概率论与数理统计

ZZX-JLU

2022 年 11 月 4 日

目录

1 随机事件及其概率

1.1 随机试验

如果试验具有以下特点：

1. 可重复性：试验可以在相同条件下重复进行多次，甚至进行无限次；
2. 可观测性：每次试验的所有可能结果都是明确的、可以观测的，并且试验的可能结果有两个或两个以上；
3. 随机性：每次试验出现的结果是不确定的，在试验之前无法预先确定究竟会出现哪一个结果，

则称之为**随机试验**，简称为**试验**.

通常用字母 E 表示一个随机试验. 随机试验 E 的基本结果称为**样本点**，用 ω 表示. 称随机试验 E 的所有基本结果的集合为**样本空间**，用 $\Omega = \{\omega\}$ 表示.

1.2 随机事件

1.2.1 随机事件的概念

随机试验 E 的样本空间 $\Omega = \{\omega\}$ 的子集称为随机试验 E 的**随机事件**，简称为**事件**，用大写字母 A, B, C 等表示.

设 $A \subseteq \Omega$，如果试验结果 $\omega \in A$，则称在这次试验中事件 A 发生；如果 $\omega \notin A$，则称事件 A 不发生.

由一个样本点 ω 组成的事件称为**基本事件**.

样本空间 Ω 本身也是 Ω 的子集，它包含 Ω 的所有样本点，在每次试验中 Ω 必然发生，称为**必然事件**.

空集 $\varnothing$ 也是 Ω 的子集，它不包含任何样本点，在每次试验中都不可能发生，称为**不可能事件**.

在一个样本空间中，如果只有有限个样本点，则称它为**有限样本空间**；如果有无限个样本点，则称它为**无限样本空间**.

1.2.2 随机事件的关系

事件的包含

如果当事件 A 发生时事件 B 一定发生，则称事件 B **包含**事件 A，记作 $A \subseteq B$.

对于任意事件 A，有 $\varnothing \subseteq A \subseteq \Omega$.

如果 $A \subseteq B, B \subseteq C$，则 $A \subseteq C$.

事件的相等

如果事件 A 和事件 B 相互包含，即 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$，则称事件 A 与事件 B **相等**，记作 $A = B$.

事件的互不相容

如果事件 A 和事件 B 在同一次试验中不能同时发生，则称事件 A 与事件 B 是**互不相容**的，或称事件 A 与事件 B 是**互斥**的.

事件的互逆

如果在每一次试验中事件 A 和事件 B 必有一个且仅有一个发生，则称事件 A 与事件 B 是**互逆**的或**对立**的，称其中的一个事件是另一个事件的**逆事件**，记作 $\overline{A} = B$，或 $\overline{B} = A$.

显然，$\overline{\overline{A}} = A$.

1.2.3 随机事件的运算

事件的并

如果事件 A 和事件 B 至少有一个发生，则这样的一个事件称为事件 A 与事件 B 的**并事件**或**和事件**，记作 $A \cup B$.

$$A \cup B = \{\omega \mid \omega \in A \text{ 或 } \omega \in B\}$$

事件 A 和事件 B 作为样本空间 Ω 的子集，并事件 $A\cup B$ 就是子集 A 与 B 的并集.

对于任何事件 A 与 B，有

$$A\cup A=A$$

$$A\cup\varnothing=A$$

$$A\cup B=B\cup A$$

$$A\cup\overline{A}=\Omega$$

$$A\subseteq A\cup B$$

$$B\subseteq A\cup B$$

如果 $A\subseteq B$，则有 $A\cup B=B$.

事件的并可以推广到多个事件的情形：

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\{\text{事件}A_1,A_2,\cdots,A_n\text{中至少有一个发生}\}$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=\{\text{事件}A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots\text{中至少有一个发生}\}$$

事件的交

如果事件 A 和事件 B 同时发生，则这样的一个事件称为事件 A 与事件 B 的**交事件**或**积事件**，记作 $A\cap B$ 或 AB.

$$A\cap B=\{\omega\mid\omega\in A\text{ 且 }\omega\in B\}$$

事件 A 和事件 B 作为样本空间 Ω 的子集，交事件 $A\cap B$ 就是子集 A 与 B 的交集.

对于任何事件 A 与 B，有

$$A\cap A=A$$

$$A\cap\varnothing=\varnothing$$

$$A\cap B=B\cap A$$

$$A\cap\overline{A}=\varnothing$$

$$A\cap B\subseteq A$$

$$A\cap B\subseteq B$$

如果 $A\subseteq B$，则有 $A\cap B=A$. 如果 A 与 B 互不相容，则有 $A\cap B=\varnothing$.

事件的交可以推广到多个事件的情形：

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{\text{事件} A_1, A_2, \cdots, A_n \text{同时发生}\}$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{\text{事件} A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots \text{同时发生}\}$$

事件的差

如果事件 A 发生而事件 B 不发生，则这样的一个事件称为事件 A 与事件 B 的**差事件**，记作 $A - B$.

$$A - B = \{\omega \mid \omega \in A \text{ 且 } \omega \notin B\}$$

对于任何事件 A 与 B，有

$$A - A = \varnothing$$

$$A - \varnothing = A$$

$$A - B = A - AB = A\overline{B}$$

$$\Omega - A = \overline{A}$$

$$A - \Omega = \varnothing$$

$$(A - B) \cup B = A \cup B$$