概率论与数理统计

ZZX-JLU

2022 年 11 月 5 日

目录

1 随机事件及其概率

1.1 随机试验

在一定条件下必然出现的现象叫做**必然现象**. 在相同的条件下，可能出现不同的结果，而在试验或观测之前不能预知确切结果的现象叫做**随机现象**.

随机现象具有随机性和统计规律性.

- 随机性：对随机现象进行观测时，不能预先确定其结果.
- 统计规律性：对随机现象进行大量重复观测后，其结果往往会表现出某种规律性.

为了研究和揭示随机现象的统计规律性，需要对随机现象进行大量重复的观察、测量或试验，统称为试验.

如果试验具有以下特点：

1. 可重复性：试验可以在相同条件下重复进行多次，甚至进行无限次；
2. 可观测性：每次试验的所有可能结果都是明确的、可以观测的，并且试验的可能结果有两个或两个以上；
3. 随机性：每次试验出现的结果是不确定的，在试验之前无法预先确定究竟会出现哪一个结果，

则称之为**随机试验**，简称为**试验**.

通常用字母 E 表示一个随机试验. 随机试验 E 的基本结果称为**样本点**，用 ω 表示. 随机试验 E 的所有基本结果的集合称为**样本空间**，用 $\Omega = \{\omega\}$ 表示.

1.2 随机事件

1.2.1 随机事件的概念

随机试验 E 的样本空间 $\Omega = \{\omega\}$ 的子集称为随机试验 E 的**随机事件**，简称为**事件**，用大写字母 A, B, C 等表示.

设 $A \subseteq \Omega$，如果试验结果 $\omega \in A$，则称在这次试验中事件 A 发生；如果 $\omega \notin A$，则称事件 A 不发生.

由一个样本点 ω 组成的事件称为**基本事件**.

样本空间 Ω 本身也是 Ω 的子集，它包含 Ω 的所有样本点，在每次试验中 Ω 必然发生，称为**必然事件**.

空集 $\varnothing$ 也是 Ω 的子集，它不包含任何样本点，在每次试验中都不可能发生，称为**不可能事件**.

在一个样本空间中，如果只有有限个样本点，则称它为**有限样本空间**；如果有无限个样本点，则称它为**无限样本空间**.

1.2.2 随机事件的关系

事件的包含

如果当事件 A 发生时事件 B 一定发生，则称事件 B **包含**事件 A，记作 $A \subseteq B$.

对于任意事件 A，有 $\varnothing \subseteq A \subseteq \Omega$.

如果 $A \subseteq B, B \subseteq C$，则 $A \subseteq C$.

事件的相等

如果事件 A 和事件 B 相互包含，即 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$，则称事件 A 与事件 B **相等**，记作 $A = B$.

事件的互不相容

如果事件 A 和事件 B 在同一次试验中不能同时发生，则称事件 A 与事件 B 是**互不相容**的，或称事件 A 与事件 B 是**互斥**的.

任意两个基本事件一定互斥.

事件的互逆

如果在每一次试验中事件 A 和事件 B 必有一个且仅有一个发生，则称事件 A 与事件 B 是**互逆**的或**对立**的，称其中的一个事件是另一个事件的**逆事件**，记作 $\overline{A}=B$，或 $\overline{B}=A$.

显然，$\overline{\overline{A}}=A$.

1.2.3 随机事件的运算

事件的并

如果事件 A 和事件 B 至少有一个发生，则这样的一个事件称为事件 A 与事件 B 的**并事件**或**和事件**，记作 $A\cup B$.

$$A\cup B=\{\omega \mid \omega\in A \text{ 或 } \omega\in B\}$$

事件 A 和事件 B 作为样本空间 Ω 的子集，并事件 $A\cup B$ 就是子集 A 与 B 的并集.

对于任何事件 A 与 B，有

$$A\cup A=A$$

$$A\cup\varnothing=A$$

$$A\cup B=B\cup A$$

$$A\cup\overline{A}=\Omega$$

$$A\subseteq A\cup B$$

$$B\subseteq A\cup B$$

如果 $A\subseteq B$，则有 $A\cup B=B$.

事件的并可以推广到多个事件的情形：

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\{\text{事件}A_1,A_2,\cdots,A_n\text{中至少有一个发生}\}$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=\{\text{事件}A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots\text{中至少有一个发生}\}$$

事件的交

如果事件 A 和事件 B 同时发生，则这样的一个事件称为事件 A 与事件 B 的**交事件**或**积事件**，记作 $A\cap B$ 或 AB.

$$A\cap B=\{\omega \mid \omega\in A \text{ 且 } \omega\in B\}$$

事件 A 和事件 B 作为样本空间 Ω 的子集，交事件 $A\cap B$ 就是子集 A 与 B 的交集.

对于任何事件 A 与 B，有

$$A\cap A=A$$

$$A\cap\emptyset=\emptyset$$

$$A\cap B=B\cap A$$

$$A\cap\overline{A}=\emptyset$$

$$A\cap B\subseteq A$$

$$A\cap B\subseteq B$$

如果 $A\subseteq B$，则有 $A\cap B=A$.

如果 A 与 B 互不相容，则有 $A\cap B=\emptyset$.

事件的交可以推广到多个事件的情形：

$$\bigcap_{i=1}^{n}A_i=\{\text{事件}A_1,A_2,\cdots,A_n\text{同时发生}\}$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i=\{\text{事件}A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots\text{同时发生}\}$$

事件的差

如果事件 A 发生而事件 B 不发生，则这样的一个事件称为事件 A 与事件 B 的**差事件**，记作 $A-B$.

$$A-B=\{\omega\mid\omega\in A\text{ 且 }\omega\notin B\}$$

对于任何事件 A 与 B，有

$$A-A=\emptyset$$

$$A-\emptyset=A$$

$$A-B=A-AB=A\overline{B}$$

$$\Omega-A=\overline{A}$$

$$A-\Omega=\emptyset$$

$$(A-B)\cup B=(B-A)\cup A=A\cup B$$

$$A\cup B=A\cup(B-AB)=B\cup(A-AB)$$

$A-B, AB, B-A$ 两两互斥，且 $A\cup B=(A-B)\cup AB\cup(B-A)$，$A=(A-B)\cup AB$，$B=(B-A)\cup AB$.

随机事件的运算规律

1. 交换律：$A\cup B=B\cup A$，$AB=BA$.
2. 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(AB)C=A(BC)$.
3. 分配律：$A(B\cup C)=(AB)\cup(AC)$，$A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C)$.
4. 对偶律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$，$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

对于多个随机事件，以上的运算规律也成立.

1.3 随机事件的概率

1.3.1 频率

定义 1.1 设在相同的条件下进行的 n 次试验中，事件 A 发生了 n_A 次，则称 n_A 为事件 A 发生的**频数**，称比值 $\dfrac{n_A}{n}$ 为事件 A 发生的**频率**，记作 $f_n(A)$，即

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n}$$

事件 A 发生的频率反映了事件 A 在 n 次试验中发生的频繁程度. 频率越大，表明事件 A 的发生越频繁，从而可知事件 A 在一次试验中发生的可能性越大.

频率的基本性质：

性质 1(非负性) 对于任意事件 A，有 $f_n(A)\geqslant 0$.

性质 2(规范性) 对于必然事件 Ω，有 $f_n(\Omega)=1$.

性质 3(有限可加性) 对于两两互不相容的事件 $A_1, A_2, \cdots, A_m$（即当 $i \neq j$ 时，有 $A_iA_j = \varnothing$，$i, j = 1, 2, \cdots, m$），有

$$f_n(\bigcup_{i=1}^{m} A_i) = \sum_{i=1}^{m} f_n(A_i)$$

在相同的条件下重复进行 n 次试验，当 n 增大时，事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 呈现出稳定性，逐渐稳定于某一常数 p. 用这一常数表示事件 A 发生的可能性大小，称为事件 A 的概率，记为 $P(A)$，即 $P(A) = p$.

当 n 很大时，可以用频率 $f_n(A)$ 作为概率 $P(A)$ 的近似值.

1.3.2 概率

定义 1.2 设随机试验 E 的样本空间为 Ω，如果对于 E 的每一个事件 A，有唯一的实数 $P(A)$ 和它对应，并且这个事件的函数 $P(A)$ 满足以下条件：

1. 非负性：对于任意事件 A，有 $P(A) \geqslant 0$；
2. 规范性：对于必然事件 Ω，有 $P(\Omega) = 1$；
3. 可列可加性：对于两两互不相容的事件 $A_1, A_2, \cdots$，有

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的**概率**.

性质 1 对于不可能事件 $\varnothing$，有 $P(\varnothing) = 0$.

证明：因为 $\varnothing = \varnothing \cup \varnothing \cup \cdots$，根据概率的可列可加性，有

$$P(\varnothing) = P(\varnothing) + P(\varnothing) + \cdots$$

由概率的非负性知 $P(\varnothing) \geqslant 0$，因此 $P(\varnothing) = 0$. □

性质 2(有限可加性) 对于两两互不相容的事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

证明：令 $A_i = \varnothing\ (i = n+1, n+2, \cdots)$，根据概率的可列可加性及性质1.3.2，有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

□

性质 3 对于任一事件 A，有 $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

证明：因为 $A \cup \overline{A} = \varOmega$，且 $A\overline{A} = \varnothing$，由性质 2 及概率的规范性，得

$$P(\varOmega) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

即

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

□

性质 4 如果 $A \subseteq B$，则有 $P(B - A) = P(B) - P(A)$，$P(A) \leqslant P(B)$.

证明：因为 $A \subseteq B$，从而有 $B = A \cup (B - A)$，且 $A(B - A) = \varnothing$，由性质 2 可得

$$P(B) = P(A \cup (B - A)) = P(A) + P(B - A)$$

所以

$$P(B - A) = P(B) - P(A)$$

由于 $P(B - A) \geqslant 0$，因此

$$P(A) \leqslant P(B)$$

□

性质 5 对于任一事件 A，有 $P(A) \leqslant 1$.

证明：因为 $A \subseteq \Omega$，由性质 4 及概率的规范性，可得

$$P(A) \leqslant P(\Omega) = 1$$

□

性质 6(概率的减法公式) 对于任意两个事件 A 与 B，有 $P(B-A) = P(B) - P(AB)$.

证明：由于 $B - A = B - AB$，而 $AB \subseteq B$，根据性质 4 可得

$$P(B-A) = P(B-AB) = P(B) - P(AB)$$

□