrm{A}_n^n}{n} = (n-1)!$ 种坐法. 当甲、乙两人相邻而坐时, 将甲、乙两人看作整体, 有 $\dfrac{\mathrm{A}_{n-1}^{n-1}}{n-1}\mathrm{A}_2^2 = 2(n-2)!$ 种坐法. 因此所求概率为

$$p = \frac{2(n-2)!}{(n-1)!} = \frac{2}{n-1}$$

解法二: 设甲先坐好, 再考虑乙的坐法. 此时乙总共有 $n-1$ 个位置可坐, 且这 $n-1$ 个位置都是等可能的, 而乙与甲相邻有 2 个位置, 因此所求概率为

$$p = \frac{2}{n-1}$$

1.2.14 同时掷 5 枚骰子, 求下列事件的概率:

(1) 每枚都不一样;

(2) 其中 2 枚相同 (成对), 另外 3 枚各不相同且与成对的 2 枚也不同;

(3) 出现两组成对的骰子;

(4) 其中 3 枚相同, 另外 2 枚不同;

(5) 其中 4 枚相同;

(6) 5 枚全部相同.

解: 同时掷 5 枚骰子共有 6^5 种不同情况.

(1) $p_1 = \dfrac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{6^5} = \dfrac{5}{54}$

(2) $p_2 = \dfrac{\mathrm{C}_5^2 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{6^5} = \dfrac{25}{54}$

(3) 将 5 枚骰子分成 3 组, 其中 2 组包含 2 枚骰子, 另外一组只有 1 个骰子, 这样的分法有 $\dfrac{\mathrm{C}_5^2\mathrm{C}_3^2}{2} = 15$ 种. 这三组骰子出现的点数不同, 有 $6 \times 5 \times 4 = 120$ 种情况, 因此所求概率为

$$p_3 = \frac{15 \times 120}{6^5} = \frac{25}{108}$$

(4) $p_4 = \dfrac{\mathrm{C}_5^3 \times 6 \times 5 \times 4}{6^5} = \dfrac{25}{162}$

(5) $p_5 = \dfrac{\mathrm{C}_5^4 \times 6 \times 5}{6^5} = \dfrac{25}{1296}$

(6) $p_6 = \dfrac{6}{6^5} = \dfrac{1}{1296}$

1.2.15 (接草成环问题)　把 $2n$ 根草紧握在手中, 仅露出它们的头和尾, 然后随机地把 $2n$ 个头两两相接, $2n$ 个尾也两两相接. 求放开手后 $2n$ 根草恰巧连成一个环的概率.

解: 先将头两两相接, 此时所有接法都是等价的, 如图 1.1 所示, 所以只需考虑尾的接法.

$2n$ 个尾两两相接, 先任选 1 个尾, 再从剩下的 $2n-1$ 个尾中任选 1 个尾相接; 然后从剩下的 $2n-2$ 个尾中任选 1 个, 与 $2n-3$ 个尾中的任意 1 个相接; 以此类推, 将 $2n$ 个尾两两相接共有 $2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)\times\cdots\times 2\times 1=(2n)!$ 种方法.

如果要成环, 在从 $2n$ 个尾中任选 1 个之后, 剩下的 $2n-1$ 个尾中有一个不能选择, 所以只能从其余 $2n-2$ 个尾中任选 1 个相接; 然后从剩下的 $2n-2$ 个尾中任选 1 个, 与 $2n-4$ 个尾中的任意 1 个相接; 以此类推, 成环的方法共有 $2n(2n-2)(2n-2)(2n-4)\times\cdots\times 2\times 1$ 种. 因此所求概率为

$$\begin{aligned}
p&=\frac{2n(2n-2)(2n-2)(2n-4)\times\cdots\times 2\times 1}{(2n)!}\\
&=\frac{[2n(2n-2)(2n-4)\times\cdots\times 2][(2n-2)(2n-4)\times\cdots\times 1]}{(2n)!}\\
&=\frac{2^n n!\times 2^{n-1}(n-1)!}{(2n)!}\\
&=\frac{2^{2n-1}n!(n-1)!}{(2n)!}
\end{aligned}$$

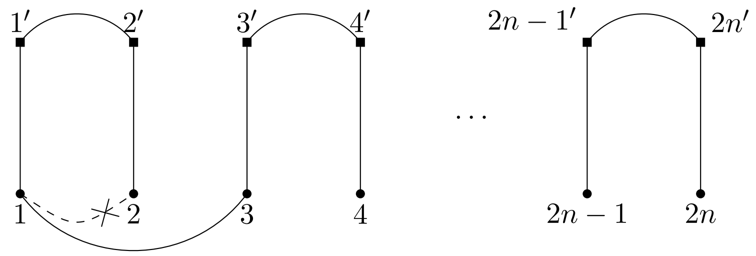

图 1.1

1.2.16　把 n 个 “0” 与 $m\,(m\leqslant n+1)$ 个 “1” 随机地排列, 求没有两个 “1” 连在一起的概率.

解: 总共 $m+n$ 个位置, 选择其中 n 个放 “0”, 其余 m 个位置放 “1”, 总的排列数为 C_{m+n}^{n}. 如果 “没有两个 ‘1’ 连在一起”, 需要将 “1” 放在 n 个 “0” 之间的空隙中, 共有 $n+1$ 个位置, 此时排列数为 C_{n+1}^{m}. 因此所求概率为

$$p=\frac{\mathrm{C}_{n+1}^{m}}{\mathrm{C}_{m+n}^{n}}=\frac{n!(n+1)!}{(n-m+1)!(m+n)!}$$

1.2.17 (插板法)　将 n 个完全相同的球随机地放入 N 个盒子中, 求:

(1) 某个指定的盒子中恰好有 $k\,(0\leqslant k\leqslant n)$ 个球的概率;

(2) 恰好有 $m\,(N-n\leqslant m\leqslant N-1)$ 个空盒的概率;

(3) 某指定的 m 个盒子中恰好有 j 个球的概率.

解: 将 n 个球排成一行, 向其中插入 $N-1$ 块板, 分成 N 个区域, 每个区域可以看成一个盒子. 因此 "将 n 个完全相同的球随机地放入 N 个盒子中" 就相当于将 n 个球和 $N-1$ 块板随机地排成一行, 由 1.2.16 可知, 共有 C_{n+N-1}^{n} 种情况.

(1) 某个指定的盒子中有 k 个球, 其余 $n-k$ 个球随机放入 $N-1$ 个盒子中, 共有 $\mathrm{C}_{n-k+N-2}^{n-k}$ 种情况, 因此所求概率为

$$p_1 = \frac{\mathrm{C}_{n-k+N-2}^{n-k}}{\mathrm{C}_{n+N-1}^{n}} = \frac{(N-1)n!(n-k+N-2)!}{(n-k)!(n+N-1)!}$$

(2) 先从 N 个盒子中选出 m 个作为空盒, 有 C_{N}^{m} 种取法. 然后将 n 个球放入剩下的 $N-m$ 个盒子, 并且不能有空盒, 可以先向每个盒子放 1 个球, 再将其余 $n-N+m$ 个球随机放入 $N-m$ 个盒子中, 此时有 $\mathrm{C}_{(n-N+m)+(N-m-1)}^{n-N+m} = \mathrm{C}_{n-1}^{n-N+m}$ 种情况. 综上, 所求概率为

$$p_2 = \frac{\mathrm{C}_{N}^{m}\mathrm{C}_{n-1}^{n-N+m}}{\mathrm{C}_{n+N-1}^{n}}$$

(3) 将 j 个球放入指定的 m 个盒子中, 有 C_{m+j-1}^{j} 种放法; 另外 $n-j$ 个球放入其余 $N-m$ 个盒子, 有 $\mathrm{C}_{n-j+N-m-1}^{n-j}$ 种放法. 因此所求概率为

$$p_3 = \frac{\mathrm{C}_{m+j-1}^{j}\mathrm{C}_{n-j+N-m-1}^{n-j}}{\mathrm{C}_{n+N-1}^{n}}$$

1.2.18 在长度为 a 的线段内任取两点将其分为三段, 求它们可以构成一个三角形的概率.

解: 设分成的三段长度分别为 x, y 和 $a-x-y$, 则有

$$\begin{cases} 0 < x < a \\ 0 < y < a \\ 0 < a-x-y < a \end{cases}$$

其中 $0 < a-x-y < a$ 等价于 $0 < x+y < a$, 则样本空间为

$$\Omega = \{(x,y) \mid 0 < x < a,\ 0 < y < a,\ 0 < x+y < a\}$$

设事件 $A =$ "线段分成的三段可以构成三角形". 由于三角形中任意两边之和大于第三边, 则事件 A 发生的条件为

$$\begin{cases} 0 < x < y + (a-x-y) \\ 0 < y < x + (a-x-y) \\ 0 < a-x-y < x+y \end{cases}$$

整理得

$$A = \{(x,y) \mid 0 < x < \frac{a}{2},\ 0 < y < \frac{a}{2},\ \frac{a}{2} < x+y < a\}$$

如图 1.2 所示. 则所求概率为

$$P(A) = \frac{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}{\dfrac{1}{2}a^2} = \frac{1}{4}$$

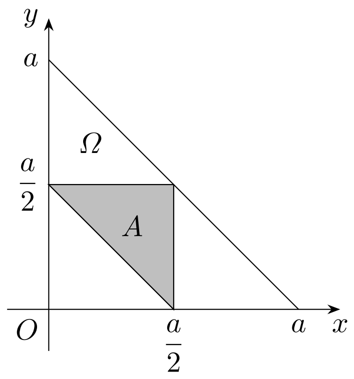

图 1.2

第二章　随机变量及其分布

2.1　随机变量及其分布函数

2.2　离散型随机变量及其概率分布

2.2.1　将 3 个球随机地放入 4 个杯子中, 求杯子中球的最大个数 X 的概率分布.

解：将 3 个相同的球随机地放入 4 个不同的杯子中, 共有 4^3 种情况.

X 所有可能的取值为 1,2,3. 当 $X=1$ 时, 3 个球被放入不同的杯子中, 第一个球放入 4 个杯子中的任意一个, 第二个球放入剩下 3 个杯子中的任意一个, 第三个球放入剩下 2 个杯子中的任意一个, 共有 $4\times3\times2=24$ 种情况. 因此

$$P(X=1)=\frac{24}{4^3}=\frac{3}{8}$$

当 $X=3$ 时, 3 个球被放入同一个杯子中, 此时有 4 种情况, 因此

$$P(X=3)=\frac{4}{4^3}=\frac{1}{16}$$

由于 $P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1$, 所以

$$P(X=2)=1-P(X=1)-P(X=3)=1-\frac{3}{8}-\frac{1}{16}=\frac{9}{16}$$

综上, X 的概率分布为

X	1	2	3
P	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{16}$

第三章　二维随机变量及其分布

第四章　随机变量的数字特征

4.1　数学期望

4.2　方差

4.2.1　设 $g(x)$ 为随机变量 X 取值的集合上的非负不减函数, 且 $E(g(X))$ 存在, 证明: 对任意的 $\varepsilon > 0$, 有

$$P(X > \varepsilon) \leqslant \frac{E(g(X))}{g(\varepsilon)}$$

证明： 因为 $g(x)$ 是非负不减函数, 所以当 $x > \varepsilon$ 时有 $g(x) > g(\varepsilon)$, 进而有 $\dfrac{g(x)}{g(\varepsilon)} > 1$.

如果 X 是离散型随机变量, 设 X 的概率分布为 $P(X = x_k) = p_k, k = 1, 2, \cdots$, 则

$$P(X > \varepsilon) = \sum_{x_k > \varepsilon} p_k \leqslant \sum_{x_k > \varepsilon} \frac{g(x_k)}{g(\varepsilon)} p_k \leqslant \frac{1}{g(\varepsilon)} \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k) p_k = \frac{E(g(X))}{g(\varepsilon)}$$

如果 X 是连续型随机变量, 设 X 的概率密度函数为 $f(x)$, 则

$$P(X > \varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{g(x)}{g(\varepsilon)} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{g(\varepsilon)} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{E(g(X))}{g(\varepsilon)}$$

□