

# 概率论与数理统计习题集

赵子轩

2024 年 12 月 11 日



# 目录

<b>第一章 随机事件及其概率</b>	<b>1</b>
1.1 随机事件 . . . . .	1
1.2 随机事件的概率 . . . . .	3
<b>第二章 随机变量及其分布</b>	<b>14</b>
2.1 随机变量及其分布函数 . . . . .	14
2.2 离散型随机变量及其概率分布 . . . . .	14
<b>第三章 二维随机变量及其分布</b>	<b>15</b>
<b>第四章 随机变量的数字特征</b>	<b>16</b>
4.1 数学期望 . . . . .	16
4.2 方差 . . . . .	16



# 第一章 随机事件及其概率

## 1.1 随机事件

1.1.1 写出下列随机试验的样本空间:

- (1) 抛一枚硬币, 观察正面和反面出现的情况;
- (2) 抛三枚硬币, 观察正面和反面出现的情况;
- (3) 连续抛一枚硬币, 直至出现正面为止;
- (4) 抛一枚骰子, 观察出现的点数;
- (5) 抛两枚骰子, 观察出现的点数;
- (6) 抛两枚骰子, 记录出现的点数之和;
- (7) 在一个箱子中装有 10 个同型号的某种零件, 其中有 3 个次品和 7 个合格品, 从该箱子中任取 3 个零件, 观察其中次品的个数;
- (8) 记录某机场在一天内收到咨询电话的次数;
- (9) 测试电视机的寿命;
- (10) 口袋中有黑、白、红球各一个, 从中任取两个球; 先从中取出一个, 放回后再取出一个;
- (11) 口袋中有黑、白、红球各一个, 从中任取两个球; 先从中取出一个, 不放回后再取出一个.

解: (1)  $\Omega = \{0, 1\}$ , 其中 0 表示反面, 1 表示正面.

(2)  $\Omega = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$

(3)  $\Omega = \{(1), (0, 1), (0, 0, 1), (0, 0, 0, 1), \dots\}$

(4)  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(5)  $\Omega = \{(x, y) \mid x, y = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(6)  $\Omega = \{2, 3, 4, \dots, 12\}$

(7)  $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$

(8)  $\Omega = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

(9)  $\Omega = [0, +\infty)$

(10)  $\Omega = \{\text{黑黑}, \text{黑白}, \text{黑红}, \text{白白}, \text{白红}, \text{红黑}, \text{红白}, \text{红红}\}$

(11)  $\Omega = \{\text{黑白}, \text{黑红}, \text{白黑}, \text{白红}, \text{红黑}, \text{红白}\}$

1.1.2 设  $A, B, C$  为三事件, 试表示下列事件:

- (1)  $A$  发生,  $B, C$  不发生;
- (2)  $A, B, C$  都发生;
- (3)  $A, B, C$  都不发生;
- (4)  $A, B, C$  中只有一个发生;

- (5)  $A, B, C$  中至少有一个发生;  
 (6)  $A, B, C$  中至多有一个发生;  
 (7)  $A, B, C$  中至少有一个不发生;  
 (8)  $A, B, C$  中至多有两个发生;  
 (9)  $A, B, C$  中至少有两个发生;  
 (10)  $A, B, C$  中恰好有两个发生.

解: (1)  $A\overline{B}\overline{C}$   
 (2)  $ABC$   
 (3)  $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$   
 (4)  $A\overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\overline{B}C$   
 (5)  $\Omega - \overline{A}\overline{B}\overline{C} = \overline{\overline{A}\overline{B}\overline{C}} = A \cup B \cup C$   
 (6)  $\overline{A}\overline{B}\overline{C} \cup A\overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\overline{B}C$   
 (7)  $\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$   
 (8)  $\Omega - ABC = \overline{ABC} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$   
 (9)  $AB \cup AC \cup BC$   
 (10)  $AB\overline{C} \cup \overline{A}BC \cup A\overline{B}C$

**1.1.3** 判断下列命题是否成立:

- (1)  $A - (B - C) = (A - B) \cup C$ ;  
 (2) 若  $AB = \emptyset$  且  $C \subseteq A$ , 则  $BC = \emptyset$ ;  
 (3)  $(A \cup B) - B = A$ ;  
 (4)  $(A - B) \cup B = A$ .

解: (1)

$$\begin{aligned}
 A - (B - C) &= A - B\overline{C} \\
 &= \overline{A\overline{B}\overline{C}} \\
 &= A(\overline{B} \cup C) \\
 &= (A\overline{B}) \cup (AC) \\
 &= (A - B) \cup (AC) \\
 &\neq (A - B) \cup C
 \end{aligned}$$

命题 1 不成立.

(2) 成立.

(3)

$$(A \cup B) - B = (A \cup B)\overline{B} = (A\overline{B}) \cup (B\overline{B}) = A\overline{B} \neq A$$

命题 3 不成立.

(4)

$$(A - B) \cup B = (A\overline{B}) \cup B = (A \cup B)(\overline{B} \cup B) = A \cup B \neq A$$

命题 4 不成立.

**1.1.4** 证明下列事件的运算公式:

(1)  $A = AB \cup A\bar{B}$ ;

(2)  $A \cup B = A \cup \bar{A}B$ .

**证明:** (1)  $AB \cup A\bar{B} = A(B \cup \bar{B}) = A\Omega = A$

(2) 由 (1) 可得  $B = AB \cup \bar{A}B$ , 因此

$$\begin{aligned} A \cup B &= A \cup (AB \cup \bar{A}B) \\ &= (A \cup AB) \cup \bar{A}B \\ &= A(\Omega \cup B) \cup \bar{A}B \\ &= A \cup \bar{A}B \end{aligned}$$

□

## 1.2 随机事件的概率

**1.2.1** 设  $A, B$  是同一个试验中的两个事件,  $P(A) = 0.6, P(A - B) = 0.2, P(A \cup B) = 0.9$ . 求  $P(\bar{A}\bar{B}), P(B), P((\bar{A} \cup B)(A \cup \bar{B}))$ .

**解:** 由于  $P(A - B) = P(A) - P(AB)$ , 所以

$$P(AB) = P(A) - P(A - B) = 0.6 - 0.2 = 0.4$$

进而可得

$$P(\bar{A}\bar{B}) = 1 - P(AB) = 1 - 0.4 = 0.6$$

由于  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ , 所以

$$P(B) = P(A \cup B) - P(A) + P(AB) = 0.9 - 0.6 + 0.4 = 0.7$$

由随机事件的运算性质可得

$$\begin{aligned} (\bar{A} \cup B)(A \cup \bar{B}) &= [(\bar{A} \cup B)A] \cup [(\bar{A} \cup B)\bar{B}] \\ &= (A\bar{A}) \cup (AB) \cup (\bar{A}\bar{B}) \cup (B\bar{B}) \\ &= (AB) \cup (\bar{A} \cup \bar{B}) \end{aligned}$$

又因为  $(AB)(\bar{A} \cup \bar{B}) = (AB)(\bar{A}\bar{B}) = \emptyset$ , 所以

$$\begin{aligned} P((\bar{A} \cup B)(A \cup \bar{B})) &= P((AB) \cup (\bar{A} \cup \bar{B})) \\ &= P(AB) + P(\bar{A} \cup \bar{B}) \\ &= P(AB) + 1 - P(A \cup B) \\ &= 0.4 + 1 - 0.9 \\ &= 0.5 \end{aligned}$$

**1.2.2** 设  $A$  和  $B$  是同一试验  $E$  的两个随机事件, 证明:  $1 - P(\bar{A}) - P(\bar{B}) \leq P(AB) \leq P(A \cup B)$ .

**证明:** 因为  $AB \subseteq A \subseteq (A \cup B)$ , 所以

$$P(AB) \leq P(A \cup B)$$

因为

$$1 - P(AB) = P(\overline{AB}) = P(\overline{A \cup B}) \leq P(\bar{A}) + P(\bar{B})$$

所以

$$1 - P(\bar{A}) - P(\bar{B}) \leq P(AB)$$

□

**1.2.3** 已知  $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}$ ,  $P(AB) = 0$ ,  $P(AC) = P(BC) = \frac{1}{16}$ . 则  $A, B, C$  中至少发生一个的概率是多少?  $A, B, C$  都不发生的概率是多少?

**解:** 因为  $P(AB) = 0$ , 且  $ABC \subseteq AB$ , 由概率的单调性可知  $P(ABC) = 0$ . 由概率的加法公式可得  $A, B, C$  中至少发生一个的概率为

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 0 - \frac{1}{16} - \frac{1}{16} + 0 \\ &= \frac{5}{8} \end{aligned}$$

$A, B, C$  都不发生的概率为

$$\begin{aligned} P(\overline{A \cup B \cup C}) &= P(\overline{A \cup B \cup C}) \\ &= 1 - P(A \cup B \cup C) \\ &= 1 - \frac{5}{8} \\ &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

**1.2.4** 抛两枚硬币, 求出现一个正面一个反面的概率.

**解:** 此试验的样本空间为  $\Omega = \{(\text{正}, \text{正}), (\text{正}, \text{反}), (\text{反}, \text{正}), (\text{反}, \text{反})\}$ , 样本点的个数为 4, 且每个样本点发生的可能性是相等的. 事件“出现一个正面一个反面”含有的样本点个数为 2, 根据古典概型可得该事件发生的概率为  $\frac{1}{2}$ .

#### 备注

如果将样本空间写成  $\Omega' = \{(\text{正}, \text{正}), (\text{反}, \text{反}), (\text{一正一反})\}$ , 这 3 个样本点不是等可能的, 不满足古典概型的条件.

**1.2.5** 从  $n$  个数字  $1, 2, \dots, n$  中任取 3 个, 求大小在中间的数字恰好为  $k$  ( $1 < k < n$ ) 的概率.



**解:** 从  $n$  个数字中任取 3 个, 共有  $C_n^3$  种取法. 如果大小在中间的数字恰好为  $k$ , 必须有一个小于  $k$ 、一个等于  $k$ 、一个大于  $k$ , 这样的取法有  $C_{k-1}^1 C_1^1 C_{n-k}^1$  种. 因此所求概率为

$$p = \frac{C_{k-1}^1 C_1^1 C_{n-k}^1}{C_n^3} = \frac{6(k-1)(n-k)}{n(n-1)(n-2)}$$

### 1.2.6 任取两个正整数, 求它们的和为偶数的概率.

**解:** 记取出偶数为“0”, 取出奇数为“1”, 则随机试验“任取两个正整数”的样本空间为

$$\Omega = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$$

令事件  $A$  表示“取出的两个正整数之和为偶数”, 则  $A = \{(0, 0), (1, 1)\}$ , 从而所求概率为

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

**1.2.7** 将 15 名新生 (其中有 3 名优秀生) 随机地分配到 3 个班级去, 其中一班 4 名, 二班 5 名, 三班 6 名. 求:

- (1) 每个班级各分配到一名优秀生的概率;
- (2) 3 名优秀生分配到一个指定班级的概率;
- (3) 3 名优秀生分配到同一个班级的概率.

**解:** 将 15 名新生随机地分配给一班 4 名、二班 5 名、三班 6 名, 共有  $C_{15}^4 C_{11}^5 C_6^6$  种分法.

(1) 将 3 名优秀生分配到三个班级的分法共有  $A_3^3$  种, 将其余 12 名新生分配给一班 3 名、二班 4 名、三班 5 名的分法共有  $C_{12}^3 C_9^4 C_5^5$  种, 则每个班级各分配到一名优秀生的分法共有  $A_3^3 C_{12}^3 C_9^4 C_5^5$  种. 因此所求概率为

$$p = \frac{A_3^3 C_{12}^3 C_9^4 C_5^5}{C_{15}^4 C_{11}^5 C_6^6} = \frac{24}{91}$$

(2) 如果将 3 名优秀生分配到一班, 则其余 12 名新生将分配给一班 1 名、二班 5 名、三班 6 名, 此时分法共有  $C_{12}^1 C_{11}^5 C_6^6$  种, 所求概率为

$$p_1 = \frac{C_{12}^1 C_{11}^5 C_6^6}{C_{15}^4 C_{11}^5 C_6^6} = \frac{4}{455}$$

如果将 3 名优秀生分配到二班, 则其余 12 名新生将分配给一班 4 名、二班 2 名、三班 6 名, 此时分法共有  $C_{12}^4 C_8^2 C_6^6$  种, 所求概率为

$$p_2 = \frac{C_{12}^4 C_8^2 C_6^6}{C_{15}^4 C_{11}^5 C_6^6} = \frac{2}{91}$$

如果将 3 名优秀生分配到三班, 则其余 12 名新生将分配给一班 4 名、二班 5 名、三班 3 名, 此时分法共有  $C_{12}^4 C_8^5 C_3^3$  种, 所求概率为

$$p_3 = \frac{C_{12}^4 C_8^5 C_3^3}{C_{15}^4 C_{11}^5 C_6^6} = \frac{4}{91}$$

(3) 用  $A_i$  表示“3 名优秀生全部分配到  $i$  班” ( $i = 1, 2, 3$ ), 则事件“3 名优秀生分配到同一个班级”可以表示为  $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ . 又因为  $A_i A_j = \emptyset$  ( $i \neq j, i, j = 1, 2, 3$ ), 所以所求概率为

$$p = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{4}{455} + \frac{2}{91} + \frac{4}{91} = \frac{34}{455}$$

**1.2.8** 抛两颗骰子, 求下列事件的概率:

- (1) 点数之和为 6;
- (2) 点数之和不超过 6;
- (3) 至少有一个 6 点.

**解:** 抛两颗骰子所得点数的样本空间为  $\Omega = \{(x, y) \mid x, y = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , 样本点数量为 36.

(1) 令事件  $A$  为“点数之和为 6”, 则

$$A = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$$

所以所求概率为

$$P(A) = \frac{5}{36}$$

(2) 令事件  $B$  为“点数之和不超过 6”, 则

$$B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 3), \\ (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (5, 1)\}$$

所以所求概率为

$$P(B) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

(3) 令事件  $C$  为“至少有一个 6 点”, 则

$$C = \{(1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6), (6, 6), \\ (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5)\}$$

所以所求概率为

$$P(C) = \frac{11}{36}$$

**1.2.9** 考虑一元二次方程  $x^2 + Bx + C = 0$ , 其中  $B, C$  分别是将一颗骰子连续抛两次先后出现的点数, 求该方程有实根的概率  $p$  和有重根的概率  $q$ .

**解:** 将一颗骰子连续抛两次所得点数的样本空间为  $\Omega = \{(B, C) \mid B, C = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , 样本点数量为 36.

事件“该方程有实根”发生的条件为  $B^2 - 4C \geq 0$ , 而

$$\{B^2 - 4C \geq 0\} = \{(2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (6, 2), \\ (4, 3), (5, 3), (6, 3), (4, 4), (5, 4), (6, 4), (5, 5), (6, 5), (5, 6), (6, 6)\}$$

共有 19 个样本点, 因此

$$p = P(B^2 - 4C \geq 0) = \frac{19}{36}$$

事件“该方程有重根”发生的条件为  $B^2 - 4C = 0$ , 而

$$\{B^2 - 4C = 0\} = \{(2, 1), (4, 4)\}$$

共有 2 个样本点, 因此

$$q = P(B^2 - 4C = 0) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

**1.2.10** 从  $N$  个数字  $1, 2, \dots, N$  中可重复地随机抽取  $n$  次, 求抽到的最大数字正好为  $k$  ( $1 \leq k \leq N$ ) 的概率.

**解:** 从  $N$  个数字中可重复地抽取  $n$  次, 共有  $N^n$  种取法.

记事件  $B_i$  为“抽到的最大数字小于等于  $i$ ” ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), 则  $B_i$  发生只需每次从  $1, 2, \dots, i$  中取数即可, 共有  $i^n$  种取法, 由古典概型可知

$$P(B_i) = \frac{i^n}{N^n}$$

记事件  $A_k$  为“抽到的最大数字正好为  $k$ ”, 则  $A_k = B_k - B_{k-1}$ , 且  $B_{k-1} \subseteq B_k$ , 因此

$$\begin{aligned} P(A_k) &= P(B_k - B_{k-1}) \\ &= P(B_k) - P(B_{k-1}) \\ &= \frac{k^n}{N^n} - \frac{(k-1)^n}{N^n} \\ &= \frac{k^n - (k-1)^n}{N^n} \end{aligned}$$

**1.2.11** 从一副 52 张的扑克牌中任取 4 张, 求下列事件的概率:

- (1) 全是黑桃;
- (2) 同花;
- (3) 没有两张同一花色;
- (4) 同色.

**解:** 从 52 张扑克牌中任取 4 张的取法有  $C_{52}^4$  种.

(1) 一副扑克牌中有 13 张黑桃, 从中取出 4 张的取法有  $C_{13}^4$  种, 因此所求概率为

$$p_1 = \frac{C_{13}^4}{C_{52}^4} = \frac{11}{4165}$$

(2) 取出的 4 张牌全是某一特定花色的取法有  $C_{13}^4$  种, 而一副扑克牌有 4 种花色, 则 4 张牌同花的取法有  $4C_{13}^4$  种, 因此所求概率为

$$p_2 = \frac{4C_{13}^4}{C_{52}^4} = \frac{44}{4165}$$

(3) “没有两张同一花色” 需要从 4 种花色中各取一张, 取法有  $13^4$  种, 因此所求概率为

$$p_3 = \frac{13^4}{C_{52}^4} = \frac{2197}{20825}$$

(4) 一副扑克牌中有红色和黑色牌各 26 张, 取出 4 张同色牌的取法有  $2C_{26}^4$  种, 因此所求概率为

$$p_4 = \frac{2C_{26}^4}{C_{52}^4} = \frac{92}{833}$$

**1.2.12** 把 10 本书任意地放在书架上, 求其中指定的 4 本书放在一起的概率.

**解:** 把 10 本书任意地放在书架上, 共有  $A_{10}^{10}$  种放法. 当其中指定的 4 本书放在一起时, 将这 4 本书看作一个整体, 与其他 6 本书一起放在书架上, 有  $A_7^7$  种放法; 放在一起的 4 本书又有不同的顺序, 有  $A_4^4$  种放法. 因此“其中指定的 4 本书放在一起”共有  $A_7^7 A_4^4$  种放法, 所求概率为

$$p = \frac{A_7^7 A_4^4}{A_{10}^{10}} = \frac{7! \times 4!}{10!} = \frac{1}{30}$$

**1.2.13**  $n$  个人随机地围一圆桌而坐, 求甲、乙两人相邻而坐的概率.

**解:**

**解法一:**  $n$  个人围坐, 共有  $\frac{A_n^n}{n} = (n-1)!$  种坐法. 当甲、乙两人相邻而坐时, 将甲、乙两人看作整体, 有  $\frac{A_{n-1}^{n-1}}{n-1} A_2^2 = 2(n-2)!$  种坐法. 因此所求概率为

$$p = \frac{2(n-2)!}{(n-1)!} = \frac{2}{n-1}$$

**解法二:** 设甲先坐好, 再考虑乙的坐法. 此时乙总共有  $n-1$  个位置可坐, 且这  $n-1$  个位置都是等可能的, 而乙与甲相邻有 2 个位置, 因此所求概率为

$$p = \frac{2}{n-1}$$

**1.2.14** 同时掷 5 枚骰子, 求下列事件的概率:

- (1) 每枚都不一样;
- (2) 其中 2 枚相同 (成对), 另外 3 枚各不相同且与成对的 2 枚也不同;
- (3) 出现两组成对的骰子;
- (4) 其中 3 枚相同, 另外 2 枚不同;
- (5) 其中 4 枚相同;
- (6) 5 枚全部相同.

**解:** 同时掷 5 枚骰子共有  $6^5$  种不同情况.

$$(1) p_1 = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{6^5} = \frac{5}{54}$$

$$(2) p_2 = \frac{C_5^2 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{6^5} = \frac{25}{54}$$

(3) 将 5 枚骰子分成 3 组, 其中 2 组包含 2 枚骰子, 另外一组只有 1 个骰子, 这样的分法有  $\frac{C_5^2 C_3^2}{2} = 15$  种. 这三组骰子出现的点数不同, 有  $6 \times 5 \times 4 = 120$  种情况, 因此所求概率为

$$p_3 = \frac{15 \times 120}{6^5} = \frac{25}{108}$$

$$(4) p_4 = \frac{C_5^3 \times 6 \times 5 \times 4}{6^5} = \frac{25}{162}$$

$$(5) p_5 = \frac{C_5^4 \times 6 \times 5}{6^5} = \frac{25}{1296}$$

$$(6) p_6 = \frac{6}{6^5} = \frac{1}{1296}$$

**1.2.15 (接草成环问题)** 把  $2n$  根草紧握在手中, 仅露出它们的头和尾, 然后随机地把  $2n$  个头两两相接,  $2n$  个尾也两两相接. 求放开手后  $2n$  根草恰巧连成一个环的概率.

**解:** 先将头两两相接, 此时所有接法都是等价的, 如图 1.1 所示, 所以只需考虑尾的接法.

$2n$  个尾两两相接, 先任选 1 个尾, 再从剩下的  $2n - 1$  个尾中任选 1 个尾相接; 然后从剩下的  $2n - 2$  个尾中任选 1 个, 与  $2n - 3$  个尾中的任意 1 个相接; 以此类推, 将  $2n$  个尾两两相接共有  $2n(2n - 1)(2n - 2)(2n - 3) \times \cdots \times 2 \times 1 = (2n)!$  种方法.

如果要成环, 在从  $2n$  个尾中任选 1 个之后, 剩下的  $2n - 1$  个尾中有一个不能选择, 所以只能从其余  $2n - 2$  个尾中任选 1 个相接; 然后从剩下的  $2n - 2$  个尾中任选 1 个, 与  $2n - 4$  个尾中的任意 1 个相接; 以此类推, 成环的方法共有  $2n(2n - 2)(2n - 2)(2n - 4) \times \cdots \times 2 \times 1$  种. 因此所求概率为

$$\begin{aligned} p &= \frac{2n(2n - 2)(2n - 2)(2n - 4) \times \cdots \times 2 \times 1}{(2n)!} \\ &= \frac{[2n(2n - 2)(2n - 4) \times \cdots \times 2][(2n - 2)(2n - 4) \times \cdots \times 1]}{(2n)!} \\ &= \frac{2^n n! \times 2^{n-1} (n - 1)!}{(2n)!} \\ &= \frac{2^{2n-1} n! (n - 1)!}{(2n)!} \end{aligned}$$

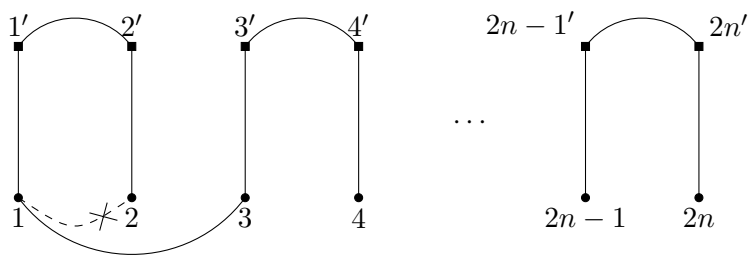


图 1.1 接草成环问题

**1.2.16** 把  $n$  个“0”与  $m$  ( $m \leq n + 1$ ) 个“1”随机地排列, 求没有两个“1”连在一起的概率.

**解:** 总共  $m + n$  个位置, 选择其中  $n$  个放“0”, 其余  $m$  个位置放“1”, 总的排列数为  $C_{m+n}^n$ . 如果“没有两个‘1’连在一起”, 需要将“1”放在  $n$  个“0”之间的空隙中, 共有  $n + 1$  个位置, 此时排列数为  $C_{n+1}^m$ . 因此所求概率为

$$p = \frac{C_{n+1}^m}{C_{m+n}^n} = \frac{n!(n + 1)!}{(n - m + 1)!(m + n)!}$$

**1.2.17 (插板法)** 将  $n$  个完全相同的球随机地放入  $N$  个盒子中, 求:

- (1) 某个指定的盒子中恰好有  $k$  ( $0 \leq k \leq n$ ) 个球的概率;
- (2) 恰好有  $m$  ( $N - n \leq m \leq N - 1$ ) 个空盒的概率;
- (3) 某指定的  $m$  个盒子中恰好有  $j$  个球的概率.

**解:** 将  $n$  个球排成一行, 向其中插入  $N-1$  块板, 分成  $N$  个区域, 每个区域可以看成是一个盒子. 因此 “将  $n$  个完全相同的球随机地放入  $N$  个盒子中” 就相当于将  $n$  个球和  $N-1$  块板随机地排成一行, 由 1.2.16 可知, 共有  $C_{n+N-1}^n$  种情况.

(1) 某个指定的盒子中有  $k$  个球, 其余  $n-k$  个球随机放入  $N-1$  个盒子中, 共有  $C_{n-k+N-2}^{n-k}$  种情况, 因此所求概率为

$$p_1 = \frac{C_{n-k+N-2}^{n-k}}{C_{n+N-1}^n} = \frac{(N-1)n!(n-k+N-2)!}{(n-k)!(n+N-1)!}$$

(2) 先从  $N$  个盒子中选出  $m$  个作为空盒, 有  $C_N^m$  种取法. 然后将  $n$  个球放入剩下的  $N-m$  个盒子, 并且不能有空盒, 可以先向每个盒子放 1 个球, 再将其余  $n-N+m$  个球随机放入  $N-m$  个盒子中, 此时有  $C_{(n-N+m)+(N-m-1)}^{n-N+m} = C_{n-1}^{n-N+m}$  种情况. 综上, 所求概率为

$$p_2 = \frac{C_N^m C_{n-1}^{n-N+m}}{C_{n+N-1}^n}$$

(3) 将  $j$  个球放入指定的  $m$  个盒子中, 有  $C_{m+j-1}^j$  种放法; 另外  $n-j$  个球放入其余  $N-m$  个盒子, 有  $C_{n-j+N-m-1}^{n-j}$  种放法. 因此所求概率为

$$p_3 = \frac{C_{m+j-1}^j C_{n-j+N-m-1}^{n-j}}{C_{n+N-1}^n}$$

### 1.2.18 在长度为 $a$ 的线段内任取两点将其分为三段, 求它们可以构成一个三角形的概率.

**解:** 设分成的三段长度分别为  $x, y$  和  $a-x-y$ , 则有

$$\begin{cases} 0 < x < a \\ 0 < y < a \\ 0 < a-x-y < a \end{cases}$$

其中  $0 < a-x-y < a$  等价于  $0 < x+y < a$ , 则样本空间为

$$\Omega = \{(x, y) \mid 0 < x < a, 0 < y < a, 0 < x+y < a\}$$

设事件  $A$  = “线段分成的三段可以构成三角形”. 由于三角形中任意两边之和大于第三边, 则事件  $A$  发生的条件为

$$\begin{cases} 0 < x < y + (a-x-y) \\ 0 < y < x + (a-x-y) \\ 0 < a-x-y < x+y \end{cases}$$

整理得

$$A = \{(x, y) \mid 0 < x < \frac{a}{2}, 0 < y < \frac{a}{2}, \frac{a}{2} < x+y < a\}$$

如图 1.2 所示. 则所求概率为

$$P(A) = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{a}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}a^2} = \frac{1}{4}$$

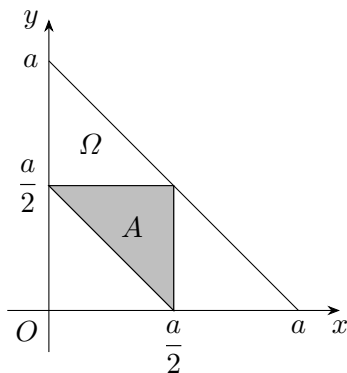


图 1.2

**1.2.19** 甲乙两艘轮船驶向一个不能同时停泊两艘轮船的码头, 它们在一昼夜内到达的时间是等可能的. 如果甲船的停泊时间是一小时, 乙船的停泊时间是两小时, 求它们中任何一艘都不需要等候码头空出的概率是多少?

**解:** 设甲、乙到达码头的的时间分别为  $x, y$ , 则样本空间为

$$\Omega = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 24, 0 \leq y \leq 24\}$$

设事件  $A =$  “甲乙都不需要等候码头空出”, 该事件可以分为两种情况. 如果甲先到达, 则乙的到达时间应至少比甲晚一小时, 即  $y \geq x+1$ ; 如果乙先到达, 则甲至少比乙晚到两小时, 即  $x \geq y+2$ . 综合两种情况, 事件  $A$  可以表示为

$$A = \{(x, y) \mid y \geq x+1 \text{ 或 } y \leq x-2\}$$

如图 1.3 所示, 所求概率为

$$P(A) = \frac{\frac{23^2}{2} + \frac{22^2}{2}}{24^2} = \frac{1013}{1152}$$

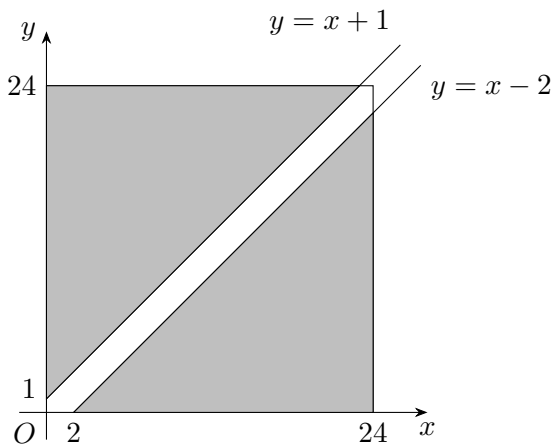


图 1.3

**1.2.20** 在平面上画有间隔为  $d$  的等距平行线, 向平面任意投掷一个边长为  $a, b, c$  (均小于  $d$ ) 的

三角形, 求三角形与平行线相交的概率.

**解:** 三角形与平行线相交有三种情况: 三角形的一个顶点在平行线上、一条边与平行线重合、两条边与平行线相交. 由几何概型可知, 前两种情况出现的概率为零, 所以只需考虑两条边与平行线相交的概率. 记  $P_{ab}, P_{bc}, P_{ac}$  分别为两条边  $ab, bc, ac$  与平行线相交的概率, 则所求概率为

$$p = P_{ab} + P_{bc} + P_{ac}$$

设  $P_a, P_b, P_c$  分别为边  $a, b, c$  与平行线相交的概率, 由蒲丰投针问题可得

$$P_a = \frac{2a}{\pi d}, P_b = \frac{2b}{\pi d}, P_c = \frac{2c}{\pi d}$$

$a$  与平行线相交又能分成两种情况:  $ab$  与平行线相交、 $ac$  与平行线相交. 因此

$$P_a = P_{ab} + P_{ac}$$

同理可得

$$P_b = P_{ab} + P_{bc}$$

$$P_c = P_{ac} + P_{bc}$$

因此, 三角形与平行线相交的概率为

$$p = P_{ab} + P_{bc} + P_{ac} = \frac{1}{2}(P_a + P_b + P_c) = \frac{a + b + c}{\pi d}$$

### 备注

本题是蒲丰投针问题的推广. 该问题可以进一步推广到多边形及圆的情形.

在平面上画有间隔为  $d$  的等距平行线, 向平面任意投掷一个周长为  $S_n$  的凸多边形, 且该凸多边形的直径小于  $d$  (凸多边形的直径是指多边形上任意两点之间的最大距离), 则该凸多边形与平行线相交的概率为  $\frac{S_n}{\pi d}$ .

在平面上画有间隔为  $d$  的等距平行线, 向平面任意投掷一个半径为  $r$  ( $2r < d$ ) 的圆, 则该圆与平行线相交的概率为  $\frac{2r}{d}$ .

**1.2.21** 在半径为  $R$  的圆内画平行弦, 如果这些弦与垂直于弦的直径的交点在该直径上的位置是等可能的, 求任意画弦的长度大于  $R$  的概率.

**解:** 设弦的中点与圆心的距离为  $x$ , 则样本空间为

$$\Omega = \{x \mid 0 \leq x \leq R\}$$

弦长为  $2\sqrt{R^2 - x^2}$ , 当弦长大于  $R$  时有  $2\sqrt{R^2 - x^2} > R$ , 即  $x < \frac{\sqrt{3}}{2}R$ . 因此所求概率为

$$p = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}R}{R} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



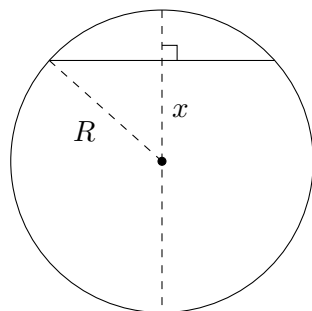


图 1.4

## 第二章 随机变量及其分布

### 2.1 随机变量及其分布函数

### 2.2 离散型随机变量及其概率分布

**2.2.1** 将 3 个球随机地放入 4 个杯子中, 求杯子中球的最大个数  $X$  的概率分布.

**解:** 将 3 个相同的球随机地放入 4 个不同的杯子中, 共有  $4^3$  种情况.

$X$  所有可能的取值为 1,2,3. 当  $X = 1$  时, 3 个球被放入不同的杯子中, 第一个球放入 4 个杯子中的任意一个, 第二个球放入剩下 3 个杯子中的任意一个, 第三个球放入剩下 2 个杯子中的任意一个, 共有  $4 \times 3 \times 2 = 24$  种情况. 因此

$$P(X = 1) = \frac{24}{4^3} = \frac{3}{8}$$

当  $X = 3$  时, 3 个球被放入同一个杯子中, 此时有 4 种情况, 因此

$$P(X = 3) = \frac{4}{4^3} = \frac{1}{16}$$

由于  $P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 1$ , 所以

$$P(X = 2) = 1 - P(X = 1) - P(X = 3) = 1 - \frac{3}{8} - \frac{1}{16} = \frac{9}{16}$$

综上,  $X$  的概率分布为

$X$	1	2	3
$P$	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{16}$

## 第三章 二维随机变量及其分布

## 第四章 随机变量的数字特征

### 4.1 数学期望

### 4.2 方差

**4.2.1** 设  $g(x)$  为随机变量  $X$  取值的集合上的非负不减函数, 且  $E(g(X))$  存在, 证明: 对任意的  $\varepsilon > 0$ , 有

$$P(X > \varepsilon) \leq \frac{E(g(X))}{g(\varepsilon)}$$

**证明:** 因为  $g(x)$  是非负不减函数, 所以当  $x > \varepsilon$  时有  $g(x) > g(\varepsilon)$ , 进而有  $\frac{g(x)}{g(\varepsilon)} > 1$ .

如果  $X$  是离散型随机变量, 设  $X$  的概率分布为  $P(X = x_k) = p_k, k = 1, 2, \dots$ , 则

$$P(X > \varepsilon) = \sum_{x_k > \varepsilon} p_k \leq \sum_{x_k > \varepsilon} \frac{g(x_k)}{g(\varepsilon)} p_k \leq \frac{1}{g(\varepsilon)} \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k) p_k = \frac{E(g(X))}{g(\varepsilon)}$$

如果  $X$  是连续型随机变量, 设  $X$  的概率密度函数为  $f(x)$ , 则

$$P(X > \varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{+\infty} f(x) dx \leq \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{g(x)}{g(\varepsilon)} f(x) dx \leq \frac{1}{g(\varepsilon)} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx = \frac{E(g(X))}{g(\varepsilon)}$$

□