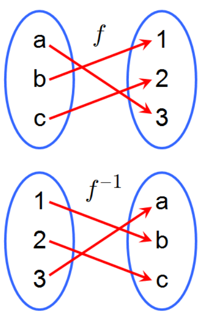
1 Разработка статьи для электронного учебника

1.1 Обратные функции

Затраченное время – 80 минут

Давайте представим следующую задачу — у нас есть некоторая функция $y(x)$ и несколько её значний y_1, y_2, y_3 в разных точках. Как в таком случае узнать, чему равны аргументы x_1, x_2, x_3, в которых функция $y(x)$ принимает соответствующие значения? Всегда ли вообще такие x_n существуют? Разобраться с подобными вопросами нам поможет понятие обратной фукнции.

Обратная функция, говоря нестрого — это замена смысла переменных x и y. Первая переменная становится значением функции, т.е. зависимой переменной, а вторая становится независимой переменной или её аргументом.



Если размышлять в аналогии, что функция, это некоторый черный ящик, который объектам из одного множества сопоставляет объекты другого, причем на идентичные входные данные всегда будет выдавать одинаковые выходные, то обратные функции, которые принято обозначать как f^{-1}, несложно себе представить, как это указано на картинке справа. То, что является областью значений (образом функции) для f, является областью определения (прообразом) функции f^{-1} и vice versa. Важно отметить, что в случае, если у функции имеется значение, которое может быть получено подстановкой в нее двух различных аргументов, т.е. $f(a) = f(b) = \mathcal{A}$, $a \neq b$ то к ней нельзя построить обратную функцию. Это происходит потому что для обратной функции нарушается главное её свойство — одному аргументу начинают соответствовать два различных значения и поэтому мы не можем однозначно определить значение $f^{-1}(\mathcal{A})$.

Обратимые функции также называют *биективными*, потому что они однозначно сопоставляют значения своим аргументам. Если входные данные различны, то и выходные также различны, что вообще говоря не обязательно в общем случае для функций. Какие не обладающие этим свойством функции вы знаете?

Для функции $y(x)$ обратной функцией будет некоторая $x(y)$, например, если $y(x) = 2x + 3$, то обратной к ней будет функция $x(y) = 0.5y - 1.5$. Мы её получили, приведя тождественными преобразованиями(как при решении уравнений) к единице переменную x и последующим переносом остальных переменных и чисел по другую стороную равенства. Теперь мы можем проверить, что для данной пары функций выполняется свойство, указанное в первом абзаце: если мы хотим узнать, чему равно a, такое что $y(a) = 9$, то мы должны подставить искомое значение $y(a)$ в обратную данной функцию $x(9) = a = 0.5 \cdot 9 - 1.5 = 3$. Проверим метод, подставив полученное число в изначальную функцию, получим $y(3) = 9$.

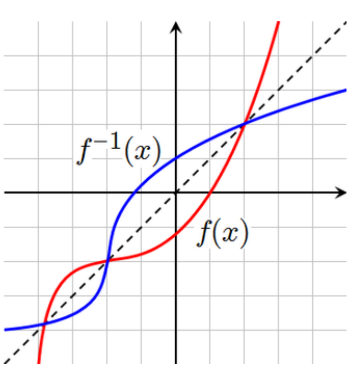


График функции, обратной данной является копией графика изначальной функции, отраженной относительно прямой $x = y$. Также обратная функция обладает некоторыми важными свойствами:

- $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$
- Обратная функция к обратной функции является изначальной функцией. $g(x) = f^{-1}(x) \rightarrow g^{-1}(x) = f(x)$

В случае необратимости функции, её область определения ограничивают до тех пор, пока она не станет биекцией

2 Задачи

Затраченное время – 5 часов

2.1 9 класс, общеобр.

Сложность ● ● ○ ○ ○

Имеются стрелочные часы с длиной часовой и минуной стрелок равной 3 и 5 см соответственно. Какую долю времени расстояние между концами стрелок составляет больше 7 см?

2.1.1 Решение

Чтобы немного упростить решение, "систему отсчета часовой стрелки". Это эквивалетно тому, чтобы крутить сам корпус часов со скоростью хода часовой стрелки проти её движения. В такому случае часовая стрелка будет неподвижной, а минутная сделает 11 оборотов за 12 часов.

Воспользуемся теоремой косинусов, чтобы определить минимальный угол между стрелками, при котором расстояние будет больще 7 сантиметров:

$$7^2 = 3^2 + 5^2 - 2\ cos\ \varphi \cdot 3 \cdot 5$$

Решив уравнение относительно $cos\ \varphi$, получаем $cos\ \varphi = -\frac{1}{2}$. В силу того, что угол в треугольнике не может быть больше $180°$, получаем $\varphi = 120°$

Так как минутная стрелка движется с постоянной угловой скоростью, то доля искомого времени пропорциальна размеру угла, внутри которого расстояние между концами стрелок больше 7, который в данном случае составляет $360 - 120 - 120 = 120$ градусов, из чего мы получаем ответ $\frac{120}{360} = \frac{1}{3}$

2.2 7 класс, общеобр.

Сложность ● ● ● ○ ○

При походе в магазин у вас есть скидочная карта, уменьшнающая цену покупки на некоторый процент от её общей стоимости, а также купон на фиксированное количество денег. В каком порядке стоит использовать эти бонусы для максимальной выгоды?

2.2.1 Решение

В силу ограничений по смыслу задачи, применение скидочной карты аналогично домножению на некоторое число $0 < a < 1$, а применение талона эквивалентно вычитанию из изначальной цены n какого-то $b < n$. Посчитаем финальную цену для обоих случаев порядка применения:

Сначала карта, затем купон:

$$a \cdot n - b$$

Сначала купон, замтем карта:

$$(n - b) \cdot a$$

Посчитаем разность первого и второго варианта:

$$a \cdot n - b - ((n - b) \cdot a) = -b \cdot (1 - a)$$

Так как по условию b и $(1 - a)$ — положительные, то полученный результат отрицательный, из чего следует, что первое число меньше, то есть первый вариант более выгодный

2.3 8 класс, угл.

Сложность ● ● ● ● ○

Энтузиаст-языковед разочаровался в возможностях естественных языков и решил придумать свой собственный. В алфавите его языка 15 различных букв, при этом создатель языка хочет, чтобы все слова в его языке были различимые, но максимально короткие. На свой язык он планирует перевести 3000 слов. Какая будет максимальная длина слова в языке? Какая будет минимальная теоретическое количество букв будет в предложении из 20 слов? Какая будет средняя длина слова в языке? *(прим. - в русском языке средняя длина слова составляет 7.2 буквы)*

2.3.1 Решение

Посчитаем число различных слов длины n в данном языке. В силу того, что нет ограничений на повторение букв, это число равно 15^n и для $n = 1, 2, 3$ составляет 15, 225 и 3375 соответственно. Так как слова должны быть максимально короткими, то логично использовать сначала все однобуквенные слова, затем все двухбуквенные и т.д. В таком случае слов из более чем 2 букв в данном языке будет $3000 - 15 - 225 = 2760$ и все они поместятся в набор из трезбуквенных слов. Поэтому максимальная длина слова в языке равна 3.

Второй вопрос имеет сходный принцип решения. Если нам нужно использовать максимально короткие слова, то мы сначала ихрасходуем все 15 однобуквенных, а затем оставшиеся 5 займем двухбуквенными, из чего получиим ответ в 25 букв в предложении.

Среднюю длину слова можно получить, посчитав сначала "длину" всего словаря, которая составит $15 \cdot 1 + 225 \cdot 2 + 2760 \cdot 3 = 8745$ букв. Зная сумму значений величины и количество этих значений, можно найти среднее. Получаем среднюю длину слова в $\dfrac{8745}{3000} = 2.915$ букв.

2.4 7 класс, общеобр.

Сложность ● ● ○ ○ ○

Идя по коридору, мальчик старалая не наступать на швы между квадратной плиткой на полу. Он заметил, что его старший брат бесстрашно идет вперед, не смотря под ноги и смог пройти целых десять шагов подряд, не задев ни одного шва! Какая может быть максимальная длина подошвы у брата, если он ходит одинаковыми шагами в 90 см, а длина стороны плитки – 46 см. Длину швов на стыках плитки считать малой.

2.4.1 Решение

Шаг брата на 2 см короче двух длин стороны плитки. Каждый его шаг задняя часть его подошвы становится ближе ко шву соответствующей плитки на эту длину. За 10 шагов его нога сместилась на 20 см назад. В преподложении максимально благоприятного сценария, что брат делал первый шаг, находясь передним концом подошвы в упор к шву, его нога могла занимать не более $46 - 20 = 26$ см

2.5 10 класс, угл.

Сложность ● ● ● ○ ○

У заядлого любителя настольных игр есть две пары игральных шестигранных костей. В одной паре два обычных кубика, а в другой один имеет значения 1, 1, 2, 2, 3, 3 на своих гранях, а второй имеет значения 4, 4, 5, 5, 6, 6. Изображения разверток “необычных” кубиков приведены ниже. Владелец кубиков также придумал две игры:

1. Выйгрывает игрок, который выбросит сумму нечетную очков на кубиках
2. Выйграет игрок, который угадает сумму очков на выброшенных кубиквах

Есть ли разница в применении двух различных пар кубиков и если есть, то в каких случаях какие кубики дают больше шансов на успех?

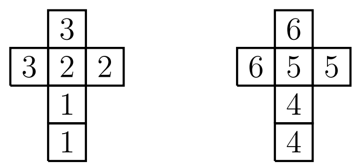


Рис. 1: Развертка кубиков

2.5.1 Решение

Построим распределение выпавшего значения от частоты его выпадения, перебрав все возможные выпадающие комбинации

Для обычных кубиков

Значение	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Частота	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

Для необычных кубиков

Значение	5	6	7	8	9
Частота	4	8	12	8	4

Посчитав количество благопритных случаев для первой и для второй пары кубиков, можно узнать, что на обычных кубиках нечетные числа выпадают чаще — 18 случаев против 16.

Для второй игры более предпочтительны необычные кости, так как частота выпадения наиболее частовыпадающего числа больше и составляет 12, а не 6, как в обычных D6.

2.6 11 класс, ЕГЭ, 12 задание

Сложность ● ● ○ ○ ○

а) Решите уравнение

$$27^{tg\,x} - 12 \cdot 9^{tg\,x} + 27 \cdot 3^{tg\,x} = 0$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2\pi;\ 4\pi]$

2.6.1 Решение

Сделаем замену переменных $q = 3^{tg\,x}$:

$$q^3 - 12q^2 + 27q = q(q^2 - 12q + 27) = 0$$

Откуда получаем

$$\left[\begin{array}{c} q^2 - 12q + 27 = (q-3)(q-9) = 0 \\ \\ q = 0 \end{array}\right.$$

$3^{tg\,x} \neq 0$ в силу свойств показательной функции. Корни 3 и 9 же подходят, из чего получаем

$$\left[\begin{array}{c} tg\,x = log_3\,3 = 1 \\ \\ tg\,x = log_3\,9 = 2 \end{array}\right.$$

Откуда следует, что

$$\left[\begin{array}{c} x = \pi/4 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \\ x = acrtg\,2 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

В ответе на вторую часть получаем:

$$\left[\begin{array}{c} x = 9/4\pi \\ \\ x = acrtg\,2 + 2\pi \end{array}\right.$$

2.7 11 класс, ЕГЭ

Сложность ● ● ● ○ ○

Найдите все положительные значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y| = |\frac{a}{x}| \\ |x| + |y| = a \end{cases}$$

имеет решение

2.7.1 Решение

Заметим, что при отрицательном значении параметра a второе уравнение не имеет решения. Согласно второму уравнению при нулевом значении параметра значение переменной x тоже должно быть равно нулю, что вызывает деление на ноль во первом уравнении, из чего следует, что $a > 0$

Кривая, задаваемая первым уравнением предствляет из себя 4 симметричные гиперболы, по одной в каждом квадранте, а ломанная, задаваемая вторым уравнением представляет из себя квадрат с центром в центре координат, повернутый на 45 градусов с длиной диагонали в $2a$. В силу симметричности кривых, достаточно рассмотреть происходящее в любом одном квадранте. Для простоты выберем первый, поэтому начнем исследовать следующую систему

$$\begin{cases} y = \dfrac{a}{x} \\ x + y = a \end{cases}$$

Выразив y через x во втором уравнении и подставив его в первое, получим квадратное уравнение

$$x^2 - ax + a = 0$$

Дискриминант данного уравнения равен $\sqrt{a^2 - 4a}$. Решение уравнения существует при положительном подкоренном выражении, которое является таким при $a \leq 0$ и $a \geq 4$. Учитывая предыдущие замечания, получаем ответ:

Решение существует при $a \in [4, +\infty)$

3 Оценка оформления решения

Затраченное время – 35 минут

3.1 Задача школьного курса

В решении присутствует арифметическая ошибка (потеря знака), приведшая к неправильному ответу. Согласно критериям работа оценивается в 7 баллов.

3.2 Задача ОГЭ

В решении не указана причина равентсва углов $\angle APL$ и $\angle BPH$, а также причина равенства углов $\angle APL$ и $\angle C$. В остальном решение верное. Согласно критериям работа оценивается в 1 балл.