

概率论与数理统计

ZZX-JLU

2022 年 11 月 6 日

目录

1	随机事件及其概率	1
1.1	随机试验	1
1.2	随机事件	2
1.2.1	随机事件的概念	2
1.2.2	随机事件的关系	2
1.2.3	随机事件的运算	3
1.3	随机事件的概率	5
1.3.1	频率	5
1.3.2	概率	6
1.3.3	古典概型	9
1.3.4	几何概型	9
1.4	条件概率	10
1.4.1	条件概率与乘法公式	10
1.4.2	全概率公式	11
1.4.3	贝叶斯公式	12
1.5	事件的独立性	12
1.6	伯努利概型	14

1 随机事件及其概率

1.1 随机试验

在一定条件下必然出现的现象叫做**必然现象**. 在相同的条件下, 可能出现不同的结果, 而在试验或观测之前不能预知确切结果的现象叫做**随机现象**.

随机现象具有随机性和统计规律性.

- 随机性: 对随机现象进行观测时, 不能预先确定其结果.
- 统计规律性: 对随机现象进行大量重复观测后, 其结果往往会表现出某种规律性.

为了研究和揭示随机现象的统计规律性, 需要对随机现象进行大量重复的观察、测量或试验, 统称为试验.

如果试验具有以下特点:

1. 可重复性: 试验可以在相同条件下重复进行多次, 甚至进行无限次;
2. 可观测性: 每次试验的所有可能结果都是明确的、可以观测的, 并且试验的可能结果有两个或两个以上;
3. 随机性: 每次试验出现的结果是不确定的, 在试验之前无法预先确定究竟会出现哪一个结果,

则称之为**随机试验**, 简称为**试验**.

通常用字母 E 表示一个随机试验. 随机试验 E 的基本结果称为**样本点**, 用 ω 表示. 随机试验 E 的所有基本结果的集合称为**样本空间**, 用 $\Omega = \{\omega\}$ 表示.

1.2 随机事件

1.2.1 随机事件的概念

随机试验 E 的样本空间 $\Omega = \{\omega\}$ 的子集称为随机试验 E 的**随机事件**，简称为**事件**，用大写字母 A, B, C 等表示.

设 $A \subseteq \Omega$ ，如果试验结果 $\omega \in A$ ，则称在这次试验中事件 A 发生；如果 $\omega \notin A$ ，则称事件 A 不发生.

由一个样本点 ω 组成的事件称为**基本事件**.

样本空间 Ω 本身也是 Ω 的子集，它包含 Ω 的所有样本点，在每次试验中 Ω 必然发生，称为**必然事件**.

空集 \emptyset 也是 Ω 的子集，它不包含任何样本点，在每次试验中都不可能发生，称为**不可能事件**.

在一个样本空间中，如果只有有限个样本点，则称它为**有限样本空间**；如果有无限个样本点，则称它为**无限样本空间**.

1.2.2 随机事件的关系

事件的包含

如果当事件 A 发生时事件 B 一定发生，则称事件 B **包含** 事件 A ，记作 $A \subseteq B$.

对于任意事件 A ，有 $\emptyset \subseteq A \subseteq \Omega$.

如果 $A \subseteq B, B \subseteq C$ ，则 $A \subseteq C$.

事件的相等

如果事件 A 和事件 B 相互包含，即 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$ ，则称事件 A 与事件 B **相等**，记作 $A = B$.

事件的互不相容

如果事件 A 和事件 B 在同一次试验中不能同时发生，则称事件 A 与事件 B 是**互不相容**的，或称事件 A 与事件 B 是**互斥**的.

任意两个基本事件一定互斥.

事件的互逆

如果在每一次试验中事件 A 和事件 B 必有一个且仅有一个发生, 则称事件 A 与事件 B 是互逆的或对立的, 称其中的一个事件是另一个事件的逆事件, 记作 $\bar{A} = B$, 或 $\bar{B} = A$.

显然, $\overline{\bar{A}} = A$.

1.2.3 随机事件的运算

事件的并

如果事件 A 和事件 B 至少有一个发生, 则这样的一个事件称为事件 A 与事件 B 的并事件或和事件, 记作 $A \cup B$.

$$A \cup B = \{\omega \mid \omega \in A \text{ 或 } \omega \in B\}$$

事件 A 和事件 B 作为样本空间 Ω 的子集, 并事件 $A \cup B$ 就是子集 A 与 B 的并集. 对于任何事件 A 与 B , 有

$$A \cup A = A$$

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cup \bar{A} = \Omega$$

$$A \subseteq A \cup B$$

$$B \subseteq A \cup B$$

如果 $A \subseteq B$, 则有 $A \cup B = B$.

事件的并可以推广到多个事件的情形:

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \{\text{事件 } A_1, A_2, \dots, A_n \text{ 中至少有一个发生}\}$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{\text{事件 } A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \text{ 中至少有一个发生}\}$$

事件的交

如果事件 A 和事件 B 同时发生, 则这样的一个事件称为事件 A 与事件 B 的交事件或积事件, 记作 $A \cap B$ 或 AB .

$$A \cap B = \{\omega \mid \omega \in A \text{ 且 } \omega \in B\}$$

事件 A 和事件 B 作为样本空间 Ω 的子集, 交事件 $A \cap B$ 就是子集 A 与 B 的交集. 对于任何事件 A 与 B , 有

$$A \cap A = A$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cap \bar{A} = \emptyset$$

$$A \cap B \subseteq A$$

$$A \cap B \subseteq B$$

如果 $A \subseteq B$, 则有 $A \cap B = A$.

如果 A 与 B 互不相容, 则有 $A \cap B = \emptyset$.

事件的交可以推广到多个事件的情形:

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = \{\text{事件 } A_1, A_2, \dots, A_n \text{ 同时发生}\}$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{\text{事件 } A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \text{ 同时发生}\}$$

事件的差

如果事件 A 发生而事件 B 不发生, 则这样的一个事件称为事件 A 与事件 B 的差事件, 记作 $A - B$.

$$A - B = \{\omega \mid \omega \in A \text{ 且 } \omega \notin B\}$$

对于任何事件 A 与 B , 有

$$A - A = \emptyset$$

$$A - \emptyset = A$$

$$A - B = A - AB = A\bar{B}$$

$$\Omega - A = \bar{A}$$

$$A - \Omega = \emptyset$$

$$(A - B) \cup B = (B - A) \cup A = A \cup B$$

$$A \cup B = A \cup (B - AB) = B \cup (A - AB)$$

$A - B, AB, B - A$ 两两互斥, 且 $A \cup B = (A - B) \cup AB \cup (B - A)$, $A = (A - B) \cup AB$, $B = (B - A) \cup AB$.

随机事件的运算规律

1. 交换律: $A \cup B = B \cup A$, $AB = BA$.
2. 结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(AB)C = A(BC)$.
3. 分配律: $A(B \cup C) = (AB) \cup (AC)$, $A \cup (BC) = (A \cup B)(A \cup C)$.
4. 对偶律: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \overline{B}$, $\overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

对于多个随机事件, 以上的运算规律也成立.

1.3 随机事件的概率

1.3.1 频率

定义 1.1 设在相同的条件下进行的 n 次试验中, 事件 A 发生了 n_A 次, 则称 n_A 为事件 A 发生的频数, 称比值 $\frac{n_A}{n}$ 为事件 A 发生的频率, 记作 $f_n(A)$, 即

$$f_n(A) = \frac{n_A}{n}$$

事件 A 发生的频率反映了事件 A 在 n 次试验中发生的频繁程度. 频率越大, 表明事件 A 的发生越频繁, 从而可知事件 A 在一次试验中发生的可能性越大.

频率的基本性质:

性质 1(非负性) 对于任意事件 A , 有 $f_n(A) \geq 0$.

性质 2(规范性) 对于必然事件 Ω , 有 $f_n(\Omega) = 1$.

性质 3(有限可加性) 对于两两互不相容的事件 A_1, A_2, \dots, A_m (即当 $i \neq j$ 时, 有 $A_i A_j = \emptyset$, $i, j = 1, 2, \dots, m$), 有

$$f_n\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right) = \sum_{i=1}^m f_n(A_i)$$

在相同的条件下重复进行 n 次试验, 当 n 增大时, 事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 呈现出稳定性, 逐渐稳定于某一常数 p . 用这一常数表示事件 A 发生的可能性大小, 称为事件 A 的概率, 记为 $P(A)$, 即 $P(A) = p$.

当 n 很大时, 可以用频率 $f_n(A)$ 作为概率 $P(A)$ 的近似值.

1.3.2 概率

定义 1.2 设随机试验 E 的样本空间为 Ω , 如果对于 E 的每一个事件 A , 有唯一的实数 $P(A)$ 和它对应, 并且这个事件的函数 $P(A)$ 满足以下条件:

1. 非负性: 对于任意事件 A , 有 $P(A) \geq 0$;
2. 规范性: 对于必然事件 Ω , 有 $P(\Omega) = 1$;
3. 可列可加性: 对于两两互不相容的事件 A_1, A_2, \dots , 有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

性质 1 对于不可能事件 \emptyset , 有 $P(\emptyset) = 0$.

证明: 因为 $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset \cup \dots$, 根据概率的可列可加性, 有

$$P(\emptyset) = P(\emptyset) + P(\emptyset) + \dots$$

由概率的非负性知 $P(\emptyset) \geq 0$, 因此 $P(\emptyset) = 0$. □

性质 2(有限可加性) 对于两两互不相容的事件 A_1, A_2, \dots, A_n , 有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

证明: 令 $A_i = \emptyset$ ($i = n+1, n+2, \dots$), 根据概率的可列可加性及性质1, 有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

□

性质 3 对于任一事件 A , 有 $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

证明: 因为 $A \cup \bar{A} = \Omega$, 且 $A\bar{A} = \emptyset$, 由性质 2 及概率的规范性, 得

$$P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

即

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

□

性质 4 如果 $A \subseteq B$, 则有 $P(B - A) = P(B) - P(A)$, $P(A) \leq P(B)$.

证明: 因为 $A \subseteq B$, 从而有 $B = A \cup (B - A)$, 且 $A(B - A) = \emptyset$, 由性质 2 可得

$$P(B) = P(A \cup (B - A)) = P(A) + P(B - A)$$

所以

$$P(B - A) = P(B) - P(A)$$

由于 $P(B - A) \geq 0$, 因此 $P(A) \leq P(B)$.

□

性质 5 对于任一事件 A , 有 $P(A) \leq 1$.

证明: 因为 $A \subseteq \Omega$, 由性质 4 及概率的规范性, 可得

$$P(A) \leq P(\Omega) = 1$$

□

性质 6(概率的减法公式) 对于任意两个事件 A 与 B , 有 $P(B - A) = P(B) - P(AB)$.

证明: 由于 $B - A = B - AB$, 而 $AB \subseteq B$, 根据性质 4 可得

$$P(B - A) = P(B - AB) = P(B) - P(AB)$$

□

性质 7 对于任意两个事件 A 与 B , 有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \quad (1-1)$$

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

证明: 因为 $A \cup B = A \cup (B - AB)$, 且 $A(B - AB) = \emptyset$, $AB \subseteq B$, 由性质 2 及性质 4 可得

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A \cup (B - AB)) \\ &= P(A) + P(B - AB) \\ &= P(A) + P(B) - P(AB) \end{aligned}$$

由于 $P(AB) \geq 0$, 因此

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

□

式 (1-1) 称为概率的**加法公式**.

加法公式可以推广到任意有限个事件的情形: 设 A_1, A_2, \dots, A_n 是 n 个随机事件, 则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i A_j A_k) + \dots \\ + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n) \quad (1-2)$$

式 (1-2) 称为概率的**一般加法公式**.

1.3.3 古典概型

如果随机试验具有以下两个特点:

1. 试验的样本空间只包含有限个样本点;
2. 在试验中每个基本事件发生的可能性相同,

则称这种试验为**等可能概型**或**古典概型**.

设试验 E 是古典概型, 样本空间为 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$, 则基本事件 $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \dots, \{\omega_n\}$ 两两互不相容, 且

$$\Omega = \{\omega_1\} \cup \{\omega_2\} \cup \dots \cup \{\omega_n\}$$

由于 $P(\Omega) = 1$ 及 $P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = \dots = P(\{\omega_n\})$, 因此

$$P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = \dots = P(\{\omega_n\}) = \frac{1}{n}$$

如果事件 A 包含 k 个基本事件, $A = \{\omega_{i_1}\} \cup \{\omega_{i_2}\} \cup \dots \cup \{\omega_{i_k}\}$, 其中 i_1, i_2, \dots, i_k 是 $1, 2, \dots, n$ 中某 k 个不同的数, 则有

$$P(A) = P(\{\omega_{i_1}\}) + P(\{\omega_{i_2}\}) + \dots + P(\{\omega_{i_k}\}) = \frac{k}{n}$$

即

$$P(A) = \frac{A \text{ 包含的基本事件个数}}{\Omega \text{ 包含的基本事件总数}}$$

1.3.4 几何概型

如果随机试验是将一个点随机地投到某一区域 Ω 内, 而这个随机点落在 Ω 中任意两个度量相等的子区域内的可能性是一样的, 则称这样的试验属于**几何概型**.

注： Ω 可以是直线上的某一区间，也可以是平面或空间内的某一区域. 区域的度量是指直线上区间的长度，或者平面内区域的面积，或者空间内区域的体积.

对于任何有度量的子区域 $A \subseteq \Omega$ ，定义事件 $A =$ “随机点落在区域 A 内” 的概率为

$$P(A) = \frac{A \text{ 的度量}}{\Omega \text{ 的度量}}$$

1.4 条件概率

1.4.1 条件概率与乘法公式

定义 1.3 设 A 和 B 是试验 E 的两个事件，且 $P(A) > 0$ ，称 $\frac{P(AB)}{P(A)}$ 为在事件 A 已经发生的条件下，事件 B 发生的**条件概率**，记为 $P(B | A)$ ，即

$$P(B | A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

对于任意两个事件 A 和 B ，如果 $P(A) > 0$ ，则有

$$P(AB) = P(A) P(B | A) \quad (1-3)$$

式 (1-3) 称为概率的**乘法公式**.

同样可以在 $P(B) > 0$ 时，定义在事件 B 已经发生的条件下，事件 A 发生的条件概率为

$$P(A | B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

在 $P(A) > 0, P(B) > 0$ 的条件下，有

$$P(AB) = P(A) P(B | A) = P(B) P(A | B)$$

条件概率具有如下性质：

性质 1(非负性) 对任意事件 B , 有 $P(B | A) \geq 0$.

性质 2(规范性) 对于必然事件 Ω , 有 $P(\Omega | A) = 1$.

性质 3(可列可加性) 对于两两互不相容的事件 B_1, B_2, \dots , 有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \mid A\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i | A)$$

可由条件概率的三个基本性质推导出其他性质, 例如

$$P(\emptyset | A) = 0$$

$$P(\overline{B} | A) = 1 - P(B | A)$$

$$P((B_1 \cup B_2) | A) = P(B_1 | A) + P(B_2 | A) - P(B_1 B_2 | A)$$

可以把乘法公式推广到有限个事件的交的情况: 设 A_1, A_2, \dots, A_n 是同一试验的事件, 且 $P(A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) > 0$, 则有

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1) P(A_2 | A_1) P(A_3 | A_1 A_2) \cdots P(A_n | A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) \quad (1-4)$$

1.4.2 全概率公式

设试验 E 的样本空间为 Ω , 事件 A_1, A_2, \dots, A_n 两两互不相容, 且 $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$, 则称 A_1, A_2, \dots, A_n 为样本空间 Ω 的一个**分割**或**完全事件组**.

如果 $P(A_i) > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 则对任意事件 B , 有

$$B = B\Omega = B\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \bigcup_{i=1}^n (A_i B)$$

这里 $(A_i B) \cap (A_j B) = \emptyset$ ($i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n$), 由概率的有限可加性得

$$P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^n (A_i B)\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i B)$$

由乘法公式得

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) P(B | A_i) \quad (1-5)$$

式 (1-5) 称为**全概率公式** (Total Probability Theorem) .

1.4.3 贝叶斯公式

设试验 E 的样本空间为 Ω , 事件 A_1, A_2, \dots, A_n 是 Ω 的一个分割, 且 $P(A_i) > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$). 对于任一事件 B , 如果 $P(B) > 0$, 由乘法公式可得

$$P(A_i B) = P(B) P(A_i | B) = P(A_i) P(B | A_i)$$

由此得

$$P(A_i | B) = \frac{P(A_i) P(B | A_i)}{P(B)}$$

利用全概率公式, 得

$$P(A_i | B) = \frac{P(A_i) P(B | A_i)}{\sum_{j=1}^n P(A_j) P(B | A_j)} \quad (1-6)$$

式 (1-6) 称为**贝叶斯公式** (Bayes Rule) .

1.5 事件的独立性

定义 1.4 设 A 与 B 是同一试验 E 的两个事件, 如果 $P(AB) = P(A)P(B)$, 则称事件 A 与事件 B 是**相互独立**的.

对于同一试验 E 的两个事件 A 与 B , 如果 $P(A) > 0$, 则 A 与 B 相互独立的充分必要条件是 $P(B | A) = P(B)$; 如果 $P(B) > 0$, 则 A 与 B 相互独立的充分必要条件是 $P(A | B) = P(A)$.

结论: 如果事件 A 与事件 B 相互独立, 则事件 A 与事件 \bar{B} 相互独立.

证明： $A = A(B \cup \bar{B}) = (AB) \cup (A\bar{B})$ ，而 $(AB)(A\bar{B}) = \emptyset$ ，所以

$$P(A) = P((AB) \cup (A\bar{B})) = P(AB) + P(A\bar{B})$$

如果 A 与 B 相互独立，则 $P(AB) = P(A)P(B)$ ，代入上式可得

$$P(A) = P(A)P(B) + P(A\bar{B})$$

由此得

$$\begin{aligned} P(A\bar{B}) &= P(A) - P(A)P(B) \\ &= P(A)[1 - P(B)] \\ &= P(A)P(\bar{B}) \end{aligned}$$

因此事件 A 与事件 \bar{B} 是相互独立的. □

同理，如果事件 A 与事件 B 相互独立，则事件 \bar{A} 与事件 B 相互独立，事件 \bar{A} 与事件 \bar{B} 相互独立.

定义 1.5 对于同一试验 E 的三个事件 A, B, C ，如果满足

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

$$P(BC) = P(B)P(C)$$

$$P(AC) = P(A)P(C)$$

则称三个事件 A, B, C 是**两两相互独立**的.

定义 1.6 如果三个事件 A, B, C 是两两相互独立的，并且有 $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$ ，则称三个事件 A, B, C 是**相互独立**的.

定义 1.7 设 A_1, A_2, \dots, A_n 是同一试验 E 的 n 个事件，如果对于任意正整数 k 及这 n 个事件中的任意 k ($2 \leq k \leq n$) 个事件 $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}$ ，都有等式

$$P(A_{i_1}A_{i_2} \cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k})$$

则称这 n 个事件 A_1, A_2, \dots, A_n 是相互独立的.

1.6 伯努利概型

如果将试验 E 重复执行 n 次, 在每一次试验中, 事件 A 或者发生, 或者不发生. 假设每次试验的结果互不影响, 即在每次试验中事件 A 发生的概率保持不变, 不受其他各次试验结果的影响, 则称这 n 次试验相互独立.

如果试验 E 只有两个可能的对立结果 A 和 \bar{A} , 并且 $P(A) = p$, $P(\bar{A}) = 1 - p$, 其中 $0 < p < 1$. 将试验 E 独立地重复进行 n 次所构成的一个试验叫做 n 重伯努利试验, 简称为伯努利试验或伯努利概型.

n 重伯努利试验的基本事件可记为 $\omega = \omega_1 \omega_2 \cdots \omega_n$, 其中 $\omega_i (1 \leq i \leq n)$ 为 A 或者为 \bar{A} , 即 ω 是从 A 及 \bar{A} 中每次取 1 个, 独立地重复取 n 次的一种排列, 共有 2^n 个基本事件.

如果 ω 中有 k 个 A , 则必有 $n-k$ 个 \bar{A} , 由独立性可得这一基本事件的概率为 $p^k(1-p)^{n-k}$.

由于在 2^n 个基本事件中共有 C_n^k 个含 k 个 A 及 $n-k$ 个 \bar{A} , 因此在 n 次独立重复试验中, 事件 A 恰好发生 k 次的概率 $P_n(k)$ 为

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n \quad (1-7)$$

由二项式定理可得

$$\sum_{k=0}^n P_n(k) = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = [p + (1-p)]^n = 1$$

由此可见, $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ 是二项展开式中的一项, 因此式 (1-7) 又称为二项概率公式.