概率论与数理统计习题集

赵子轩

2024 年 9 月 20 日

目录

第一章　随机事件及其概率

1.1　随机事件

1.1.1　写出下列随机试验的样本空间：

(1) 抛一枚硬币，观察正面和反面出现的情况；

(2) 抛三枚硬币，观察正面和反面出现的情况；

(3) 连续抛一枚硬币，直至出现正面为止;

(4) 抛一枚骰子，观察出现的点数；

(5) 抛两枚骰子，观察出现的点数；

(6) 抛两枚骰子，记录出现的点数之和；

(7) 在一个箱子中装有 10 个同型号的某种零件，其中有 3 个次品和 7 个合格品，从该箱子中任取 3 个零件，观察其中次品的个数；

(8) 记录某机场在一天内收到咨询电话的次数；

(9) 测试电视机的寿命；

(10) 口袋中有黑、白、红球各一个，从中任取两个球；先从中取出一个，放回后再取出一个；

(11) 口袋中有黑、白、红球各一个，从中任取两个球；先从中取出一个，不放回后再取出一个.

解：(1) $\Omega=\{0,1\}$，其中 0 表示反面，1 表示正面.

(2) $\Omega=\{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1),(1,0,0),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$

(3) $\Omega=\{(1),(0,1),(0,0,1),(0,0,0,1),\cdots\}$

(4) $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$

(5) $\Omega=\{(x,y)\mid x,y=1,2,3,4,5,6\}$

(6) $\Omega=\{2,3,4,\cdots,12\}$

(7) $\Omega=\{0,1,2,3\}$

(8) $\Omega=\{0,1,2,3,\cdots\}$

(9) $\Omega=[0,+\infty)$

(10) $\Omega=\{$黑黑, 黑白, 黑红, 白黑, 白白, 白红, 红黑, 红白, 红红$\}$

(11) $\Omega=\{$黑白, 黑红, 白黑, 白红, 红黑, 红白$\}$

1.1.2　设 A,B,C 为三事件，试表示下列事件：

(1) A 发生，B,C 不发生；

(2) A,B,C 都发生；

(3) A,B,C 都不发生；

(4) A,B,C 中只有一个发生；

(5) A, B, C 中至少有一个发生；

(6) A, B, C 中至多有一个发生；

(7) A, B, C 中至少有一个不发生；

(8) A, B, C 中至多有两个发生；

(9) A, B, C 中至少有两个发生；

(10) A, B, C 中恰好有两个发生.

解： (1) $A\,\overline{B}\,\overline{C}$

(2) ABC

(3) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$

(4) $A\,\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}\,C$

(5) $\Omega - \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} = \overline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}} = A \cup B \cup C$

(6) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} \cup A\,\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}\,C$

(7) $\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$

(8) $\Omega - ABC = \overline{ABC} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$

(9) $AB \cup AC \cup BC$

(10) $AB\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup \overline{A}BC$

1.1.3 判断下列命题是否成立：

(1) $A - (B - C) = (A - B) \cup C$；

(2) 若 $AB = \emptyset$ 且 $C \subseteq A$，则 $BC = \emptyset$；

(3) $(A \cup B) - B = A$；

(4) $(A - B) \cup B = A$.

解： (1)

$$\begin{aligned} A - (B - C) &= A - B\overline{C} \\ &= A\overline{B\overline{C}} \\ &= A(\overline{B} \cup C) \\ &= (A\overline{B}) \cup (AC) \\ &= (A - B) \cup (AC) \\ &\neq (A - B) \cup C \end{aligned}$$

命题 1 不成立.

(2) 成立.

(3)

$$(A \cup B) - B = (A \cup B)\overline{B} = (A\overline{B}) \cup (B\overline{B}) = A\overline{B} \neq A$$

命题 3 不成立.

(4)

$$(A - B) \cup B = (A\overline{B}) \cup B = (A \cup B)(\overline{B} \cup B) = A \cup B \neq A$$

命题 4 不成立.

1.2　随机事件的概率

1.2.1　设 A, B 是同一个试验中的两个事件，$P(A)=0.6$，$P(A-B)=0.2$，$P(A\cup B)=0.9$. 求 $P(\overline{AB}), P(B), P((\overline{A}\cup B)(A\cup\overline{B}))$.

解：由于 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$，所以

$$P(AB)=P(A)-P(A-B)=0.6-0.2=0.4$$

进而可得

$$P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-0.4=0.6$$

由于 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，所以

$$P(B)=P(A\cup B)-P(A)+P(AB)=0.9-0.6+0.4=0.7$$

由随机事件的运算性质可得

$$\begin{aligned}(\overline{A}\cup B)(A\cup\overline{B})&=[(\overline{A}\cup B)A]\cup[(\overline{A}\cup B)\overline{B}]\\&=(A\overline{A})\cup(AB)\cup(\overline{A}\,\overline{B})\cup(B\overline{B})\\&=(AB)\cup(\overline{A\cup B})\end{aligned}$$

又因为 $(AB)(\overline{A\cup B})=(AB)(\overline{A}\,\overline{B})=\varnothing$，所以

$$\begin{aligned}P((\overline{A}\cup B)(A\cup\overline{B}))&=P((AB)\cup(\overline{A\cup B}))\\&=P(AB)+P(\overline{A\cup B})\\&=P(AB)+1-P(A\cup B)\\&=0.4+1-0.9\\&=0.5\end{aligned}$$

1.2.2　设 A 和 B 是同一试验 E 的两个随机事件，证明：$1-P(\overline{A})-P(\overline{B})\leqslant P(AB)\leqslant P(A\cup B)$.

证明：因为 $AB\subseteq A\subseteq(A\cup B)$，所以

$$P(AB)\leqslant P(A\cup B)$$

因为

$$1-P(AB)=P(\overline{AB})=P(\overline{A}\cup\overline{B})\leqslant P(\overline{A})+P(\overline{B})$$

所以

$$1-P(\overline{A})-P(\overline{B})\leqslant P(AB)$$

□

1.2.3　抛两枚硬币，求出现一个正面一个反面的概率.

解：此试验的样本空间为 $\Omega=\{(正,正),(正,反),(反,正),(反,反)\}$，样本点的个数为 4，且每个样本点发生的可能性是相等的. 事件“出现一个正面一个反面”含有的样本点个数为 2，根据古典概型可得该事件发生的概率为 $\dfrac{1}{2}$.

备注

如果将样本空间写成 $\Omega'=\{(正,正),(反,反),(一正一反)\}$，这 3 个样本点不是等可能的，不满足古典概型的条件.

1.2.4 从 N 个数字 $1,2,\cdots,N$ 中随机抽取 n 个，允许重复，求抽到的最大数字正好为 $k\,(1\leqslant k\leqslant N)$ 的概率.

解：从 N 个数字中可重复地抽取 n 个，共有 N^n 种取法. 抽到的数字不大于 k 的取法有 k^n 种，不大于 $k-1$ 的取法有 $(k-1)^n$，因此事件“抽到的最大数字正好为 k”含有的样本点个数为 $k^n-(k-1)^n$. 根据古典概型可得所求概率为

$$p=\frac{k^n-(k-1)^n}{N^n}$$

1.2.5 从 $1,2,\cdots,10$ 这 10 个数字中任取 3 个，求大小在中间的数字恰好为 5 的概率.

解：从 10 个数字中任取 3 个，共有 C_{10}^3 种取法. 如果大小在中间的数字恰好为 5，必须有一个小于 5、一个等于 5、一个大于 5，这样的取法有 $\mathrm{C}_4^1\mathrm{C}_1^1\mathrm{C}_5^1$ 种. 因此所求概率为

$$p=\frac{\mathrm{C}_4^1\mathrm{C}_1^1\mathrm{C}_5^1}{\mathrm{C}_{10}^3}=\frac{4\times1\times5}{120}=\frac{1}{6}$$

1.2.6 将 15 名新生 (其中有 3 名优秀生) 随机地分配到 3 个班级去，其中一班 4 名，二班 5 名，三班 6 名. 求：

(1) 每个班级各分配到一名优秀生的概率；

(2)3 名优秀生分配到一个指定班级的概率；

(3)3 名优秀生分配到同一个班级的概率.

解：将 15 名新生随机地分配给一班 4 名、二班 5 名、三班 6 名，分法种类数为

$$\mathrm{C}_{15}^4\mathrm{C}_{11}^5\mathrm{C}_6^6=\frac{15!}{4!\cdot11!}\frac{11!}{5!\cdot6!}=\frac{15!}{4!\cdot5!\cdot6!}$$

(1) 将 3 名优秀生分配到三个班级的分法共有 $\mathrm{A}_3^3=3!$ 种，将其余 12 名新生分配给一班 3 名、二班 4 名、三班 5 名的分法共有 $\mathrm{C}_{12}^3\mathrm{C}_9^4\mathrm{C}_5^5=\dfrac{12!}{3!\cdot4!\cdot5!}$ 种，则每个班级各分配到一名优秀生的分法共有 $3!\cdot\dfrac{12!}{3!\cdot4!\cdot5!}=\dfrac{12!}{4!\cdot5!}$ 种. 因此所求概率为

$$p=\frac{\dfrac{12!}{4!\cdot5!}}{\dfrac{15!}{4!\cdot5!\cdot6!}}=\frac{24}{91}$$

(2) 如果将 3 名优秀生分配到一班，则其余 12 名新生将分配给一班 1 名、二班 5 名、三班 6

名，此时分法共有 $\mathrm{C}_{12}^{1}\mathrm{C}_{11}^{5}\mathrm{C}_{6}^{6}=\dfrac{12!}{5!\cdot 6!}$ 种，所求概率为

$$p_1=\frac{\dfrac{12!}{5!\cdot 6!}}{\dfrac{15!}{4!\cdot 5!\cdot 6!}}=\frac{4}{455}$$

如果将 3 名优秀生分配到二班，则其余 12 名新生将分配给一班 4 名、二班 2 名、三班 6 名，此时分法共有 $\mathrm{C}_{12}^{4}\mathrm{C}_{8}^{2}\mathrm{C}_{6}^{6}=\dfrac{12!}{2!\cdot 4!\cdot 6!}$ 种，所求概率为

$$p_2=\frac{\dfrac{12!}{2!\cdot 4!\cdot 6!}}{\dfrac{15!}{4!\cdot 5!\cdot 6!}}=\frac{2}{91}$$

如果将 3 名优秀生分配到三班，则其余 12 名新生将分配给一班 4 名、二班 5 名、三班 3 名，此时分法共有 $\mathrm{C}_{12}^{4}\mathrm{C}_{8}^{5}\mathrm{C}_{3}^{3}=\dfrac{12!}{3!\cdot 4!\cdot 5!}$ 种，所求概率为

$$p_3=\frac{\dfrac{12!}{3!\cdot 4!\cdot 5!}}{\dfrac{15!}{4!\cdot 5!\cdot 6!}}=\frac{4}{91}$$

(3) 用 A_i 表示“3 名优秀生全部分配到 i 班”$(i=1,2,3)$，则事件“3 名优秀生分配到同一个班级”可以表示为 $A_1\cup A_2\cup A_3$. 又因为 $A_iA_j=\varnothing\,(i\neq j, i,j=1,2,3)$，所以所求概率为

$$p=P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=\frac{4}{455}+\frac{2}{91}+\frac{4}{91}=\frac{34}{455}$$