

概率论与数理统计习题集

赵子轩

2024 年 11 月 25 日

目录

第一章 随机事件及其概率	1
1.1 随机事件	1
1.2 随机事件的概率	3
第二章 随机变量及其分布	10
第三章 二维随机变量及其分布	11
第四章 随机变量的数字特征	12
4.1 数学期望	12
4.2 方差	12

第一章 随机事件及其概率

1.1 随机事件

1.1.1 写出下列随机试验的样本空间:

- (1) 抛一枚硬币, 观察正面和反面出现的情况;
- (2) 抛三枚硬币, 观察正面和反面出现的情况;
- (3) 连续抛一枚硬币, 直至出现正面为止;
- (4) 抛一枚骰子, 观察出现的点数;
- (5) 抛两枚骰子, 观察出现的点数;
- (6) 抛两枚骰子, 记录出现的点数之和;
- (7) 在一个箱子中装有 10 个同型号的某种零件, 其中有 3 个次品和 7 个合格品, 从该箱子中任取 3 个零件, 观察其中次品的个数;
- (8) 记录某机场在一天内收到咨询电话的次数;
- (9) 测试电视机的寿命;
- (10) 口袋中有黑、白、红球各一个, 从中任取两个球; 先从中取出一个, 放回后再取出一个;
- (11) 口袋中有黑、白、红球各一个, 从中任取两个球; 先从中取出一个, 不放回后再取出一个.

解: (1) $\Omega = \{0, 1\}$, 其中 0 表示反面, 1 表示正面.

(2) $\Omega = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$

(3) $\Omega = \{(1), (0, 1), (0, 0, 1), (0, 0, 0, 1), \dots\}$

(4) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(5) $\Omega = \{(x, y) \mid x, y = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(6) $\Omega = \{2, 3, 4, \dots, 12\}$

(7) $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$

(8) $\Omega = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

(9) $\Omega = [0, +\infty)$

(10) $\Omega = \{\text{黑黑}, \text{黑白}, \text{黑红}, \text{白白}, \text{白黑}, \text{白红}, \text{红黑}, \text{红白}, \text{红红}\}$

(11) $\Omega = \{\text{黑白}, \text{黑红}, \text{白黑}, \text{白红}, \text{红黑}, \text{红白}\}$

1.1.2 设 A, B, C 为三事件, 试表示下列事件:

- (1) A 发生, B, C 不发生;
- (2) A, B, C 都发生;
- (3) A, B, C 都不发生;
- (4) A, B, C 中只有一个发生;

- (5) A, B, C 中至少有一个发生;
 (6) A, B, C 中至多有一个发生;
 (7) A, B, C 中至少有一个不发生;
 (8) A, B, C 中至多有两个发生;
 (9) A, B, C 中至少有两个发生;
 (10) A, B, C 中恰好有两个发生.

解: (1) $A\overline{B}\overline{C}$
 (2) ABC
 (3) $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$
 (4) $A\overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\overline{B}C$
 (5) $\Omega - \overline{A}\overline{B}\overline{C} = \overline{\overline{A}\overline{B}\overline{C}} = A \cup B \cup C$
 (6) $\overline{A}\overline{B}\overline{C} \cup A\overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\overline{B}C$
 (7) $\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$
 (8) $\Omega - ABC = \overline{ABC} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$
 (9) $AB \cup AC \cup BC$
 (10) $AB\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup \overline{A}BC$

1.1.3 判断下列命题是否成立:

- (1) $A - (B - C) = (A - B) \cup C$;
 (2) 若 $AB = \emptyset$ 且 $C \subseteq A$, 则 $BC = \emptyset$;
 (3) $(A \cup B) - B = A$;
 (4) $(A - B) \cup B = A$.

解: (1)

$$\begin{aligned}
 A - (B - C) &= A - B\overline{C} \\
 &= \overline{A\overline{B}\overline{C}} \\
 &= A(\overline{B} \cup C) \\
 &= (A\overline{B}) \cup (AC) \\
 &= (A - B) \cup (AC) \\
 &\neq (A - B) \cup C
 \end{aligned}$$

命题 1 不成立.

(2) 成立.

(3)

$$(A \cup B) - B = (A \cup B)\overline{B} = (A\overline{B}) \cup (B\overline{B}) = A\overline{B} \neq A$$

命题 3 不成立.

(4)

$$(A - B) \cup B = (A\overline{B}) \cup B = (A \cup B)(\overline{B} \cup B) = A \cup B \neq A$$

命题 4 不成立.

1.2 随机事件的概率

1.2.1 设 A, B 是同一个试验中的两个事件, $P(A) = 0.6, P(A - B) = 0.2, P(A \cup B) = 0.9$. 求 $P(\overline{AB}), P(B), P((\overline{A} \cup B)(A \cup \overline{B}))$.

解: 由于 $P(A - B) = P(A) - P(AB)$, 所以

$$P(AB) = P(A) - P(A - B) = 0.6 - 0.2 = 0.4$$

进而可得

$$P(\overline{AB}) = 1 - P(AB) = 1 - 0.4 = 0.6$$

由于 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$, 所以

$$P(B) = P(A \cup B) - P(A) + P(AB) = 0.9 - 0.6 + 0.4 = 0.7$$

由随机事件的运算性质可得

$$\begin{aligned} (\overline{A} \cup B)(A \cup \overline{B}) &= [(\overline{A} \cup B)A] \cup [(\overline{A} \cup B)\overline{B}] \\ &= (A\overline{A}) \cup (AB) \cup (\overline{A}\overline{B}) \cup (B\overline{B}) \\ &= (AB) \cup (\overline{A}\overline{B}) \end{aligned}$$

又因为 $(AB)(\overline{A}\overline{B}) = (AB)(\overline{A \cup B}) = \emptyset$, 所以

$$\begin{aligned} P((\overline{A} \cup B)(A \cup \overline{B})) &= P((AB) \cup (\overline{A}\overline{B})) \\ &= P(AB) + P(\overline{A}\overline{B}) \\ &= P(AB) + 1 - P(A \cup B) \\ &= 0.4 + 1 - 0.9 \\ &= 0.5 \end{aligned}$$

1.2.2 设 A 和 B 是同一试验 E 的两个随机事件, 证明: $1 - P(\overline{A}) - P(\overline{B}) \leq P(AB) \leq P(A \cup B)$.

证明: 因为 $AB \subseteq A \subseteq (A \cup B)$, 所以

$$P(AB) \leq P(A \cup B)$$

因为

$$1 - P(AB) = P(\overline{AB}) = P(\overline{A \cup B}) \leq P(\overline{A}) + P(\overline{B})$$

所以

$$1 - P(\overline{A}) - P(\overline{B}) \leq P(AB)$$

□

1.2.3 已知 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}, P(AB) = 0, P(AC) = P(BC) = \frac{1}{16}$. 则 A, B, C 中至少发生一个的概率是多少? A, B, C 都不发生的概率是多少?

解: 因为 $P(AB) = 0$, 且 $ABC \subseteq AB$, 由概率的单调性可知 $P(ABC) = 0$. 由概率的加法公式可得 A, B, C 中至少发生一个的概率为

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 0 - \frac{1}{16} - \frac{1}{16} + 0 \\ &= \frac{5}{8} \end{aligned}$$

A, B, C 都不发生的概率为

$$\begin{aligned} P(\overline{A}\overline{B}\overline{C}) &= P(\overline{A \cup B \cup C}) \\ &= 1 - P(A \cup B \cup C) \\ &= 1 - \frac{5}{8} \\ &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

1.2.4 抛两枚硬币, 求出现一个正面一个反面的概率.

解: 此试验的样本空间为 $\Omega = \{(\text{正}, \text{正}), (\text{正}, \text{反}), (\text{反}, \text{正}), (\text{反}, \text{反})\}$, 样本点的个数为 4, 且每个样本点发生的可能性是相等的. 事件“出现一个正面一个反面”含有的样本点个数为 2, 根据古典概型可得该事件发生的概率为 $\frac{1}{2}$.

备注

如果将样本空间写成 $\Omega' = \{(\text{正}, \text{正}), (\text{反}, \text{反}), (\text{一正一反})\}$, 这 3 个样本点不是等可能的, 不满足古典概型的条件.

1.2.5 从 1, 2, \dots , 10 这 10 个数字中任取 3 个, 求大小在中间的数字恰好为 5 的概率.

解: 从 10 个数字中任取 3 个, 共有 C_{10}^3 种取法. 如果大小在中间的数字恰好为 5, 必须有一个小于 5、一个等于 5、一个大于 5, 这样的取法有 $C_4^1 C_1^1 C_5^1$ 种. 因此所求概率为

$$p = \frac{C_4^1 C_1^1 C_5^1}{C_{10}^3} = \frac{4 \times 1 \times 5}{120} = \frac{1}{6}$$

1.2.6 任取两个正整数, 求它们的和为偶数的概率.

解: 记取出偶数为“0”, 取出奇数为“1”, 则随机试验“任取两个正整数”的样本空间为

$$\Omega = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$$

令事件 A 表示“取出的两个正整数之和为偶数”, 则 $A = \{(0, 0), (1, 1)\}$, 从而所求概率为

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

1.2.7 将 15 名新生 (其中有 3 名优秀生) 随机地分配到 3 个班级去, 其中一班 4 名, 二班 5 名, 三班 6 名. 求:

- (1) 每个班级各分配到一名优秀生的概率;
- (2) 3 名优秀生分配到一个指定班级的概率;
- (3) 3 名优秀生分配到同一个班级的概率.

解: 将 15 名新生随机地分配给一班 4 名、二班 5 名、三班 6 名, 共有 $C_{15}^4 C_{11}^5 C_6^6$ 种分法.

(1) 将 3 名优秀生分配到三个班级的分法共有 A_3^3 种, 将其余 12 名新生分配给一班 3 名、二班 4 名、三班 5 名的分法共有 $C_{12}^3 C_9^4 C_5^5$ 种, 则每个班级各分配到一名优秀生的分法共有 $A_3^3 C_{12}^3 C_9^4 C_5^5$ 种. 因此所求概率为

$$p = \frac{A_3^3 C_{12}^3 C_9^4 C_5^5}{C_{15}^4 C_{11}^5 C_6^6} = \frac{24}{91}$$

(2) 如果将 3 名优秀生分配到一班, 则其余 12 名新生将分配给一班 1 名、二班 5 名、三班 6 名, 此时分法共有 $C_{12}^1 C_{11}^5 C_6^6$ 种, 所求概率为

$$p_1 = \frac{C_{12}^1 C_{11}^5 C_6^6}{C_{15}^4 C_{11}^5 C_6^6} = \frac{4}{455}$$

如果将 3 名优秀生分配到二班, 则其余 12 名新生将分配给一班 4 名、二班 2 名、三班 6 名, 此时分法共有 $C_{12}^4 C_8^2 C_6^6$ 种, 所求概率为

$$p_2 = \frac{C_{12}^4 C_8^2 C_6^6}{C_{15}^4 C_{11}^5 C_6^6} = \frac{2}{91}$$

如果将 3 名优秀生分配到三班, 则其余 12 名新生将分配给一班 4 名、二班 5 名、三班 3 名, 此时分法共有 $C_{12}^4 C_8^5 C_3^3$ 种, 所求概率为

$$p_3 = \frac{C_{12}^4 C_8^5 C_3^3}{C_{15}^4 C_{11}^5 C_6^6} = \frac{4}{91}$$

(3) 用 A_i 表示“3 名优秀生全部分配到 i 班” ($i = 1, 2, 3$), 则事件“3 名优秀生分配到同一个班级”可以表示为 $A_1 \cup A_2 \cup A_3$. 又因为 $A_i A_j = \emptyset$ ($i \neq j, i, j = 1, 2, 3$), 所以所求概率为

$$p = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{4}{455} + \frac{2}{91} + \frac{4}{91} = \frac{34}{455}$$

1.2.8 抛两颗骰子, 求下列事件的概率:

- (1) 点数之和为 6;
- (2) 点数之和不超过 6;
- (3) 至少有一个 6 点.

解: 抛两颗骰子所得点数的样本空间为 $\Omega = \{(x, y) \mid x, y = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 样本点数量为 36.

(1) 令事件 A 为“点数之和为 6”, 则

$$A = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$$

所以所求概率为

$$P(A) = \frac{5}{36}$$

(2) 令事件 B 为“点数之和不超过 6”, 则

$$B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 3), \\ (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (5, 1)\}$$

所以所求概率为

$$P(B) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

(3) 令事件 C 为“至少有一个 6 点”, 则

$$C = \{(1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6), (6, 6), \\ (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5)\}$$

所以所求概率为

$$P(C) = \frac{11}{36}$$

1.2.9 考虑一元二次方程 $x^2 + Bx + C = 0$, 其中 B, C 分别是将一颗骰子连续抛两次先后出现的点数, 求该方程有实根的概率 p 和有重根的概率 q .

解: 将一颗骰子连续抛两次所得点数的样本空间为 $\Omega = \{(B, C) \mid B, C = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 样本点数量为 36.

事件“该方程有实根”发生的条件为 $B^2 - 4C \geq 0$, 而

$$\{B^2 - 4C \geq 0\} = \{(2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (6, 2), \\ (4, 3), (5, 3), (6, 3), (4, 4), (5, 4), (6, 4), (5, 5), (6, 5), (5, 6), (6, 6)\}$$

共有 19 个样本点, 因此

$$p = P(B^2 - 4C \geq 0) = \frac{19}{36}$$

事件“该方程有重根”发生的条件为 $B^2 - 4C = 0$, 而

$$\{B^2 - 4C = 0\} = \{(2, 1), (4, 4)\}$$

共有 2 个样本点, 因此

$$q = P(B^2 - 4C = 0) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

1.2.10 从 N 个数字 $1, 2, \dots, N$ 中可重复地随机抽取 n 次, 求抽到的最大数字正好为 k ($1 \leq k \leq N$) 的概率.

解: 从 N 个数字中可重复地抽取 n 次, 共有 N^n 种取法.

记事件 B_i 为“抽到的最大数字小于等于 i ” ($i = 1, 2, \dots, N$), 则 B_i 发生只需每次从 $1, 2, \dots, i$ 中取数即可, 共有 i^n 种取法, 由古典概型可知

$$P(B_i) = \frac{i^n}{N^n}$$

记事件 A_k 为“抽到的最大数字正好为 k ”, 则 $A_k = B_k - B_{k-1}$, 且 $B_{k-1} \subseteq B_k$, 因此

$$\begin{aligned} P(A_k) &= P(B_k - B_{k-1}) \\ &= P(B_k) - P(B_{k-1}) \\ &= \frac{k^n}{N^n} - \frac{(k-1)^n}{N^n} \\ &= \frac{k^n - (k-1)^n}{N^n} \end{aligned}$$

1.2.11 从一副 52 张的扑克牌中任取 4 张, 求下列事件的概率:

- (1) 全是黑桃;
- (2) 同花;
- (3) 没有两张同一花色;
- (4) 同色.

解: 从 52 张扑克牌中任取 4 张的取法有 C_{52}^4 种.

(1) 一副扑克牌中有 13 张黑桃, 从中取出 4 张的取法有 C_{13}^4 种, 因此所求概率为

$$p_1 = \frac{C_{13}^4}{C_{52}^4} = \frac{11}{4165}$$

(2) 取出的 4 张牌全是某一特定花色的取法有 C_{13}^4 种, 而一副扑克牌有 4 种花色, 则 4 张牌同花的取法有 $4C_{13}^4$ 种, 因此所求概率为

$$p_2 = \frac{4C_{13}^4}{C_{52}^4} = \frac{44}{4165}$$

(3) “没有两张同一花色” 需要从 4 种花色中各取一张, 取法有 13^4 种, 因此所求概率为

$$p_3 = \frac{13^4}{C_{52}^4} = \frac{2197}{20825}$$

(4) 一副扑克牌中有红色和黑色牌各 26 张, 取出 4 张同色牌的取法有 $2C_{26}^4$ 种, 因此所求概率为

$$p_4 = \frac{2C_{26}^4}{C_{52}^4} = \frac{92}{833}$$

1.2.12 把 10 本书任意地放在书架上, 求其中指定的四本书放在一起的概率.

解: 把 10 本书任意地放在书架上, 共有 A_{10}^{10} 种放法. 当其中指定的四本书放在一起时, 将这四本书看作一个整体, 与其他 6 本书一起放在书架上, 有 A_7^7 种放法; 放在一起的 4 本书又有不同的顺序, 有 A_4^4 种放法. 因此 “其中指定的四本书放在一起” 共有 $A_7^7 A_4^4$ 种放法, 所求概率为

$$p = \frac{A_7^7 A_4^4}{A_{10}^{10}} = \frac{7! \times 4!}{10!} = \frac{1}{30}$$

1.2.13 n 个人随机地围一圆桌而坐, 求甲、乙两人相邻而坐的概率.

解:

解法一: n 个人围坐, 共有 $\frac{A_n^n}{n} = (n-1)!$ 种坐法. 当甲、乙两人相邻而坐时, 将甲、乙两人看作整体, 有 $\frac{A_{n-1}^{n-1}}{n-1} A_2^2 = 2(n-2)!$ 种坐法. 因此所求概率为

$$p = \frac{2(n-2)!}{(n-1)!} = \frac{2}{n-1}$$

解法二: 设甲先坐好, 再考虑乙的坐法. 此时乙总共有 $n-1$ 个位置可坐, 且这 $n-1$ 个位置都是等可能的, 而乙与甲相邻有 2 个位置, 因此所求概率为

$$p = \frac{2}{n-1}$$

1.2.14 同时掷 5 枚骰子, 求下列事件的概率:

- (1) 每枚都不一样;
- (2) 其中 2 枚相同 (成对), 另外 3 枚各不相同且与成对的 2 枚也不同;
- (3) 出现两组成对的骰子;
- (4) 其中 3 枚相同, 另外 2 枚不同;
- (5) 其中 4 枚相同;
- (6) 5 枚全部相同.

解: 同时掷 5 枚骰子共有 6^5 种不同情况.

$$(1) p_1 = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{6^5} = \frac{5}{54}$$

$$(2) p_2 = \frac{C_5^2 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{6^5} = \frac{25}{54}$$

(3) 将 5 枚骰子分成 3 组, 其中 2 组包含 2 枚骰子, 另外一组只有 1 个骰子, 这样的分法有 $\frac{C_5^2 C_3^2}{2} = 15$ 种. 这三组骰子出现的点数不同, 有 $6 \times 5 \times 4 = 120$ 种情况, 因此所求概率为

$$p_3 = \frac{15 \times 120}{6^5} = \frac{25}{108}$$

$$(4) p_4 = \frac{C_5^3 \times 6 \times 5 \times 4}{6^5} = \frac{25}{162}$$

$$(5) p_5 = \frac{C_5^4 \times 6 \times 5}{6^5} = \frac{25}{1296}$$

$$(6) p_6 = \frac{6}{6^5} = \frac{1}{1296}$$

1.2.15 在长度为 a 的线段内任取两点将其分为三段, 求它们可以构成一个三角形的概率.

解: 设分成的三段长度分别为 x, y 和 $a - x - y$, 则有

$$\begin{cases} 0 < x < a \\ 0 < y < a \\ 0 < a - x - y < a \end{cases}$$

其中 $0 < a - x - y < a$ 等价于 $0 < x + y < a$, 则样本空间为

$$\Omega = \{(x, y) \mid 0 < x < a, 0 < y < a, 0 < x + y < a\}$$

设事件 $A =$ “线段分成的三段可以构成三角形”. 由于三角形中任意两边之和大于第三边, 则事件 A 发生的条件为

$$\begin{cases} 0 < x < y + (a - x - y) \\ 0 < y < x + (a - x - y) \\ 0 < a - x - y < x + y \end{cases}$$

整理得

$$A = \{(x, y) \mid 0 < x < \frac{a}{2}, 0 < y < \frac{a}{2}, \frac{a}{2} < x + y < a\}$$

如图 1.1 所示. 则所求概率为

$$P(A) = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{a}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}a^2} = \frac{1}{4}$$

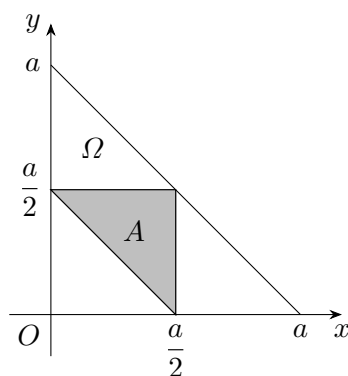


图 1.1

第二章 随机变量及其分布

第三章 二维随机变量及其分布

第四章 随机变量的数字特征

4.1 数学期望

4.2 方差

4.2.1 设 $g(x)$ 为随机变量 X 取值的集合上的非负不减函数, 且 $E(g(X))$ 存在, 证明: 对任意的 $\varepsilon > 0$, 有

$$P(X > \varepsilon) \leq \frac{E(g(X))}{g(\varepsilon)}$$

证明: 因为 $g(x)$ 是非负不减函数, 所以当 $x > \varepsilon$ 时有 $g(x) > g(\varepsilon)$, 进而有 $\frac{g(x)}{g(\varepsilon)} > 1$.

如果 X 是离散型随机变量, 设 X 的概率分布为 $P(X = x_k) = p_k, k = 1, 2, \dots$, 则

$$P(X > \varepsilon) = \sum_{x_k > \varepsilon} p_k \leq \sum_{x_k > \varepsilon} \frac{g(x_k)}{g(\varepsilon)} p_k \leq \frac{1}{g(\varepsilon)} \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k) p_k = \frac{E(g(X))}{g(\varepsilon)}$$

如果 X 是连续型随机变量, 设 X 的概率密度函数为 $f(x)$, 则

$$P(X > \varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{+\infty} f(x) dx \leq \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{g(x)}{g(\varepsilon)} f(x) dx \leq \frac{1}{g(\varepsilon)} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx = \frac{E(g(X))}{g(\varepsilon)}$$

□