الموسوعة التعليمية

في الرياضيات الهندسية

الجزء الثاني

التكامل

الطبعة الأولى

1433هـ - 2012 م

دار الكتاب الجامعي
عضو جمعية الناشرين الإماراتيين
عضو اتحاد الناشرين العرب
عضو المجلس العربي للموهوبين والمتفوقين
العين ـ الإمارات العربية المتحدة
ص.ب. 16983
هاتـــف 00971-3-7554845
فاكس 00971-3-7542102
E-mail:bookhous@emirates.net.ae

جمع وتنفيذ وإخراج: كمبيورايتر Compu_Writer لخدمات دور النشر «عادل ندا» القاهرة
E-mail: compu_writer@yahoo.com ☏ - (002-0100390516)

الموسوعة التعليمية
في الرياضيات الهندسية

الجزء الثاني

التكامل

تأليف

أ. د. سعيد جميل أحمد

أستاذ الرياضيات الهندسية

كلية الهندسة – جامعة الزقازيق

الناشر

دار الكتاب الجامعي

العين - دولة الإمارات العربية المتحدة

2012

بِسْمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحْمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

﴿إِنْ أُرِيدُ إِلَّا ٱلْإِصْلَٰحَ مَا ٱسْتَطَعْتُ ۚ وَمَا تَوْفِيقِىٓ إِلَّا بِٱللَّهِ ۚ عَلَيْهِ تَوَكَّلْتُ وَإِلَيْهِ أُنِيبُ﴾

صدق الله العظيم

(هود: 88)

المحتـويات

صفحة زوجية فارغة

مقدمة الموسوعة

نشأت فكرة إعداد موسوعة طلابية في الرياضيات الهندسية منذ وقت ليس بالقليل أيام كنت طالبا بالفرقة الإعدادية ووجدت النقص الشديد في مكتبتنا العربية من مراجع بلغتنا الأم إلا ما ندر وكانت إلا كتب منفردة لأساتذة عظام لكن أن نجد مرجع شبه شامل في التخصص الذي ظلم كثيرا ومازال الظلم متمثلا في التجاهل الشديد لهذا العلم والتجاهل الأكبر للقائمين عليه مع أنهم جميعهم يبذل الغالي والنفيس من أجله. إن الرياضيات الهندسية علم كبير كبحر بلا شطآن من أراد أن يبحر فيه فلابد من أن يختار طريقا محددا كي يبحر فيه وليته يصل بين شطآن ذلك الطريق في بحر الرياضيات الهندسية.

عزيزي القارئ إن الرياضيات الهندسية تجدها رؤيا العين في شتى مجالات حياتنا اليومية ولك بعض الأمثلة وليس الكل كلنا يستخدم الكهرباء كلنا يستخدم المواصلات كلنا يستخدم الاتصالات بمختلف أنواعها كلنا... كلنا أو بعضنا هل تصدق إذا قلت لك أن الرياضيات الهندسية هي الأساس وراء كل هذا حتى الطعام الذي نأكله وصناعاته المختلفة تجدها تبع أساسا من الرياضيات الهندسية.

عزيزي القارئ أما أن لنا أن نقدر هذا العلم الذي احترمه الغرب واحترم كل القائمين عليه .. أما أن لنا نحن العرب ونحن مصدر شتى مناحي المعرفة للغرب أما أن لنا أن نعيد أمجاد علمائنا العرب الذين أناروا طريق العلم للغرب.. إنني أحاول وليتنا جميعا نحاول..

إن تلك الموسوعة هي نتاج خبرة السنين للتدريس لهذا العلم وإنني من هنا وفى الطبعة الأولى أقول مازال هناك الكثير الذي يجب إضافته. إن الجزء الذي بين يديك هو جزء من ستة أجزاء في بعض الأفرع وليست جميعها ولقد بدءنا مستعينين بالله في ستة أجزاء على النحو التالي:

1- الجزء الأول التفاضل.
2- الجزء الثاني التكامل.
3- الجزء الثالث الهندسة التحليلية.
4- الجزء الرابع المعادلات التفاضلية العادية.
5- الجزء الخامس المعادلات التفاضلية الجزئية.
6- الجزء السادس الجبر.

ونظرا للظروف التي تمر بها مصرنا ومنطقتنا العربية فقد عاهدت نفسي أن أخوض طباعتها على نفقتي الخاصة حبا وإجلالا للرياضيات الهندسية ومساعدة ولو بالقليل في النهضة وليتني يمهلني العمر حتى أكمل هذا العمل في اتجاهين:

1- زيادة المادة العلمية في كل جزء.
2- أقوم بالكتابة في مزيد من الأفرع الأخرى في الرياضيات الهندسية.

ولقد راعينا عزيزي القارئ أن تكون لغة الموسوعة لغتنا الأم بجانب تعريب المصطلحات التي يختلف الكثير في تسميتها وتكون هذه المسميات عقبة للدارسين في مرحلة البكالوريوس ومن ثم سوء فهم المعنى الفيزيقي للمصطلح. الله نسأل أن يوفقنا ويوفق الجميع في العمل الذي نبتغى وجه الله وأن تنقى القلوب المريضة من أمراض الحقد والكراهية.

﴿ فَأَمَّا ٱلزَّبَدُ فَيَذْهَبُ جُفَآءً وَأَمَّا مَا يَنفَعُ ٱلنَّاسَ فَيَمْكُثُ فِي ٱلْأَرْضِ كَذَٰلِكَ يَضْرِبُ ٱللَّهُ ٱلْأَمْثَالَ ﴿١٧﴾ ﴾ (الرعد: 17).

المؤلف

أ. د. سعيد جميل أحمد

1

الباب الأول

التكامل الغير محدود

Indefinite Integrals

صفحة زوجية فارغة

الباب الأول

التكامل الغير محدود

Indefinite Integrals

مقدمة

علم التكامل علم قائم بذاته لكن لابد لدراسته أن يكون الدارس ملما بفروع شتى مثل التفاضل ، الجبر وبعض من مفاهيم الهندسة التحليلية سواء كانت في المستوى أو في الفراغ. هناك من يقول أن التكامل هو عملية عكسية للتفاضل لكن لي رأى مخالف بعض الشيء حيث أننا عند تفاضل ناتج التكامل فمن المفترض أن نحصل على أصل الدالة لكن ماذا يحدث عند تكامل دوال وتكون نتيجة التكامل تقريبية أو عددية؟

لدارس التكامل سؤال يفرض نفسه:

كيف يظهر التكامل في حياتنا وتخصصات الهندسة المختلفة؟

أمثلة للإجابة على هذا السؤال:

- قياس المسافة بين نقطتين على سطح الكرة الأرضية.
- تحديد أقل فترة زمنية لتحرك جسم بين نقطتين على سطح الأرض.
- تحديد مركز الثقل لأي شكل هندسي.
- طول المنحنى في المستوى.
- المساحة تحت المنحنى وأي من المحاور الكرتيزية.
- حجم جسم ناتج من دوران أي شكل هندسي حول أي محور أيا كانت نقطة أصله.

بداية نود أن نبين للقارئ المعنى الرياضي قبل المعنى الفيزيقي للتكامل الغير محدود ولنبدأ بكتابة التكامل الآتي:

$$I = \int f(x)dx \tag{1}$$

Where

$\int$ Integral sign علامة التكامل

$f(x)$ Integrand الدالة التي نكاملها

dx Direction of integration اتجاه إجراء التكامل

عند إجراء التكامل في المعادلة (1) يكون ناتج التكامل على الصورة التالية:

$$I = \int f(x)dx = F(x) + C \tag{2}$$

رأينا أن ناتج التكامل دالة جديدة مضافا عليها ثابت هذا الثابت يقال عليه ثابت التكامل Constant of integration.

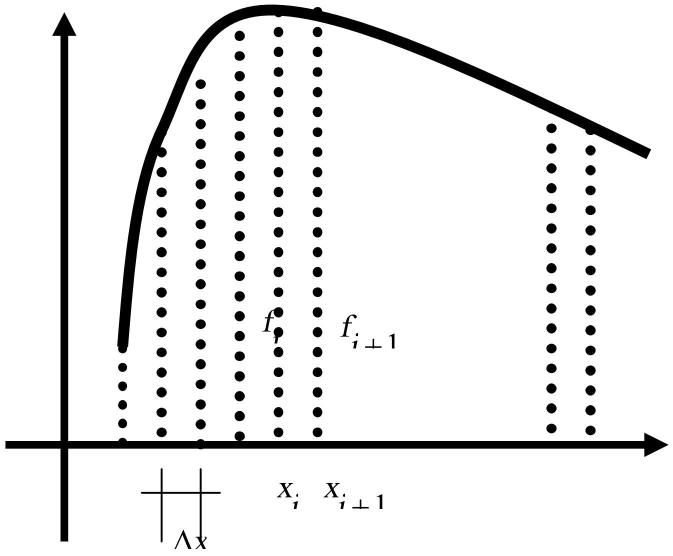
الخلفية الرياضية للتكامل الغير محدود

لنفرض أننا لدينا دالة f(x) في الشكل رقم (1) ولنفرض أننا قسمنا الساحة تحت هذا المنحنى إلى أشباه منحرف Trapezoidals متناهية في صغر عرضها Infinestimal width وعرض كل منها Δx ثم قمنا بتجميع مساحات أشباه المنحرفات هذه ثم أخذنا نهاية هذا المجموع عندما Δx يؤول إلى الصفر ناتج هذه العملية الرياضية هو التكامل المعطى بالمعادلتين (1) ، (2).

سؤال يفرض نفسه: لماذا ظهر ثابت التكامل؟

(1) لعدم وجود حدود للتكامل

(2) للتقريب حيث أننا افترضنا أن الجزء العلوي من أي شريحة هو خط مستقيم لكنه في الحقيقة منحنى.



1Figure

طرق التكامل متعددة ومختلفة حسب طبيعة مسألة التكامل التي نتعامل معها وفيما يلي سوف نبدأ بشرح وافي لكل طريقة على حده حتى يتدرج الدارس في تعلم هذه الطرق منفصلة.

الطرق الأولية للتكامل Simplest Methods of Integration

الطرق الأولية متعددة ولها عدة أشكال وفيما يلي نذكر كل طريقة بالتفصيل مع كثير من الأمثلة التوضيحية:

القاعدة الأولى: First Simplest Rule

$$I=\int\begin{pmatrix}\text{Function}\\ \text{OR}\\ \text{Variable}\end{pmatrix}^{n} d(\text{Function})=\frac{\begin{pmatrix}\text{Function}\\ \text{OR}\\ \text{Variable}\end{pmatrix}^{n+1}}{n+1}+C$$

Example

Evaluate $I=\int\left(\frac{x^2+3x^5}{x}\right)dx$

بتجزئة البسط على المقام للدالة داخل التكامل فيصبح التكامل على الصورة التالية:

$$I=\int\left(\frac{x^2+3x^5}{x}\right)dx=\int\left(x+3x^4\right)dx$$

بإجراء التكامل نحصل على الناتج الآتي:

$$I=\int\left(x+3x^4\right)dx=\frac{x^2}{2}+\frac{3}{5}x^5+C$$

Example

Evaluate $I=\int\left(2\sqrt{x}-\frac{4}{\sqrt{x}}\right)dx$

بتبسيط الدالة داخل التكامل:

$$I=\int\left(2\sqrt{x}-\frac{4}{\sqrt{x}}\right)dx=\int\left(2(x)^{\frac{1}{2}}-4(x)^{\frac{1}{2}}\right)dx$$

بإجراء التكامل نحصل على الناتج الآتي:

$$I = \int \left(2(x)^{\frac{1}{2}} - 4(x)^{-\frac{1}{2}} \right) dx$$
$$= 2\left(\frac{2}{3}\right)x^{\frac{3}{2}} - 4(2)x^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{4}{3}\right)x^{\frac{3}{2}} - 8x^{\frac{1}{2}} + C$$

Example

Evaluate $I = \int (x+2)^2 \, dx$

المتغير x داخل القوس مرفوع لأس واحد صحيح وبالتالي يمكننا إجراء التكامل تبعا للقاعدة السابقة كالآتي:

$$I = \int x^2 \, dx = \int \left(x^2 + 4x + 4\right) dx = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 4x + C$$

Example

Evaluate $I = \int x\left(x^2 + 5\right)^2 dx$

المتغير x داخل القوس مرفوع لأس أكبر من الواحد الصحيح لكن وجود x مضروبة في القوس يجعلنا نستغل الفرصة ونقوم بتوحيد الدالة قبل وبعد التفاضل كالآتي:

$$I = \frac{1}{2} \int \left(x^2 + 5\right)^2 d\left(x^2 + 5\right) = \frac{1}{2} \frac{\left(x^2 + 5\right)^3}{3} + C \qquad (1)$$

Example

Evaluate $I = \int \left(x^2 + 5\right)^2 dx$

المتغير x داخل القوس مرفوع لأس أكبر من الواحد الصحيح وبالتالي ليس أمامنا سوى فك القوس قبل البدء في إجراء التكامل وعليه:

$$I=\int\left(x^2+5\right)^2 dx=\int\left(x^4+10x^2+25\right)dx \tag{1}$$

لا يفوتنا الآن تذكرة القارئ بالآتي:

$$I=\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1} \tag{2}$$

تطبيقا للقاعدة الموضحة في المعادلة (2) على الطرف الأيمن من المعادلة (1) فنحصل على النتيجة التالية:

$$I=\int\left(x^2+5\right)^2 dx=\frac{x^5}{5}+\frac{10}{3}x^3+25x+c \tag{3}$$

Example

Evaluate $I=\int\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+\sqrt{x}(1-x)\right)dx$

واضح من الدالة داخل التكامل أنه ليس أمامنا إلا أن نبسط الدالة أولا قبل البدء في إجراء التكامل:

$$I=\int\left(x^{\frac{-2}{3}}+x^{\frac{1}{2}}(1-x)\right)dx \tag{1}$$

بالتبسيط أكثر:

$$I=\int\left(x^{\frac{-2}{3}}+x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{3}{2}}\right)dx \tag{2}$$

تطبيقا للقاعدة السابقة نحصل على:

$$I=\int\left(x^{\frac{-2}{3}}+x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{3}{2}}\right)dx$$

$$=\frac{x^{\left(\frac{-2}{3}+1\right)}}{\left(\frac{-2}{3}+1\right)}+\frac{x^{\left(\frac{1}{2}+1\right)}}{\left(\frac{1}{2}+1\right)}+\frac{x^{\left(\frac{3}{2}+1\right)}}{\left(\frac{3}{2}+1\right)}+C \qquad (3)$$

$$I=\int\left(x^{\frac{-2}{3}}+x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{3}{2}}\right)dx$$

$$=3x^{\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C \qquad (4)$$

Example

Evaluate $I=\int(3x+1)^{10}\,dx$

هنا بالرغم من أن المتغير x داخل القوس من الرتبة الأولى إلا أنه من الصعب جدا فك القوس من ذو الأس من الدرجة العاشرة إذن فلنحاول وضع التكامل على صورة القاعدة التي نحن بصددها أي أننا يمكننا عمل الآتي قبل الحل:

$$I=\frac{1}{3}\int(3x+1)^{10}\,d(3x+1) \qquad (1)$$

جعلنا المتغير على نفس شكل الدالة التي نكاملها وبالتالي أصبح التكامل لدالة مرفوعة لأس لنفس الدالة.

$$I=\frac{1}{3}\int(3x+1)^{10}\,d(3x+1)$$

$$=\frac{1}{3}\frac{(3x+1)^{11}}{11}+C \qquad (2)$$

Example

Evaluate $I = \int x(x^2+1)^3\,dx$

هذه المسألة فيها فكرة جيدة حيث الدالة التي نكاملها على الصورة $x(x^2+1)^3$ وعليه من الممكن فك القوس ثم التبسيط وبعد ذلك الحل.

لكننا يمكننا عمل شيء نختلف هذه المرة فماذا لو جعلنا dx جعلناه $d(x^2+1)$ وضربنا الدالة في ثابت يجعلها ترجع لأصلها مرة أخرى أي أن:

$$I = \frac{1}{2}\int (x^2+1)^3\,d(x^2+1) \tag{1}$$

والآن يمكننا إجراء التكامل وبالتالي نحصل على الناتج الآتي:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int (x^2+1)^3\,d(x^2+1) \\ &= \frac{1}{8}\left[(x^2+1)^4\right] + C \end{aligned} \tag{2}$$

Example

Evaluate $I = \int x\sqrt{1-x^2}\,dx$

هذه المسألة هي نفس فكرة المسألة السابقة وبالتالي الحل مباشرة كالآتي:

$$\begin{aligned} I &= \int x\sqrt{1-x^2}\,dx \\ &= \left(\frac{-1}{2}\right)\int \sqrt{1-x^2}\,d(1-x^2) \\ &= \left(\frac{-1}{2}\right)\left[\left(\frac{2}{3}\right)(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right] + C \end{aligned}$$

Example

Evaluate $I=\int \tan x \sec^2 x dx$

نعلم أن ناتج تفاضل $\tan x$ هو $\sec^2 x$ وسوف نستغل ذلك بإدخال دالة $\sec^2 x$ داخل علامة التفاضل في مسألة التكامل وبالتالي نحصل على الشكل التالي:

$$I=\int \tan x \sec^2 x dx=\int \tan x d(\tan x)=\frac{(\tan x)^2}{2}+C$$

القاعدة الثانية: Second Simplest Rule

$$I=\int \frac{d(\text{Function})}{(\text{Function})}=\ln(\text{Function})+C$$

ملخص هذه القاعدة هو أن البسط تفاضل المقام وبالتالي ناتج التكامل هو ln المقام والأمثلة التالية توضح ذلك.

Example

Evaluate $I=\int\left(\frac{x+2}{x+1}\right)dx$

من النظرة الأولى للدالة داخل التكامل نجد أننا أما دالة كسرية Rational أي دالة مكونة من بسط ومقام وأن درجتي البسط والمقام متساويتين لكن نرى شيء من الممكن أن يساعد في الحل ألا وهو تجزئية البسط إلى مجموع دالتين ثم تجزئة الناتج الأخير مع البسط كالآتي:

$$I=\int\left(\frac{x+2}{x+1}\right)dx=\int\left(\frac{(x+1)+1}{x+1}\right)dx \qquad (1)$$

$$I=\int\left(\frac{(x+1)+1}{x+1}\right)dx$$
$$=\int dx+\int\left(\frac{1}{x+1}\right)dx \qquad (2)$$

والآن بإجراء التكاملات في المعادلة (2) نحصل على الآتي:

$$I=\int\left(\frac{(x+1)+1}{x+1}\right)dx$$
$$=x+\ln|x+1|+C \qquad (3)$$

نود أن نلفت النظر إلى أن ناتج التكامل الذي يحتوى على دالة اللوغاريتم وضعنا دالته كقيمة مطلقة وذلك لأن أس x فردى وبالتالي من الجائز أن تأخذ قيم موجبة أو سالبة ونظرا لأن الدالة اللوغاريتمية معرفة فقط في الجزء الموجب للمتغير x فكان حتما أن نضع ذلك.

Example

Evaluate $I=\int\frac{dx}{x}$

هذا المثال هو التطبيق المباشر للقاعدة السابقة فيه البسط تفاضل المقام وتطبيقا للقاعدة الثانية من الطرق الأولية لحساب التكامل يمكننا حساب التكامل مباشرة كالآتي:

$$I=\int\frac{dx}{x}=\ln x+C$$

Example

Evaluate $I=\int\frac{x}{x^2+1}dx$

تطبيقا للقاعدة الثانية من الطرق الأولية لحساب التكامل يمكننا إعادة صياغة التكامل على النحو التالي:

$$I=\int \frac{x}{x^2+1}\,dx=\left[\frac{1}{2}\right]\int \frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1}=\left[\frac{1}{2}\right]\ln\left(x^2+1\right)+C$$

Example

Evaluate $I=\int \frac{e^X}{1-e^X}\,dx$

تطبيقا للقاعدة الثانية من الطرق الأولية لحساب التكامل يمكننا إعادة صياغة التكامل على النحو التالي:

$$I=\int \frac{e^X}{1-e^X}\,dx=(-)\int \frac{d\left(1-e^X\right)}{1-e^X}=(-)\ln\left(1-e^X\right)$$

$$=\ln\left[\left(1-e^X\right)^{-1}\right]+C$$

Example

Evaluate $I=\int \frac{\sinh x}{4\cosh x+7}\,dx$

قبل تطبيق القاعدة الثانية من الطرق الأولية تعالي نفاضل المقام ونرى ماذا ينتج:

$$\frac{d}{dx}\left(4\cosh x+7\right)=4\sinh x$$

بناء على ناتج التفاضل يمكننا إعادة صياغة التكامل على الصورة التالية:

$$I = \int \frac{\sinh x}{4\cosh x + 7}\, dx$$
$$= \left[\frac{1}{4}\right] \int \frac{d(4\cosh x + 7)}{4\cosh x + 7}$$
$$= \left[\frac{1}{4}\right] \ln(4\cosh x + 7) + C$$

Example

Evaluate $I = \int \frac{(x^2 + 2x)}{(x+1)^2}\, dx$

تعالي نفك المقام ثم نفاضله ونرى ماذا يحدث:

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

Then

$$\frac{d}{dx}(x^2 + 2x + 1) = 2x + 2$$

نلاحظ أننا لم نحصل على نتيجة ذات قيمة ولكي تكون العملية السابقة ذات قيمة سنقوم بإكمال المربع للبسط ونرى ماذا يمكننا عمله:

$$x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1 \qquad (1)$$

بالتعويض من المعادلة (1) في مسألة التكامل:

$$I = \int \frac{(x^2 + 2x)}{(x+1)^2}\, dx = \int \frac{(x+1)^2 - 1}{(x+1)^2}\, dx \qquad (2)$$

بقسمة البسط على المقام للدالة داخل التكامل في المعادلة (2) نحصل على:

$$I=\int\frac{(x+1)^2-1}{(x+1)^2}\,dx=$$

$$=\int dx-\int\frac{1}{(x+1)^2}\,dx=x-\int(x+1)^{-2}\,dx \qquad (3)$$

$$=x+\left(\frac{1}{x+1}\right)+C$$

القاعدة الثالثة: Third Simplest Rule

$$I=\int\frac{\text{Numerator}}{\sqrt{\text{Denomerator}}}\,dx=2\sqrt{\text{Denomerator}}+C$$

تكامل مكون من بسط ومقام تحت الجذر وكان البسط هو تفاضل ما تحت الجذر في المقام فإن ناتج التكامل هو ضعف الجذر.

Example

Evaluate $I=\int\frac{x^2}{\sqrt{x^3+3}}\,dx$

في البداية ولطالما وجدنا دالة كسرية والمقام كثيرة حدود تحت الجذر إذن أول ما نفكر فيه هو تفاضل الدالة تحت الجذر ومقارنتها بالدالة في البسط ونرى هل من وسيلة لأن يصبح البسط تفاضل ما تحت الجذر. والآن بتفاضل الدالة تحت الجذر:

$$\frac{d}{dx}\left(x^3+3\right)=3x^2 \qquad (1)$$

ولكي يكون هناك تطابق بين التكامل والقانون نضرب البسط في 3 ونقسم على 3 فنحصل على الآتي:

$$I=\int\frac{x^2}{\sqrt{x^3+3}}\,dx$$
$$=\frac{1}{3}\int\frac{3x^2}{\sqrt{x^3+3}}\,dx=\frac{2}{3}\sqrt{x^3+3}+C$$

Example

Evaluate $I=\int\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx$

واضح وكما تعودنا أن يكون المثال الأول هو تطبيق مباشر للقاعدة وعليه البسط في مسألتنا هذه هو ناتج تفاضل ما تحت الجذر وعليه ناتج التكامل طبقا للقاعدة الثالثة كالآتي:

$$I=\int\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx=2\sqrt{\sin x}+C$$

Example

Evaluate $I=\int\frac{1}{\cos^2 x\sqrt{\tan x-1}}\,dx$

يمكننا عمل التبسيط التالي أولا:

$$I=\int\frac{\sec^2 x}{\sqrt{\tan x-1}}\,dx \qquad (1)$$

والآن لنفاضل المقدار ما تحت الجذر نجد أنه هو البسط إذن تطبيقا للقاعدة الثالثة نحصل على:

$$I=\int\frac{\sec^2 x}{\sqrt{\tan x-1}}\,dx \qquad (2)$$
$$=2\sqrt{\tan x-1}+C$$

Example

Evaluate $I=\int \frac{x^3+1}{\sqrt{x^4+4x}}dx$

تفاضل ما تحت الجذر يعطى البسط ولكن مضروب في 4 وعليه نعيد كتابة التكامل على الصورة التالية:

$$I=\int \frac{x^3+1}{\sqrt{x^4+4x}}dx=\left[\frac{1}{4}\right]\int \frac{4\left(x^3+1\right)}{\sqrt{x^4+4x}}dx$$

نطبق القاعدة الثالثة الآن نحصل على:

$$I=\left[\frac{1}{4}\right]\int \frac{4\left(x^3+1\right)}{\sqrt{x^4+4x}}dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}\right]\times 2\times \sqrt{x^4+4x}$$
$$=\left[\frac{\sqrt{x^4+4x}}{2}\right]+C$$

Example

Evaluate $I=\int \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+13}}dx$

تفاضل ما تحت الجذر يعطى البسط ولكن مضروب في 2 وعليه نعيد كتابة التكامل على الصورة التالية:

$$I=\int \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+13}}dx=\left[\frac{1}{2}\right]\int \frac{2(x-2)}{\sqrt{x^2-4x+13}}dx$$

نطبق القاعدة الثالثة الآن نحصل على:

$$I=\left[\frac{1}{2}\right]\int\frac{2(x-2)}{\sqrt{x^2-4x+13}}\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}\right]\times 2\sqrt{x^2-4x+13}$$
$$=\sqrt{x^2-4x+13}+C$$

القاعدة الرابعة: Fourth Simplest Rule

$$I=\int(\text{Basic Function of a certain variable})\ d\ (\text{The same variable})$$

ناتج التكامل هو تكامل الدالة الأساسية Basic function مع ملاحظة إمكانية استخدام جداول التكاملات لعمل ذلك.

Example

Evaluate $I=\int e^X\cot(e^X)dx$

نود أن نوضح للقارئ أننا عندما ذكرنا دالة أساسية فإننا نعنى أي دالة من الدوال المثلثية، الأسية، وخلافة – يرجى مراجعة الجزء الأول من موسوعة الرياضيات الهندسية الجزء الأول تفاضل وتحليلية – الناشر الدار الجامعية – وبناء على هذا سوف نعتبر cot x هي الدالة الأساسية والمتغير هي الدالة الأسية exp (x) وبالتالي تصبح المسألة تطبيق مباشر على القاعدة الرابعة من الطرق الأولية:

$$I=\int e^X\cot(e^X)dx=\int\cot(e^X)d(e^X)$$
$$=\int\frac{\cos(e^X)}{\sin(e^X)}d(e^X)=\ln\left|\sin(e^X)\right|+C$$

ملحوظة

تلاحظ أننا وضعنا ناتج التكامل كقيمة مطلقة وذلك لأن دالة الـ sin دالة ترددية مابين السالب والموجب كما أن دالة ln دالة غير معرفة في الاتجاه السالب ولذا حددنا فقط القيم الموجبة.

Example

Evaluate $I=\int e^{\cos x}\sin x dx$

يمكننا عمل التبسيط التالي حتى يمكننا نطبق القاعدة الرابعة من الطرق الأولية:

$$I=\int e^{\cos x}\sin x dx=-\int e^{\cos x}d(\cos x)=-e^{\cos x}+C$$

Example

Evaluate $I=\int \tan(2x+1)dx$

لدينا دالة tan دالة أساسية والمتغير فيها يختلف عن المتغير بعد علامة d إذن فلنحاول توحيد المتغير في الدالة الأساسية وبعد علامة التفاضل كالآتي:

$$I=\int \tan(2x+1)dx=\left[\frac{1}{2}\right]\int \tan(2x+1)d(2x+1)$$

$$=(-)\left[\frac{1}{2}\right]\int \frac{(-)\sin(2x+1)}{\cos(2x+1)}d(2x+1)$$

$$=(-)\left[\frac{1}{2}\right]\ln\left|\cos(2x+1)\right|+C$$

Example

Evaluate $I = \int e^{\cos x} \sin x dx$

يمكننا عمل التبسيط التالي حتى يمكننا نطبق القاعدة الرابعة من الطرق الأولية:

$$I = \int e^{\cos x} \sin x dx = -\int e^{\cos x} d(\cos x) = -e^{\cos x} + C$$

Example

Evaluate $I = \int 9\cos\left(\frac{\pi}{9} - 3x\right) dx$

لدينا دالة tan دالة أساسية والمتغير فيها يختلف عن المتغير بعد علامة d إذن فلنحاول توحيد المتغير في الدالة الأساسية وبعد علامة التفاضل كالآتي:

$$\begin{aligned} I &= \int 9\cos\left(\frac{\pi}{9} - 3x\right) dx \\ &= \frac{9}{(-3)} \int \cos\left(\frac{\pi}{9} - 3x\right) d\left(\frac{\pi}{9} - 3x\right) \\ &= (-3)\sin\left(\frac{\pi}{9} - 3x\right) + C \end{aligned}$$

Example

Evaluate $I = \int x^3 e^{x^4} dx$

نعلم أننا مازلنا في المرحلة التمهيدية لحساب التكامل بالطرق الأولية مع أن التكامل الحالي يمكن لأول وهلة يظنه القارئ على أنه تكامل بالتجزئ Integration by parts وبما أننا في صدد القاعدة الرابعة الأولية لتكامل الدوال الأساسية فسوف

نقوم بحل التكامل على هذا الأساس:

$$I = \int x^3 e^{x^4}\, dx = \left[\frac{1}{4}\right] \int e^{x^4}\, d\left(x^4\right) = \left[\frac{1}{4}\right] e^{x^4} + C$$

ملحوظة هامة

لو عكسنا وضع المسألة وجعلناها على الصورة $I = \int x^4 e^{x^3}\, dx$ فلا يمكننا تطبيق القاعدة الرابعة.

بعد هذا العرض لطرق حساب التكامل بالطرق الأولية سوف نبدأ المرحلة الثانية المتقدمة في حساب التكاملات بطرق أكثر تعقيدا.

القاعدة الخامسة: Fifth Simplest Rule

التكامل بالتعويض البسيط

لا توجد معايير ثابتة لهذه القاعدة إلا أننا يمكننا الإيجاز بأننا في هذه القاعدة نحدد الجزء من الدالة والذي يمثل مشكلة عند إجراء التكامل ويتم التخلص منه باستخدام تعويض محدد ونود الإشارة إلى أن مثل هذه القاعدة لا تحكمها إلا المسألة نفسها وهذه القاعدة تختلف إلى حد ما في طريقة التكامل بالتعويض سواء باستخدام الدوال المثلثية أو غيرها وسوف يأتى الحديث لاحقا عن التكامل بالتعويض بالتفصيل.

Example

Evaluate $I = \int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$

واضح من الدالة التي نجرى عليها التكامل أن هناك فيها جزء مشترك وهو $\sqrt{x}$

وهذا الجزء يمثل المشكلة في المسألة الحالية وعليه نبدأ الحل بالتخلص من هذه المشكلة بالتعويض كالآتي:

Let

$$y = \sqrt{x}$$

وحيث أننا فرضنا فرض إذن لابد من تبسيط هذا الفرض ، وإيجاد علاقة تفاضل المتغير القديم مع تفاضل المتغير الجديد – راجع الجزء الأول من الموسوعة- وباتباع الطريقة التقليدية نحصل على الآتي:

$$x = y^2 \Rightarrow dx = 2\,ydy$$

بالتعويض بالفرض السابق وتفاضله في التكامل وإجراء التبسيط اللازم نحصل على:

$$I = \int 2\sqrt{1+y}dx$$

$$= \frac{4}{3}(1+y)^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}\left(1+\sqrt{x}\right)^{\frac{3}{2}} + C$$

Example

Evaluate $I = \int \frac{1}{x^2}\sqrt{\left(1-\frac{1}{x}\right)}dx$

واضح من الدالة التي نجرى عليها التكامل أن هناك فيها جزء مشترك وهو $\left(\frac{1}{x}\right)$

وهذا الجزء يمثل المشكلة في المسألة الحالية وعليه نبدأ الحل بالتخلص من هذه المشكلة بالتعويض كالآتي:

Let

$$y=\left(\frac{1}{x}\right)$$

بإتباع نفس الأسلوب في حالة التكامل بالتعويض نحصل على الآتي:

$$\frac{1}{x}=y\Rightarrow -\frac{1}{x^2}dx=dy$$

بالتعويض بالفرض السابق وتفاضله في التكامل وإجراء التبسيط اللازم نحصل على:

$$I=-\int\sqrt{1-y}dy=\left(\frac{2}{3}\right)(1-y)^{\frac{3}{2}}+C$$

$$=\left(\frac{2}{3}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}}+C$$

Example

Evaluate $I=\int\frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)}$

واضح من الدالة التي نجرى عليها التكامل أن x التي في المقام من الممكن أن تكون في البسط بشرط أن تتحول إلى دالة ln x وبالتالي يأخذ التكامل الشكل الآتي:

$$I=\int\frac{\ln x}{\ln x\ln(\ln x)}dx$$

واضح من الدالة التي نجرى عليها التكامل أن دالة ln x متكررة بشكل ملفت للنظر وتمثل مشكلة عند حل التكامل وعليه يمكننا التخلص منها بالتعويض التالي:

Let

$$y=\ln x$$

$$dy = \frac{dx}{x}$$

بالتعويض يصبح التكامل على الصورة التالية:

$$I = \int \frac{dy}{y \ln y}$$

مرة ثانية يمكننا نقل المتغير y من المقام إلى البسط بحيث عند النقل تتحول من y إلى ln y وعلي هذا يأخذ التكامل الصورة التالية:

$$I = \int \frac{d(\ln y)}{\ln y} = \ln(\ln y) + C$$

بالتعويض عن قيمة y بدلالة x نحصل على الناتج النهائي ليصبح على الصورة:

$$I = \ln(\ln y) + C = \ln(\ln(\ln x))$$

Example

Evaluate $I = \int \frac{dx}{e^x + e^{-x} + 2}$

بضرب البسط والمقام في e^x وذلك للتخلص من e^{-x} :

$$I = \int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 2e^x + 1}$$

بتبسيط المقام الدالة داخل التكامل فيصبح التكامل على النحو التالي:

$$I = \int \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} dx$$

والآن كما يتضح من شكل الدالة داخل علامة التكامل بأن هناك دالة مشتركة بين البسط والمقام ألا وهى e^x وتكون بداية الوصول للحل من هذه الدالة وذلك كالآتي:

Let

$$y = e^x \Rightarrow dy = e^x dx$$

Then

$$I = \int \frac{dy}{(y+1)^2} = \int (y+1)^{-2}\, dy = \left(\frac{-1}{y+1}\right) + C$$

والآن بالتعويض عن y بدلالة x فنحصل على الناتج النهائي كالآتي:

$$I = \left(\frac{-1}{e^x+1}\right) + C$$

Example

Evaluate $I = \int \frac{dx}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)^3}$

بالنظرة السريعة للدالة داخل التكامل نجد المشكلة في وجود جذر x داخل القوس المرفوع للأس الثالث والتصرف في هذه الحالة هو التخلص من القوس كاملا بالتعويض التالي:

Let $y = \left(\sqrt{x}+1\right) \Rightarrow dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$

بالتعويض في التكامل نحصل على الآتي:

$$I = \int \frac{dx}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)^3} = \int \frac{dy}{y^3} = -\left(\frac{1}{2}\right) y^{-2} + C$$

بالتعويض عن y بدلالة x نحصل على الناتج النهائي التالي:

$$I = -\left(\frac{1}{2}\right)y^{-2} + C = \left(\frac{-1}{2}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)^{-2} + C$$

Example

Evaluate $I = \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt[4]{\left(x^3+2\right)}}$

بالنظرة السريعة للدالة داخل التكامل نجد المشكلة في وجود الجذر الرابع ويجب التخلص منه بالتعويض التالي:

Let $y = \left(x^3+2\right) \Rightarrow dy = 3x^2\,dx$

بالتعويض في التكامل نحصل على الآتي:

$$I = \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt[4]{\left(x^3+2\right)}} = \frac{1}{3}\int \frac{dy}{y^{\left(\frac{1}{4}\right)}} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{y^{\left(-\frac{1}{4}+1\right)}}{\left(-\frac{1}{4}+1\right)}\right) + C = \frac{4}{9}\,y^{\left(\frac{3}{4}\right)} + C$$

بالتعويض عن y بدلالة x نحصل على الناتج النهائي التالي:

$$I = \frac{4}{9}\left(x^3+2\right)^{\left(\frac{3}{4}\right)} + C$$

Example

Evaluate $\int (1+e)^x\,dx$

Solution

لو دققنا النظر في الدالة التي نكاملها لوجدنا أن الدالة ما هي إلا مقدار ثابت مرفوع لأس وعليه نرجع بالذاكرة مباشرة إلى الدوال الأسية وعلاقاتها بالدوال اللوغاريتمية على النحو التالي:

$$(1+e)^{x} = e^{\ln(1+e)^{x}} = e^{x\ln(1+e)} \qquad (1)$$

باستخدام التعويض التالي:

$$x\ln(1+e) = y \Rightarrow (1+e)dx = dy \qquad (2)$$

بالتعويض من (2) في التكامل المراد حسابه نحصل على:

$$\int (1+e)^{x}\,dx = \frac{1}{\ln(1+e)}\int e^{y}\,dy = \frac{(1+e)^{x}}{\ln(1+e)} + C$$

Example

Evaluate $\int \frac{(x+3)}{(x^{2}+6x)^{\frac{1}{3}}}\,dx$

Solution

لو دققنا النظر في الدالة التي نكاملها لوجدنا أن المشكلة تكمن في القوس في المقام والمرفوع لأس كسرى ولذا نبدأ الحل بالتخلص من هذه المشكلة.

Let

$$(x^{2}+6x) = y \Rightarrow (2x+6)dx = dy \qquad (1)$$

ماذا لو ضربنا بسط الدالة التي نكاملها في 2 نجد أننا نحصل على ناتج التفاضل للفرض في المعادلة (1) وعليه:

$$\int \frac{(x+3)}{(x^2+6x)^{\frac{1}{3}}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{2}\int y^{-\frac{1}{3}}\,dy = \frac{3}{3}\,y^{\frac{2}{3}} + C \qquad (2)$$

$$= \frac{3}{3}(x^2+6x)^{\frac{2}{3}} + C$$

تكامل الدوال المثلثية Integration of Trigonometric Functions

درسنا في التفاضل الدوال المثلثية وأنواعها وخصائصها ومشتقاتها إلخ وفي هذا الباب سوف ندرس تكامل الدوال المثلثية ونود الإشارة إلى أن الأمر يتطلب في كثير من الأحيان أن نلجأ إلى حفظ بعض الصيغ الرياضية ولا يكون هناك مخرج إلا بتذكر العلاقات وهذا ما نسميه استرجاع المعلومة بالتذكر. وفيما يلي سوف نذكر التكاملات الواجب على المهتم أن يكون ملما بها حتى يتسنى له التعامل مع مسائل التكامل للدوال المثلثية.

Table 1

صورة التكامل	ناتج التكامل
$I=\int \sin x dx$	$I=-\cos x+C$
$I=\int \cos x dx$	$I=+\sin x+C$
$I=\int \tan x dx$	$I=\ln\lvert +\sec x\rvert+C \quad \forall x\geq 1$ $I=\ln\lvert -\sec x\rvert+C \quad \forall x\leq 1$
$I=\int \cot x dx$	$I=\ln\lvert \sin x\rvert+C=-\csc x+C$
$I=\int \sec x dx$	$I=\ln\lvert \sec x+\tan x\rvert+C$
$I=\int \csc x dx$	$I=\ln\lvert \csc x-\cot x\rvert+C$
$I=\int \sec^2 x dx$	$I=\tan x+C$
$I=\int \csc^2 x dx$	$I=-\cot x+C$
$I=\int \sec x \tan x dx$	$I=\sec x+C$
$I=\int \csc x \cot x dx$	$I=-\csc x+C$

Example

Evaluate $I=\int \sin^2 x\cos xdx$

Solution

بالنظر للدالة المراد تكاملها يمكننا تغيير شكل التكامل بحيث يسهل تطبيق أحد القواعد الأولية للتكامل وبالتالي يمكننا عمل الآتي:

$$I=\int \sin^2 x\cos xdx=\int (\sin x)^2 d(\sin x)=\frac{(\sin x)^3}{3}+C$$

Example

Evaluate $I=\int (\tan x+1)^2 dx$

Solution

بفك القوس داخل التكامل نحصل على:

$$I=\int (\tan x+1)^2 dx=\int \left(\tan^2 x+2\tan x+1\right)dx \qquad (1)$$

بتبسيط الدالة داخل التكامل في المعادلة (1) تتحول إلى:

$$I=\int \left(\tan^2 x+1\right)dx+2\int \tan xdx \qquad (2)$$

$$I = \int \sec^2 x dx + 2\int \tan x dx \quad (3)$$

وباستخدام الجدول السابق في حساب التكاملات في المعادلة (3) نحصل على الآتي:

$$\begin{aligned} I &= \int \sec^2 x dx + 2\int \tan x dx \\ &= \tan x - 2\ln|\cos x| + C \end{aligned} \quad (4)$$

تكاملات تحتوى على كثيرات حدود Integrals Involving Polynomials

في العديد من المسائل تظهر لنا تكاملات تحتوى على كثيرة حدود Polynomial من الدرجة الثانية في المقام أو تحت جذر من الدرجة الثانية وكثيرة حدود من الدرجة الأولى في البسط.

وفي هذا الجزء سوف نعرض بالتفصيل مع حل العديد من الأمثلة التوضيحية لنبين للقارئ كيفية التصرف في مثل هذه الحالات وهل منذ البداية نتعرض لها أم من الممكن تظهر أثناء إجراء عمليات التكامل.

وفيما يلي قمنا بعمل جدول ملخص لعله يكون دليلا للقارئ عند التعامل مع مثل هذه النوعية من التكامل.

Table 2

التكامل الذي يظهر في المسألة أو أثناء الحل	التكامل الذي يظهر في الجزء الأخير من المسألة	ناتج التكامل الأخير
$I=\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx$	$I=\int \frac{dx}{a^2\pm x^2}$	With $+ve$ $\frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ With $-ve$ $\frac{1}{a}\tanh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$
$I=\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$	$I=\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$	With $+ve$ $\sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ or $\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$ With $-ve$ $\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)$
$I=\int \frac{ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$	$I=\int \frac{\pm dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$	With $+ve$ $\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right), \frac{-\pi}{2}<\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)<\frac{\pi}{2}$ With $-ve$ $\cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right), 0<\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)<\pi$

من الملاحظ في الحالات الثلاثة السابقة أن هناك جزء مشترك بينها وهو المقدار ax^2+bx+c ولنتعامل مع هذا المقدار وذلك بعمل إكمال المربع له كالآتي:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$
$$=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a}\right)\right)$$

وبذلك نصل إلى الشكل النهائي للتكامل الذي تكون نتيجته أحد الدوال المثلثية العكسية أو الزائدية العكسية.

Example

Evaluate $I=\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2-6x-6}}$

بالنظر إلى الجذر في المقام نجد أن كل إشارات حدوده سالبة وعلي هذا يجب التعامل مع المقدار تحت الجذر أولا قبل إجراء التكامل نفسه.

$$-x^2-6x-6=-\left(x^2+6x+6\right)=-\left((x+3)^2-3\right)$$

والآن بالتعويض من ناتج المقدار في أصل التكامل نحصل على الآتي:

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2-6x-6}}=\int\frac{dx}{\sqrt{-\left((x+3)^2-3\right)}}=\int\frac{dx}{\sqrt{3-(x+3)^2}}$$

الصورة الأخيرة للتكامل يمكن وضعها على الشكل التالي:

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2-(x+3)^2}}$$

بالرجوع إلى الجدول السابق ومقارنته بآخر صورة للتكامل الحالي **نجد أن التكامل متطابق مع الحالة الثالثة** وبالتالي يمكننا وضع ناتج التكامل النهائي على الصورة التالية:

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2-(x+3)^2}}=\sin^{-1}\left(\frac{x+3}{\sqrt{3}}\right)+C$$

Example

Evaluate $I=\int\frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{3+x}}dx$

بداية يجب التخلص من الجذر في البسط وذلك بضرب كلا من البسط والمقام في $\sqrt{2-x}$ فنحصل على الآتي:

$$I=\int\frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{3+x}}\times\frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{2-x}}dx$$

$$=\int\frac{2-x}{\sqrt{(2-x)(3+x)}}dx \qquad (1)$$

$$=\int\frac{2-x}{\sqrt{6-x-x^2}}dx$$

يمكن التعامل مع الصورة الأخيرة للتكامل في المعادلة (1) سوف تؤول إلى تكاملين منفصلين وسوف نبدأ بطريقة رياضية كالآتي:

$$I=\int\frac{2-x}{\sqrt{6-x-x^2}}dx$$

$$=(-)\int\frac{(x-2)}{\sqrt{6-x-x^2}}dx \qquad (2)$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)\int\frac{[(2x+1)-5]}{\sqrt{6-x-x^2}}dx$$

أردنا من العملية السابقة أن نجعل جزءا من البسط ناتج تفاضل ما تحت الجذر

وبالتالي يمكننا كتابة الناتج مباشرة في حين فصل الثابت في البسط مع المقام للتعامل مع التكامل بطريقة الدوال المثلثية.

$$\begin{aligned} I &= \left(\frac{1}{2}\right)\int \frac{-(2x+1)}{\sqrt{6-x-x^2}}\,dx + \frac{5}{2}\int \frac{1}{\sqrt{6-x-x^2}}\,dx \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned} \tag{3}$$

في المعادلة (3):

$$I_1 = \left(\frac{1}{2}\right)\int \frac{-(2x+1)}{\sqrt{6-x-x^2}}\,dx \tag{4}$$

$$I_2 = \frac{5}{2}\int \frac{1}{\sqrt{6-x-x^2}}\,dx \tag{5}$$

التكامل في المعادلة (4) فيه البسط تفاضل ما تحت الجذر وبالتالي ناتج التكامل هذا هو ضعف الجذر في المقام أي أن:

$$\begin{aligned} I_1 &= \left(\frac{1}{2}\right)\int \frac{-(2x+1)}{\sqrt{6-x-x^2}}\,dx = \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)\times 2\sqrt{6-x-x^2} = \sqrt{6-x-x^2} \end{aligned} \tag{6}$$

التعامل مع التكامل في المعادلة (5) يتطلب أن نجرى إكمال المربع في المقام تحت الجذر قبل البدء في إجراء عملية التكامل نفسها وبالتالي بناتج هذه العملية تأخذ المعادلة (5) الصورة التالية:

$$I_2 = \frac{5}{2}\int \frac{1}{\sqrt{\frac{25}{4}-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}}\,dx \tag{7}$$

بمقارنة التكامل في المعادلة (7) مع الجدول السابق يمكننا استنتاج ناتج التكامل وبالتالي المعادلة (7) تأخذ الشكل التالي:

$$I_2 = \frac{5}{2}\int \frac{1}{\sqrt{\frac{25}{4}-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}}\,dx = \frac{5}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}}\right) \qquad (8)$$

والآن بجمع المعادلتين (6) ، (8) نحصل على الناتج النهائي للتكامل المطلوب ويأخذ الصورة التالية:

$$I = \int \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{3+x}}\,dx$$

$$= \sqrt{6-x-x^2} + \frac{5}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}}\right) + C$$

Example

Evaluate $I = \int \frac{1}{\sqrt{x^2+6x+42}}\,dx$

للتعامل مع التكامل يتطلب أن نجرى إكمال المربع في المقام تحت الجذر قبل البدء في إجراء عملية التكامل نفسها وبالتالي بناتج هذه العملية يأخذ التكامل الصورة التالية:

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{x^2+6x+42}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x+3)^2+3}}\,dx$$

بمقارنة الصورة الأخيرة التكامل مع الجدول السابق يمكننا استنتاج ناتج التكامل وبالتالي ناتج التكامل يأخذ الشكل التالي:

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 6x + 42}}\,dx$$
$$= \int \frac{1}{\sqrt{(x+3)^2 + 3}}\,dx$$
$$= \sinh^{-1}\left(\frac{x+3}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Example

Evaluate $I = \int \frac{1}{\sqrt{3 + 2x - x^2}}\,dx$

للتعامل مع التكامل يتطلب أن نجرى إكمال المربع في المقام تحت الجذر قبل البدء في إجراء عملية التكامل نفسها وبالتالي بناتج هذه العملية يأخذ التكامل الصورة التالية:

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{3 + 2x - x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{4 - (x-1)^2}}\,dx$$

بمقارنة الصورة الأخيرة التكامل مع الجدول السابق يمكننا استنتاج ناتج التكامل وبالتالي ناتج التكامل يأخذ الشكل التالي:

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{3 + 2x - x^2}}\,dx$$
$$= \int \frac{1}{\sqrt{4 - (x-1)^2}}\,dx$$
$$= \sin^{-1}\left(\frac{x-1}{2}\right) + C$$

Example

Evaluate $I=\int \frac{1}{4x^2+5x+9}\,dx$

للتعامل مع التكامل يتطلب أن نجرى إكمال المربع في المقام تحت الجذر قبل البدء في إجراء عملية التكامل نفسها وبالتالي بناتج هذه العملية يأخذ التكامل الصورة التالية:

$$I=\int \frac{1}{4x^2+5x+9}\,dx=\left(\frac{1}{4}\right)\int \frac{1}{(x+1)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}\,dx$$

بمقارنة الصورة الأخيرة التكامل مع الجدول السابق **نجد أن التكامل متطابق مع الحالة الأولى** وبالتالي ناتج التكامل يأخذ الشكل التالي:

$$I=\int \frac{1}{4x^2+5x+9}\,dx=\left(\frac{1}{4}\right)\int \frac{1}{(x+1)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}\,dx=$$

$$\left(\frac{1}{4\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)}\right)\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)}\right)+C$$

Example

Evaluate $I=\int \frac{x}{3x^4-5x^2+1}\,dx$

للتعامل مع التكامل يتطلب أن نجرى إكمال المربع في المقام بعد جعل معامل المتغير x ذات أكبر أس مساو للواحد وبالتالي بناتج هذه العملية يأخذ التكامل الصورة التالية:

$$I=\int \frac{x}{3x^4-5x^2+1}\,dx$$

$$=\frac{1}{3}\int \frac{x}{\left(x^2-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2}\,dx \qquad (1)$$

وجود المتغير x في البسط يجعلنا نفكر في التخلص منه حتى يمكننا استخدام الجدول السابق في معرفة ناتج التكامل وعليه سوف نستخدم التعويض التالي:

Let $x^2=t \Rightarrow 2x\,dx=dt$

بالتعويض في المعادلة (1) تصبح:

$$I=\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\int \frac{2x}{\left(x^2-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2}\,dx=$$

$$=\frac{1}{6}\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)}\tan^{-1}\left(\frac{t-\frac{1}{3}}{\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)}\right)+C \qquad (2)$$

بعد ذلك نعوض عن t بما يناظرها للمتغير x فيصبح التكامل على النحو التالي:

$$I=\frac{1}{2\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{x^2-\frac{1}{3}}{\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)}\right)+C \qquad (3)$$

Example

Evaluate $I=\int \frac{x}{3x^2-2x+1}\,dx$

حيث أن الدالة مكونة من بسط ومقام فليكون التفكير أولا أن نجعل البسط تفاضل المقام ويتطلب هذا الآتي:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x}{3x^2 - 2x + 1}\, dx \\ &= \frac{1}{6} \int \frac{6\left[\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}\right]}{3x^2 - 2x + 1}\, dx \end{aligned} \qquad (1)$$

التكامل الأخير يمكن تجزئته إلى جزئين كالآتي:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{6} \int \frac{6x - 2}{3x^2 - 2x + 1}\, dx + \frac{1}{3} \int \frac{1}{3x^2 - 2x + 1}\, dx \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned} \qquad (2)$$

في المعادلة (2):

$$I_1 = \frac{1}{6} \int \frac{6x - 2}{3x^2 - 2x + 1}\, dx = \frac{1}{6} \ln\left(3x^2 - 2x + 1\right) \qquad (3)$$

$$I_2 = \frac{1}{3} \int \frac{1}{3x^2 - 2x + 1}\, dx \qquad (4)$$

كما سبق وأن تعلمنا كيفية التصرف مع تكامل على الصورة في المعادلة (4) بأن نجرى إكمال المربع وعليه تأخذ المعادلة (4) الشكل التالي:

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{3x^2 - 2x + 1}\, dx \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 \int \frac{1}{\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{9}}\, dx \end{aligned} \qquad (5)$$

والآن يمكننا استخدام الجدول السابق في حساب التكامل في المعادلة (5) فيصبح على النحو التالي:

$$\begin{aligned} I_2 &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 \int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2}\, dx \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)} \tan^{-1} \frac{\left(x-\frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)} + C \end{aligned} \qquad (6)$$

التكامل باستخدام التعويض بالدوال المثلثية

Integration by Trigonometric Substitution

مع تعدد الأفكار تتولد الطرق وبالرغم من ذلك فإن المسألة الواحدة من الممكن أن تكون لها أكثر من طريقة للحل. وفي الجزء الحالي سوف نتعرض بالتحليل لنوعية من المسائل تحتوى على جذور تربيعية سواء ظهرت هذه الجذور في البسط أو المقام المهم أن محتواها عبارة عن كثيرة حدود من الدرجة الثانية وفي مثل هذه الحالات يكون التصرف باستخدام التعويض بدوال مثلثية ولقد أوجزنا كل الحالات المحتملة في الجدول رقم (2) التالي:

Table 3

$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ $\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$	في هذه الحالة نستخدم التعويض التالي $x=a\sin\theta$ وذلك لنستخدم العلاقة التالية في التبسيط $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$	$x=a\sin\theta$ $\Rightarrow$ $dx=a\cos\theta d\theta$
$\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx$ $\int\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx$	في هذه الحالة نستخدم التعويض التالي $x=a\tan\theta$ وذلك لنستخدم العلاقة التالية في التبسيط $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$	$x=a\tan\theta$ $\Rightarrow$ $dx=a\sec^2\theta d\theta$
$\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx$ $\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx$	في هذه الحالة نستخدم التعويض التالي $x=a\sec\theta$ وذلك لنستخدم العلاقة التالية في التبسيط $\sec^2\theta-1=\tan^2\theta$	$x=a\sec\theta$ $\Rightarrow$ $dx=a\sec\theta\tan\theta d\theta$

Example

Evaluate $I=\int x\sqrt{9x^2-4}\,dx$

يمكننا إعادة صياغة التكامل على صورة مناسبة بحيث يمكننا استخدام الجدول رقم (2) في الحل،

$$I=\int x\sqrt{9x^2-4}\,dx=3\int x\sqrt{x^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2}\,dx \qquad (1)$$

بمقارنة شكل التكامل في المعادلة (1) مع الصور القياسية في الجدول رقم (2) فيمكننا استخدام التعويض التالي:

بفرض أن

$$x = a\sec\theta$$

في هذا الفرض الثابت a يناظر الثابت تحت الجذر أي أن $a = \frac{2}{3}$ ، وبالتالي:

$$x = \left(\frac{2}{3}\right) \sec\theta \Rightarrow dx = \left(\frac{2}{3}\right) \sec\theta \ \tan\theta \ d\theta \qquad (2)$$

بالتعويض من (2) في (1) نحصل على الشكل التالي للتكامل:

$$I = 3\int \left(\frac{2}{3}\sec\theta\right)\sqrt{\left(\frac{2}{3}\sec\theta\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2}\left(\frac{2}{3}\sec\theta\tan\theta\right) \ d\theta \qquad (3)$$

بإجراء بعض التبسيط الرياضي على المعادلة (3) فتصبح على الشكل التالي:

$$I = 3 \ \left(\frac{2}{3}\right)^3 \int \sec^2\theta \ \sqrt{\sec^2\theta - 1^2} \ \tan\theta d\theta \qquad (4)$$

But

$$\sec^2\theta - 1^2 = \tan^2\theta \qquad (5)$$

بالتعويض من (5) في (4) نحصل على الآتي:

$$I = 3 \ \left(\frac{2}{3}\right)^3 \int \sec^2\theta \ \tan^2\theta \ d\theta \qquad (6)$$

في التكامل الموضح بالمعادلة (6) يمكننا إدخال $\sec^2\theta$ داخل التفاضل بأصل

الدالة التي بتفاضلها نحصل على $\sec^2\theta$ هذه الدالة هي $\tan\theta$ وعليه يصبح التكامل في المعادلة (6) على النحو التالي:

$$\begin{aligned} I &= 3\left(\frac{2}{3}\right)^3 \int \tan^2\theta \quad d(\tan\theta) \\ &= 3\left(\frac{2}{3}\right)^3 \frac{\tan^3\theta}{3} + C \end{aligned} \tag{7}$$

الخطوة الأخيرة هي إظهار نتيجة التكامل بدلالة المتغير الأصلي x من العلاقة التي فرضت في بداية الحل.

$$\sec\theta = \frac{3x}{2}$$

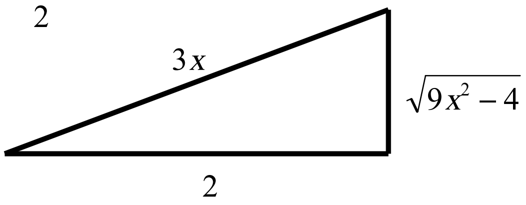


Figure 2

من المثلث الموضح في الشكل رقم (2) يمكننا استنتاج أي نسبة مثلثية بدلالة المتغير x وعليه تكون النتيجة النهائية للتكامل بدلالته.

حل بسيط

$$I = \int x\sqrt{9x^2 - 4}\,dx$$

بالنظر إلى المتغير x داخل التكامل نجد أن المتغير داخل الجذر من الدرجة

الثانية في حين أنه خارج الجذر من الدرجة الأولى وعليه يمكننا إعادة كتابة التكامل كالآتي:

$$I = \int x\sqrt{9x^2 - 4}\,dx$$
$$= \left(\frac{1}{18}\right)\int \sqrt{9x^2 - 4}\,d\left(9x^2 - 4\right)$$
$$= \left(\frac{1}{18}\right)\int \left(9x^2 - 4\right)^{\frac{1}{2}} d\left(9x^2 - 4\right)$$
$$= \left(\frac{1}{18}\right)\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)}\left(9x^2 - 4\right)^{\frac{3}{2}} + C$$

Example

Evaluate $I = \int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}$

الخطوة الأولى في الحل هي إكمال المربع للمقدار تحت الجذر

$$2x - x^2 = -\left(x^2 - 2x\right)$$
$$= -\left((x-1)^2 - 1\right) = 1 - (x-1)^2 \tag{1}$$

بالتعويض من (1) في التكامل يصبح التكامل على النحو التالي:

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}$$
$$= \int \frac{dx}{\sqrt{1 - (x-1)^2}} \tag{2}$$

والآن بمقارنة (1) مع الصور القياسية الموضحة في الجدول (2) وعليه يمكننا استخدام التعويض التالي:

Let

$$(x-1)=t \Rightarrow dx=dt$$

Then

$$I=\int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}}=\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \tag{3}$$

والآن أصبح التكامل مطابق لأحد الصور القياسية في الجدول رقم (2) وعليه سوف نستخدم التعويض التالي:

$$t=\sin\theta \Rightarrow dt=\cos\theta d\theta \tag{4}$$

بالتعويض من (4) في (3) نحصل على:

$$I=\int \frac{\cos\theta d\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}=\int d\theta=\theta+C \tag{5}$$

But

$$\theta=\sin^{-1}t \tag{6}$$

Then

$$I=\sin^{-1}t+C=\sin^{-1}(x-1)+C \tag{7}$$

Example

Evaluate $I=\int \frac{\sqrt{25-x^2}}{x}dx$

عند النظر إلى هذا التكامل ومقارنته بالجدول رقم (2) نستطيع البدء في الحل باستخدام الفرض التالي:

$$x=5\sin\theta \Rightarrow dx=5\cos\theta d\theta \tag{1}$$

بالتعويض من المعادلة (1) في التكامل المعطى نحصل على:

$$\begin{aligned} I&=\int \frac{\sqrt{25-x^2}}{x}dx \\ &=\int \frac{\sqrt{25-(5\sin\theta)^2}}{5\sin\theta}(5\cos\theta)d\theta \end{aligned} \tag{2}$$

بإجراء بعض التبسيط يمكننا الوصول بالتكامل إلى الصورة التالية:

$$I=5\int \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}d\theta \tag{3}$$

باستخدام العلاقة التالية:

$$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta \tag{4}$$

بالتعويض من (4) في (3) نحصل على الآتي:

$$\begin{aligned} I&=5\int \frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta}d\theta \\ &=5\int\left(\frac{1}{\sin\theta}-\sin\theta\right)d\theta \end{aligned} \tag{5}$$

الجزء الأول من التكامل في المعادلة (5) يمكن إيجاده باستخدام الجداول مباشرة وعلى ذلك نصل إلى الناتج النهائي للتكامل المطلوب ويصبح على الصورة التالية:

$$
\begin{aligned}
I &= 5\int\left(\frac{1}{\sin\theta} - \sin\theta\right)d\theta \\
&= 5\ln\left|\csc\theta - \cot\theta\right| + 5\cos\theta + C
\end{aligned}
\tag{6}
$$

لاحظ أن الناتج النهائي مازال دالة θ لكن من المفترض أن يكون دالة في x وعلى هذا نرجع مرة أخرى للفرض في المرة الأولى لكي نصل إلى المطلوب.

$$x = 5\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{x}{5} \tag{7}$$

بعد ذلك نتبع الطريقة التقليدية للوصول بالناتج السابق ليصبح دالة في x.

التكامل بالتجزئ Integration By Parts

التكامل بالتجزئ من القواعد التي تستخدم على نطاق واسع جدا في علم التكامل وسوف نبدأ بالصورة البسيطة للمبتدئين لكي نضع مفهوم التكامل بالتجزئ في إطار يسهل استيعابه. لنفرض أننا نريد إجراء لدالة وفى حقيقة الأمر هذه الدالة هي في الأصل حاصل ضرب دالتين ولنعطى مسمى لكل دالة على حده على سبيل المثال Function (1) & Function (2) فالقاعدة على هذا الأساس كالآتي:

$$
\begin{aligned}
I &= \int\{\text{Function (1)} \times \text{Function (2)}\}dx \\
&= \text{Function (1)} \times \left[\int \text{Function (2) dx}\right] \\
&- \int\left\{\left[\int \text{Function (2) dx}\right] \times \frac{\text{d}}{\text{dx}}\text{Function (1)}\right\}
\end{aligned}
$$

Example

Evaluate $I=\int x\sec^2 x dx$

في البداية نود أن نوضح للقارئ أن اختيار الدوال الأولى و الثانية ليست له قاعدة ثابتة إلا أن الخبرة تتطلب أن اختيار الدالة الأولى هي التي تنتهي بعملية التفاضل وعلى هذا الأساس سوف نختار الدوال كالآتي:

$$\text{Function }(1)=x \qquad (1)$$

$$\text{Function }(2)=\sec^2 x \qquad (2)$$

$$\begin{aligned} I&=\int\left\{x\ \ \sec^2 x\right\}dx \\ &=x\int\sec^2 x-\int\left\{\int\sec^2 x\right\}\times 1dx \end{aligned} \qquad (3)$$

$$I=\int\left\{x\ \ \sec^2 x\right\}dx=x\tan x-\int\tan x\ \ dx \qquad (4)$$

$$I=x\tan x-\int\frac{\sin x}{\cos x}\ \ dx \qquad (5)$$

$$I=x\tan x-(-)\int\frac{(-)\sin x}{\cos x}\ \ dx \qquad (6)$$

$$I=x\tan x+\ln(\cos x)+C \qquad (7)$$

Example

Evaluate $I=\int\frac{x\ln x}{\left(x^2-1\right)^{\frac{3}{2}}}dx$

بداية بفضل تبسيط التكامل بحيث يمكننا تحديد أي الطرق أفضل لحله بعد ذلك. المشكلة تظهر في المتغير x في المقام والمرفوع للأس 2 والقوس نفسه لأس كسر ، وعلى هذا سوف نبدأ بالتعويض التالي:

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx \qquad (1)$$

بالتعويض بالفرض الموجود في المعادلة (1) في المسألة المعطاة والتبسيط فنحصل على:

$$I = \int \frac{\ln u^{\frac{1}{2}}}{(u-1)^{\frac{3}{2}}} \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \int \frac{\ln u}{(u-1)^{\frac{3}{2}}} du$$
$$= \frac{1}{4} \int (u-1)^{-\left(\frac{3}{2}\right)} \ln u \quad du$$

(2) التالي

والآن بالنظر إلى آخر شكل وصلنا إليه في المعادلة (2) يمكننا الآن القول بأننا سنطبق قاعدة التكامل بالتجزئ مع ملاحظة أن وجود دالة ln صعب التكامل لكن يسهل التخلص منه بالتفاضل وبناء على هذه الملاحظة سوف تكون دالة ln هي التي نفاضلها في حين الدالة الأخرى هي التي نكاملها مع ملاحظة أن تكاملها سهل وذلك لأن المتغير u داخل القوس مرفوع للأس واحد أي خطى والآن لنبدأ إجراء التكامل:

$$I = \frac{1}{4} \int (u-1)^{-\left(\frac{3}{2}\right)} \ln u du$$
$$= \frac{1}{4} \left\{ \ln u \left[-2(u-1)^{-\left(\frac{1}{2}\right)} \right] + 2 \int (u-1)^{-\left(\frac{3}{2}\right)} \frac{1}{u} \quad du \right\} \qquad (3)$$

بتبسيط المعادلة (3) نحصل على:

$$I = \left\{ \frac{-1}{2} \ln u(u-1)^{-\left(\frac{1}{2}\right)} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{u\sqrt{(u-1)}} \quad du \right\} \qquad (4)$$

والآن لنتعامل مع التكامل الأخير في المعادلة (4) كالآتي:

$$I_1 = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u\sqrt{(u-1)}}\ du \tag{5}$$

Let

$$u-1 = t^2 \Rightarrow du = 2tdt \tag{6}$$

بالتعويض من المعادلة (6) في المعادلة (5) نحصل على الآتي:

$$I_1 = 2\int \frac{dt}{\left(t^2+1\right)} = 2\tan^{-1} t + C$$

$$= 2\tan^{-1}\sqrt{u-1} + C \tag{7}$$

$$= 2\tan^{-1} x + C$$

بالتعويض بالحد الأخير من المعادلة (7) في المعادلة (4) مع مراعاة التعبير عن u في المعادلة (4) بدلالة المتغير الأصلي x فنحصل على الناتج النهائي للتكامل ويأخذ الشكل التالي:

$$I = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}}\ln|x| + \tan^{-1} x + C \tag{8}$$

Example

Evaluate $I = \int x^r \ln x\ \ dx,\ \ r \neq -1$

مشكلة دالة ln وكما تصرفنا في المثال السابق سوف يقع عليها الاختيار على أنها الدالة التي نفاضلها حتى نتخلص منها بعملية التفاضل. والآن نبدأ التكامل بالتجزئ كالآتي:

$$I=\int x^{r}\ln x \quad dx=$$

$$=\left(\frac{x^{r+1}}{r+1}\right)\ln x-\int\left(\frac{x^{r+1}}{r+1}\right)\frac{1}{x}dx \qquad (1)$$

والآن بتبسيط المعادلة (1) وإجراء التكامل مرة أخرى كالآتي:

$$I=\left(\frac{x^{r+1}}{r+1}\right)\ln x-\left(\frac{1}{r+1}\right)\int x^{r}dx=$$

$$=\left(\frac{x^{r+1}}{r+1}\right)\ln x-\left(\frac{x^{r+1}}{(r+1)^{2}}\right)+C \qquad (2)$$

سؤال يفرض نفسه عند اختيار الدوال سواء الأولى أو الثانية في طريقة التكامل بالتجزئ ألا وهو ماذا يحدث لو أن كلا من الدالتين لا ينتهي بالتفاضل؟ والإجابة بسيطة وهى أن الاختيار يتم عشوائي بشرط لكن هناك شرط يجب أن نلتزم به ألا وهو الدالة التي تم اختيارها الأولى تظل هي الأولى أيا كان عدد المرات التي نجرى فيها التكامل ويجب التنبيه إلى أنه إذا عكس الاختيار عند إجراء التكامل للمرة الثانية فستكون النتيجة النهائية مساوية للصفر والأمثلة سوف توضح ذلك.

Example

Evaluate $I=\int e^{5x}\cos 4x dx$

واضح أن كلا من الدالتين لا ينتهي بالتفاضل وعليه سوف يكون الاختيار كالآتي:

Function (1) = e^{5x} (1)

Function (2) = $\cos 4x$ (2)

والآن لنطبق قاعدة التكامل بالتجزئ:

$$I=\int e^{5x}\cos 4xdx=e^{5x}\times\left\{\int\cos 4xdx\right\}-\int\left[\left\{\int\cos 4xdx\right\}\times\left\{\frac{d}{dx}e^{5x}\right\}\right]dx \qquad (3)$$

بإجراء التكامل والتفاضل في المعادلة (3) نحصل على:

$$\begin{aligned}I&=\int e^{5x}\cos 4xdx=\\&=e^{5x}\times\left\{\frac{1}{4}\sin 4x\right\}-\int\left[\left\{\frac{1}{4}\sin 4x\right\}\times\left\{5e^{5x}\right\}\right]dx\end{aligned} \qquad (4)$$

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{4}\left\{e^{5x}\sin 4x\right\}-\frac{5}{4}\int e^{5x}\sin 4xdx=\\&=\frac{1}{4}\left\{e^{5x}\sin 4x\right\}-I_1\end{aligned} \qquad (5)$$

والآن لننظر إلى الناتج الأخير في المعادلة (5) ونبدأ في حساب التكامل I_1 مع مراعاة أن الدالة الأولى في التكامل السابق تظل الأولى هذه المرة أيضا.

$$\begin{aligned}I_1&=\frac{5}{4}\int e^{5x}\sin 4xdx\\&=\left(\frac{5}{4}\right)\left\{e^{5x}\left[\int\sin 4xdx\right]-\int\left\{\left[\int\sin 4xdx\right]\times\frac{d}{dx}e^{5x}\right\}dx\right\}\end{aligned} \qquad (6)$$

$$I_1=\left(\frac{5}{4}\right)\left\{e^{5x}\left[\frac{-1}{4}\cos 4x\right]-\int\left\{\left[\frac{-1}{4}\cos 4x\right]\times\left[5e^{5x}\right]\right\}dx\right\} \qquad (7)$$

$$I_1=\left\{\left(\frac{-5}{16}\right)e^{5x}\cos 4x+\frac{25}{16}\int e^{5x}\cos 4xdx\right\} \qquad (8)$$

التكامل الأخير في المعادلة (8) هو نفسه التكامل الأصلي وعلى ذلك يمكننا استبداله بالرمز I وعليه تصح المعادلة (8) على النحو التالي:

$$I_1 = \left(\frac{-5}{16}\right) e^{5x} \cos 4x + \frac{25}{16} I \qquad (9)$$

بالتعويض الآن من المعادلة (9) في المعادلة (5) نحصل على الآتي:

$$I = \frac{1}{4}\left\{e^{5x} \sin 4x\right\} + \left(\frac{5}{16}\right) e^{5x} \cos 4x - \frac{25}{16} I \qquad (10)$$

بإعادة ترتيب المعادلة (10) نحصل على الشكل التالي:

$$\frac{41}{16} I = \frac{1}{4}\left\{e^{5x} \sin 4x\right\} + \left(\frac{5}{16}\right) e^{5x} \cos 4x \qquad (11)$$

$$I = \frac{16}{41}\left[\frac{1}{4}\left\{e^{5x} \sin 4x\right\} + \left(\frac{5}{16}\right) e^{5x} \cos 4x\right] + C \qquad (12)$$

Example

Evaluate $I = \int \sin(\ln x) dx$

في البداية يجب التخلص من المشكلة قبل بداية الحل والمشكلة تكمن في دالة ln داخل دالة sin وعليه لنبدأ بالتخلص منها:

Let

$$\ln x = t \Rightarrow x = e^t \Rightarrow dx = e^t dt \qquad (1)$$

بالتعويض من (1) في مسألة التكامل المعطاة تتحول إلى الصورة التالية:

$$I = \int \sin t \;\; e^t dt \qquad (2)$$

والآن وكما سبق في المثال السابق سوف نختار الدالة الأسية كدالة أولى ودالة sin كدالة ثانية ونبدأ بتطبيق قاعدة التكامل بالتجزئ:

$$I = \int \sin t \;\; e^t dt = e^t(-\cos x) + \int \cos x \;\; e^t dt \qquad (3)$$

بالتكامل بالتجزئ مرة أخرى مع مراعاة الشرط الأساسي في اختيار الدوال فنحصل على:

$$I = e^t(-\cos x) + e^t \sin x - \int \sin x \;\; e^t dt \qquad (4)$$

المعادلة (4) يمكن إعادة كتابتها على النحو التالي:

$$I = e^t(-\cos x) + e^t \sin x - I \qquad (5)$$

بإعادة ترتيب المعادلة (5) نحصل على الصورة التالية:

$$I = \frac{1}{2}\left\{e^t(-\cos x) + e^t \sin x\right\} + C \qquad (6)$$

Example

Evaluate $I = \int \sin^{-1} x dx$

نلاحظ في هذا المثال وجود دالة مثلثية عكسية وفى هذه الحالة أنسب تعامل هو تفاضل الدالة المثلثية العكسية لكي نتخلص منها وعليه تكون هي الدالة الأولى ونعتبر أن الدالة الثانية هي الواحد الصحيح ونبدأ بتطبيق قاعدة التكامل بالتجزئ كما سبق.

$$\begin{aligned} I &= \int 1 \times \sin^{-1} x dx = \\ &= \sin^{-1} x \times x - \int x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \end{aligned} \qquad (1)$$

نحاول الآن في التكامل الأخير أن نجعل البسط تفاضل ما تحت الجذر حتى يمكننا إجراء التكامل كالآتي:

$$I = x\sin^{-1}x + \left(\frac{1}{2}\right)\int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \qquad (2)$$
$$= x\sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2} + C$$

Example

Evaluate $I = \int \tan^{-1} x dx$

نلاحظ في هذا المثال وجود دالة مثلثية عكسية وفى هذه الحالة أنسب تعامل هو تفاضل الدالة المثلثية العكسية لكي نتخلص منها وعليه تكون هي الدالة الأولى ونعتبر أن الدالة الثانية هي الواحد الصحيح ونبدأ بتطبيق قاعدة التكامل بالتجزئ كما سبق.

$$I = \int 1 \times \tan^{-1} x dx = \qquad (1)$$
$$= x\tan^{-1}x - \int \frac{x}{x^2+1}dx$$

نحاول الآن في التكامل الأخير أن نجعل البسط تفاضل المقام حتى يمكننا إجراء التكامل كالآتي:

$$I = x\tan^{-1}x - \left(\frac{1}{2}\right)\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \qquad (2)$$
$$= x\tan^{-1}x - \left(\frac{1}{2}\right)\ln\left(x^2+1\right) + C$$

يجب مراعاة أن ناتج التكامل والذي ينتج عنه دالة ln يجب أن يكون موجب دائما لأن دالة ln معرفة في الاتجاه الموجب فقط وحيث أن المتغير داخل دالة ln في المعادلة (2) دائما موجب لأن المتغير x مرفوع لأس زوجي وعليه لم نضع المتغير $\left(x^2+1\right)$ كقيمة مطلقة.

Example

Evaluate $I = \int \sec^3 x dx$

في هذا التكامل يمكننا عمل التعديل البسيط التالي:

$$I = \int \sec x \sec^2 x dx \tag{1}$$

بهذا التعديل أوجدنا دالتين إحداهما تكاملها معروف وعلى هذا فاختيارنا للدالة الأولى والثانية على النحو التالي:

First function: $\sec x$

Second function: $\sec^2$

$$I = \int \sec x \sec^2 x dx = \sec x \tan x - \int \tan x \sec x \tan x dx \tag{2}$$

$$I = \int \sec x \sec^2 x dx = \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x dx \tag{3}$$

بإجراء التبسيط التالي فنحصل على الآتي:

$$\begin{aligned} I &= \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x dx = \\ &= \sec x \tan x - \left\{ \int \sec x (\sec^2 x - 1) dx \right\} \end{aligned} \tag{4}$$

$$I = \sec x \tan x - \int \sec^3 x dx + \int \sec x dx \tag{5}$$

نلاحظ أن التكامل الثاني في الطرف الأيمن هو نفسه التكامل الأصلي الذي نريد الوصول إلى حله وعليه يمكننا استبداله برمز التكامل الأصلي I فتصبح المعادلة (5) كالآتي:

$$2I = \sec x \tan x + \int \sec x dx \tag{6}$$

التكامل الأخير في المعادلة (6) هو أحد التكاملات المعروف نتيجته مباشرة وبالتالي نعوض عنه بقيمته كالآتي:

$$I = \frac{1}{2}\left(\sec x \tan x + \ln\left|\sec x + \tan x\right|\right) + C \tag{7}$$

Example

Evaluate $I = \int x \cos x \cos 2x dx$

في مثل هذه النوعية من مسائل التكامل يمكننا تحويل حاصل ضرب دالتين إلى مجموع أو فرق دالتين ولدينا الأدوات الرياضية التي تساعدنا في عمل ذلك ولنبدأ ذلك باسترجاع العلاقة الرياضية التي تساعدنا في الوصول إلى ذلك كالآتي:

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\{\cos(x-y) + \cos(x+y)\}, \qquad x > y \tag{1}$$

باستخدام العلاقة (1) في التكامل يتحول التكامل إلى إلى الشكل التالي:

$$I = \frac{1}{2}\int x\{\cos x + \cos 3x\}dx = \frac{1}{2}\left[I_1 + I_2\right] \tag{2}$$

في المعادلة (2):

$$I_1 = \int x \cos x dx \tag{3}$$

$$I_2 = \int x \cos 3x dx \tag{4}$$

الخطوة التالية حساب التكاملات في المعادلات (3) ، (4) كالآتي:

$$I_1 = \int x \cos x dx = x \sin x + \cos x \tag{5}$$

$$I_2 = \int x\cos 3x dx = \frac{1}{3}x\sin x + \frac{1}{9}\cos 3x \qquad (6)$$

بالتعويض من المعادلتين (5) ، (6) في المعادلة (2) فنحصل على الناتج النهائي للتكامل ويصبح على الشكل التالي:

$$I = \frac{1}{2}\left[I_1 + I_2\right] = x\sin x + \cos x + \frac{1}{3}x\sin x + \frac{1}{9}\cos 3x + C \qquad (7)$$

Example

Evaluate $I = \int \sqrt{1-\cos x}dx$

في مثل هذه النوعية من مسائل التكامل يمكننا استخدام بعضا من العلاقات المثلثية التي تساعد في تبسيط التكامل وتجعله في صورة يكون من السهل تكاملها وعلى ذلك يمكننا استخدام العلاقة التالية:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \Rightarrow \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}(1-\cos x) \qquad (1)$$

من المعادلة (1) يمكننا استنتاج العلاقة التالية:

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(1-\cos x)} \Rightarrow \sqrt{(1-\cos x)} = \sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right) \qquad (2)$$

باستخدام المعادلة (2) في التكامل المطلوب حله:

$$I = \int \sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)dx = -2\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

التكامل بالاختزال Integration By Reduction

من طرق التكامل التي نراها تستخدم بنطاق واسع هي طريقة التكامل بالاختزال وكلمة الاختزال بمعناها السطحي تعنى التقليل أي على سبيل المثال عندما نقول نختزل الأس فإننا بذلك نقصد تقليل الأس وعندما نقصد الاختزال في التكامل أي أننا نقلل المجهود المبذول في حساب التكامل وذلك من خلال عمليات رياضية معينه في نهايتها نقلل هذا الجهد المبذول في حساب تكامل الذي إذا أردنا حسابه بالطرق التقليدية فإننا بذلك سوف نأخذ وقتا أطول من اللازم لنصل في النهاية إلى نفس الناتج.

فيما يلي سوف نقوم وبشيء من التفصيل في التعامل مع أربعة أنواع من التكاملات مستخدمين في ذلك طريقة التكامل بالاختزال Integration by reduction formulae، وهذه الأنواع بالتفصيل.

التكامل بالاختزال- النوع الأول Integration by Reduction

FIRST KIND

$$I_{m,n} = \int (\text{Trignometric} \quad \text{Function})^{n} x dx$$

يقابلنا هذا النوع من التكاملات في حالة تكامل دالة مثلثية مرفوعة لأس أكبر من 2 وصعب التعامل معها بالصورة التقليدية والصورة العامة لهذا التكامل على النحو التالي:

$$I_{n} = \int (\text{Trignometric} \quad \text{Function})^{n} dx \qquad (1)$$

Note

يتم التعامل معها بالطرق **التقليدية** $n = 1$

يتم تبسيط التكامل من خلال استخدام **العلاقات المثلثية** $n \le 2$

هي الحالة الحالية من التكامل **بالاختزال** $n > 2$

من خلال الأمثلة التالية سوف نبين للقارئ كيفية التعامل مع التكاملات لهذه النوعية من التكامل بالاختزال.

Example

Find a reduction formula for $I_n = \int \sin^n x dx$.

في مثل هذه النوعية من مسائل التكامل تتم تجزئة الدالة داخل التكامل إلى حاصل ضرب دالتين وبناء على هذه الفكرة نعيد كتابة التكامل المطلوب حله على الصورة التالية:

$$I_n = \int \sin x \sin^{n-1} x dx \tag{1}$$

بإجراء التكامل بالتجزئ على المعادلة (1) كالآتي:

$$I_n = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \cos^2 x \sin^{n-2} x dx \tag{2}$$

بالتعويض عن $\cos^2 x$ بدلالة $\sin^2 x$ من العلاقة الخاصة بذلك فنحصل على:

$$I_n = -\cos x \sin^{n-1} + (n-1)\int (1-\sin^2 x)\sin^{n-2} x dx \tag{3}$$

بتبسيط المعادلة (3) نحصل على الآتي:

$$I_n = -\cos x \sin^{n-1} + (n-1)\int \sin^{n-2} x dx - (n-1)\int \sin^n x dx \tag{4}$$

والآن بملاحظة التكامل الأخير في المعادلة (4) نجد أنه أصل التكامل المراد حسابه وعلى ذلك نعيد ترتيب المعادلة فنحصل على الآتي:

$$I_n + (n-1)I_n = -\cos x \sin^{n-1} + (n-1)\int \sin^{n-2} x dx \qquad (5)$$

وأخيرا نحصل على التكامل المطلوب:

$$I_n = \left(\frac{1}{n}\right)\left\{-\cos x \sin^{n-1} + (n-1)\int \sin^{n-2} x dx\right\} \qquad (6)$$

هناك شكل أفضل للمعادلة (6) وهو الشكل الاختزالي للمعادلة (6) كالآتي:

$$I_n = -\left(\frac{1}{n}\right)\cos x \sin^{n-1} + \left(\frac{n-1}{n}\right) I_{n-2} \qquad (7)$$

Example

Find a reduction formula for $I_n = \int \cos^n x dx$.

في مثل هذه النوعية من مسائل التكامل تتم تجزئة الدالة داخل التكامل إلى حاصل ضرب دالتين وبناء على هذه الفكرة نعيد كتابة التكامل المطلوب حله على الصورة التالية:

$$I_n = \int \cos x \cos^{n-1} x dx \qquad (1)$$

بإجراء التكامل بالتجزئ على المعادلة (1) كالآتي:

$$I_n = \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int \sin^2 x \cos^{n-2} x dx \qquad (2)$$

بالتعويض عن $\sin^2 x$ بدلالة $\cos^2 x$ من العلاقة الخاصة بذلك فنحصل على:

$$I_n = \sin x \cos^{n-1} + (n-1)\int \left(1-\cos^2 x\right)\cos^{n-2} x dx \qquad (3)$$

بتبسيط المعادلة (3) نحصل على الآتي:

$$I_n = \sin x \cos^{n-1} + (n-1)\int \cos^{n-2} x dx + (n-1)\int \cos^n x dx \qquad (4)$$

والآن بملاحظة التكامل الأخير في المعادلة (4) نجد أنه أصل التكامل المراد حسابه وعلى ذلك نعيد ترتيب المعادلة فنحصل على الآتي:

$$I_n-(n-1)I_n=\sin x\cos^{n-1}x+(n-1)I_{n-2} \tag{5}$$

وأخيرا نحصل على التكامل المطلوب:

$$I_n=\left(\frac{1}{2-n}\right)\sin x\cos^{n-1}x+(n-1)I_{n-2} \tag{6}$$

Example

Find a reduction formula for $I_n=\int\tan^n x dx$.

في مثل هذه النوعية من مسائل التكامل تتم تجزئة الدالة داخل التكامل إلى حاصل ضرب دالتين وبناء على هذه الفكرة نعيد كتابة التكامل المطلوب حله على الصورة التالية:

$$I_n=\int\tan^2 x\tan^{n-2}x dx \tag{1}$$

But

$$\tan^2 x=\sec^2 x-1 \tag{2}$$

بالتعويض من (2) في (1):

$$I_n=\int\left(\sec^2 x-1\right)\tan^{n-2}x dx \tag{3}$$

المعادلة (3) يمكن أن تأخذ الشكل التالي:

$$I_n=\int\sec^2 x\tan^{n-2}x dx-\int\tan^{n-2}x dx \tag{4}$$

التكامل الأول في المعادلة (4) يمكن إجراؤه بالطرق الأولية وتصبح المعادلة (4) على النحو التالي::

$$I_n = \int (\tan x)^{n-2} d(\tan x) - \int \tan^{n-2} x dx \qquad (5)$$

$$I_n = \left(\frac{1}{n-1}\right)(\tan x)^{n-1} - I_{n-2} \qquad (6)$$

Example

Find a reduction formula for $I_n = \int \sec^n x dx$.

في مثل هذه النوعية من مسائل التكامل تتم تجزئة الدالة داخل التكامل إلى حاصل ضرب دالتين وبناء على هذه الفكرة نعيد كتابة التكامل المطلوب حله على الصورة التالية:

$$I_n = \int \sec^2 x \sec^{n-2} x dx \qquad (1)$$

بإجراء التكامل بالتجزئ على المعادلة (1) كالآتي:

$$I_n = \int \sec^2 x \sec^{n-2} x dx = \tan x \sec^{n-2} - (n-2) \int \tan^2 x \sec^{n-2} x dx \qquad (2)$$

$$\begin{aligned} I_n &= \int \sec^2 x \sec^{n-2} x dx = \\ &= \tan x \sec^{n-2} - (n-2) \int \left(\sec^2 x - 1\right) \sec^{n-2} x dx \end{aligned} \qquad (3)$$

$$I_n = \tan x \sec^{n-2} - (n-2) \int \left(\sec^n x - \sec^{n-2}\right) dx \qquad (4)$$

بتبسيط المعادلة (4) نحصل على:

$$I_n = \tan x \sec^{n-2} x - (n-2)I_n + (n-2)I_{n-2} \qquad (5)$$

بإعادة ترتيب حدود المعادلة (5) نحصل على:

$$I_n = \left(\frac{1}{n-1}\right)\tan x \sec^{n-2} x + (n-2)I_{n-2} \qquad (6)$$

وفيما يلي ملخص عام للتكامل بالاختزال من النوع الأول وهو موضح بالجدول التالي:

Table 4

$I_n = \int \sin^n x dx$	$I_n = -\left(\frac{1}{n}\right)\cos x \sin^{n-1} + \left(\frac{n-1}{n}\right)I_{n-2}$
$I_n = \int \cos^n x dx$	$I_n = \left(\frac{1}{2-n}\right)\sin x \cos^{n-1} x + (n-1)I_{n-2}$
$I_n = \int \tan^n x dx$	$I_n = \left(\frac{1}{n-1}\right)(\tan x)^{n-1} - I_{n-2}$
$I_n = \int \sec^n x dx$	$I_n = \left(\frac{1}{n-1}\right)\tan x \sec^{n-2} x + (n-2)I_{n-2}$
$I_n = \int \csc^n x dx$	
$I_n = \int \cot^n x dx$	

التكامل بالاختزال ـ النوع الثاني Integration by Reduction

SECOND KIND

$$I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x dx$$

تقديم

عند التعامل مع هذا النوع من التكاملات نلجأ إلى التكامل بالتعويض لكن ليست كل الحالات متطابقة بل كل حالة تختلف عن الأخرى وذلك يتوقف على حالة كل من m ، n والجدول التالي هو ملخص للحالات التي تقابل القارئ عند التعامل مع مثل هذه النوعية من التكاملات.

Table 5

Case Number	Case Condition	Suitable condition
1	m: Odd, $+$ve	$\cos x = t$
2	n: Odd, $+$ve	$\sin x = t$
3	$(m+n)$: Even, $-$ve	$\tan x = t$ OR $\cot x = t$
4	(m,n): Even, $+$ve	في هذه الحالة الأسس m ، n تقل من خلال العلاقات التالية: $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ و $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$

Example

Find a reduction formula for $I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x dx$.

الفكرة الرئيسية هي استنتاج دالتين من الدالتين داخل التكامل المعطى كالآتي:

First Function: $\sin^{m-1} x \cos^n$ (1)

First Function: $\sin x$ (2)

والآن بتطبيق التكامل بالتجزئ مع مراعاة استخدام الدوال التي حددناه:

$$I_{m,n} = \int \left(\sin^{m-1} x \cos^n x\right) \sin x dx$$
$$= \left(\sin^{m-1} x \cos^n x\right)(-\cos x) \tag{3}$$
$$- \int (-\cos x) \begin{pmatrix} \sin^{m-1} x (n) \cos^{n-1} x (-\sin x) \\ + \cos^n x (m-1) \sin^{m-2} x \cos x \end{pmatrix} dx$$

$$\begin{aligned} I_{m,n} &= -\left(\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x\right) - (n) \int \sin^m x \cos^n x dx \\ &+ (m-1) \int \sin^{m-2} x \cos^{n+2} x dx \end{aligned} \tag{4}$$

التكامل الثاني من المعادلة (4) هو نفسه $I_{m,n}$ وعليه نعيد ترتيب المعادلة كالآتي:

$$\begin{aligned} I_{m,n}(1+n) &= -\left(\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x\right) \\ &+ (m-1) \int \sin^{m-2} x \cos^{n+2} x \cos^2 x dx \end{aligned} \tag{5}$$

$$I_{m,n}(1+n)=-\left(\sin^{m-1}x\cos^{n+1}x\right)$$
$$+(m-1)\int\sin^{m-2}x\cos^{n}x\,dx \qquad (6)$$
$$-(m-1)\int\sin^{m}x\cos^{n}x\,dx$$

Finally

$$I_{m,n}(1+n)=\frac{1}{m+n}\left[-\left(\sin^{m-1}x\cos^{n+1}x\right)+(m-1)I_{m-2,n}\right] \qquad (7)$$

Example

Find a reduction formula for $I=\int\frac{\sin^{3}x}{\sqrt[3]{\cos^{2}x}}dx$.

لو افترضنا أن التكامل المراد حسابه على الصورة العامة التالية:

$$I_{m,n}=\int\sin^{m}x\cos^{n}x\,dx \qquad (1)$$

m عدد فردى إذن بموجب ذلك وتبعا للجدول رقم (3) يمكننا استخدام التعويض التالي:

$$\cos x=t\Rightarrow-\sin x\,dx=dt \qquad (2)$$

والآن بإعادة صياغة التكامل المراد حسابه على النحو التالي:

$$I=\int\frac{\sin^{3}x}{\sqrt[3]{\cos^{2}x}}dx=\int\sin^{2}x\cos^{-\left(\frac{2}{3}\right)}x\sin x\,dx \qquad (3)$$

والآن بالتعويض من (2) في (3) نحصل على الآتي:

$$I=-\int\left(\sqrt{1-t^2}\right)^2 t^{-\left(\frac{2}{3}\right)}dt \qquad (3)$$

$$I=\int\left(t^{\left(\frac{4}{3}\right)}-t^{-\left(\frac{2}{3}\right)}\right)dt=\frac{3}{7}t^{\left(\frac{7}{3}\right)}-3t^{\left(\frac{1}{3}\right)}+C \qquad (4)$$

بالتعويض عن t بدلالة x فتصبح على النحو الآتي:

$$I=\frac{3}{7}(\cos x)^{\left(\frac{7}{3}\right)}-3\ (\cos x)^{\left(\frac{1}{3}\right)}+C \qquad (5)$$

Example

Find a reduction formula for $I=\int\cos^5 x\sqrt{\sin x}xdx$.

لو افترضنا أن التكامل المراد حسابه على الصورة العامة التالية:

$$I_{m,n}=\int\sin^m x\cos^n xdx \qquad (1)$$

n عدد فردى إذن بموجب ذلك وتبعا للجدول رقم (3) يمكننا استخدام التعويض التالي:

$$\sin x=t\Rightarrow\sin xdx=dt \qquad (2)$$

والآن بإعادة صياغة التكامل المراد حسابه على النحو التالي:

$$I=\int\cos^4 x\sqrt{\sin x}x\cos xdx \qquad (3)$$

والآن بالتعويض من (2) في (3) نحصل على الآتي:

$$I=\int\left(\sqrt{1-t^2}\right)^4\sqrt{t}dt=\int\left(t^{\frac{1}{2}}+t^{\frac{9}{2}}-t^{\frac{3}{2}}\right)dt=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{11}t^{\frac{11}{2}}-\frac{4}{5}t^{\frac{5}{2}}+C \qquad (4)$$

بالتعبير عن t بدلالة x مستخدمين التعويض السابق في تحقيق ذلك فنحصل على ناتج التكامل بدلالة المتغير الأصلي x كالآتي:

$$I=\frac{2}{3}\sin^{\frac{3}{2}}x+\frac{2}{11}\sin^{\frac{11}{2}}x-\frac{4}{5}\sin^{\frac{5}{2}}x+C \qquad (5)$$

Example

Find a reduction formula for $I=\int \sin^4 x\cos^5 xdx$.

لو افترضنا أن التكامل المراد حسابه على الصورة العامة التالية:

$$I_{m,n}=\int \sin^m x\cos^n xdx \qquad (1)$$

تبعا للجدول رقم (3) يمكننا اعتبار أن التكامل الحالي إما يتبع الحالة الأولى أو الحالة الثانية وعلى ذلك سوف نستخدم التعويض التالي:

$$\sin x=t\Rightarrow \sin xdx=dt \qquad (2)$$

والآن بإعادة صياغة التكامل المراد حسابه على النحو التالي:

$$I=\int \sin^4 x\cos^4 x\cos xdx \qquad (3)$$

والآن بالتعويض من (2) في (3) نحصل على الآتي:

$$I=\int t^4\left(\sqrt{1-t^2}\right)^4 dt=\int\left(t^4+t^8-2t^6\right)dt=\frac{t^5}{5}+\frac{t^9}{9}-\frac{2t^7}{7}+C \qquad (4)$$

بالتعبير عن t بدلالة x مستخدمين التعويض السابق في تحقيق ذلك فنحصل على ناتج التكامل بدلالة المتغير الأصلي x كالآتي:

$$I=\frac{\sin^5 x}{5}+\frac{\sin^9 x}{9}-\frac{2\sin^7 x}{7}+C \qquad (5)$$

Example

Find a reduction formula for $I=\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx$.

لو افترضنا أن التكامل المراد حسابه على الصورة العامة التالية:

$$I_{m,n}=\int \sin^m x\cos^n x dx \tag{1}$$

تبعا للجدول رقم (3) كلا من القيمتين m ، n أس زوجي إلا أن أحدهما بإشارة سالبة وعلى ذلك سوف نستخدم التعويض التالي:

$$\tan x=t \Rightarrow \sec^2 xdx=dt \Rightarrow dx=\frac{1}{1+t^2}dt \tag{2}$$

والآن بإعادة صياغة التكامل المراد حسابه على النحو التالي:

$$I=\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx=\int t^2\left(t^2+1\right)^3 dt=\int \left(t^8+3t^6+3t^4+t^2\right)dt \tag{3}$$

بحساب التكامل الأخير بالطرق الأولية نحصل على:

$$\begin{aligned} I&=\left(\frac{t^9}{9}+\frac{3t^7}{7}+\frac{3t^5}{5}+\frac{t^3}{3}\right)+C \\ &=\left(\frac{\tan^9 x}{9}+\frac{3\tan^7 x}{7}+\frac{3\tan^5 x}{5}+\frac{\tan^3 x}{3}\right)+C \end{aligned} \tag{4}$$

Example

Find a reduction formula for

$$I=\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}$$

بداية بإعادة صياغة التكامل على الصورة التالية:

$$I=\int\frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}=\frac{1}{b^2}\int\frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^2\tan^2 x+1}\frac{dx}{\cos^2 x} \tag{1}$$

Let

$$\left(\frac{a}{b}\right)\tan x=t\Rightarrow\tan x=\left(\frac{b}{a}\right)t\Rightarrow\sec^2 xdx=\left(\frac{b}{a}\right)dt \tag{2}$$

الحد الأخير من المعادلة (2) يمكن إعادة صياغته إلى الشكل التالي:

$$\sec^2 xdx=\left(\frac{b}{a}\right)dt\Rightarrow\frac{dx}{\cos^2 x}=\left(\frac{b}{a}\right)dt \tag{3}$$

بالتعويض من (3) في التكامل المطلوب حسابه فنحصل على الناتج التالي:

$$I=\frac{1}{ab}\int\frac{dt}{t^2 x+1}=\frac{1}{ab}\tan^{-1}t=\frac{1}{ab}\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\tan x\right)+C \tag{4}$$

Example

Evaluate $I=\int\frac{1}{\sqrt[3]{\sin^{11}x\cos x}}dx$

Solution

بداية يفضل إعادة وضع مسألة التكامل على الصورة العامة التالية:

$$I_{m,n}=\int\sin^m x\cos^n xdx \tag{1}$$

والآن التكامل كالآتي:

$$I=\int\sin^{-\left(\frac{11}{3}\right)}x\cos^{-\left(\frac{1}{3}\right)}xdx \tag{2}$$

واضح من المعادلة (2) أن الأسس m ، n كسر سالب إذن التفكير المنطقي في اختبار حالة مجموع m + n وبجمع كل منهما نحصل على الآتي:

$$m+n=-4,\text{Even, negative} \tag{3}$$

وحيث إن ناتج المجموع عدد صحيح سالب فأمامنا الفرض التالي:

$$\tan x = t$$
$$\Rightarrow$$
$$\sec^2 x dx = dt \tag{4}$$
$$\text{Or}$$
$$\frac{1}{\cos^2} dx = dt$$

والآن يمكننا إعادة صورة التكامل على النحو التالي:

$$I=\int \frac{1}{\cos^4 x \tan^{\frac{11}{3}} x} dx \tag{5}$$

والآن يمكننا استخدام التعويض وبالتالي تأخذ المعادلة (5) الشكل التالي:

$$I=\int \frac{1+t^2}{t^{\frac{11}{3}}} dt \tag{6}$$

بتجزئة الدالة داخل التكامل في المعادلة (5) فتصبح على الصورة التالية:

$$I=\int \left(t^{-\left(\frac{11}{3}\right)} + t^{-\left(\frac{5}{3}\right)} \right) dt \tag{7}$$

وأصبح التكامل الأخير من السهل حسابه بالطريقة الأولى البسيطة.

التكامل بالاختزال - النوع الثالث Integration by Reduction

Third Kind

$$I = \int R(\sin x, \cos x)dx$$

هناك حالات للنوع التالي من التكاملات وهى تكاملات تحتوى على دوال مثلثية وبشكل عام هذه التكاملات بصورتها العامة على النحو التالي:

$$I = \int R(\sin x, \cos x)dx \tag{1}$$

ومن خلال الخبرة وجدنا أنك هناك ثلاثة احتمالات لهذه النوعية من التكاملات وأن كل احتمال له الأسلوب الخاص به لحله وهذه الأنواع هي:

النوع الأول

تتحقق في الدالة التي نكاملها لهذا النوع من التكاملات الخاصية التالية:

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x) \tag{2}$$

المعادلة (2) تعنى أننا لو استبدلنا في الدالة داخل التكامل كل sin x ب –sin x فإننا نحصل على العلاقة في المعادلة (2) وعلى هذا فالتعويض المناسب في هذه الحالة هو:

$$\cos x = t \tag{3}$$

Example

Evaluate $I = \int \left(\dfrac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x} \right) dx$

قبل البدء في حساب التكامل يمكننا عمل التبسيط التالي:

$$I = \int \left(\frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x} \right) dx = \int \left(\frac{2 \sin x \cos x}{1 + \sin^2 x} \right) dx \qquad (1)$$

الدالة $R(\sin x, \cos x)$ من المعادلة (1) كالآتي:

$$R(\sin x, \cos x) = \left(\frac{2 \sin x \cos x}{1 + \sin^2 x} \right) \qquad (2)$$

والآن البدء في التفكير في الحل باستبدال $\sin x \to -\sin x$ أولا ونرى ماذا يحدث:

$$R(-\sin x, \cos x) = -\left(\frac{2 \sin x \cos x}{1 + \sin^2 x} \right) = -R(\sin x, \cos x) \qquad (3)$$

نستنتج من المعادلة (3) أننا يمكننا استخدام التعويض التالي:

$$\cos x = t \Rightarrow -\sin x dx = dt \qquad (4)$$

بالتعويض من المعادلة (4) في التكامل المراد حسابه فنحصل على الآتي:

$$I = \int \left(\frac{2 \sin x \cos x}{1 + \sin^2 x} \right) dx = 2 \int \left(\frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} \right) (\sin x) dx = \int \left(\frac{-2t}{2 - t^2} \right) dt \qquad (5)$$

التكامل الأخير في المعادلة (5) فيه البسط تفاضل المقام وبناء عليه وحسب القواعد الأولية للتكامل يصبح ناتج التكامل على النحو التالي:

$$I = \int \left(\frac{-2t}{2 - t^2} \right) dt = \ln\left(2 - t^2\right) + C = \ln\left(2 - \cos^2 x\right) + C \qquad (6)$$

Example

Evaluate $I = \int \left(\frac{1}{\sin x(2\cos^2 x - 1)} \right) dx$

المطلوب حساب التكامل التالي:

$$I = \int \left(\frac{1}{\sin x(2\cos^2 x - 1)} \right) dx \qquad (1)$$

الدالة $R(\sin x, \cos x)$ من المعادلة (1) كالآتي:

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{1}{\sin x(2\cos^2 x - 1)} \qquad (2)$$

والآن البدء في التفكير في الحل باستبدال $\sin x \to -\sin x$ أولا ونرى ماذا يحدث:

$$R(-\sin x, \cos x) = \frac{1}{-\sin x(2\cos^2 x - 1)} = -R(\sin x, \cos x) \qquad (3)$$

نستنتج من المعادلة (3) أننا يمكننا استخدام التعويض التالي:

$$\cos x = t \Rightarrow -\sin x dx = dt \qquad (4)$$

بالتعويض من المعادلة (4) في التكامل المراد حسابه فنحصل على الآتي:

$$I = \int \frac{1}{(1-t^2)(1-2t^2)} dt \qquad (5)$$

التكامل في المعادلة (5) يتم حله باستخدام طريقة الكسور الجزئية.

على هذا الأساس المعادلة (5) تؤول إلى:

$$I=\int\frac{2}{\left(1-2t^2\right)}dt-\int\frac{1}{\left(1-t^2\right)}dt=\frac{1}{\sqrt{2}}\tanh^{-1}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)-\tanh^{-1}(t)+C \qquad (6)$$

بالرجوع بالناتج في المعادلة (6) إلى المتغير الأصلي نصل إلى الناتج النهائي التالي:

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}\tanh^{-1}\left(\frac{\cos x}{\sqrt{2}}\right)-\tanh^{-1}(\cos x)+C= \qquad (7)$$

النوع الثاني

تتحقق في الدالة التي نكاملها لهذا النوع من التكاملات الخاصية التالية:

$$R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x) \qquad (1)$$

المعادلة (1) تعنى أننا لو استبدلنا في الدالة داخل التكامل كل cos x ب –cos x فإننا نحصل على العلاقة في المعادلة (1) وعلى هذا فالتعويض المناسب في هذه الحالة هو:

$$\sin x=t \qquad (2)$$

Example

Evaluate $I=\int\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)dx$

$$R(\sin x,\cos x)=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right) \qquad (1)$$

اختبار النوع الأول

$$R(-\sin x,\cos x)=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)\neq -R(\sin x,\cos x) \qquad (2)$$

من المعادلة (2) نستنتج فشل اختبار النوع الأول

اختبار النوع الثاني

$$R(\sin x, -\cos x) = \left(\frac{-\cos x}{\sin x}\right) = -R(\sin x, \cos x) \tag{3}$$

من المعادلة (3) نستنتج نجاح اختبار النوع الثاني وعليه سوف نستخدم الفرض المناظر لهذه الحالة على النحو التالي:

$$\begin{aligned} &\sin x = t \\ &\Rightarrow \\ &\cos x dx = dt \end{aligned} \tag{4}$$

بالتعويض في التكامل من المعادلة (4) نحصل على:

$$I = \int \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right) dx = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \tag{5}$$

التكامل الأخير على إحدى الصور القياسية ويمكن كتابة النتيجة مباشرة.

النوع الثالث

تتحقق في الدالة التي نكاملها لهذا النوع من التكاملات الخاصية التالية:

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x) \tag{1}$$

المعادلة (1) تعنى أننا لو استبدلنا في الدالة داخل التكامل كل cos x ب cos x– فإننا نحصل على العلاقة في المعادلة (1) وعلى هذا فالتعويض المناسب في هذه الحالة هو:

$$\tan\frac{x}{2}=t$$

$$\Rightarrow$$

$$\sin x=\frac{2t}{t^2+1} \tag{2}$$

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$dx=\frac{2}{t^2+1}dt$$

Example

Evaluate $I=\int\left(\frac{1}{\sin^2(3x)}\right)dx$

المطلوب حساب التكامل التالي:

$$I=\int\left(\frac{1}{\sin^2(3x)}\right)dx \tag{1}$$

الدالة $R(\sin x)$ من المعادلة (1) كالآتي:

$$R(\sin x)=\left(\frac{1}{\sin^2(3x)}\right) \tag{2}$$

والآن البدء في التفكير في الحل باستبدال $\sin x\to-\sin x$

$$R(-\sin x)=R(\sin x) \tag{3}$$

باستخدام التعويض التالي:

$$3x=y\Rightarrow dx=\frac{1}{3}dy \tag{4}$$

بالتعويض من (4) في التكامل المطلوب حسابه فيصبح على الصورة التالية:

$$I=\int\left(\frac{1}{\sin^2(3x)}\right)dx=\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{\sin^2 y}\right)dy \qquad (5)$$

لحل التكامل في المعادلة (5) نستخدم التعويض التالي وملحقاته على النحو التالي:

$$\begin{aligned}
&\tan\frac{y}{2}=t\Rightarrow\\
&\sin y=\frac{2t}{t^2+1}\\
&\cos y=\frac{1-t^2}{1+t^2}\\
&dy=\frac{2}{t^2+1}dt
\end{aligned} \qquad (6)$$

باستخدام التعويضات في المعادلة (6) يصبح التكامل الأخير في المعادلة (5) على النحو التالي:

$$I=\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{\sin^2 y}\right)dy=\frac{1}{6}\int\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt=\frac{1}{6}\left(t-\frac{1}{t}\right)+C \qquad (7)$$

والآن يجب أن نتذكر أن ناتج التكامل دالة في المتغير t وأن t دالة في المتغير y وأن المتغير y دالة في المتغير الأصلي x وعليه يجب أن يكون الناتج النهائي في المتغير x. بالرجوع إلى الشكل التالي:

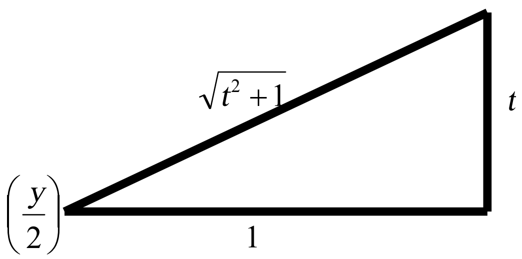


Figure 3

والآن لنتعامل مع الناتج النهائي في المعادلة (7) كالآتي:

$$I=\frac{1}{6}\left(\tan\left[\frac{y}{2}\right]-\frac{1}{\tan\left[\frac{y}{2}\right]}\right)+C=\frac{1}{6}\left(\tan\left[\frac{3x}{2}\right]-\frac{1}{\tan\left[\frac{3x}{2}\right]}\right)+C \qquad (8)$$

Example

Evaluate $I=\int\left(\frac{1}{\sin x(2+\cos x-2\sin x)}\right)dx$

هذه النوعية من المسائل يتم التعامل معها من خلال المرور على مجموعة الاختبارات المختلفة وذلك من غرض الوصول إلى نوعية الدالة داخل التكامل وعليه يمكننا تحديد التعويض المناسب ثم نكمل الحل بالطريقة التقليدية:

بداية الدالة $R(\sin x,\cos x)$ في هذه الحالة كالآتي:

$$R(\sin x,\cos x)=\left(\frac{1}{\sin x(2+\cos x-2\sin x)}\right) \qquad (1)$$

أولا:

بحث نتيجة استبدال $-\sin x$ by $\sin x$ فتأخذ المعادلة (1) الشكل التالي:

$$R(-\sin x,\cos x)=-\sin x(2+\cos x+2\sin x) \qquad (2)$$

من المعادلة (2) لم يمكننا تحديد نوع العلاقة بين $R(\sin x,\cos x)$ ، وبين $R(-\sin x,\cos x)$

ملحوظة

الثابت 2 في المعادلة رقم (2) ليس له أي تأثير عند بحث قاعدة الإشارة ومن الممكن للقارئ أن يعتبره غير موجود

ثانيا:

بحث نتيجة استبدال $\cos x$ by $-\cos x$ فتأخذ المعادلة (1) الشكل التالي:

$$R(\sin x, -\cos x) = \sin x(2 - \cos x - 2\sin x) \qquad (3)$$

من المعادلة (3) لم يمكننا تحديد نوع العلاقة بين $R(\sin x, \cos x)$ ، وبين $R(\sin x, -\cos x)$

ثالثا:

بحث نتيجة استبدال $\cos x$ by $-\cos x$ & $\sin x$ by $-\sin x$ فتأخذ المعادلة (1) الشكل التالي:

$$R(-\sin x, -\cos x) = -\sin x(2 - \cos x + 2\sin x) = R(\sin x, \cos x) \qquad (4)$$

من المعادلة (4) استطعنا تحديد النوع ومن ثم يمكننا استخدام التعويض التالي:

$$\tan\frac{x}{2} = t$$
$$\Rightarrow$$
$$\sin x = \frac{2t}{t^2+1} \qquad (5)$$
$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$
$$dx = \frac{2}{t^2+1}dt$$

بالتعويض من المعادلة (5) في التكامل المراد حسابه فنحصل على الآتي:

$$I = \int\left(\frac{1}{\sin x(2 + \cos x - 2\sin x)}\right)dx = \int\frac{t^2+1}{t(t^2 - 4t + 3)}dt \qquad (6)$$

الطرف الأيمن من المعادلة (6) نتعامل معه بطريقة الكسور الجزئية Partial Fraction فيمكننا إعادة كتابة الطرف الأيمن من المعادلة (6) كالآتي:

$$I=\int\frac{t^2+1}{t\left(t^2-4t+3\right)}dt=\int\frac{\frac{1}{3}}{t}dt+\int\frac{\frac{5}{3}}{t-5}dt-\int\frac{1}{t-1}dt \qquad (7)$$

بحساب التكاملات في المعادلة (7) نحصل على التكامل المطلوب:

$$I=\frac{1}{3}\ln t+\frac{5}{3}\ln(t-5)-\ln(t-1)+C \qquad (8)$$

بالتعبير عن المتغير t بما يناظره بالمتغير x فنحصل على الآتي:

$$I=\frac{1}{3}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+\frac{5}{3}\ln\left|\left(\tan\frac{x}{2}-5\right)\right|-\ln\left|\left(\tan\frac{x}{2}-1\right)\right|+C \qquad (9)$$

التكامل باستخدام الكسور الجزئية

Integration Using Partial Fractions

من طرق التكامل التي تتعامل مع الدوال الكسرية R هي طريقة الكسور الجزئية ، وقد سبق أن أفردنا للقارئ مساحة لموضوع الكسور الجزئية وتكلمنا باستفاضة عن هذا الموضوع وحالاته المتعددة، واستخدام الكسور الجزئية في التكامل يعنى أن الدالة التي نكاملها دالة كسرية Rational وأننا عندما نستخدم الكسور الجزئية نعنى تبسيط الدالة إلى مجموعة دوال بسيطة يمكن تكاملها بسهولة. ونود أن نلفت النظر إلى أنه عند التعامل مع الكسور الجزئية لابد من توافر شرط أساسي ألا وهو أن تكون أس البسط أقل من أس المقام. ولكي يتواصل القارئ مع موضوع التكامل باستخدام الكسور الجزئية فيما يلي سوف نسترجع موضوع الكسور الجزئية على النحو التالي.

يعتبر موضوع الكسور الجزئية من الموضوعات الهامة حيث أنها أداة رياضية هامة للتعامل مع الدوال الكسرية أي الدوال التي تحتوى على كثيرات الحدود بسطا ومقاما وكيفية تبسيطها رياضيا بحيث يمكن التعامل بعد ذلك بطريقة سهلة. هناك ثلاثة احتمالات لدرجتي البسط والمقام كالآتي:

(1) درجة البسط **أقل** من درجة المقام

(2) درجة البسط **تساوى** درجة المقام

(3) درجة البسط **أكبر** من درجة المقام

لا توجد مشكلة في الحالة الأولى لكن المشكلة تظهر في الحالتين الثانية والثالثة وموضوع الكسور الجزئية يختص بهاتين الحالتين.

موضوع الكسور الجزئية يظهر في التفاضل والتكامل كما إنه يستخدم عند التحويلات الرياضية مثل تحويلات لابلاس Laplace ، Z-transformations الخ.

نود الإشارة إلى أنه في الكسر إذا كانت درجة البسط أقل من درجة المقام يقال على الكسر انه Proper وإذا كان عكس ذلك يقال Improper.

سؤال يفرض نفسه كيف نحول كسر Improper إلى Proper؟

يتحول الكسر من الحالة Improperالى Proper من خلال القسمة المطولة. المثال التالي يوضح ذلك.

Example

Change the following fraction from improper case to proper one $\dfrac{x^4-3}{x^2+2x+1}$.

Solution

نرتب كلا من البسط والمقام ترتيبا تنازليا ثم نضع شكل القسمة على النحو التالي:

$$x^2+2x+1\overline{\left| x^4-3 \right.}$$

بقسمة x ذات أكبر أس في اليمين على x ذات اكبر اس في اليسار فيكون الناتج

x^2 توضع أعلى علامة القسمة $x^2+2x+1\overset{x^2}{\overline{\left| x^4-3 \right.}}$ ثم نضرب الناتج في جميع الحدود يسار علامة القسمة ويكتب ناتج الضرب أسفل المقدار يمين علامة القسمة. بعد ذلك نطرح الناتج من المقدار يمين علامة القسمة ثم نعيد الكرة مرة أخرى حتى نحصل على ثابت أو كثيرة حدود اقل في الدرجة من المقسوم عليه. خارج القسمة يكون كثيرة حدود أما الباقي إما أن يكون ثابت أو كثيرة حدود أخرى.

نود الإشارة إلى أن حالة مسالة الكسور الجزئية تتوقف على المقام وفيما يلي سوف نذكر الحالات التي نقابلها عند حل مسألة الكسور الجزئية.

Proper Fractions

فيما يلي سوف نسرد الحالات المختلفة للمقام في الكسر التالي والتي تقابل من يدرس موضوع الكسور الجزئية:

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

- مقام يمكن تحويله إلى أقواس بسيطة **غير متكررة** كالآتي:

$$Q(x)=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d).......$$

- مقام يمكن تحويله إلى أقواس بسيطة **متكررة** عدد n من المرات كالآتي:

$$Q(x) = (x-a)^n$$

- مقام يمكن تحويله إلى أقواس من الدرجة الثانية **غير متكررة** كالآتي:

$$Q(x) = (a_1 x^2 + b_1 x + c_1)(a_2 x^2 + b_2 x + c_2).....$$

- مقام يمكن تحويله إلى أقواس من الدرجة الثانية **متكررة** بعدد من المرات n كالآتي:

$$Q(x) = (a_1 x^2 + b_1 x + c_1)^n$$

وبعد هذا العرض من الحالات المختلفة سوف نتعامل مع كل حالة على حده من خلال مثال محلول.

الحالة الأولى

مقام يمكن تحويله إلى أقواس بسيطة **غير متكررة** كالآتي:

$$Q(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d).......$$

حيث يمكن تحليل المقام إلى أقواس خطية أولية ويصبح الكسر على الشكل التالي:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-x_1)(x-x_2).....(x-x_n)}$$

الخطوة التالية تتم تجزئة المقام بحيث يصبح الكسر كالآتي:

$$\frac{f(x)}{p(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + ...\frac{A_n}{x-x_n}$$

المعاملات $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ مجاهيل لها طريقتان لإيجادها لكننا نفضل الطريقة السهلة البسيطة التالية:

(1) نوحد المقامات في الطرف الأيمن في الشكل الذي تمت فيه تجزئة المقام.

(2) نساوى البسط في الطرفين

(3) تجميع الحدود ذات أس x المشترك في الطرف الأيمن

(4) نساوى المعاملات ذات الأسس المتساوية في الطرفين والمعامل في الطرف الأيمن الذي ليس له نظير في الأيسر نساويه بالصفر

(5) نحصل على مجموعة معادلات تساوى عدد المعاملات المجهولة بحلها نحصل على هذه القيم.

Example

Use partial fractions to simplify $\dfrac{x+4}{2x^2+13x-7}$

Solution

أولا: يجب التأكد من أن درجة البسط أقل من درجة المقام

ثانيا: نحاول تحليل المقام إلى أقواس بسيطة نحصل على

$$2x^2+13x-7=(x+7)(2x-1)$$

ثالثا: تجزئة المقام على شكل ثوابت مجهولة مع الأقواس بالمقام

$$\frac{x+4}{(x+7)(2x-1)}=\frac{A}{x+7}+\frac{B}{2x-1}$$

رابعا: حساب الثوابت بالطريقة البسيطة التي ذكرناها سابقا كالآتي:

$$x+4=A(2x-1)+B(x+7)$$

$$(2A+B)x+(-A+7B)=x+4$$

مساواة المعاملات لـ x ذات الأس المشترك ينتج عنه:

$$(2A+B)=1$$

$$-A+7B=4$$

بحل المعادلتين السابقتين نحصل على كلا من الثابتين السابقين:

$$A=\frac{1}{5}\ \&\ B=\frac{9}{15}$$

والآن يمكننا وضع الكسر على الشكل النهائي الآتي:

$$\frac{x+4}{x^2+13x-7}=\frac{1}{5}\frac{1}{x+7}+\frac{9}{15}\frac{1}{2x-1}$$

الحالة الثانية

مقام يمكن تحويله إلى أقواس بسيطة **متكررة** عدد n من المرات كالآتي:

$$Q(x)=(x-a)^n$$

إذا احتوى المقام على مقدار بسيط من الدرجة الأولى لكنه متكرر عدد من المرات الفرض المناظر له هو وضع علامات كسور تساوى عدد مرات التكرار وبسط كل منها ثابت يختلف عن الآخر في حين أن المقام في كل كسر هو القوس الذي يحتوى على الكسر المتكرر مرفوعا لأس يبدأ بالواحد مع أول حد ثم يزيد الأس في كل مرة حتى نصل إلى آخر حد والمثال التالي يوضح ذلك.

Example

Simplify using partial fractions $\frac{x^2 - 4x - 15}{(x+2)^3}$

Solution

بناء على الشرح السابق يكون الفرض المناسب لحالتنا كالآتي:

$$\frac{x^2 - 4x - 15}{(x+2)^3} = \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{(x+2)^3}$$

الخطوة التالية إيجاد الثوابت بنفس الكيفية السابقة:

$$x^2 - 4x - 15 = A(x+2)^2 + B(x+2) + C$$

$$x^2 - 4x - 15 = A(x^2 + 4x + 4) + Bx + 2B + C$$

$$x^2 - 4x - 15 = \left(x^2\right)A + x(4A + B) + (4A + 2B + C)$$

بمساواة المعاملات لـ x التي لها نفس الأس نحصل على:

$$A = 1$$

$$(4A + B) = -4 \Rightarrow B = -8$$

$$(4A + 2B + C) = -15 \Rightarrow C = -15 - 4A - 2B = -3 \Rightarrow C = -3$$

Then

$$A = 1 \ \& \ B = -8 \ \& \ C = -3$$

الحالة الثالثة

مقام يمكن تحويله إلى أقواس من الدرجة الثانية **غير متكررة** كالآتي:

$$Q(x) = (a_1 x^2 + b_1 x + c_1)(a_2 x^2 + b_2 x + c_2).....$$

إذا وجد في المقام كثيرة حدود من الدرجة الثانية أي على الصورة $ax^2 + bx + c$ فيكون الفرض المقابل لها عند استخدام الكسور الجزئية على شكل معادلة خط مستقيم أي $Ax + B$. كذلك يجب التنويه إلى انه إذا وجدت حالة أقواس بسيطة مع أقواس من الدرجة الثانية فالفرض يناظر كل حالة على حده كما هو موضح في المثال التالي:

Example

Simplify using partial fraction the following: $\dfrac{7x^2 - 25x + 6}{(x^2 - 2x - 1)(3x - 2)}$

Solution

نتبع نفس الخطوات السابقة فنجد القوس الثاني في المقام لا يمكن تحليله إذن ليس أمامنا إلا أن نتعامل مع هذا القوس على فرضية انه معادلة من الدرجة الثانية وبالتالي الفرض الذي يناظرها معادلة خط مستقيم. وعليه يكون الفرض الذي يناظر المقام حاصل ضرب ثابت يناظر القوس الخطى ومعادلة خط مستقيم تناظر المعادلة من الدرجة الثانية كالآتي:

ملحوظة هامة: لا يجب تكرار الثوابت مهما كان الأمر.

$$\frac{7x^2 - 25x + 6}{(x^2 - 2x - 1)(3x - 2)} = \frac{Ax + B}{(x^2 - 2x - 1)} + \frac{C}{3x - 2}$$

بإتباع الأسلوب السابق لإيجاد قيمة الثوابت نحصل على المعادلة التالية:

$$(Ax+B)(3x-2)+C\left(x^2-2x-1\right)=7x^2-25x+6$$

بمساواة المعاملات وحل المعادلات نحصل على الناتج النهائي الآتي:

$$\frac{7x^2-25x+6}{(x^2--1)(3x-2)}=\frac{x-5}{x^2-2x-1}+\frac{4}{3x-2}$$

الحالة الرابعة

مقام يمكن تحويله إلى أقواس من الدرجة الثانية **متكررة** بعدد من المرات n كالآتي:

$$Q(x)=\left(a_1x^2+b_1x+c_1\right)^n$$

لنفرض وجود أقواس في المقام من الدرجة الثانية ومتكررة عدد من المرات فأول شيء هو فرض عدد من الكسور تساوى عدد مرات التكرار واليك تفاصيل البسط والمقام لكل كسر:

الكسر الأول: $\dfrac{A_1x+B_1}{\left(ax^2+bx+c\right)}$

الكسر الثاني: $\dfrac{A_2x+B_2}{\left(ax^2+bx+c\right)^2}$

الكسر الثالث: $\dfrac{A_3x+B_3}{\left(ax^2+bx+c\right)^3}$

وهكذا حتى الكسر الأخير. بعد ذلك نتبع نفس الأسلوب والذي سبق شرحه في إيجاد الثوابت المجهولة. المثال التالي يوضح ذلك.

Example

Simplify using partial fractions:

$$\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}$$

Solution

بالنظر إلى المقام نجد انه حاصل ضرب حالتين الحالة البسيطة مضروبة في حالة من الدرجة الثانية متكررة مرتين. وعليه يكون الفرض كالآتي:

- الكسر الذي يناظر الحالة البسيطة: $\frac{A}{(x+1)}$
- الكسر الذي يناظر الحالة من الدرجة الثانية المتكررة:

$$\frac{Bx+C}{(x^2+2x+3)}+\frac{Dx+E}{(x^2+2x+3)^2}$$

وبناء على ذلك يصبح الكسر المعطى على النحو التالي:

$$\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}=\frac{A}{(x+1)}+\frac{Bx+C}{(x^2+2x+3)}+\frac{Dx+E}{(x^2+2x+3)^2}$$

والآن لنبدأ في إيجاد الثوابت كالآتي:

$$x^4+4x^3+11x^2+12x+8$$

$$=A(x^2+2x+3)^2+(Bx+C)(x+1)(x^2+2x+3)$$

$$+(Dx+E)(x+1)$$

$$x^4+4x^3+11x^2+12x+8=$$

$$x^4(B+1)+x^3(3B+C+4)+x^2(5B+3C+D+10)$$

$$+x(3B+5C+E+D+12)+(3C+E9)$$

$$x^4:(B+A)=1 \qquad (1)$$

$$x^3:(3B+C+4A)=4 \qquad (2)$$

$$x^2:(5B+3C+D+10A)=11 \qquad (3)$$

$$x:(3B+5C+E+D+12A)=12 \qquad (4)$$

$$x^0:(3C+E+9A)=8 \qquad (5)$$

From (1):

$$A=(1-B) \qquad (6)$$

بالتعويض من (6) في مجموعة المعادلات من (2) حتى (5): نحصل على:

$$-B=C$$

$$(-8B+D)=1 \Rightarrow D=1+8B$$

$$(18B+E)=-1$$

$$(6B+E)=-1$$

بحل آخر معادلتين في B ، E نحصل على:

$$C=0\ \&\ D=1\ \&\ E=-1\ \&\ B=0$$

الآن وبعد المراجعة الشاملة لموضوع الكسور الجزئية سوف نقوم بحل مجموعة من مسائل التكامل ذات الصلة بهذا الموضوع.

Example

Evaluate the following integral $I = \int \frac{5x^2 - 10x - 8}{x^3 - 4x} dx$

Solution

في البداية نود الإشارة إلى أن الدالة المراد تكاملها هي دالة كسرية Rational function وفيها أس البسط أقل من أس المقام إذن يمكننا تبسيط الدالة باستخدام الكسور الجزئية على النحو التالي:

$$\frac{5x^2 - 10x - 8}{x^3 - 4x} = \frac{5x^2 - 10x - 8}{x(x^2 - 4)} = \frac{5x^2 - 10x - 8}{x(x-2)(x+2)} \tag{1}$$

والآن الصورة الأخيرة للمعادلة (1) باستخدام الكسور الجزئية تأخذ الشكل التالي:

$$\frac{5x^2 - 10x - 8}{x(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x+2)} \tag{2}$$

توحيد المقام في الطرف الأيمن من المعادلة (2) ومساواة البسط في الطرف الأيمن بعد توحيد المقامات مع البسط في الطرف الأيسر نحصل على الآتي:

$$5x^2 - 10x - 8 = A(x-2)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-2) \tag{3}$$

بتجميع الحدود المشتركة في x ذات الأس المشترك كالآتي:

$$5x^2 - 10x - 8 = x^2(A + B + C) + x(2B - 2C) + x^0(-4A) \tag{4}$$

والآن بمساواة المعاملات المصاحبة للمتغير x ذات الأس المشترك كالآتي:

$$x^2 : 5 = A + B + C \tag{5-a}$$

$$x : -10 = 2B - 2C \tag{5-b}$$

$$x^0 : -8 = -4A \tag{5-c}$$

من المعادلة (5-c) نستنتج:

$$A = 2 \tag{6}$$

بالتعويض من (6) في (5-a) نحصل على:

$$B + C = 3 \tag{7}$$

بحل المعادلتين (7) ، (5-b) نستنتج الآتي:

$$B = -1 \tag{8}$$

Then

$$C = 4 \tag{9}$$

والآن وبعد إيجاد قيم الثوابت نبدأ عملية التكامل وذلك بعد التعويض بقيم الثوابت في المعادلة (2) فيصبح التكامل المراد حسابه على الصورة الجديدة التالية:

$$I = \int \frac{5x^2 - 10x - 8}{x^3 - 4x} dx = \int \left(\frac{2}{x} + \frac{-1}{(x-2)} + \frac{4}{(x+2)} \right) dx \tag{10}$$

بإجراء التكاملات في المعادلة (10) نحصل على الناتج النهائي للتكامل ويصبح على الشكل التالي:

$$I=\int\frac{5x^2-10x-8}{x^3-4x}dx=2\ln|x|-\ln|x-2|+4\ln|x+2|+C_0 \qquad (11)$$

Example

Evaluate the following integral $I=\int\frac{5x^2+30x+43}{(x+3)^3}dx$

Solution

في البداية نود الإشارة إلى أن الدالة المراد تكاملها هي دالة كسرية Rational function وفيها أس البسط أقل من أس المقام إذن يمكننا تبسيط الدالة باستخدام الكسور الجزئية على النحو التالي مع مراعاة أن المقام عبارة عن أقواس بسيطة متكررة:

$$\frac{5x^2+30x+43}{(x+3)^3}=\frac{A}{(x+3)}+\frac{B}{(x+3)^2}+\frac{C}{(x+3)^3} \qquad (1)$$

بإتباع نفس الأسلوب في المثال السابق للحصول على الثوابت فيمكننا الوصول إلى الناتج التالي:

$$A=5\ \&\ B=0\ \&\ C=-2 \qquad (2)$$

والآن التكامل يأخذ الشكل التالي:

$$I=\int\frac{5x^2+30x+43}{(x+3)^3}dx=\int\left(\frac{5}{(x+3)}+\frac{-2}{(x+3)^3}\right)dx \qquad (3)$$

بعد إيجاد التكاملات في المعادلة (3) يصبح ناتج التكامل النهائي على الصورة التالية:

$$I=\int\frac{5x^2+30x+43}{(x+3)^3}dx=5\ln|x+3|+\frac{1}{(x+3)^2}+C_0 \qquad (4)$$

Example

Evaluate $I=\int\frac{\sin^2 x\cos x}{\sin x+\cos x}dx$

Solution

بداية هذه دالة كسرية Rational ومحتواها دالتي sin ، cos وإذا أجرينا اختبارات الأنواع الثلاثة السابقة في طريقة التكامل بالاختزال لوجدنا أن هذه المسألة تنتمي إلى النوع الثالث والذي نستخدم فيه التعويض التالي:

$$\tan\frac{x}{2}=t$$

$$\Rightarrow$$

$$\sin x=\frac{2t}{t^2+1} \qquad (1)$$

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$dx=\frac{2}{t^2+1}dt$$

بالتعويض من (1) في التكامل نحصل على الآتي:

$$I=\int\frac{\sin^2 x\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int\frac{t^2}{(t+1)(t^2+1)^2}dx \qquad (2)$$

التكامل الأخير في المعادلة (2) يتم حله باستخدام الكسور الجزئية على النحو التالي:

$$\frac{t^2}{(t+1)(t^2+1)^2}=\frac{A}{(t+1)}+\frac{Bt+D}{(t+1)}+\frac{Et+F}{(t^2+1)^2} \tag{3}$$

بإتباع الأسلوب التقليدي في الكسور الجزئية نحصل على الثوابت كالآتي:

$$A=\frac{1}{4}\ \&\ B=-\frac{1}{4}\ \&\ D=\frac{1}{4}\ \&\ E=\frac{1}{2}\ \&\ F=-\frac{1}{2} \tag{4}$$

بالتعويض بالثوابت وإجراء التكاملات نحصل على النتيجة التالية:

$$\int\frac{t^2}{(t+1)(t^2+1)^2}\,dx=\frac{1}{4}\ln\left[\frac{1+t}{\sqrt{1+t^2}}\right]-\frac{1}{4}\left[\frac{1+t}{\sqrt{1+t^2}}\right]+C \tag{5}$$

2

الباب الثاني

التكامل المحدود

Definite Integrals

صفحة زوجية فارغة

الباب الثاني

التكامل المحدود

Definite Integrals

مقدمة

لا يصح بأي حال من الأحوال الحديث عن التكاملات المحدودة قبل أن نكون قد فهمنا التكامل الغير محدود ولقد سبق وأن تحدثنا عن التكامل الغير محدود وأوضحنا باستفاضة الطرق المختلفة للتعامل معه وفى هذا الباب سوف نتعامل مع التكامل المحدود ونتبع نفس الأسلوب في الباب السابق وذلك لنؤكد المعلومات الذي ذكرناها والطرق المختلفة في حساب التكامل. ولنبدأ بالخلفية الرياضية للتكامل المحدود.

$$I=\int_{a}^{b} f(x)dx=[F(x)]_{x=a}^{x=b}=[F(b)-F(a)] \qquad (1)$$

لنفرض أننا لدينا دالة f(x) في الشكل رقم (1) معرفة في الفترة من a الحد الأدنى للتكامل Lower limit of integration إلى b الحد الأعلى للتكامل Upper limit of integration.

لنفرض أننا قسمنا الساحة تحت هذا المنحنى إلى أشباه منحراف Trapezoidals متناهية في صغر عرضها Infinestimal width وعرض كل منها Δx ثم قمنا بتجميع مساحات أشباه المنحرفات هذه ثم أخذنا نهاية هذا المجموع عندما Δx يؤول

إلى الصفر ناتج هذه العملية الرياضية هو التكامل المعطى بالمعادلة (1).

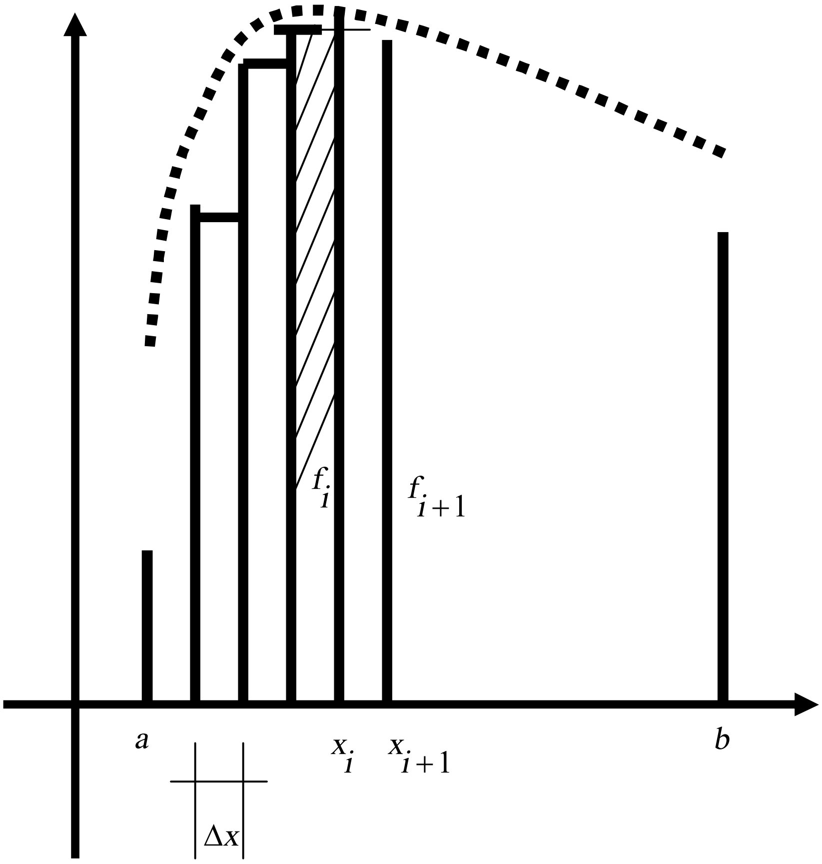


Figure 4

طرق التكامل المحدود Methods of Integration

طرق التكامل بصفة عامة متعددة ومختلفة حسب طبيعة مسألة التكامل التي نتعامل معها وفيما يلي سوف نعيد كل ما ذكرناه في الباب الأول مع مراعاة أننا في

هذا الباب نتعامل مع التكامل المحدود.

الطرق الأولية للتكامل Simplest Methods of Integration

الطرق الأولية متعددة ولها عدة أشكال وفيما يلي نذكر كل طريقة بالتفصيل مع كثير من الأمثلة التوضيحية:

القاعدة الأولى First Simplest Rule

Example

Evaluate $I = \int_{x=1}^{x=10} x^2\,dx$

المتغير x داخل القوس مرفوع لأس واحد صحيح وبالتالي يمكننا إجراء التكامل تبعا للقاعدة السابقة كالآتي:

$$I = \int_{x=1}^{x=10} x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=1}^{x=10} = \left[\frac{10^3}{3} - \frac{1^3}{3}\right] = \frac{999}{3} = 333$$

Example

Evaluate $I = \int_{1}^{2} (x+5)^2\,dx$

المتغير x داخل القوس مرفوع لأس واحد صحيح وبالتالي يمكننا إجراء التكامل تبعا للقاعدة السابقة كالآتي:

$$I=\int_1^2 (x+5)^2\,dx=\left[\frac{(x+5)^3}{3}\right]_{x=1}^{x=2}=\left[\frac{(2+5)^3}{3}\right]-\left[\frac{(1+5)^3}{3}\right]=\frac{127}{3}$$

Example

Evaluate $I=\int_1^2 x\left(x^2+5\right)^2 dx$

المتغير x داخل القوس مرفوع لأس أكبر من الواحد الصحيح لكن وجود x مضروبة في القوس يجعلنا نستغل الفرصة ونقوم بتوحيد الدالة قبل وبعد التفاضل كالآتي:

$$I=\frac{1}{2}\int_1^2 \left(x^2+5\right)^2 d\left(x^2+5\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{\left(x^2+5\right)^3}{3}\right]_{x=1}^{x=2}=\left[\frac{(4+5)^3}{3}\right]-\left[\frac{(1+5)^3}{3}\right] \quad (1)$$

Example

Evaluate $I=\int_2^4 \left(x^2+5\right)^2 dx$

المتغير x داخل القوس مرفوع لأس أكبر من الواحد الصحيح وبالتالي ليس أمامنا سوى فك القوس قبل البدء في إجراء التكامل وعليه:

$$I=\int\left(x^2+5\right)^2 dx=\int\left(x^4+10x^2+25\right)dx \quad (1)$$

لا يفوتنا الآن تذكرة القارئ بالآتي:

$$I=\int x^{n}dx=\frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad (2)$$

تطبيقا للقاعدة الموضحة في المعادلة (2) على الطرف الأيمن من المعادلة (1) فنحصل على النتيجة التالية:

$$I=\int_{2}^{4}\left(x^{2}+5\right)^{2}dx=\left[\frac{x^{5}}{5}+\frac{10}{3}x^{3}+25x\right]_{x=2}^{x=4}$$
$$=\left(\frac{4^{5}}{5}+\frac{10}{3}4^{3}+100\right)-\left(\frac{2^{5}}{5}+\frac{10}{3}2^{3}+50\right) \qquad (3)$$

Example

Evaluate $I=\int_{a}^{b}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^{2}}}+\sqrt{x}(1-x)\right)dx$

واضح من الدالة داخل التكامل أنه ليس أمامنا إلا أن نبسط الدالة أولا قبل البدء في إجراء التكامل:

$$I=\int\left(x^{\frac{-2}{3}}+x^{\frac{1}{2}}(1-x)\right)dx \qquad (1)$$

بالتبسيط أكثر:

$$I=\int\left(x^{\frac{-2}{3}}+x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{3}{2}}\right)dx \qquad (2)$$

تطبيقا للقاعدة السابقة نحصل على:

$$I=\int\left(x^{\frac{-2}{3}}+x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{3}{2}}\right)dx=\frac{x^{\left(\frac{-2}{3}+1\right)}}{\left(\frac{-2}{3}+1\right)}+\frac{x^{\left(\frac{1}{2}+1\right)}}{\left(\frac{1}{2}+1\right)}+\frac{x^{\left(\frac{3}{2}+1\right)}}{\left(\frac{3}{2}+1\right)}+C \qquad (3)$$

$$I=\int_a^b\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+\sqrt{x}(1-x)\right)dx=\left[3x^{\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_{x=a}^{x=b} \qquad (4)$$

Example

Evaluate $I=\int_a^b(3x+1)^{10}\,dx$

هنا بالرغم من أن المتغير x داخل القوس من الرتبة الأولى إلا أنه من الصعب جدا فك القوس من ذو الأس من الدرجة العاشرة إذن فلنحاول وضع التكامل على صورة القاعدة التي نحن بصددها أي أننا يمكننا عمل الآتي قبل الحل:

$$I=\frac{1}{3}\int(3x+1)^{10}\,d(3x+1) \qquad (1)$$

جعلنا المتغير على نفس شكل الدالة التي نكاملها وبالتالي أصبح التكامل لدالة مرفوعة لأس لنفس الدالة.

$$I=\frac{1}{3}\int_a^b(3x+1)^{10}\,d(3x+1)=\frac{1}{3}\left(\frac{(3x+1)^{11}}{11}\right)_{x=a}^{x=b} \qquad (2)$$

Example

Evaluate $I=\int_a^b x\left(x^2+1\right)^3 dx$

هذه المسألة فيها فكرة جيدة حيث الدالة التي نكاملها على الصورة $x\left(x^2+1\right)^3$ وعليه من الممكن فك القوس ثم التبسيط وبعد ذلك الحل. لكننا يمكننا عمل شيء نختلف هذه المرة فماذا لو جعلنا dx جعلناه $d\left(x^2+1\right)$ وضربنا الدالة في ثابت يجعلها ترجع لأصلها مرة أخرى أي أن:

$$I=\frac{1}{2}\int\left(x^2+1\right)^3 d\left(x^2+1\right)$$

والآن يمكننا إجراء التكامل وبالتالي نحصل على الناتج الآتي:

$$I=\frac{1}{2}\int_a^b x\left(x^2+1\right)^3 d\left(x^2+1\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{\left(x^2+1\right)^4}{4}\right]_{x=a}^{x=b} \qquad (2)$$

Second Simplest Rule القاعدة الثانية

Example

Evaluate $I=\int_{x=1}^{x=2}\frac{x}{x^2+1}dx$

تطبيقا للقاعدة الثانية من الطرق الأولية لحساب التكامل يمكننا إعادة صياغة التكامل على النحو التالي:

$$I=\int_{x=1}^{x=2}\frac{x}{x^2+1}dx=\left[\frac{1}{2}\right]\int_{x=1}^{x=2}\frac{x}{x^2+1}dx=\left[\frac{1}{2}\right]\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_{x=1}^{x=2}$$

Example

Evaluate $I = \int_{x=2}^{x=4} \frac{e^x}{1-e^x} dx$

تطبيقا للقاعدة الثانية من الطرق الأولية لحساب التكامل يمكننا إعادة صياغة التكامل على النحو التالي:

$$I = \ln\left[\frac{1}{\left(1-e^x\right)}\right]_{x=2}^{x=4}$$

Example

Evaluate $I = \int_{x=2}^{x=4} \frac{\sinh x}{4\cosh x + 7} dx$

قبل تطبيق القاعدة الثانية من الطرق الأولية تعالى نفاضل المقام ونرى ماذا ينتج:

$$\frac{d}{dx}(4\cosh x + 7) = 4\sinh x$$

بناء على ناتج التفاضل يمكننا إعادة صياغة التكامل على الصورة التالية:

$$I = \int_{x=2}^{x=4} \frac{\sinh x}{4\cosh x + 7} dx = \left[\frac{1}{4}\right] \int_{x=2}^{x=4} \frac{d(4\cosh x + 7)}{4\cosh x + 7} = \left[\frac{1}{4}\right] [\ln(4\cosh x + 7)]_{x=2}^{x=4}$$

Third Simplest Rule القاعدة الثالثة

Example

Evaluate $I = \int_{x=1}^{x=2} \frac{x^3 + 1}{\sqrt{x^4 + 4x}} dx$

تفاضل ما تحت الجذر يعطى البسط ولكن مضروب في 4.

وعليه نعيد كتابة التكامل على الصورة التالية:

$$I=\int \frac{x^3+1}{\sqrt{x^4+4x}}dx=\left[\frac{1}{4}\right]\int \frac{4\left(x^3+1\right)}{\sqrt{x^4+4x}}dx$$

نطبق القاعدة الثالثة الآن نحصل على:

$$I=\left[\frac{1}{4}\right]\int_{x=1}^{x=2} \frac{x^3+1}{\sqrt{x^4+4x}}dx=\left[\frac{1}{4}\right]\times 2\times\sqrt{x^4+4x}=\left[\frac{\sqrt{x^4+4x}}{2}\right]_{x=1}^{x=2}$$

القاعدة الرابعة Fourth Simplest Rule

Example

Evaluate $I=\int_{x=\pi}^{x=2\pi} e^x \cot\left(e^x\right)dx$

نود أن نوضح للقارئ أننا عندما ذكرنا دالة أساسية فإننا نعنى أي دالة من الدوال المثلثية ، الأسية ، وخلافة – يرجى مراجعة الجزء الأول من موسوعة الرياضيات الهندسية الجزء الأول تفاضل وتحليلية – الناشر الدار الجامعية – وبناء على هذا سوف نعتبر cot x هي الدالة الأساسية والمتغير هي الدالة الأسية exp (x).

وبالتالي تصبح المسألة تطبيق مباشر على القاعدة الرابعة من الطرق الأولية:

$$I=\int_{x=\pi}^{x=2\pi} e^x \cot\left(e^x\right)dx=\int_{x=\pi}^{x=2\pi} e^x \cot\left(e^x\right)d\left(e^x\right)=\left\{\ln\left|\sin\left(e^x\right)\right|\right\}_{x=\pi}^{x=2\pi}$$

ملحوظة:

تلاحظ أننا وضعنا ناتج التكامل كقيمة مطلقة وذلك لأن دالة الـ sin دالة ترددية مابين السالب والموجب كما أن دالة ln دالة غير معرفة في الاتجاه السالب ولذا حددنا فقط القيم الموجبة.

القاعدة الخامسة Fifth Simplest Rule

التكامل بالتعويض البسيط

في هذه القاعدة يتم تحديد الجزء من الدالة والذي يمثل مشكلة عند إجراء التكامل ويتم التخلص منه باستخدام تعويض محدد ونود الإشارة إلى أن مثل هذه القاعدة لا تحكمها إلا المسألة نفسها وهذه القاعدة تختلف إلى حد ما في طريقة التكامل بالتعويض سواء باستخدام الدوال المثلثية أو غيرها وسوف يأتي الحديث لاحقا عن التكامل بالتعويض بالتفصيل.

هناك خطوات أساسية عند عمل تعويض في مسألة تكامل محدود هذه الخطوات كالآتي:

- **الفرض**: التخلص من الجزئية التي تمثل المشكلة بفرضها بشكل يناسب العلاقة المستخدمة.
- **التبسيط**: وضع المتغير القديم في صورة بسيطة بالنسبة للجديد.
- **التفاضل**: وهى إجراء التفاضل للفرض لإيجاد علاقة بين تفاضلي المتغيرين.
- **حدود التكامل الجديدة**: إيجاد حدود التكامل التي تناظر المتغير الجديد.

Example

Evaluate $I=\int\limits_{x=1}^{x=2}\frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

واضح من الدالة التي نجرى عليها التكامل أن هناك فيها جزء مشترك وهو $\sqrt{x}$ وهذا الجزء يمثل المشكلة في المسألة الحالية.

وعليه نبدأ الحل بالتخلص من هذه المشكلة بالتعويض كالآتي:

Let

$y=\sqrt{x}$

$x=y^2 \Rightarrow dx=2\,ydy$

Limits of integration

At $x=1 \Leftrightarrow y=1$

&

At $x=2 \Leftrightarrow y=\sqrt{2}$

بالتعويض بالفرض السابق وتفاضله في التكامل وإجراء التبسيط اللازم نحصل على:

$$I=\int\limits_{x=1}^{x=2}\frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx=\frac{4}{3}\left[\left(1+\sqrt{x}\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{x=1}^{x=2}$$

نلاحظ من الأمثلة السابقة أنه كون أننا نتعامل مع تكامل محدود أو غير محدود فهذا لا يغير من الموضوع في شيء غير أن الخطوة الأخيرة في حالة التكامل الغير محدود نضيف ثابت التكامل مع الناتج في حين أننا نوجد ناتج التكامل عند كلا من الحد الأعلى والحد الأدنى ثم نوجد الفرق بينهما على التوالي وناتج الفرق هذا يمثل القيمة النهائية للتكامل المطلوب.

خواص التكاملات المحدودة Properties of Definite Integrals

فيما يلي سوف نقوم بعرض أهم الخواص التي تتعلق بالتكامل المحدود والتي تكون مفيدة بشكل عام عند حل المسائل.

خاصية التقسيم

هذه الخاصية تستخدم لتجزئة التكامل على مجموعة حدود فرعية بحيث تبدأ هذه المجموعات الفرعية من الحد الأدنى للتكامل وتنتهي بالحد الأعلى من التكامل ولكي نفهم هذه الخاصية لنفرض أن لدينا تكامل على النحو التالي:

$$I = \int_{x=a}^{x=b} f(x)dx \tag{1}$$

ولنفرض أن الدالة داخل التكامل معطاة بالصورة التالية:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & a \le x < b_1 \\ f_2(x) & b_1 < x < b_2 \\ f_3(x) & b_2 < x \le b \end{cases} \tag{2}$$

مضمون هذه النظرية هي أنه يمكننا تقسيم التكامل في المعادلة (1) بالاستعانة بالدالة المعطاة في المعادلة (2) كالآتي:

$$I=\int_{x=a}^{x=b_1} f_1(x)dx+\int_{x=b_1}^{x=b_2} f_1(x)dx+\int_{x=b_2}^{x=b} f_1(x)dx \qquad (3)$$

Example

Evaluate $I=\int_{x=-10}^{x=10} f(x)dx$

$$f(x)=\begin{cases} e^{-2x} & -10\le x<-4 \\ 0 & -4<x<5 \\ 2^x & 5<x\le 10 \end{cases} \qquad (1)$$

الخطوة الأولى هي إعادة كتابة التكامل المراد حسابه مع مراعاة تقسيمه بناء على تقسيم الدالة والمعطاة بالمعادلة رقم (1):

$$I=\int_{x=-10}^{x=-4} e^{-2x}dx+\int_{x=5}^{x=10} 2^x dx=I_1+I_2 \qquad (2)$$

في المعادلة (2):

$$I_1=\int_{x=-10}^{x=-4} e^{-2x}dx=\left\{\frac{e^{-2x}}{-2}\right\}_{x=-10}^{x=-4}=\left(\frac{-1}{2}\right)\left\{e^{8}-e^{20}\right\} \qquad (3)$$

$$I_1=\int_{x=5}^{x=10} 2^x dx=\int_{x=5}^{x=10} e^{x\ln 2}dx \qquad (4)$$

لحل التكامل في المعادلة (4) نستخدم التعويض التالي:

$$y = x\ln 2 \Rightarrow dx = \frac{dy}{\ln 2} \tag{5}$$

Limits of integration

$$\text{At } x = 5 \Rightarrow y = 5\ln 2 \;\&\; x = 10 \Rightarrow y = 10\ln 2 \tag{6}$$

بالتعويض من (5) ، (6) في المعادلة (4) نحصل على الآتي:

$$I_1 = \left(\frac{1}{\ln 2}\right)\int_{y=5\ln 2}^{y=10\ln 2} e^y\,dy = \left(\frac{1}{\ln 2}\right)\left[e^y\right]_{y=5\ln 2}^{y=10\ln 2} = \left(\frac{1}{\ln 2}\right)\left[e^{10\ln 2} - e^{5\ln 2}\right] \tag{7}$$

بجمع المعادلتين (3) ، (7) نحصل على ناتج التكامل المطلوب:

$$I = \left(\frac{-1}{2}\right)\left\{e^8 - e^{20}\right\} + \left(\frac{1}{\ln 2}\right)\left[e^{10\ln 2} - e^{5\ln 2}\right] \tag{8}$$

Example

Evaluate $I = \int_{x=0}^{x=2} |1-x|\,dx$

الدالة المعطاة في التكامل يمكن كتابتها على النحو التالي:

$$|1-x| = \begin{cases} +(1-x) & 0 \le x < 1 \\ -(1-x) & 1 \le x \le 2 \end{cases} \tag{1}$$

بتقسيم التكامل بناء على المعادلة (1) وإجراء التكامل نحصل على الآتي:

$$I = \int_{x=0}^{x=1}(1-x)dx - \int_{x=1}^{x=2}(1-x)dx = \left(x - \frac{x^2}{2}\right)_0^1 - \left(x - \frac{x^2}{2}\right)_1^2 = 1 \tag{2}$$

خاصية هامة في حالة كون الدالة زوجية أو فردية

تظهر أهمية هذه الخاصية عند حساب تكامل محدود على فترة تماثل بمعنى أن الحدين الأدنى والأعلى للتكامل Lower and Upper limits of integrations متساويين عدديا ولكن مع اختلاف الإشارة وهذه الخاصية تظهر أهميتها في الحالات المختلفة للدالة داخل هذا التكامل كونها دالة فردية Odd function أو زوجية Even أو لا زوجية أو فردية Neither even nor odd.

ولنذكر القارئ بالدالة الفردية والدالة الزوجية قبل دراسة الحالات المختلفة للتكامل:

الدالة الزوجية والدالة الفردية Even and odd Functions

ممكن القارئ يسأل لماذا نتكلم عن بعض الموضوعات مثل الدالة الزوجية أو الدالة الفردية مع أن أهميتها تظهر عند دراسة التكامل؟ نقول إننا نضع قاعدة عريضة للقارئ ونوضح له المفاهيم التي تؤهله فيما بعد لدراسة موضوع معين.

والآن تعالى لنتعرف على هذه النوعية من الدوال وخصائصها.

الدالة الزوجية Even Function

إذا تم استبدال كل x ب x– في الدالة الأصلية لحصلنا على أصل الدالة تسمى الدالة زوجية. من أهم مواصفات هذه الدالة تماثلها حول المحور الرأسي.

(1) A function $y = g(x)$ is **even** if $g(-x) = g(x)$.

(2) Symmetric about y axis.

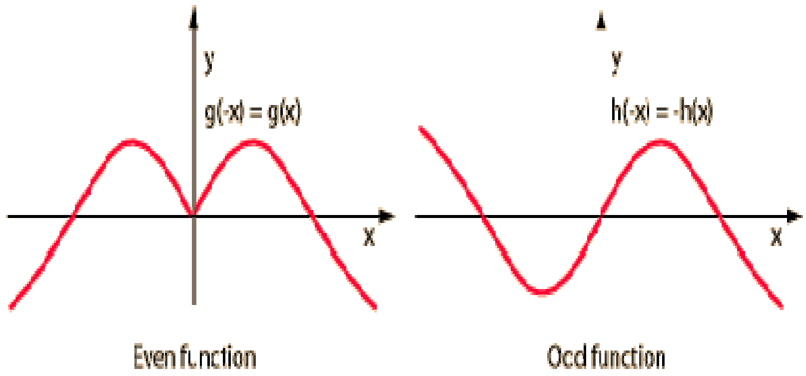


Figure 5: Odd and even function

الدالة الفردية Odd Function

إذا تم استبدال كل x ب ‎–x في الدالة الأصلية لحصلنا على أصل الدالة مضروبا في إشارة سالبة تسمى الدالة فردية. من أهم مواصفات هذه الدالة تماثلها حول نقطة الأصل.

(1) A function $y = h(x)$ is **odd** if $h(-x) = -h(x)$.

(2) Anti-symmetric about y axis.

بعض الخصائص الهامة والمفيدة في حل كثير من المسائل:

إذا كان التكامل على فترة متماثلة ولتكن من ‎–L إلى L حول نقطة الأصل وكانت الدالة **زوجية** إذن يمكننا إجراء التكامل من 0 إلى L مع ضرب الناتج في 2 لاحظ هذا على رسم الدالة الزوجية: $\int_{-L}^{L} g(x)dx = 2\int_{0}^{L} g(x)dx$

إذا كان التكامل على فترة متماثلة ولتكن من $-L$ إلى $+L$ حول نقطة الأصل وكانت الدالة **فردية** إذن يصبح الناتج مساويا للصفر : $\int_{-L}^{L} h(x)dx = 0$

Example

Evaluate $I = \int_{x=0}^{x=\pi} \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}dx$

بداية يمكن تبسيط الدالة داخل التكامل مستخدمين علاقة من العلاقات المثلثية كالآتي:

$$1+\cos 2x = 2\cos^2 x \tag{1}$$

بالتعويض من (1) في التكامل المراد حسابه فنحصل على:

$$\begin{aligned} I &= \int_{x=0}^{x=\pi} \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}dx \\ &= \int_{x=0}^{x=\pi} \sqrt{\frac{2\cos^2 x}{2}}dx \\ &= \int_{x=0}^{x=\pi} \sqrt{\cos^2 x}dx \\ &= \pm \int_{x=0}^{x=\pi} \cos x dx \end{aligned} \tag{2}$$

نود أن نوضح للقارئ شيء هام جدا ألا وهو بالنظر إلى المعادلة (2) وجدنا $\pm$ وعند رسم دالة cos في الفترة المطلوب حساب التكامل فيها كما هو موضح في الشكل التالي نجد أنفسنا نضطر إلى تقسيم التكامل على فترتين مع مراعاة الإشارة في كل فترة كالآتي:

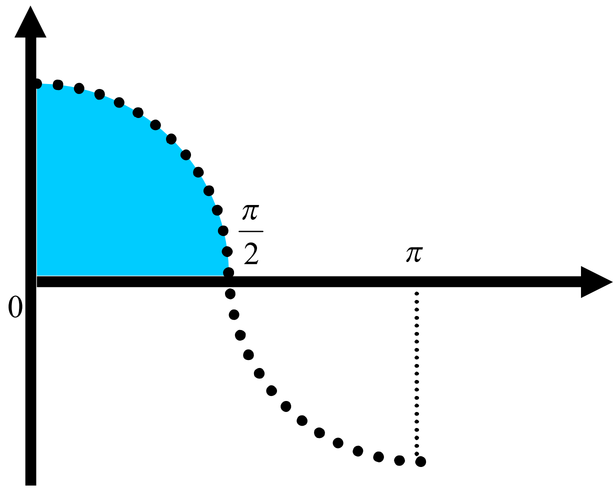


Figure 6

$$I=\int_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}}\cos x dx-\int_{x=\frac{\pi}{2}}^{x=\pi}\cos x dx=2 \qquad (3)$$

Example

Evaluate $I=\int_{x=0}^{x=100\pi}\left|\sqrt{1-\cos 2x}\right|dx$

بداية يمكن تبسيط الدالة داخل التكامل مستخدمين علاقة من العلاقات المثلثية كالآتي:

$$1+\cos 2x=2\cos^2 x \qquad (1)$$

بإعادة كتابة العلاقة (1) كالآتي:

$$\begin{aligned}&\cos 2x=2\cos^2 x-1=\\&=2\cos^2 x-\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)=\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)\end{aligned} \qquad (2)$$

المعادلة (2) في شكلها النهائي كالآتي:

$$\cos 2x = \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) \tag{3}$$

بضرب طرفي المعادلة في (-1) ثم إضافة (1) إلى الطرفين فتصبح على النحو التالي:

$$1 - \cos 2x = 2\sin^2 x \tag{4}$$

بالتعويض من (4) في التكامل فيصبح التكامل على الشكل التالي:

$$\begin{aligned} I &= \int_{x=0}^{x=100\pi} \left|\sqrt{1-\cos 2x}\right| dx \\ &= \int_{x=0}^{x=100\pi} \sqrt{2\sin^2 x}\, dx \qquad (5) \\ &= \sqrt{2} \int_{x=0}^{x=100\pi} |\sin x|\, dx \end{aligned}$$

$$I = \sqrt{2} \times 100 \int_{x=0}^{x=\pi} |\sin x|\, dx = 200\sqrt{2} \tag{6}$$

Example

Evaluate $I = \int_{x=-5}^{x=5} \frac{x^5 \sin^2 x}{x^4 + 2x^2 + 1} dx$

بداية طالما وجدنا تماثل في حدود التكامل فنفكر في اختبار الدالة داخل التكامل من ناحية كونها فردية أو زوجية أم غير ذلك قبل البدء في التعامل مع التكامل.

$$f(x) = \frac{x^5 \sin^2 x}{x^4 + 2x^2 + 1} \tag{1}$$

والآن لنستبدل كل x ب x– ولنرى النتيجة:

$$f(-x) = -\left(\frac{x^5 \sin^2 x}{x^4 + 2x^2 + 1}\right) = -f(x) \tag{2}$$

من المعادلة (2) يتضح لنا أن الدالة فردية Odd ونتيجة لذلك يمكننا مباشرة أن نقول أن ناتج التكامل المراد حسابه مساويا للصفر.

المثال التالي فيه فكرة جيدة من حيث إمكانية تجزئة الدالة داخل التكامل إلى دالتين منفصلتين وبالتالي نقسم التكامل إلى تكاملين.

Example

Evaluate $I = \int\limits_{x=-2}^{x=2} \frac{2x^7 + 3x^6 - 10x^5 - 7x^3 - 12x^2 + x + 1}{x^2 + 2} dx$

قبل البدء في الحل سوف نقوم بتجميع الحدود ذات الأس الفردي مع بعضها وتجزئة الدالة إلى جزئين كالآتي:

$$f(x) = \frac{2x^7 - 10x^5 - 7x^3 + x}{x^2 + 2} + \frac{3x^6 - 12x^2 + 1}{x^2 + 2} \tag{1}$$

ممكن أن يسأل القارئ نفسه سؤال لماذا قمنا بتجزئة الدالة إلى جزئين والإجابة لسببين:

أولها: التماثل في حدود التكامل الذي يسهل إجراء التكامل في حالة معرفة نوع الدالة

ثانيها: وجود حدود ذات أس متنوع مابين الفردي والزوجي.

والآن لنعيد كتابة التكامل مع استخدام المعادلة (1) فنحصل على:

$$I = \int\limits_{x=-2}^{x=2} \frac{2x^7 - 10x^5 - 7x^3 + x}{x^2 + 2} dx + \int\limits_{x=-2}^{x=2} \frac{3x^6 - 12x^2 + 1}{x^2 + 2} dx = I_1 + I_2 \tag{2}$$

في المعادلة (2):

$$I_1 = \int_{x=-2}^{x=2} \frac{2x^7 - 10x^5 - 7x^3 + x}{x^2 + 2} dx \qquad (3)$$

$$I_2 = \int_{x=-2}^{x=2} \frac{3x^6 - 12x^2 + 1}{x^2 + 2} dx \qquad (4)$$

حساب التكامل في المعادلة (3)

$$I_1 = \int_{x=-2}^{x=2} \frac{2x^7 - 10x^5 - 7x^3 + x}{x^2 + 2} dx = 0 \qquad (5)$$

لاحظنا أننا كتبنا ناتج التكامل مباشرة وذلك لأن التكامل متماثل والدالة فردية.

حساب التكامل في المعادلة (4)

الدالة داخل التكامل في المعادلة (4) كسرية وكل من البسط والمقام دالة كثيرة الحدود وأس البسط أكبر من أس المقام وهنا لابد من تقليل أس البسط حتى يمكننا إجراء التكامل ويتم ذلك من خلال القسمة المطولة وينتج عنها:

$$\frac{3x^6 - 12x^2 + 1}{x^2 + 2} = \left[\left(3x^4 - 6x^2\right) + \frac{1}{x^2 + 2}\right] \qquad (6)$$

بالتعويض من المعادلة (6) في التكامل بالمعادلة (4) نحصل على الآتي:

$$I_2 = 2\int_{x=0}^{x=2} \left[\left(3x^4 - 6x^2\right) + \frac{1}{x^2 + 2}\right] dx \qquad (7)$$

نلاحظ في المعادلة (7) أننا ضربنا في الثابت 2 وسوف نجرى التكامل على منتصف الفترة وذلك لأن الدالة زوجية بإجراء التكامل نحصل على الناتج التالي:

$$I_2 = \left[\frac{\pi}{2\sqrt{2}} - \frac{16}{5}\sqrt{2} \right] \qquad (8)$$

بجمع المعادلتين (5) ، (8) نحصل على الناتج النهائي للتكامل المطلوب.

الاختزال المتتالي والتكاملات المحدودة

Successive Reduction and Definite Integrals

سبق وأن درسنا التكامل بالاختزال عند التعامل الغير محدود وفيما يلي سوف نوجز الحديث عن طريقة الاختزال المتتالي في التكامل المحدود.

أنواع الدوال المستخدمة في التكامل بالاختزال المتتالي

$$\int_a^b \sin^n x \cos^m x dx$$

$$\int_a^b \begin{pmatrix} \sin x \\ \text{or} \\ \cos x \\ \text{or} \\ \text{combination} \end{pmatrix}^n dx$$

الأمثلة التالية ما هي إلا تكرار لما سبق دراسته في التكامل الغير محدود.

Example

Find a reduction formula for $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$.

في مثل هذه النوعية من مسائل التكامل تتم تجزئة الدالة داخل التكامل إلى حاصل ضرب دالتين وبناء على هذه الفكرة نعيد كتابة التكامل المطلوب حله على الصورة التالية:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin^{n-1} x dx \qquad (1)$$

بإجراء التكامل بالتجزئ على المعادلة (1) كالآتي:

$$I_n = \left[-\sin^{n-1} x \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^{n-2} x dx \qquad (2)$$

بالتعويض عن $\cos^2 x$ بدلالة $\sin^2 x$ من العلاقة الخاصة بذلك فنحصل على:

$$I_n = \left[-\cos x \sin^{n-1} x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\sin^2 x\right) \sin^{n-2} x dx \qquad (3)$$

بتبسيط المعادلة (3) نحصل على الآتي:

$$I_n = \left[-\cos x \sin^{n-1} x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \qquad (4)$$

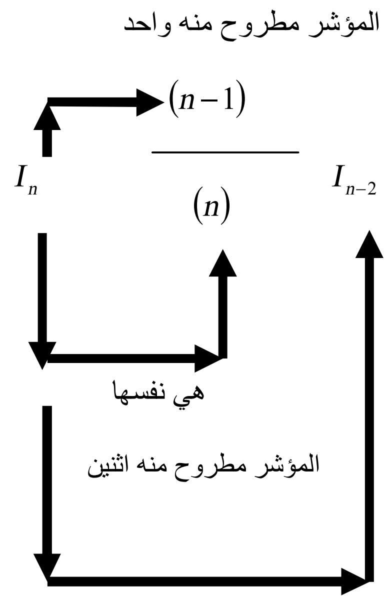
والآن بملاحظة التكامل الأخير في المعادلة (4) نجد أنه أصل التكامل المراد حسابه وعلى ذلك نعيد ترتيب المعادلة فنحصل على الآتي:

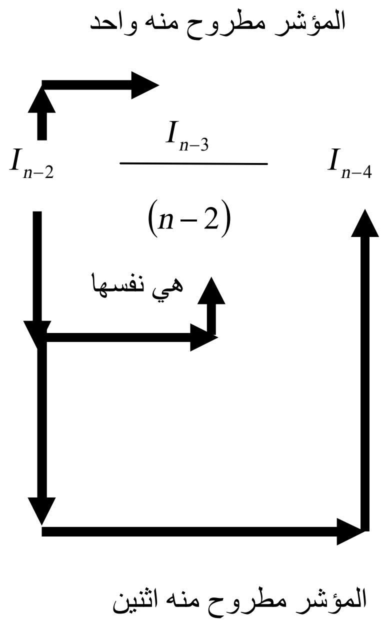
$$I_n + (n-1)I_n = \left[-\cos x \sin^{n-1} x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)I_{n-2} \qquad (5)$$

وأخيرا نحصل على التكامل المطلوب:

$$I_n = \left(\frac{n-1}{n}\right) I_{n-2}, 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \qquad (6)$$

هناك أسلوب لاستنتاج بقية التكاملات فكرته الأساسية مستوحاة من الخبرة في مجال التدريس ومجموعة المحاضرات للطلاب وهى كالآتي:





Example

Find a reduction formula for $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$.

سوف نقوم بنفس الأسلوب المتبع تماما كما في حالة التكامل الغير محدود ثم نعوض في الناتج النهائي بحدود التكامل.

في مثل هذه النوعية من مسائل التكامل تتم تجزئة الدالة داخل التكامل إلى حاصل ضرب دالتين وبناء على هذه الفكرة نعيد كتابة التكامل المطلوب حله على الصورة التالية:

$$I_n = \int \cos x \cos^{n-1} x dx \qquad (1)$$

بإجراء التكامل بالتجزئ على المعادلة (1) كالآتي:

$$I_n = \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int \sin^2 x \cos^{n-2} x dx \qquad (2)$$

بالتعويض عن $\sin^2 x$ بدلالة $\cos^2 x$ من العلاقة الخاصة بذلك فنحصل على:

$$I_n = \sin x \cos^{n-1} + (n-1)\int \left(1-\cos^2 x\right)\cos^{n-2} x dx \qquad (3)$$

بتبسيط المعادلة (3) نحصل على الآتي:

$$I_n = \sin x \cos^{n-1} + (n-1)\int \cos^{n-2} x dx + (n-1)\int \cos^n x dx \qquad (4)$$

والآن بملاحظة التكامل الأخير في المعادلة (4) نجد أنه أصل التكامل المراد حسابه وعلى ذلك نعيد ترتيب المعادلة فنحصل على الآتي:

$$I_n - (n-1)I_n = \sin x \cos^{n-1} x + (n-1)I_{n-2} \qquad (5)$$

وأخيرا نحصل على التكامل المطلوب:

$$I_n = \left(\frac{1}{2-n}\right)\left[\sin x \cos^{n-1} x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)I_{n-2} \qquad (6)$$

Example

Find a reduction formula for $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^n x dx$.

في مثل هذه النوعية من مسائل التكامل تتم تجزئة الدالة داخل التكامل إلى حاصل ضرب دالتين وبناء على هذه الفكرة نعيد كتابة التكامل المطلوب حله على الصورة التالية:

$$I_n = \int \tan^2 x \tan^{n-2} x dx \tag{1}$$

But

$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1 \tag{2}$$

بالتعويض من (2) في (1):

$$I_n = \int \left(\sec^2 x - 1\right) \tan^{n-2} x dx \tag{3}$$

المعادلة (3) يمكن أن تأخذ الشكل التالي:

$$I_n = \int \sec^2 x \tan^{n-2} x dx - \int \tan^{n-2} x dx \tag{4}$$

التكامل الأول في المعادلة (4) يمكن إجراؤه بالطرق الأولية وتصبح المعادلة (4) على النحو التالي:

$$I_n = \int (\tan x)^{n-2} d(\tan x) - \int \tan^{n-2} x dx \tag{5}$$

$$I_n = \left(\frac{1}{n-1}\right)\left[(\tan x)^{n-1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - I_{n-2} \tag{6}$$

Example

Find a reduction formula for $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec^n x dx$.

في مثل هذه النوعية من مسائل التكامل تتم تجزئة الدالة داخل التكامل إلى حاصل ضرب دالتين وبناء على هذه الفكرة نعيد كتابة التكامل المطلوب حله على الصورة التالية:

$$I_n = \int \sec^2 x \sec^{n-2} x dx \tag{1}$$

بإجراء التكامل بالتجزئ على المعادلة (1) كالآتي:

$$\begin{aligned} I_n &= \int \sec^2 x \sec^{n-2} x dx = \\ &\tan x \sec^{n-2} - (n-2) \int \tan^2 x \sec^{n-2} x dx \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} I_n &= \int \sec^2 x \sec^{n-2} x dx \\ &= \tan x \sec^{n-2} - (n-2) \int \left(\sec^2 x - 1 \right) \sec^{n-2} x dx \end{aligned} \tag{3}$$

$$I_n = \tan x \sec^{n-2} - (n-2) \int \left(\sec^n x - \sec^{n-2} \right) dx \tag{4}$$

بتبسيط المعادلة (4) نحصل على:

$$I_n = \tan x \sec^{n-2} x - (n-2) I_n + (n-2) I_{n-2} \tag{5}$$

بإعادة ترتيب حدود المعادلة (5) نحصل على:

$$I_n = \left(\frac{1}{n-1} \right) \left[\tan x \sec^{n-2} x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-2) I_{n-2} \tag{6}$$

Example

Evaluate $I_{10,3}=\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\sin^{10}x\cos^{3}xdx.$

المسألة الحالية تتبع النوع الثاني من التكامل بالاختزال المتتالي وعليه نبدأ الحل بالفرض التالي:

$$\sin x=t\Rightarrow\cos xdx=dt \tag{1}$$

Limits of integration

$$x=0\Leftrightarrow t=0\ \&\ x=\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow t=\frac{1}{2} \tag{2}$$

بالتعويض من (1) ، (2) في التكامل المراد حسابه فنحصل على الآتي:

$$I_{10,3}=\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\sin^{10}x\cos^{3}xdx=\int_{0}^{\frac{1}{2}}t^{10}\left(1-t^{2}\right)dt$$

$$=\left(\frac{t^{11}}{11}-\frac{t^{13}}{13}\right)_{0}^{\frac{1}{2}}=3.5\times10^{-5}$$

التكامل المحدود والدالة الترددية

Definite Integral and Periodic Functions

إذا كان التكامل المراد حسابه يحتوى على دالة ترددية Periodic function ذات فترة تردد T فإنه يمكننا طرح مقدار فترة التردد من كلا الحدين الأدنى ، والأعلى للتكامل ويمكننا صياغة هذه القاعدة على النحو التالي:

$$I=\int_a^b f(x)dx,\ f(x+T)=f(x)$$

$$\Rightarrow$$

$$I=\int_{a-T}^{b-T} f(x)dx$$

المثال التالي هو تطبيق مباشر لهذه القاعدة.

Example

Evaluate $I=\int_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi}\frac{\sin 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx$

الدالة داخل التكامل دالة ترددية وتكرر نفسها كل π وعلى هذا وتطبيقا للقاعدة السابقة فسوف نعيد كتابة التكامل على الصورة التالية:

$$I=\int_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi}\frac{\sin 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx$$

$$=\int_{\pi-\pi}^{\frac{5}{4}\pi-\pi}\frac{\sin 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx \qquad (1)$$

$$=\int_{0}^{\frac{1}{4}\pi}\frac{\sin 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx$$

التكامل (1) مع استخدام بعض العلاقات المثلثية يصبح:

$$I=\int_{0}^{\frac{1}{4}\pi}\frac{\sin 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx=\int_{0}^{\frac{1}{4}\pi}\frac{\tan x}{\cos^2 x(1+\tan^4 x)}dx \qquad (2)$$

Let

$$\tan x = t \Rightarrow dt = \frac{dx}{\cos^2 x} \tag{3}$$

Limits of integration

$$x = 0 \Leftrightarrow t = 0 \;\&\; x = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow t = 1 \tag{4}$$

بالتعويض من (3) ، (4) في المعادلة (2) نحصل على الآتي:

$$I = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{\tan x}{\cos^2 x\left(1 + \tan^4 x\right)} dx = \int_0^1 \frac{t}{\left(4^4 + 1\right)} dx \tag{5}$$

لحل التكامل في المعادلة (5) نستخدم التعويض التالي:

Let

$$t^2 = u \Rightarrow 2tdt = du \tag{6}$$

Limits of integration

$$t = 0 \Leftrightarrow u = 0 \;\&\; t = 1 \Leftrightarrow u = 1 \tag{7}$$

بالتعويض من (6) ، (7) في التكامل (5) نحصل على الآتي:

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\left(u^2 + 1\right)} du = \left[\tan^{-1} u\right]_0^1 = \left[\tan^{-1} 1\right] - \left[\tan^{-1} 0\right] = \frac{\pi}{4} \tag{8}$$

صفحة زوجية فارغة

3

الباب الثالث

تطبيقات في التكامل المحدود

Application of Definite Integrals

صفحة زوجية فارغة

الباب الثالث

تطبيقات في التكامل المحدود

Application of Definite Integrals

تقديم

عند الحديث عن تطبيقات التكامل نقف حائرين من أين نبدأ وفى أي المجالات نبدأ الحديث عن تطبيقات التكامل ولما كانت هذه تمثل مشكلة في حد ذاتها فكرنا مليا ووجدنا أن نبدأ التطبيقات بالموضوعات الشائعة والتي من المحتمل وجودها في تخصصات كثيرة ثم بعد ذلك نتتبع القواعد العامة أيضا التي نجدها كعامل مشترك في كل التطبيقات ثم نؤجل الحديث عن التطبيقات في التخصصات المختلفة إلى آخر الباب حتى يكون استيعابها أكثر وطريقة عرضها لا تأخذ مجهودا من القارئ خاصة وأن إستراتجيتنا في الموسوعة بكافة أجزائها تسير في نهج التبسيط العلمي ومحاولة وصول المعلومة إلى ذهن المتلقي بطريقة ليست فيها معاناة خاصة وأن الرياضيات الهندسية لم يعرف الكثيرون أسرارها إلى الآن ونحن نحاول الغوص فيها علنا نصل إلى شيء في نهاية الطريق.

تحديد القيمة المتوسطة لدالة

Determination of The Mean Value of A Function

سؤال يفرض نفسه: ماذا نريد أن نقول في المعنى وراء القيمة المتوسطة لدالة؟

بفرض أن الدالة $f(x)$ تكامل في فترة ولتكن $[a,b]$ إذن في هذه الفترة يوجد رقم μ هذا الرقم يمثل القيمة المتوسطة للدالة في فترة تكاملها ورياضيا يمكن إيجاد هذا الرقم من خلال حساب التكامل التالي:

$$\mu = \left(\frac{1}{\text{b - a}}\right)\int_a^b f(x)dx, \quad a \le x \le b \tag{1}$$

Example

Find the mean value for $\sin^2 x$ if this function is integrable over the following interval $0 \le x \le \pi$

Solution

المثال الحالي ما هو إلا تطبيق مباشر على القاعدة السابقة وعلى هذا سنبدأ الحل بكتابة العلاقة التي تساعد في الوصول إلى المطلوب وهى كالآتي:

$$\mu = \left(\frac{1}{\text{b - a}}\right)\int_a^b f(x)dx, \quad a \le x \le b \tag{1}$$

بالتعويض في التكامل (1) بدلالة الدالة وحدود التكامل فتأخذ الشكل التالي مع مراعاة استخدام العلاقة المثلثية التالية:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \tag{2}$$

$$\mu = \frac{1}{\pi - 0}\int_0^{\pi} \sin^2 x \ dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[1 - \cos 2x]\,dx = \frac{1}{2\pi}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)_0^{\pi} = \frac{1}{2} \qquad (3)$$

التفاضل تحت علامة التكامل

Differentiation Under The Integral Sign

قاعدة لايبنتز Leibniz's Rule

هذه القاعدة لها تطبيقات هامة جدا ونجدها في الطرق العددية المتقدمة مثل طرق العناصر الحدية Boundary Element Methods وخاصة عند التعامل بأحد هذه الطرق في مسائل الانتشار الحراري Heat Diffusion Problems ذات المجال المتحرك Moving Boundary Problems وتطبيقات أخرى عديدة.

ولكي نتفهم هذه القاعدة بشكل جيد تعالى لنفرض أن لدينا تكامل يحتوى على متغيرين على النحو التالي:

$$I(\alpha) = \int_{u_1(\alpha)}^{u_2(\alpha)} f(x,\alpha)\,dx, \quad u_1(\alpha) \le x \le u_2(\alpha), \quad a \le \alpha \le b \qquad (1)$$

ومن هنا يمكننا الآن ذكر قاعدة لايبنتز Leibniz حيث تمثل التفاضل للعلاقة (1) كالآتي:

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = \int_{u_1(\alpha)}^{u_2(\alpha)} \frac{\partial f}{\partial \alpha}\,dx + f(u_2(\alpha),\alpha)\frac{du_2}{d\alpha} - f(u_1(\alpha),\alpha)\frac{du_1}{d\alpha} \qquad (2)$$

مع مراعاة توافر شرط هام جدا ألا وهو أن نتأكد من أن كلا من الدالة $f(x,\alpha)$ ، والدالة $\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}$ متصلتين على كلا من الفترتين $u_1(\alpha) \le x \le u_2(\alpha)$ ، $a \le \alpha \le b$.

إستراتيجية الحل لقاعدة لاينتز

- إيجاد التفاضل الجزئى $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$
- بالتعويض في الدالة f مرة عن كل x بالدالة $u_2(\alpha)$ ومرة أخرى بالدالة $u_1(\alpha)$
- أيجاد تفاضلات كلا من الحد الأدنى والحد الأعلى للتكامل بالنسبة إلى α
- بالتعويض بالنتائج السابقة في علاقة لايبنتز رقم (1).

الأمثلة التالية سوف نتبع فيها إستراتيجية الحل الموضحة عاليه.

Example

Differentiate the following integral with respect to the parameter α , $I = \int_{\alpha}^{\sqrt{\alpha}} \frac{e^{-\alpha x}}{x} dx$

Solution

بإتباع الإستراتيجية السابقة متبعين الخطوات أولا بأول كالآتي:

- إيجاد التفاضل الجزئى $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$

$$f(x,\alpha) = \frac{e^{-\alpha\alpha}}{x} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \alpha} = -e^{-\alpha\alpha} \qquad (1)$$

- بالتعويض في الدالة f مرة عن كل x بالدالة $u_2(\alpha)$ ومرة أخرى بالدالة $u_1(\alpha)$

$$f(u_2(\alpha),\alpha)=\frac{e^{-\alpha^{\frac{3}{2}}}}{\sqrt{\alpha}} \qquad (2)$$

$$f(u_1(\alpha),\alpha)=\frac{e^{-\alpha^2}}{\alpha} \qquad (3)$$

- إيجاد تفاضلات كلا من الحد الأدنى والحد الأعلى للتكامل بالنسبة إلى α

$$\frac{du_1(\alpha)}{d\alpha}=1 \qquad (4)$$

$$\frac{du_2(\alpha)}{d\alpha}=\frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \qquad (5)$$

- بالتعويض بالنتائج السابقة في علاقة لايبنتز

$$\frac{\mathrm{d}I(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}=\int_{u_1(\alpha)}^{u_2(\alpha)}\left(-e^{-\alpha x}\right)dx+\left\{\left(\frac{e^{-\alpha^{\frac{3}{2}}}}{\sqrt{\alpha}}\right)\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}-\left(\frac{e^{-\alpha^2}}{\alpha}\right)\right\} \qquad (6)$$

والآن بحساب التكامل الوحيد في المعادلة (6) نحصل على الناتج الأخير كالآتي:

$$\frac{\mathrm{d}I(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}=\left(\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha}\right)_{\alpha}^{\sqrt{\alpha}}+\left\{\left(\frac{e^{-\alpha^{\frac{3}{2}}}}{\sqrt{\alpha}}\right)\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}-\left(\frac{e^{-\alpha^2}}{\alpha}\right)\right\}=\frac{3}{2\alpha}e^{-\alpha^{\frac{3}{2}}}-\frac{2}{\alpha}e^{-\alpha^2} \qquad (7)$$

Example

Differentiate the following integral with respect to the parameter α, $I=\int_{\alpha}^{\alpha^4}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\alpha}\right)dx$

Solution

بإتباع الإستراتيجية السابقة متبعين الخطوات أولا بأول كالآتي:

- إيجاد التفاضل الجزئي $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$

$$f(x,\alpha)=\tan^{-1}\left(\frac{x}{\alpha}\right)\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial \alpha}=\frac{-x}{\alpha^2\left(1+\frac{x^2}{\alpha^2}\right)} \quad (1)$$

- بالتعويض في الدالة f مرة عن كل x بالدالة $u_2(\alpha)$ ومرة أخرى بالدالة $u_1(\alpha)$

$$f(u_2(\alpha),\alpha)=\tan^{-1}(1) \quad (2)$$

$$f(u_1(\alpha),\alpha)=\tan^{-1}(\alpha^3) \quad (3)$$

- أيجاد تفاضلات كلا من الحد الأدنى والحد الأعلى للتكامل بالنسبة إلى α

$$\frac{du_1(\alpha)}{d\alpha}=1 \quad (4)$$

$$\frac{du_2(\alpha)}{d\alpha}=4\alpha^3 \quad (5)$$

- بالتعويض بالنتائج السابقة في علاقة لايبنتز

$$\frac{\mathrm{dI}(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}=\int_{\alpha}^{\alpha^4}\left(\frac{-x}{x^2+\alpha^2}\right)dx+\left\{4\alpha^3\tan^{-1}(\alpha^3)-\tan^{-1}(1)\right\} \quad (6)$$

والآن بحساب التكامل الوحيد في المعادلة (6) نحصل على الناتج الأخير كالآتي:

حساب المساحات في الإحداثيات الكرتيزية

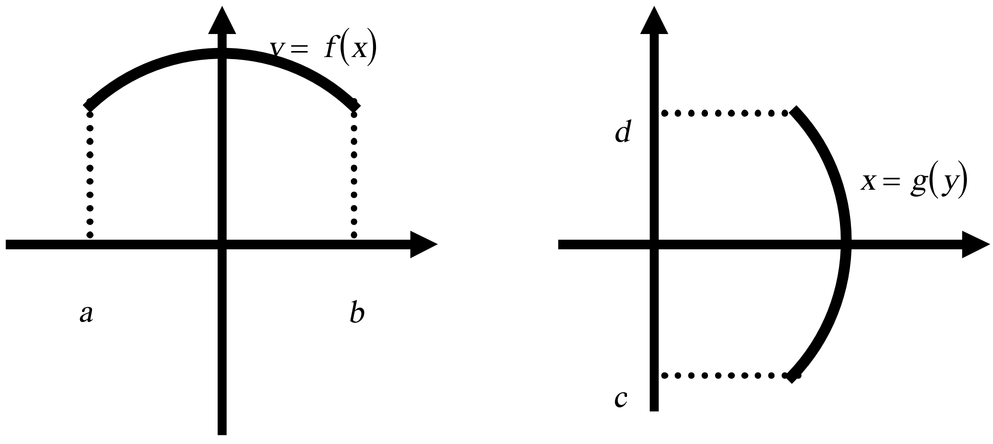
Areas in Rectangular Coordinates

عندما نتحدث عن التطبيق المألوف للعامة فنتذكر مباشرة المساحات وأسهل هذه المساحات الموجودة في الإحداثيات الكرتيزية Cartesian coordinates وفيما يلي سوف نقوم بعرض سريع من خلال الأشكال التالية عند حساب المساحات في المستويات الكرتيزية.

أنواع المساحات

النوع الأول المساحة المحصورة بين خط أو منحنى وبين أحد المحاور

المساحة تحت منحنى الدالة $y = f(x)$ وهذه المساحة إما أن تكون محصورة بين الدالة والمحور الأفقي x أو بين الدالة وبين المحور الرأسي y كما هو موضح في الشكلين التاليين.

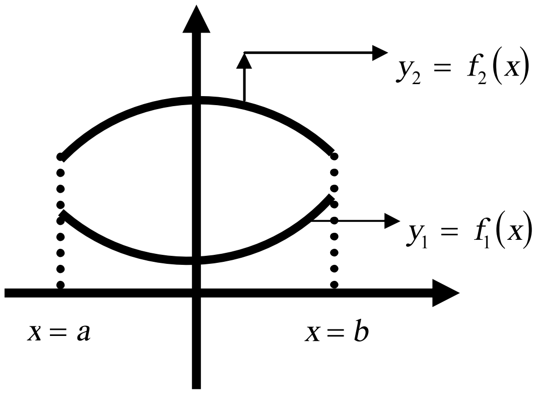


$$I = \int_{x=a}^{x=b} f(x)dx \qquad I = \int_{y=c}^{x=d} g(y)dy$$

Figure 7: Area under x & y axes

النوع الثاني المساحة المحصورة بين خطين أو منحنيين

ذا النوع كما واضح من عنوانه أن المساحة تكون محصورة منحنيين أيا كانت درجة المنحنى في اتجاه أحد المحاور وقبل الخوض في التفاصيل الدقيقة هذه الحالة موضحه بالشكلين التاليين.



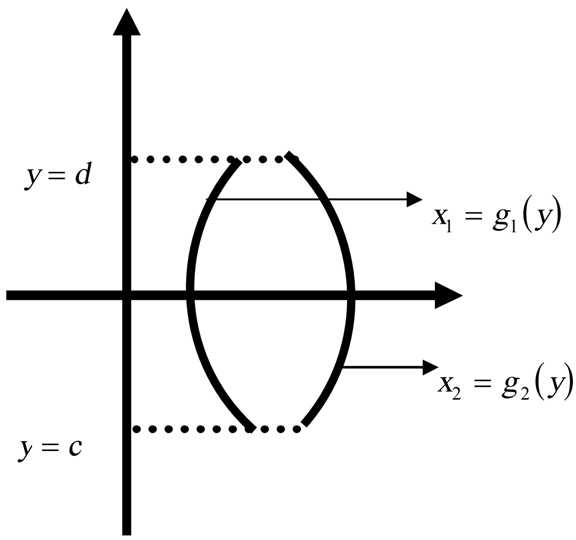


Figure 8: Areas between two curves

هناك إجراءات وتعليمات يجب إتباعها عند حساب المساحات يمكننا سردها على النحو التالي:

(1) يجب رسم منطقة التكامل Region of integration.

(2) تحديد اتجاه التكامل بمعنى هل سيتم حساب التكامل في اتجاه المحور x أم في اتجاه المحور y

(3) تحديد حدود التكامل مع الأخذ في الاعتبار اتجاه التكامل

الأمثلة التوضيحية التالية تبين كيفية حساب المساحات في المحاور الكرتيزية.

Example

Find the area of the region bounded by, the parabola $y = x^2 + 1$, the vertical lines $x = -1$ and $x = 3$ and the horizontal x-axis

Solution

إتباعا للقواعد والإجراءات السابقة عند حساب مساحة منطقة في المحاور الكرتيزية يتطلب الأمر أولا وقبل كل شيء رسم منطقة التكامل من خلال المعادلات المعطاة في المسألة وهى كالآتي:

Parabola: $y = x^2 + 1$

Vertical lines: $x = -1$ & $x = 3$

The x-axis

منطقة التكامل موضحة بالشكل التالي:

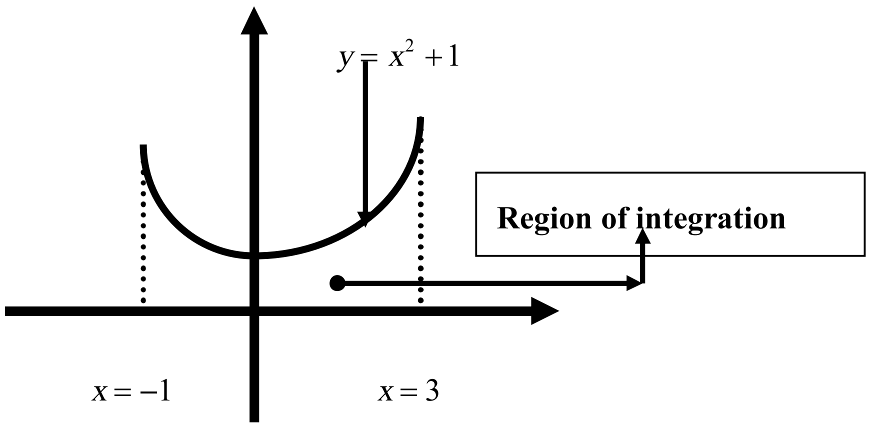


Figure 9: Region of integration

بعد رسم منطقة التكامل اتضح من الرسم أننا سوف نكامل في اتجاه المحور الأفقي وذلك لأن هذا المحور هو بالفعل أحد حدود منطقة التكامل. الخطوة التالية هو كتابة العلاقة العامة للتكامل مع أخذ حدود التكامل في الاعتبار كالآتي:

$$A = \int_{x=-1}^{x=3} f(x)dx = \int_{x=-1}^{x=3} (x^2 + 1)dx = \frac{32}{3}$$

Example

Evaluate the area bounded by the parabola $x = y - y^2$ and the vertical y-axis

Solution

قبل البدء سواء في رسم منطقة التكامل أو حساب التكامل لابد أن نتعامل رياضيا

مع معادلة القطع المكافئ Parabola بحيث نعيد صياغتها في الشكل المألوف وبالتالي يمكننا رسم منطقة التكامل بسهولة.

التعامل الرياضي مع معادلة القطع المكافئ هو إجراء عملية إكمال المربع في الطرف الذي يحتوى على المتغير y وذلك لوجوده مره من الدرجة الأولى ومرة أخرى من الدرجة الثانية كالآتي:

$$\begin{aligned} x &= y - y^2 \\ x &= -\left(y^2 - y\right) \\ x &= -\left(\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right) \end{aligned} \qquad (1)$$

شكل معادلة القطع المكافئ الأخيرة تصبح على النحو التالي:

$$x - \frac{1}{4} = -\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \qquad (2)$$

من المعادلة (2) يمكننا استنتاج المعلومات التالية والخاصة بالقطع المكافئ:

- رأس القطع المكافئ Vertex هي $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$
- التماثل حول المحور x
- فتحة القطع المكافئ ناحية اليسار

واضح من الشكل أن القطع المكافئ يتقاطع مع المحور الرأسي y وعليه يجب تحديد هذه النقط من خلال وضع x مساوية للصفر في معادلته فينتج عن ذلك الآتي:

$$y - y^2 = 0 \Rightarrow y = 0 \;\&\; y = 1 \qquad (3)$$

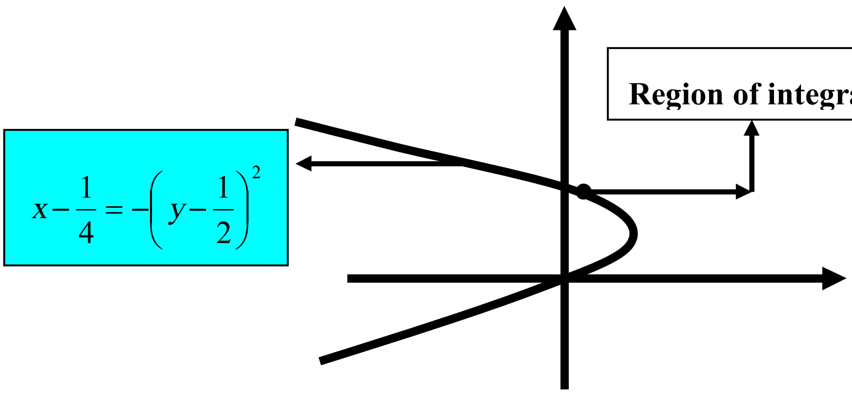


Figure 10

واضح من شكل منطقة التكامل أن الأسلوب الأفضل لإجراء التكامل هو التكامل في اتجاه المحور الرأسي y ولنبدأ التكامل بكتابة العلاقة العامة التي تستخدم في ذلك على الصورة التالية:

$$A=\int_{y=c}^{y=d} g(y)\,\mathrm{dy}=\int_{y=0}^{y=1}(y-y^2)\,dy=\frac{1}{6}$$

Example

Find the area between the curve $y=x^3-5x^2+6x$ and the x-axis

Solution

مازلنا بصدد حساب مساحة محصورة بين منحنى معطى وأحد المحاور الرئيسية وإتباعا للأسلوب السابق ذكره سوف نبدأ الحل برسم منطقة التكامل كما هي موضحة في الشكل التالي. وكما هو واضح من الشكل أن المنحنى المعطى يتقاطع مع المحور الأفقي في ثلاثة نقط يتم إيجادها من خلال مساواة المتغير y بالصفر فينتج عن ذلك الآتي:

$$x^3 - 5x^2 + 6x = 0$$
$$\Rightarrow$$
$$x(x^2 - 5x + 6) = x(x-3)(x-2) = 0 \qquad (1)$$
$$\Rightarrow$$
$$x = 0 \;\&\; x = 2 \;\&\; x = 3$$

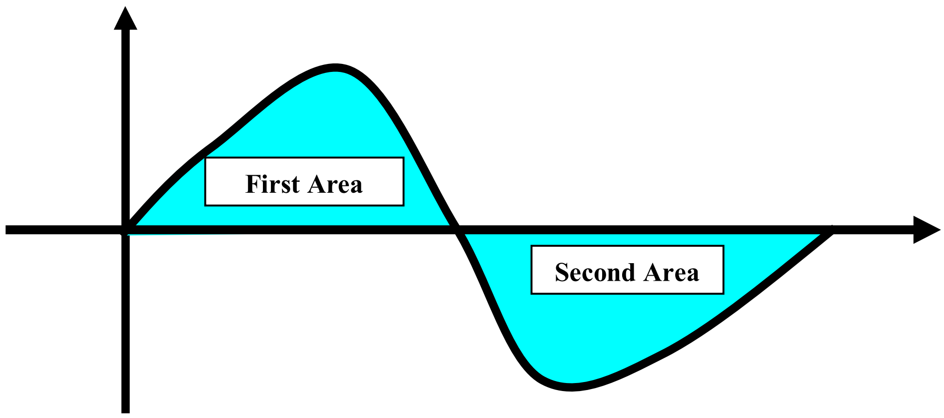


Figure 11

كما هو واضح من الرسم أننا خرجنا بنتيجتين:

(1) أننا سوف نجرى التكامل في اتجاه المحور الافقى

(2) أننا مضطرين لتقسيم منطقة التكامل إلى جزئين

والآن نكتب العلاقة التي من خلالها نبدأ بحساب التكامل:

$$\text{First Area} = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 (x^3 - 5x^2 + 6x)dx = \frac{8}{3} \qquad (2)$$

$$\text{Second Area} = \int_2^3 f(x)dx = \int_2^3 (x^3 - 5x^2 + 6x)dx = \left|\frac{-5}{12}\right| = \frac{5}{12} \qquad (3)$$

والآن بجمع المساحتين نحصل على المساحة المطلوبة كالآتي:

$$\text{Total Area} = \text{First Area} + \text{Second} = \frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{37}{12} \qquad (4)$$

في الأمثلة السابقة تعرضنا بشيء من التفصيل للتعامل مع المساحات المحصورة بين منحنى معطى معادلته وأي من المحاور سواء الأفقي أو الرأسي وفيما سوف نبدأ بعرض النوع الثاني من المساحات وهى المساحات المحصورة بين منحنيين واتجاه التكامل إما في اتجاه المحور الأفقي أو في اتجاه المحور الرأسي.

Example

Find the area bounded by the parabola $y^2 = 4x$ and the line $y - 2x + 4 = 0$

Solution

في هذا المثال مطلوب إيجاد المساحة المحصورة بين قطع مكافئ Parabola وخط مستقيم Straight line. وفى البداية يجب رسم منطقة التكامل وهى موضحه في الشكل التالي:

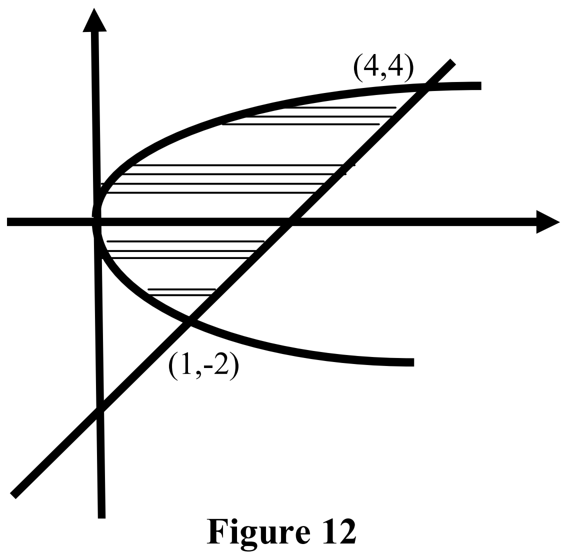


Figure 12

كما هو واضح من الرسم أن هناك تقاطع بين الخط المستقيم والقطع المكافئ ويجب علينا قبل البدء في حساب التكامل أن نوجد نقط التقاطع لأنها ذات قيمة وأهمية عند حساب التكامل. والآن لإيجاد نقط التقاطع Points of intersections نحل معادلتي الخط المستقيم والقطع المكافئ مع بعضهما كالآتي:

$$y^2 = 4x \Rightarrow x = \frac{1}{4}y^2 \qquad (1)$$

&

$$y - 2x + 4 = 0 \qquad (2)$$

بالتعويض من (1) في (2) نحصل على النقطتين التاليتين:

Points of Intersections are: $(1,-2)\,\&\,(4,4)$

واضح من الرسم أن المساحة المطلوبة كالآتي:

- المساحة المحصورة بين الخط والقطع المكافئ في اتجاه y

(1) معادلة القطع المكافئ $x = g_1(y) = \frac{1}{4}y^2$

(2) معادلة الخط المستقيم $x = g_2(y) = \frac{1}{2}y + 2$

(3) حدود التكامل في الاتجاه الرأسي $c = -2\ \&\ d = 4$

والآن كل شيء أصبح مهيئا لحساب التكامل كالآتي:

$$A = \int_{y=c}^{y=d} [g_2(y) - g_1(y)]\,dy \qquad (3)$$

بالتعويض في المعادلة (3) بالمعلومات السابقة للتكامل فنحصل على الآتي:

$$\text{Upper area} = \int_{-2}^{4} \left[\left(\frac{y}{2} + 2\right) - \frac{1}{4}y^2\right] dy = 9$$

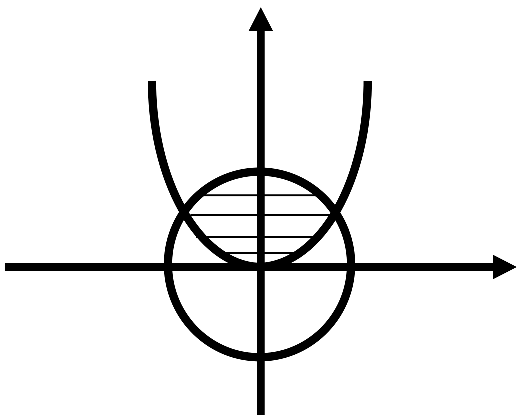
Example

Find the smallest possible area due to intersection between the circle $x^2 + y^2 = 16$ and the parabola $y = \frac{1}{6}x^2$

Solution

كما تعودنا يجب قبل البدء في الحل لابد من رسم منطقة التكامل حتى يمكننا تحديد المنطقة المشار إليها في المسألة ورسم المنطقة موضح في الشكل التالي. أضف إلى هذا يجب إيجاد نقط التقاطع وكما تم ذلك من قبل يأتي من خلال حل معادلة الدائرة مع معادلة القطع المكافئ ونتيجة ذلك النقاط كالآتي:

Figure 13



Points of Intersections are $\left(\sqrt{12}, 2\right)$ & $\left(-\sqrt{12}, 2\right)$

بعد تجهيز كل البيانات التي تستخدم في حساب المساحة المطلوبة يتبقى لنا كتابة العلاقة العامة مع مراعاة الاتجاه الذي سوف نكامل فيه لأن ذلك هام في أمور كثيرة

أشرنا عليها سابقا. نقطة هامة أخرى ألا وهى من خلال الرسم واضح أن هناك تماثل حول المحور الرأسي وبالتالي هذا يفيد في أن نستفيد من ذلك في إجراء التكامل في الاتجاه الأيمن للمحور الرأسي وضرب الناتج في الضعف ورياضيا المساحة كالآتي:

$$A = \int_{-\sqrt{12}}^{\sqrt{12}} \left[\sqrt{16 - x^2} - \frac{1}{6}x^2 \right] dx = 2\int_{0}^{\sqrt{12}} \left[\sqrt{16 - x^2} - \frac{1}{6}x^2 \right] dx$$

Example

Find the area between the curves $y = \sec^2 x$ and $y = \sin x$ from $x = 0$ to $x = \frac{\pi}{4}$

Solution

بداية نرسم منطقة التكامل

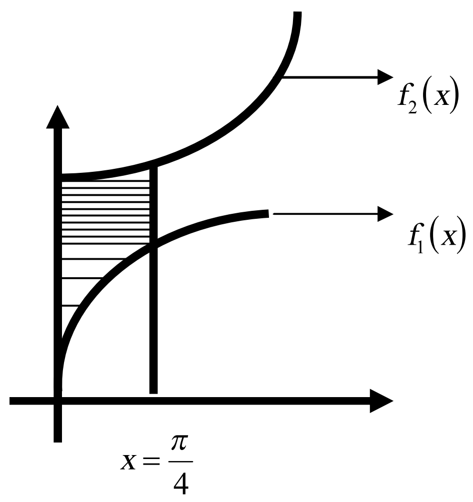


Figure 14

كما هو واضح من الشكل أن المساحة هي المنطقة المظللة في الفترة الموضحة وعليه سوف يكون التكامل في اتجاه المحور الأفقي كما يلي:

$$\text{Area} = \int_a^b \left(f_1(x) - f_2(x) \right) dx \qquad (1)$$

$$\text{Area} = \int_{a=0}^{b=\frac{\pi}{4}} \left(\sec^2 x - \sin x\right) dx = \left(\tan x + \cos x\right)_0^{\frac{\pi}{4}} = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - (0+1) = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad (2)$$

Example

Find the area between the curves $y = 4 - x^2$ and the line $y = -x + 2$ from $x = -2$ to $x = 3$

Solution

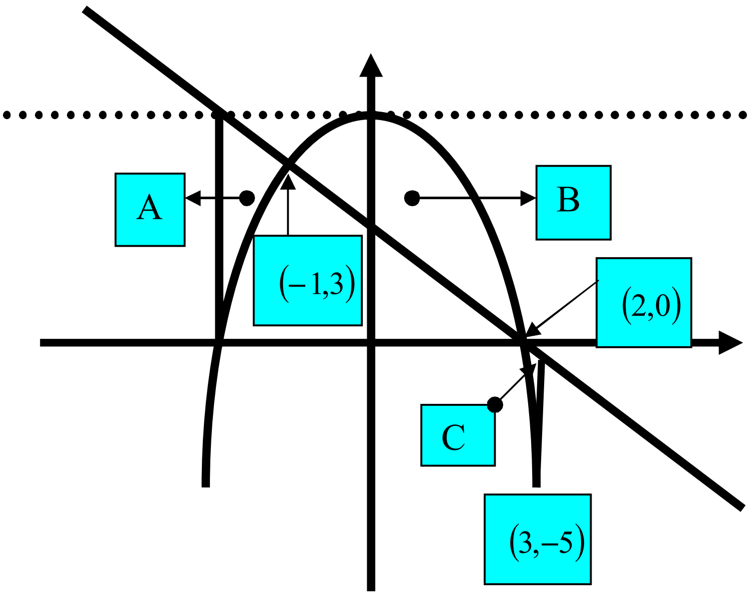


Figure 15

ولنبدأ الآن بحساب المساحات الموضحة بالرسم

التكامل على المنطقة A

هذه المساحة محصورة بين كل من:

- الخط المستقيم $y = 2 - x$
- القطع المكافئ $y = 4 - x^2$
- الخط الرأسي $x = -2$

$$\text{Area} = \underbrace{\int_{a=-2}^{b=-1} \left([-x+2] - [4 - x^2] \right) dx}_{\text{Area of } A} = \frac{11}{6} \qquad (1)$$

التكامل على المنطقة B

$$\text{Area} = \underbrace{\int_{a=-1}^{b=2} \left([4 - x^2] - [-x+2] \right) dx}_{\text{Area of } B} = \frac{27}{6} \qquad (2)$$

التكامل على المنطقة C

$$\text{Area} = \underbrace{\int_{a=2}^{b=3} \left([-x+2] - [4 - x^2] \right) dx}_{\text{Area of } C} = \frac{11}{6} \qquad (3)$$

بجمع المعادلات (1) ، (2) ، (3) نحصل على المساحة الكلية المطلوبة وهى كالآتي:

$$\text{Total Area} = \frac{11}{6} + \frac{27}{6} + \frac{11}{6} = \frac{49}{6} \qquad (4)$$

المساحات البارامترية Areas in Parametric Form

عندما نتكلم عن أي شكل بارامیترى Parametric فإننا نقصد بذلك معادلة ذلك الشكل بدلالة متغيرt وعادة عندما نتعامل مع الشكل البارامیترى Parametric عندما يكون من الصعب التعامل مع الشكل الكرتيزى Cartesian على سبيل المثال هناك مجموعة منحنيات ذات شكل وطابع خاص سواء في شكلها العام أو عند التعامل معها مثل:

- منحنى النجمة Astroid
- منحنى القلب Cardoid
- منحنى الدوار Cycloid
- منحنى الفيونكه Lemniscate
- منحنى حلزون أرشميدس Arichmides

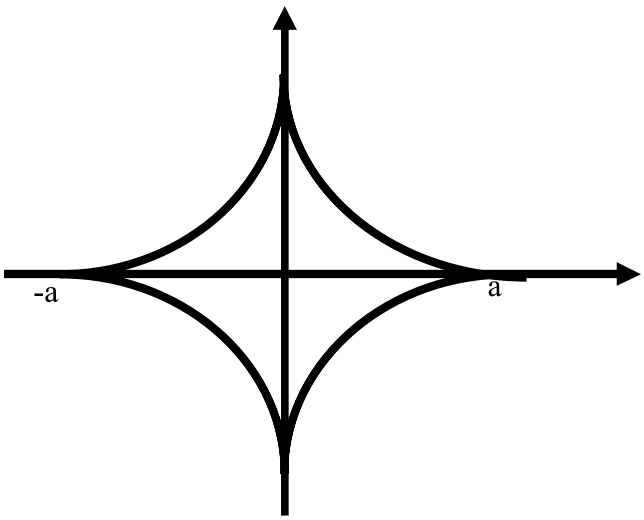


Figure 16: Astroid

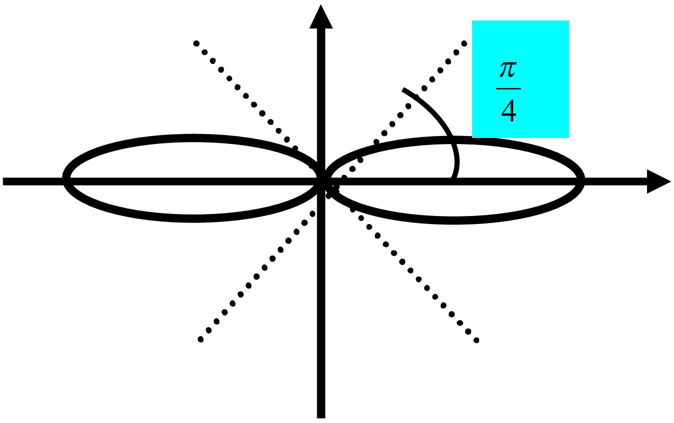


Figure 17: Lemniscate

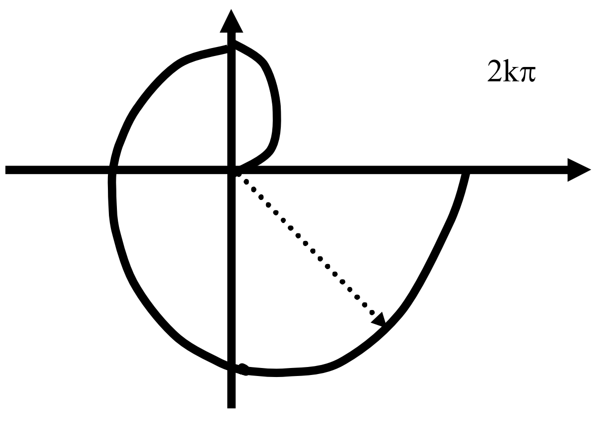


Figure 18: Arichmides Spiral

الأحجام الدورانية Volumes of Revolution

لنفرض أن لدينا منحنى في المستوى xy يبدأ من $x = a$ وينتهي عند $x = b$ ثم قمنا بدوران هذا المستوى دورة كاملة مرة حول المحور x ومرة أخرى حول المحور y ولننظر في الشكلين التاليين نتيجة الدوران ونرى:

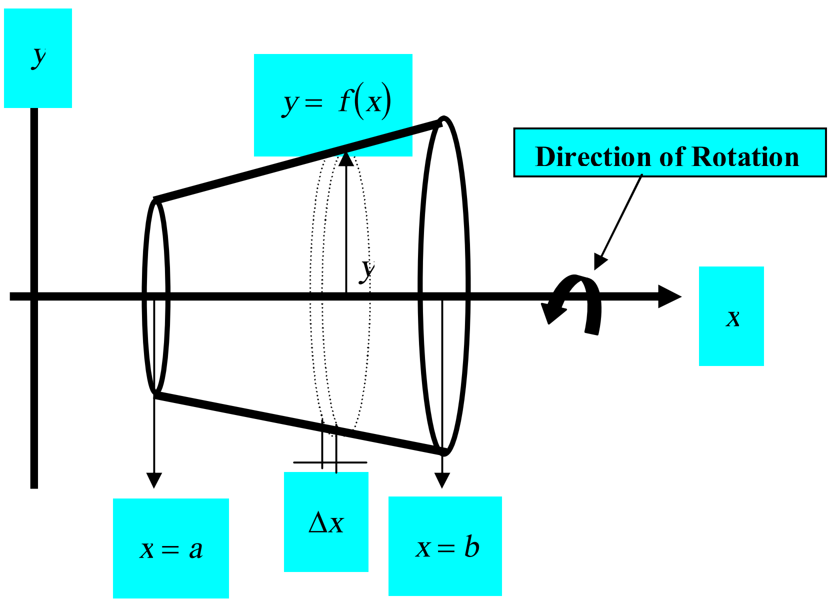


Figure 19: Solid of revolution about x-axis

قبل الدخول بالتفصيل في طرق حساب الأحجام الدورانية لنحاول بالاستعانة بالشكل السابق نحاول إيجاد الحجم الناتج من المعادلة $y = f(x)$ حول المحور الأفقي.

لنأخذ شريحة عمودية على محور الدوران ارتفاعها y وعرضها Δx مع مراعاة أن هذه الشريحة عبارة عن قرص دائري Circular Disk معنى هذا أن الارتفاع هو نصف قطر هذا القرص الدائري.

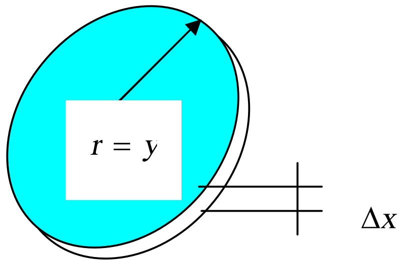


Figure 20

حجم القرص = مساحة قاعدته الدائرية x عرضه = $\pi \quad y^2 \times \Delta x$

والآن ماذا لو تم تقسيم الحجم الدوراني إلى شرائح مماثلة ذات عرض ثابت وتم تجميع هذه الشرائح ثم أخذنا النهاية لهذا المجموع عندما Δx عندما تؤول إلى الصفر فنحصل على الحجم المطلوب ويمكننا ترجمة هذا الكلام إلى الصيغة الرياضية التالية:

$$\text{Volume of one strip} = \pi \quad y^2(x)\Delta x \tag{1}$$

$$\text{Total volume of solid of revolution} = \sum_{i=1}^{\infty} \pi \quad y_i^2(x_i)\Delta x_i$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{\infty} \pi \quad y_i^2(x_i)\Delta x_i = \int_{x=a}^{x=b} \pi \quad y^2(x)dx \tag{2}$$

والآن نود الإشارة إلى أننا سوف نتكلم بشيء من التفصيل أن هناك ثلاثة طرق لحساب الأحجام الدورانية وهى كالآتي:

- طريقة القرص الدائري (CDM) Circular Disk Method
- طريقة الوردة الدائرية (CWM) Circular Washer Method
- طريقة القشرة الدائرية (SDM) Shell Disk Method

ملاحظات هامة

هناك ملحوظة هامة في مسمى الطرق الثلاثة وهى كلمة دائري أو دائرية وهذا شيء طبيعي جدا حيث أننا نتعامل مع حجوم دورانية وبالتالي المقطع لأي جزئية ينتج عنها شكل دائري.

ملحوظة أخرى من الممكن أن تكون سابقة لأوانها وهى أن ليست كل طريقة منفصلة تصلح لجميع الأشكال الدورانية وهذا سوف يتضح عند التعامل مع كل طريقة على حده.

والآن لنبدأ بالطريقة الأولى وهى طريقة القرص الدائري Circular Disk Method (CDM) ولنبدأ الطريقة بالسؤال الذي سوف يراود عقلية القارئ **كيف نعرف أننا مضطرين لاستخدام هذه الطريقة؟**

والإجابة تكمن في أنه إذا كان الجسم الناتج من الدوران مصمت Solid فإن هذه الطريقة هي التي سوف نتعامل معها.

سؤال آخر: **كيف ينتج الجسم المصمت؟**

والإجابة: دوران مساحة مستوية حول أحد المحاور

والآن وبعد هذا العرض النظري والمقدمة نود أن نلفت نظر القارئ إلى أن المعادلة (2) والمستنتجة نتيجة دوران مساحة مستوية حول المحور الأفقي هي ببساطة طريقة القرص الدائري Circular Disk Method.

طريقة القرص الدائري Circular Disk Method

علاقات ذات صلة بالطريقة:

- **حجم الجسم الناتج عن دوران مساحة مستوية حول المحور الأفقي كالآتي:**

$$\text{Total volume of solid of revolution about x-axis} = \int_{x=a}^{x=b} \pi \quad y^2(x)dx \qquad (3)$$

- **حجم الجسم الناتج عن دوران مساحة مستوية حول المحور الرأسي كالآتي:**

$$\text{Total volume of solid of revolution about y-axis} = \int_{y=c}^{y=d} \pi \quad x^2(y)dy \qquad (3)$$

Example

The region between $y = \sqrt{x}, 0 \le x \le 4$ and the x-axis is revolved about the horizontal x-axis. Find the volume of the resulted solid.

Solution

خطوات الحل

- رسم منطقة التكامل من خلال المنحنيات المعطاة
- تحديد محور الدوران من خلال المسألة
- تحديد الطريقة التي سوف تستخدم في حساب الحجم الناتج عن الدوران

والآن لنبدأ في تنفيذ هذه الخطوات.

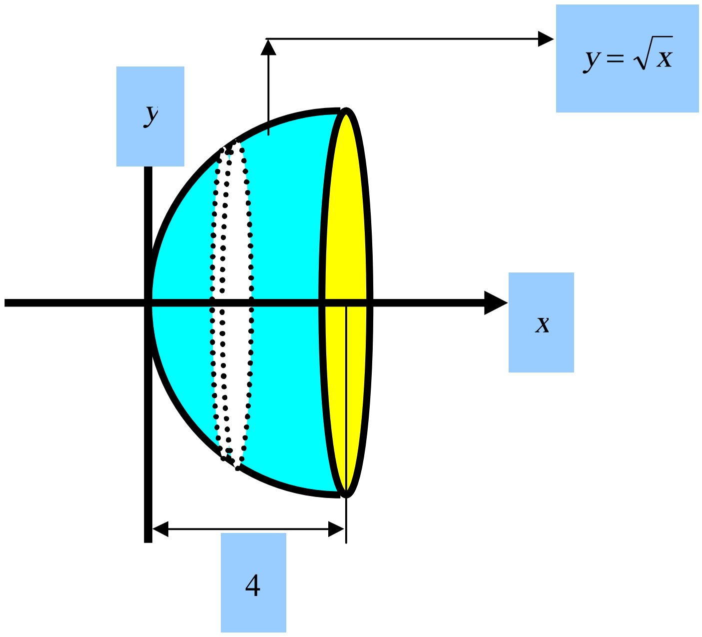


Figure 21

واضح من الشكل أن الحجم الناتج من دوران مساحة مصمتة Solid حول المحور الأفقي حجم مصمت Solid volume of revolution وعليه سوف نستخدم طريقة القرص الدائري لإيجاد حجمه.

$$\text{Total volume of solid of revolution about x-axis} = \int_{x=a}^{x=b} \pi \; y^2(x)dx \qquad (1)$$

Total volume of solid of revolution about x-axis =

$$= \int_{x=0}^{x=4} \pi \; \left(\sqrt{x}\right)^2 dx = 8\pi \qquad (2)$$

Example

Find the volume generated by revolving the area bounded by $y = \sin x, 0 \le x \le \pi$ about the horizontal x-axis.

Solution

برسم منطقة التكامل أولا للأسباب السابق ذكرها ينتج الشكل التالي:

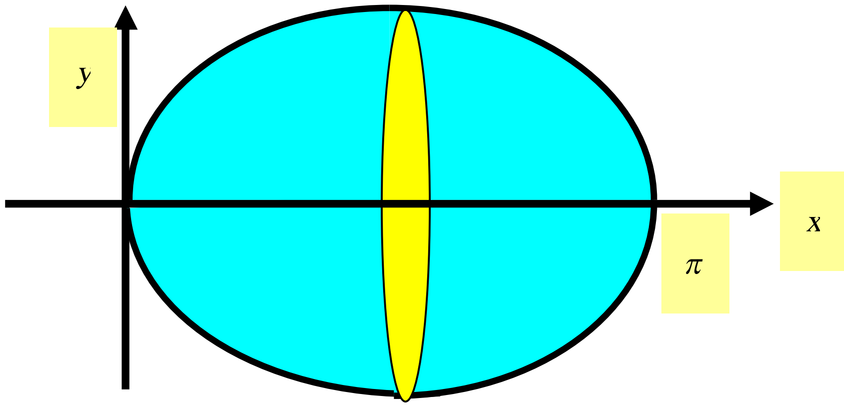


Figure 22

بما أن الدوران حول المحور الأفقي x فعليه سوف نستخدم العلاقة الخاصة بذلك لإيجاد الحجم المصمت الناتج عن الدوران كالآتي:

$$v = \pi \int_0^{\pi} y^2 dx = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \frac{\pi^2}{2}$$

Circular Washer Method طريقة الوردة الدائرية

سؤال يفرض نفسه منذ اللحظة الأولى عند التعامل مع أي طريقة هو **متى نستخدم هذه الطريقة في حساب الأحجام الناتجة عن الدوران؟**

كما عودنا القارئ وتماشيا مع إستراتيجية الموسوعة بأجزائها المختلفة هو أن يكون للموضوع سبب مقنع في عرضه وبالتالي عندما نتحدث عن طريقة الوردة Washer فمن المؤكد أن هناك سببا وراء ذلك.

يلاحظ القارئ عند التعامل مع طريقة القرص الدائري Circular Disk Method أن في كل المسائل أن محور الدوران كان أحد حدود المنطقة التي تدور **لكن ماذا يحدث لو لم يكن محور الدوران أحد هذه المنطقة؟**

الإجابة هي أننا في هذه الحالة مضطرين لاستخدام طريقة بديلة ألا وهى الطريقة التي نحن بصددها الآن وهى طريقة الوردة الدائرية.

وفيما يلي سوف ندرس احتمالات الدوران المختلفة بمعنى أوضح حالة ما إذا كان المحور الأفقي x-axis هو محور الدوران وحالة أخرى عندما يكون المحور y-axis هو محور الدوران ولنرى ماذا سوف يحدث من خلال الأشكال الدورانية التي تساعد القارئ في فهم الموضوع.

الحالة الأولى: المحور الأفقي هو محور الدوران

لنفرض أن لدينا منحنيين $f(x) \& g(x)$ في المستوى xy وأنهما يحصران بينهما مساحة في المستوى. فإذا دارت هذه المساحة حول المحور الأفقي x وبفرض أننا أخذنا شريحة متعامدة على محور الدوران بثمك (Δx).

بالنظر إلى الشريحة المأخوذة في اتجاه المحور الأفقي نجد أننا أمام قرص مجوف Hollow Disk دائرته الداخلية هي الدالة $g(x)$ والخارجية منها هي $f(x)$ والآن لنستنتج حجم هذا القرص المجوف الذي يشبه الوردة التي توضع قبل المسمار في الأجزاء الميكانيكية ومعادلة الحجم الدوراني الناتج باستخدام طريقة الوردة كالآتي:

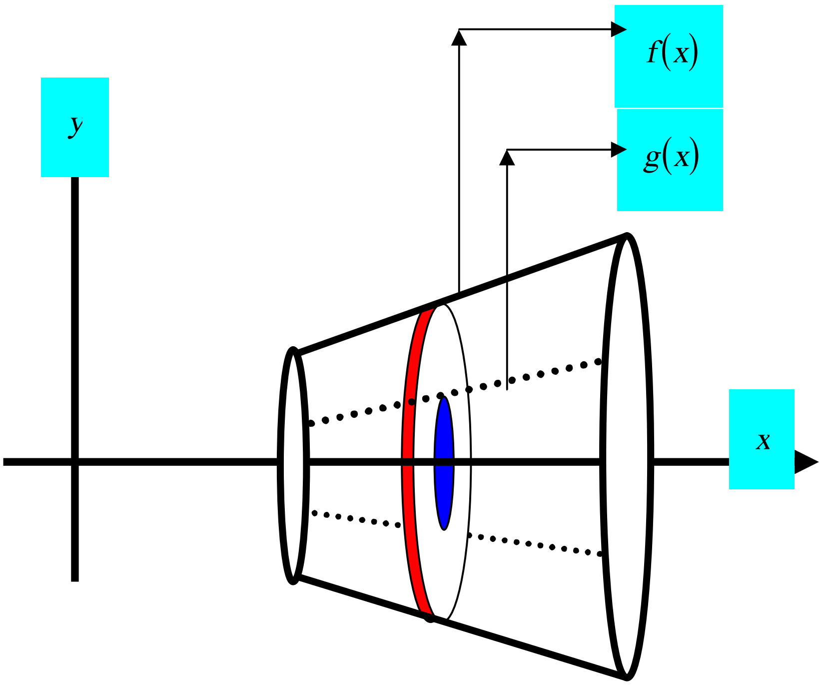


Figure 23

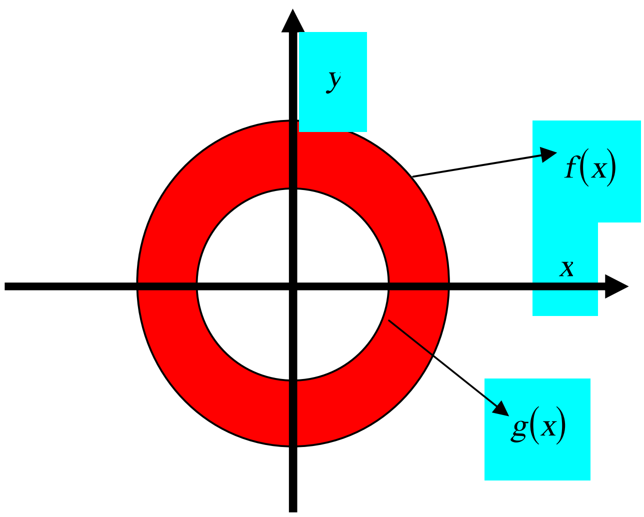


Figure 24

الحالة الأولى من الدوران

معادلة الحجم الدوراني الناتج من دوران المساحة حول المحور الأفقي

$$v = \pi \int_{x=a}^{x=b} \left[(f(x))^2 - (g(x))^2 \right] dx \tag{1}$$

الحالة الثانية من الدوران

معادلة الحجم الدوراني الناتج من دوران المساحة حول المحور الأفقي

$$v = \pi \int_{y=c}^{y=d} \left[(f(y))^2 - (g(y))^2 \right] dy \tag{2}$$

Example

Find the volume generated by revolving the area bounded by $y = x^2$, $y = 4x - x^2$ & $y = 6$ about vertical axis $y = 6$

Solution

بداية نلاحظ أن محور الدوران يوازى المحور الأفقي ويبعد عنه بمقدار 6 وحدات. والآن وكما هو متبع بشكل عام في مسائل تطبيقات التكامل لابد من رسم منطقة التكامل ثم تدويرها حول المحور المحدد لذلك ثم ننظر إلى الشكل الناتج من الدوران لتحديد الطريقة المثلى لحساب الحجم الناتج من الدوران. من خلال الشكل الناتج من الدوران نجد أننا لدينا مجسمين مختلفي الشكل كالآتي:

First Strip volume $= \pi(6 - x^2)^2\ \Delta x$ In $0 \le x \le 2$ (1)

Second Strip volume $= \pi(6 - (4x - x^2))^2\ \Delta x$ In $2 \le x \le 4$ (2)

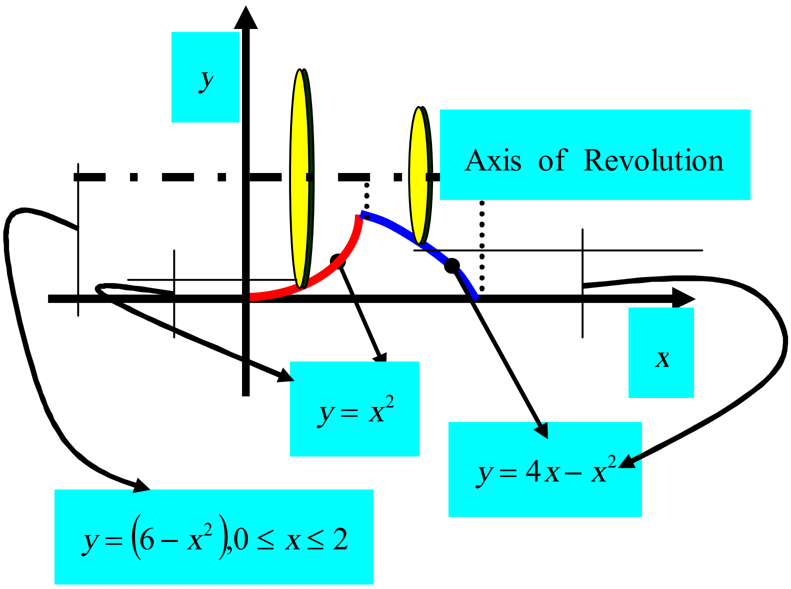


Figure 25

والآن بحساب الحجم الناتج من الدوران للمجسمين كالآتي:

$$\text{Total volume} = \pi\left\{\int_{x=0}^{x=2}\left(6-x^2\right)^2dx+\int_{x=2}^{x=4}\left(6-\left(4x-x^2\right)\right)^2dx\right\} \tag{3}$$

$$\text{Total volume} = \pi\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_{x=0}^{x=2}\left(x^4-12x^2+36\right)dx\\ \displaystyle+\int_{x=2}^{x=4}\left(x^4-8x^3+28x^2-48x+36\right)dx\end{array}\right\} \tag{4}$$

بإجراء التكاملات في المعادلة (4) نحصل على الآتي:

$$\text{Total volume} = \pi\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\left(\frac{x^5}{5}-4x^3+36x\right)_{x=0}^{x=2}\\ \displaystyle+\left(\frac{x^5}{5}-2x^4+\frac{28}{3}x^3-24x^2+36x\right)_{x=2}^{x=4}\end{array}\right\} \tag{5}$$

طريقة القشرة الدائرية Circular Shell Method

تتطلب هذه الطريقة أسلوب خاص في معالجتها حيث أنها تختلف عن الطريقتين السابقتين من حيث طريقة الدوران والمعالجة الرياضية التي تقابل كل حالة بالنسبة لمحور الدوران. ولكي نتفهم الطريقة هذه بشكل مناسب لنتعامل مع حالتيها العامتين كلا على حده بطريقة تفصيلية حتى يتسنى استيعاب كل جزء فيها.

الحالة الأولى: الدوران حول المحور الرأسي

في هذه الحالة نأخذ شريحة عمودية على المحور الأفقي عرضها Δx وتبعد عن المحور الرأسي مسافة أفقية مقدارها x ثم يتم تدوير هذه الشريحة حول المحور الرأسي فنحصل على أسطوانة قائمة راسمها موازى للمحور الرأسي وعمودي على المحور الأخر. وعلى هذا فإن الحجم الناتج عن دوران هذه الشريحة حول المحور الرأسي y يمكن حسابه من العلاقة التالية:

$$V = 2\pi \int_{x=a}^{x=b} xf(x)dx \qquad (1)$$

الحالة الثانية: الدوران حول المحور الأفقي

في هذه الحالة نأخذ شريحة عمودية على المحور الرأسي عرضها Δy وتبعد عن المحور الأفقي مسافة رأسية مقدارها y ثم يتم تدوير هذه الشريحة حول المحور الأفقي فنحصل على أسطوانة قائمة راسمها موازى للمحور الأفقي وعمودي على المحور الأخر. وعلى هذا فإن الحجم الناتج عن دوران هذه الشريحة حول المحور الرأسي y يمكن حسابه من العلاقة التالية:

$$V = 2\pi \int_{y=c}^{y=d} yg(y)dy \qquad (2)$$

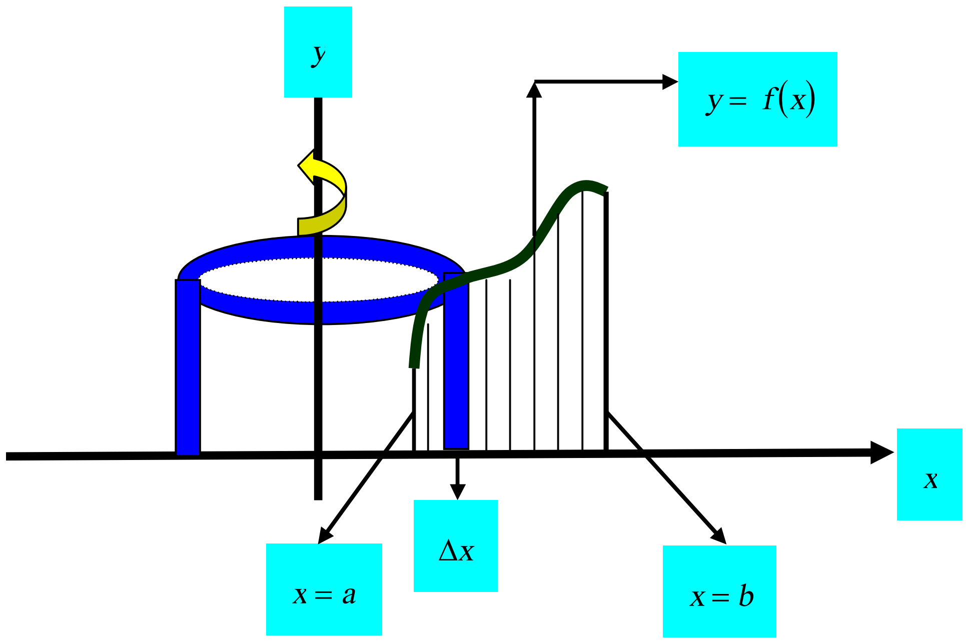


Figure 26: Revolution about y-axis

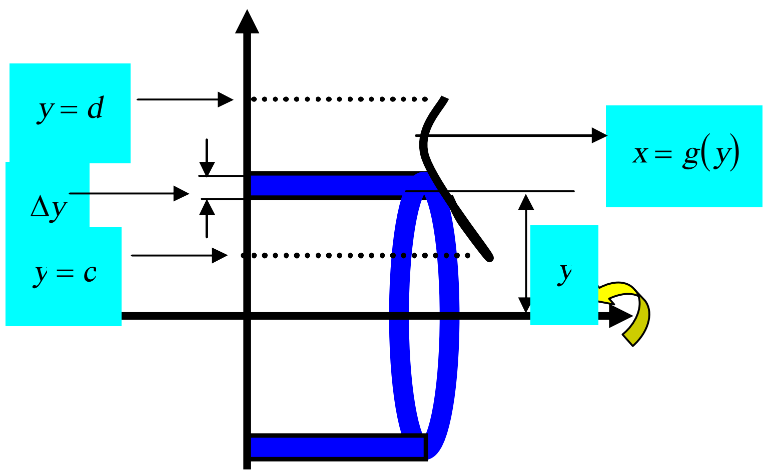


Figure 27: Revolution about x-axis

Example

Find the volume generated by revolving the area bounded by $y = 2x^2$, $x-axis$, $y-axis$ & $x = 5$ about vertical axis $x = 6$

Solution

في البداية نرسم منطقة التكامل قبل الدوران من خلال مجموعة المنحنيات المعطاة كما هي موضحه بالشكل. حيث أن الدوران حول المحور الرأسي فسوف نأخذ الشريحة موازية للمحور الرأسي وعليه سوف نطبق العلاقة الخاصة بذلك:

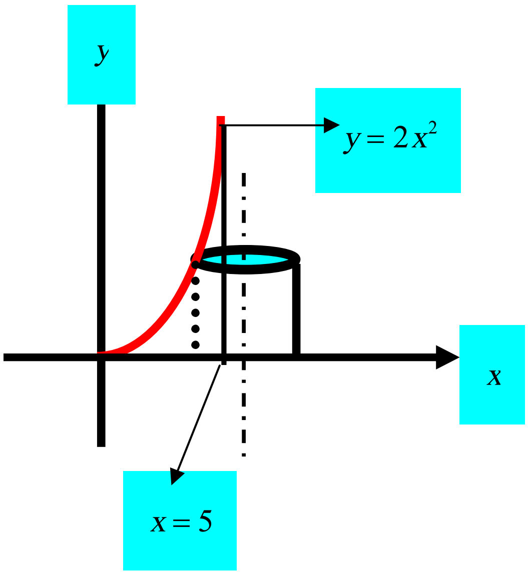


Figure 28

$$v = 2\pi \int_{x=0}^{x=5} (6-x)(2x^2)dx = 2\pi \int_{x=0}^{x=5} (6x^2 - x^3)dx = 375\pi$$

Example

Find the volume generated by revolving the area bounded by $y=\left(x+\frac{4}{x}\right), x-axis, x=1, x=3$ about the vertical y-axis

Solution

في البداية نرسم منطقة التكامل قبل الدوران من خلال مجموعة المنحنيات المعطاة كما هي موضحه بالشكل. حيث أن الدوران حول المحور الرأسي فسوف نأخذ الشريحة موازية للمحور الرأسي وعليه سوف نطبق العلاقة الخاصة بذلك:

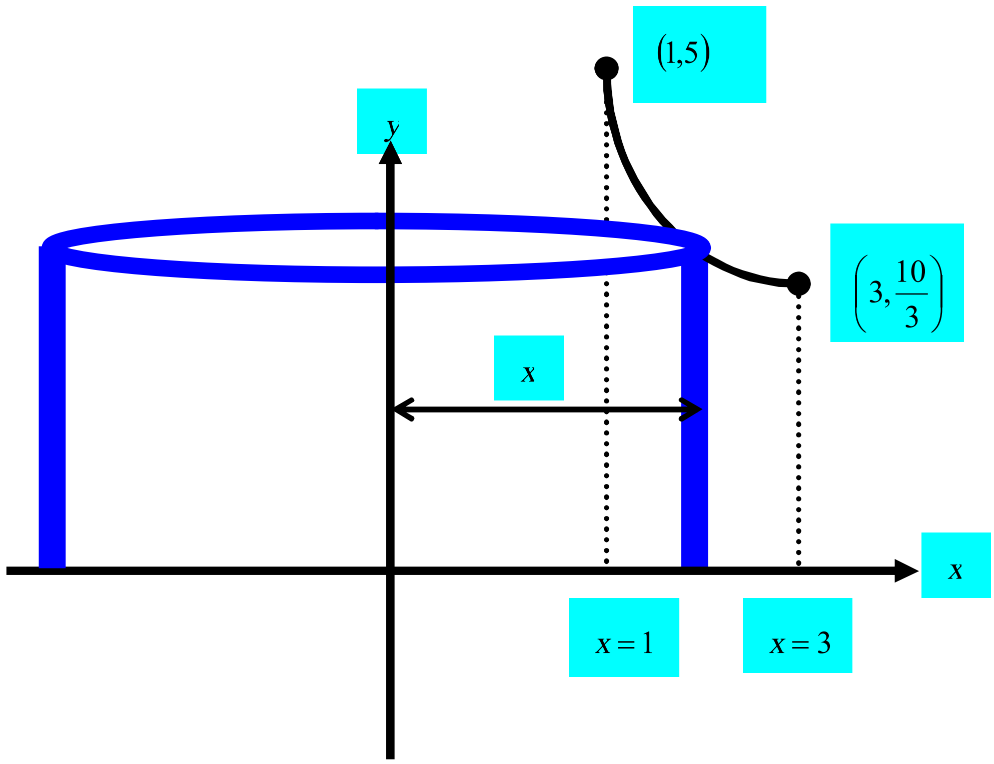


Figure 29

$$V = 2\pi \int_{x=a}^{x=b} x f(x) dx \tag{1}$$

$$V = 2\pi \int_{x=1}^{x=3} x\left(x + \frac{4}{x}\right) dx = \left(\frac{100}{3}\right)\pi \tag{2}$$

فيما يلي سوف نوضح للقارئ من خلال الجدول التالي مقارنة شبه تفصيلية لطريقتي Disk ، Shell لحساب الأحجام الناتجة من الدوران.

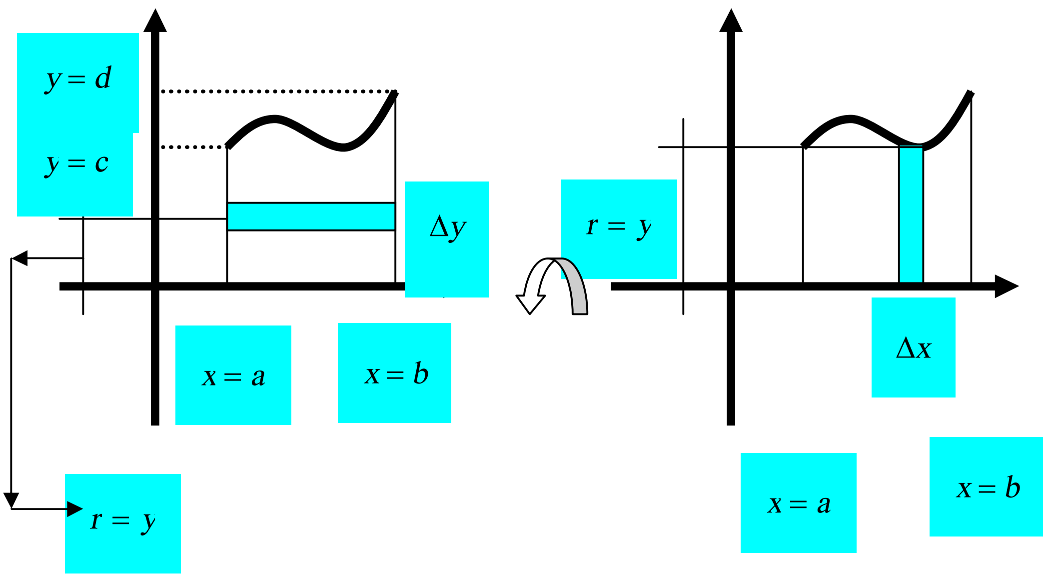


Figure 30

Shell Method	Disk Method
الشريحة موازية على محور الدوران	الشريحة عمودية على محور الدوران
المقطع يعطى أسطوانة بثمك Δy $dV=(2\pi r)(x\Delta y)=(2\pi y)(x\Delta y)$	المقطع يعطى Disk بثمك Δx : $dV=\pi r^2\Delta x=\pi\left(f(x)\right)^2\Delta x$
$V=2\pi\int_{x=a}^{x=b}xydydx$	$V=\pi\int_{x=a}^{x=b}\left(f(x)\right)^2dx$
الخلاصة: إذا كان الدوران حول x فيكون التكامل الناتج في اتجاه y	الخلاصة: إذا كان الدوران حول x فيكون التكامل الناتج أيضا في اتجاه x

Supplementary Examples

Example

The region between, $y = \sqrt{x}$, $0 \le x \le 4$ and the x-axis is revolved about the x-axis to generate a solid. Find the volume of the solid.

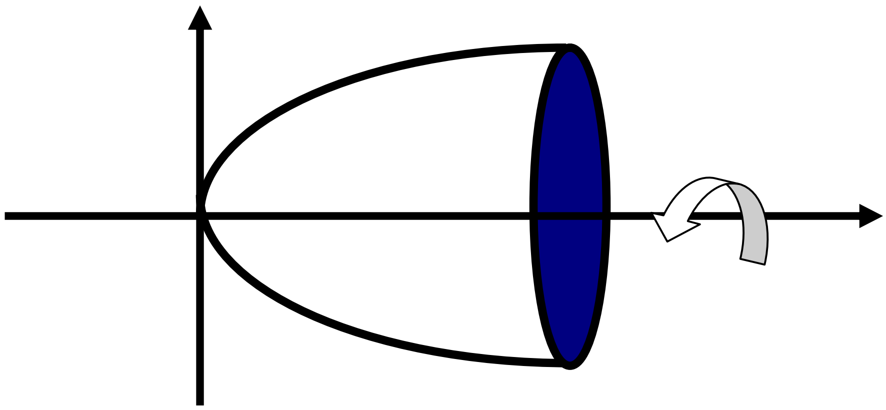


Figure 31

Solution

كما هو واضح بالشكل أن المحور الأفقي x هو محور الدوران وحيث أن الجسم الناتج من الدوران مصمت Solid وعليه فالحجم المطلوب يمكن استنتاجه من العلاقة التالية:

$$\text{Volume} = \int_a^b \pi(\text{radius function})^2\, dx = \int_a^b \pi(\,f(x))^2\, dx$$

$$\text{Volume} = \int_0^4 \pi\left(\sqrt{x}\right)^2 dx = \int_a^b \pi x dx = 8\pi$$

Example

Find the volume of the solid generated by revolving the region bounded by the curve $y=\sqrt{x}$ and the lines $y=1$ and $x=4$ about the line $y=1$.

Solution

نود أن نوضح الاختلاف بين هذا المثال والمثال السابق في جزئية وهى أن محور الدوران يوازى المحور الأفقي معنى هذا أن طريق الوردة Washer هي الأنسب في هذه الحالة وعليه فإن العلاقة التي تستخدم في حساب التكامل على النحو التالي:

$$\text{Volume} = \int_a^b \pi(\text{radius function})^2\,dx = \int_a^b \pi(\,f(x))^2\,dx$$

$$\text{Volume} = \int_1^4 \pi\left(\sqrt{x}-1\right)^2 dx = \frac{7\pi}{6}$$

Example

The region bounded by $x=\dfrac{2}{y}$, $1\le y\le 4$ and the y-axis is revolved about the y-axis to generate the solid. Find the volume of the solid.

Solution

$$\text{Volume} = \int_c^d \pi(\text{radius function})^2\,dy = \int_1^4 \pi\left(\frac{2}{y}\right)^2 dy = 3\pi$$

Example

The region bounded by $y = x^2 + 1$ and the line $y = 3 - x$ is revolved about the x-axis. Find the volume of the solid.

Solution

The outer radius $R(x) = 3 - x$

The inner radius $r(x) = x^2 + 1$

The required volume, leads to:

$$Volume = \int_a^b \pi\left(R^2(x) - r^2(x)\right)dx = \int_{-2}^{1} \pi\left((3-x)^2 - \left(x^2+1\right)^2\right)dx = \frac{117\pi}{5}$$

Example

The region bounded by $y = x^2$ and the line $y = 2x$ in the first quadrant is revolved about the y-axis. Find the volume of the solid.

Solution

It can be concluded that the inner and the outer radii of the washer generated by the line segment are as follows:

$R(y) = \sqrt{y}$ and $r(y) = \frac{y}{2}$

The required volume:

$$Volume = \int_c^d \pi\left(R^2(y) - r^2(y)\right)dy = \int_0^4 \pi\left(\left(\sqrt{y}\right)^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2\right)dy = \frac{8\pi}{3}$$

أطوال المنحنيات Arc Length of A Curve

سوف نبدأ هذا الموضوع بفرض وجود دالة $y = f(x)$ في المستوى xy وهذه الدالة معرفة في الفترة الأفقية من $x = a$ إلى $x = b$ والمطلوب إيجاد طول المنحنى خلال تلك الفترة.

الأسلوب المتبع في هذه الحالة هي تقسيم المنحنى إلى شرائح عرض كل منها Δx هذا إذا كان الطول المطلوب في اتجاه المحور الأفقي أنظر الرسم التالي.

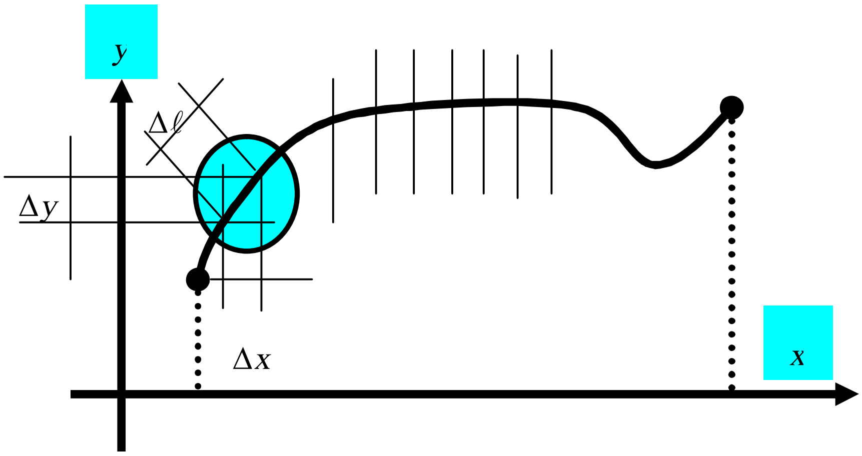


Figure 32: Arc length in cartesian coordinates

والآن بالرجوع إلى الشكل رقم (32):

بفرض أننا أخذنا شريحة بطول $\Delta \ell$ على منحنى الدالة ، وطول هذا الجزء على المحور الأفقي يساوى Δx وطوله في اتجاه المحور الرأسي يساوى Δy، وبتطبيق نظرية فيثاغورث يمكننا استنتاج الآتي:

$$\Delta\ell = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \tag{1}$$

من المعادلة (1) يمكن استنتاج المعادلتين الآتيتين:

$$\Delta\ell = \left(\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\right)\Delta x \tag{2}$$

$$\Delta\ell = \left(\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2+1}\right)\Delta y \tag{3}$$

والآن يمكن وضع المعادلتين (2) ، (3) في صور عامة على الشكل التالي:

$$\ell = \int_{x=a}^{x=b}\left(\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right)dx \tag{4}$$

$$\ell = \int_{y=c}^{y=d}\left(\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\right)dy \tag{5}$$

نود نلفت نظر القارئ إلى أن المعادلة (4) تستخدم في حالة ما إذا كان التكامل سهلا بالنسبة للمحور x ونفس الملحوظة بالنسبة للمحور الرأسي y.

Example

Find the length of the asteroid $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4$

Solution

في البداية نلفت النظر إلى أننا سبق وتكلمنا عن هذا المنحنى وخاصة أنه من المنحنيات الشهيرة والتي يجب على القارئ أن يكون على دراية بها.

لو دققنا النظر في الطرف الأيمن من معادلة المنحنى ولنحاول وضعها على الصورة المألوفة وعليه فإن معادلة المنحنى تأخذ الشكل العام التالي:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 8^{\frac{2}{3}} \qquad (1)$$

ثانيا نعرف من رسم هذا المنحنى أنه متماثل حول المحورين الأفقي والرأسي وعلى هذا يمكن الاستفادة من هذه المعلومة بحساب طول المنحنى في الربع الأول وضرب الناتج في 4 لنحصل على الطول الكلى للمنحنى.

ثالثا استخدام العلاقة التي نكامل فيها في اتجاه المحور الأفقي أو الرأسي لا يهم لأن الأسس على كل من المتغير x أو المتغير y متماثلين وعلى هذا سوف نستخدم علاقة التكامل في اتجاه المحور الأفقي.

$$\ell = \int_{x=a}^{x=b} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \right) dx \qquad (2)$$

ولكي نطبق المعادلة (2) لابد أولا من إيجاد المشتقة الأولى للمنحنى المعطى:

$$\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} \right) \qquad (3)$$

بالنظر إلى المعادلة (2) يمكننا كنوع من التبسيط الرياضي كالآتي:

$$1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 1 + \left(\frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} \right) \qquad (4)$$

بالتعويض من معادلة المنحنى المراد إيجاد طوله في المعادلة (4) فتصبح المعادلة (4) على الصورة التالية:

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1+\left(\frac{8^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}\right)=\left(\frac{8}{x}\right)^{\frac{2}{3}} \qquad (5)$$

والآن بالتعويض من المعادلة (5) في المعادلة (2) فتأخذ معادلة طول المنحنى الشكل التالي:

$$\ell=4\int_{x=0}^{x=8}\sqrt{\left(\frac{8}{x}\right)^{\frac{2}{3}}}\,dx=8\int_{x=0}^{x=8}x^{-\left(\frac{1}{3}\right)}dx=48 \qquad (6)$$

Example

Find the length of $y=\frac{1}{3}\left(x^2+2\right)^{\frac{3}{2}}, 0\le x\le 3$

Solution

طالما أن المعادلة المعطاة دالة صريحة y دالة في x وان حدود التكامل بالنسبة للمتغيرx فهذان مؤشران لاستخدام العلاقة التالية في حساب طول المنحنى:

$$\ell=\int_{x=a}^{x=b}\left(\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right)dx \qquad (1)$$

وفى البداية نوجد مشتقة دالة المنحنى المعطى كالآتي:

$$y=\frac{1}{3}\left(x^2+2\right)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=x\left(x^2+2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (2)$$

والآن بالتعويض من (2) في (1) نحصل على الآتي:

$$\ell=\int_{x=a}^{x=b}\left(\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right)dx=\int_{x=0}^{x=3}\left(\sqrt{1+\left(x\left(x^2+2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2}\right)dx=\int_{x=0}^{x=3}\left(x^2+1\right)dx=12 \qquad (3)$$

Example

Find the length of the catenary $y = \cosh x, -2 \le x \le 2$

Solution

طالما أن المعادلة المعطاة دالة صريحة y دالة في x وان حدود التكامل بالنسبة للمتغير x فهذان مؤشران لاستخدام العلاقة التالية في حساب طول المنحنى:

$$\ell = \int_{x=a}^{x=b} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \right) dx \tag{1}$$

وفى البداية نوجد مشتقة دالة المنحنى المعطى كالآتي:

$$y = \cosh x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sinh x \tag{2}$$

والآن بالتعويض من (2) في (1) نحصل على الآتي:

$$\ell = \int_{x=a}^{x=b} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \right) dx = \int_{x=a}^{x=b} \left(\sqrt{1 + \sinh^2 x} \right) dx \tag{3}$$

But

$$\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x \tag{4}$$

بالتعويض من (4) في (3) ، وإجراء التكامل نحصل على الآتي:

$$\ell = 2 \int_{x=0}^{x=2} \cosh x dx = \left(e^2 - e^{-2} \right) \tag{5}$$

طول المنحنى في الشكل البارامتري Arc Length in Parametric Form

لنفرض أن لدينا منحنى في المستوى الكرتيزي xy وفى نفس الوقت كلا من المتغيرين x ، y معطيان بدلالة المتغير البارامتري t على الصورة التالية:

$$\begin{aligned} &x = \Phi(t) \\ &\& \\ &y = \Psi(t) \end{aligned} \qquad (1)$$

ففي هذه الحالة يمكن إيجاد طول المنحنى بدلالة المتغير البارامتري Parametric من العلاقة التالية:

$$\ell = \int_{t=t_1}^{t=t_2} \sqrt{\left(\frac{d\Phi(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\Psi(t)}{dt}\right)^2}\, dt \qquad (2)$$

Example

Find the length of the cycloid if its equations in the parametric form are given by $x = t - \sin t \;\&\; y = 1 - \cos t$

Solution

منحنى السيكلويد من المنحنيات المشهورة والتي يجب على القارئ أن يكون على علم بها وبخصائصها. والآن وطالما أن معادلة السيكلويد معطاة في شكلها البارامتري فيجب أولا أن كتابة العلاقة العامة لطول المنحنى كالآتي:

$$\ell = \int_{t=t_1}^{t=t_2} \sqrt{\left(\frac{d\Phi(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\Psi(t)}{dt}\right)^2}\, dt \qquad (1)$$

Where

$$x = \Phi(t) = t - \sin t \tag{2}$$

$$y = \psi(t) = 1 - \cos t \tag{3}$$

الخطوة التالية إيجاد مشتقات المعادلتين (2) ، (3) بالنسبة للمتغير t:

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = 1 - \cos t \tag{4}$$

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = \sin t \tag{5}$$

من المعلومات حول منحنى السيكولويد يمكننا استنتاج حدود التكامل وهى $0 \le t \le 2\pi$ وعلى أساس المعلومات السابقة المعادلة (1) تأخذ الشكل التالي:

$$\ell = \int_{t=t_1}^{t=t_2} \sqrt{\left(\frac{d\Phi(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\Psi(t)}{dt}\right)^2}\, dt = \int_{t=0}^{t=2\pi} \sqrt{(1-\cos t)^2 + (\sin t)^2}\, dt$$

(6)

$$= \int_{t=0}^{t=2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\, dt$$

But

$$\sin^2 \frac{t}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos t) \tag{7}$$

بالتعويض من (7) تصبح (6) على الشكل التالي:

$$\ell = 2\int_{t=0}^{t=2\pi} \sin\left(\frac{1}{2}t\right) dt = 2\left[\frac{-\cos\left(\frac{1}{2}t\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)}\right]_0^{2\pi} = 8 \tag{8}$$

Example

Find the length of the curve $y=\frac{4\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}}-1,\ 0\le x\le 1$

Solution

We need to find the first derivative for the given function.

$$y=\frac{4\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}}-1$$

$$y^{/}=\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\sqrt{x}=\left(2\sqrt{2}\right)x^{\frac{1}{2}}$$

$$L=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{1+\left(2\sqrt{2x}\right)^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{1+8x}dx$$

Therefore

$$L=\int_0^1\sqrt{1+8x}dx=\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{8}\right)\left[(1+8x)^{\frac{3}{2}}\right]_{x=0}^{x=1}=\frac{16}{3}$$

Example

Find the length of the curve $y=\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{3}},\ 0\le x\le 2$

Solution

The first derivative with respect to y will be:

$$\frac{dx}{dy}=3(y)^{\frac{1}{2}}$$

The interval in y-direction corresponding to the interval in x-direction can be found by direct substitution in the function. Therefore, the corresponding interval will be $0 \le y \le 1$ then the length of the function can be found as follows:

$$L = \int_{y=c}^{y=d} \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \int_{y=0}^{y=1} \sqrt{(1+9y)}dy = \left(\frac{1}{9}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left[(1+9y)^{\frac{3}{2}}\right]_{y=0}^{y=1} = 2.27$$

طول المنحنى في الشكل القطبي Arc Length in Polar Form

عرفنا سابقا ماذا نعنى عندما يكون الحديث دالة في الإحداثيات القطبية Polar coordinates وقلنا أن المتغيرات التي تناظر الإحداثيات الكرتيزية Cartesian coordinates هي الآن r,θ . والآن لنفرض أن لدينا دالة معرفة في الإحداثيات القطبية وهذه الدالة محصورة بين زاويتين مقاستين في عكس عقارب الساعة وهما على التوالي $\theta_1 \,\&\, \theta_2$ كما هو موضح بالشكل التالي:

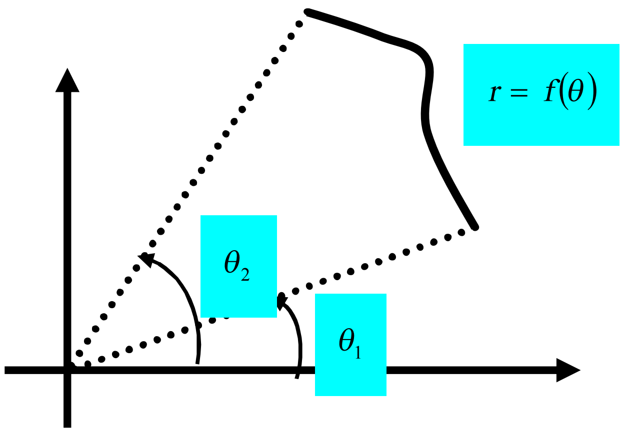


Figure 33

والآن وبالاستعانة بالشكل رقم (32) يمكن إيجاد طول المنحنى حسب البيانات المعطاة من العلاقة التالية:

$$\ell = \int_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2} \sqrt{\mathrm{r}^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

Example

If the cardiod equation in the polar coordinates is given by $r = 2(1+\cos\theta)$, find its length.

Solution

منحنى الكردويد Cardiod من المنحنيات الشهيرة والمثال الحالي هو تطبيق مباشر على طريقة إيجاد طول المنحنى لدالة في الشكل القطبي وعليه نبدأ بكتابة العلاقة العامة كالآتي:

$$\ell = \int_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2} \sqrt{\mathrm{r}^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta \tag{1}$$

الخطوة التالية هي إيجاد مشتقة الدالة كالآتي:

$$r = 2(1+\cos\theta) \Rightarrow \frac{dr}{d\theta} = -2\sin\theta \tag{2}$$

بالتعويض من المعادلة (2) في المعادلة (1) نحصل على الآتي:

$$\begin{aligned} \ell &= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \sqrt{(2[1+\cos\theta])^2 + (-2\sin\theta)^2}\, d\theta \\ &= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \sqrt{(2[1+\cos\theta])^2 + (-2\sin\theta)^2}\, d\theta \end{aligned} \tag{3}$$

نحن نعلم أن منحنى الكردويد متماثل حول المحور الأفقي وعليه يمكننا إجراء التكامل في الفترة($\pi \to 0$)ونضرب ناتج التكامل في الضعف وعلى هذا يصبح الناتج الأخير في المعادلة (3) على الصورة التالية:

$$\ell = 2\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\sqrt{8+8\cos\theta}\,d\theta = 4\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\sqrt{2+2\cos\theta}\,d\theta \tag{4}$$

But

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}\left(1+\cos 2\theta\right) \tag{5}$$

باستخدام (5) في (4) نحصل على:

$$\ell = 8\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\cos\frac{1}{2}\theta d\theta = 16 \tag{6}$$

Example

Find the arc length of $r = a\sin^3\left(\frac{\theta}{3}\right), 0 \le \theta \le \pi$

Solution

بداية هذا المنحنى لدالة في الإحداثيات القطبية وعليه نبدأ بكتابة العلاقة العامة على النحو التالي:

$$\ell = \int_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2}\sqrt{\mathrm{r}^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta \tag{1}$$

الخطوة التالية هي إيجاد مشتقة الدالة كالآتي:

$$r = a\sin^3\left(\frac{\theta}{3}\right) \Rightarrow \frac{dr}{d\theta} = a\sin^2\left(\frac{\theta}{3}\right)\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) \tag{2}$$

بالتعويض من المعادلة (2) في المعادلة (1) نحصل على الآتي:

$$\ell = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \sqrt{\left(a\sin^3\left(\frac{\theta}{3}\right)\right)^2 + \left(a\sin^2\left(\frac{\theta}{3}\right)\cos\left(\frac{\theta}{3}\right)\right)^2}\, d\theta$$

$$= a\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \sin^2\left(\frac{\theta}{3}\right)\sqrt{\sin^2\left(\frac{\theta}{3}\right)+\cos^2\left(\frac{\theta}{3}\right)}\, d\theta$$

$$= a\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \sin^2\left(\frac{\theta}{3}\right) d\theta = \frac{a}{2}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} 1-\cos\left(\frac{2\theta}{3}\right) d\theta \tag{3}$$

$$= \frac{a}{2}\left(\pi - \frac{3}{2}\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

نحن نعلم أن منحنى الكردويد متماثل حول المحور الأفقي وعليه يمكننا إجراء التكامل في الفترة$(\pi \to 0)$ونضرب ناتج التكامل في الضعف وعلى هذا يصبح الناتج الأخير في المعادلة (3) على الصورة التالية:

$$\ell = 2\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \sqrt{8+8\cos\theta}\, d\theta = 4\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \sqrt{2+2\cos\theta}\, d\theta \tag{4}$$

But

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta) \tag{5}$$

باستخدام (5) في (4) نحصل على:

$$\ell = 8\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \cos\frac{1}{2}\theta d\theta = 16 \tag{6}$$

المساحات السطحية الدورانية Areas of Surface of Revolution

عندما نتكلم عن المساحة السطحية فأول ما نود الإشارة إليه في هذا الموضوع هو أن المساحة السطحية تنتج من دوران منحنى حول أحد المحاور. لنفرض الآن أن لدينا منحنى دالة $y = f(x)$ والدالة في الفترة $x = a \to x = b$ وتم دوران المنحنى حول المحور الأفقي فنحصل على الشكل التالي:

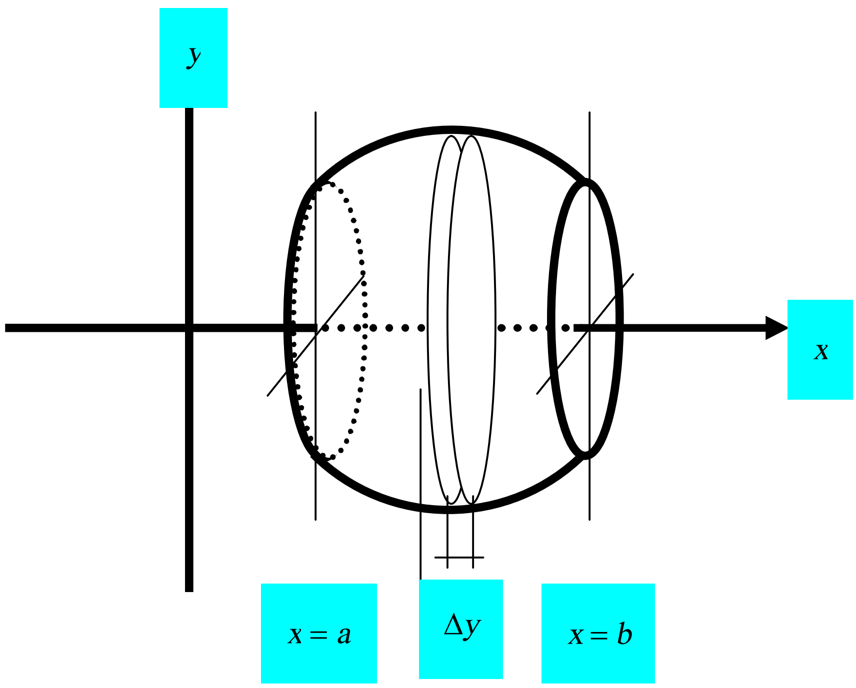


Figure 34

عندما نأخذ شريحة بعرض $\Delta \ell$ من الطول الكلي للمنحنى المعطى فعند دوران هذه الشريحة حول أحد المحاور وليكن المحور الأفقي مثلا فإن الشكل الناتج يكون

على شكل دائرة بسمك $\Delta\ell$ وعلى هذا فإن المساحة السطحية الناتجة عن الدوران تحسب من خلال محيط القاعدة في الارتفاع. ورياضيا المعادلات التي نحسب منها المساحة السطحية الناتجة عن الدوران كالآتي:

الحالة الأولى: الدوران حول المحور الأفقي

$$S_x = 2\pi \int_{x=a}^{x=b} y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \qquad (1)$$

الحالة الثانية: الدوران حول المحور الرأسي

$$S_y = 2\pi \int_{y=c}^{y=d} x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy \qquad (2)$$

Example

Find the surface area generated by revolving a circle $y=\sqrt{2x-x^2}, 0 \le x \le 2$ about x-axis.

Solution

عندما تدور دائرة حول أحد المحاور فإن الشكل الناتج من الدوران هو كره Sphere وعليه فإن المطلوب هو إيجاد المساحة السطحية للكرة. وقبل البدء في كتابة العلاقة العامة لإيجاد المساحة السطحية للكرة لابد من إعادة صياغة معادلة الدائرة على النحو التالي:

$$y=\sqrt{2x-x^2}=\sqrt{1-(x-1)^2} \Rightarrow (x-1)^2+y^2=1 \qquad (1)$$

والآن بكتابة العلاقة العامة للمساحة السطحية لدوران منحنى حول المحور الأفقي:

$$S_x = 2\pi \int_{x=a}^{x=b} y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \qquad (2)$$

بالتعويض من (2) في (1) نحصل على الآتي:

$$S_x = 2\pi \int_{x=a}^{x=b} y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$
$$= 2\pi \int_{x=0}^{x=2} \left(\sqrt{2x-x^2}\right)\sqrt{1+\left(\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\right)^2}\,dx \qquad (3)$$

بتبسيط الدالة داخل التكامل وإجراء التكامل نحصل على الناتج التالي:

$$S_x = 2\pi \int_{x=0}^{x=2} dx = 4\pi \qquad (4)$$

Example

Find the surface area generated by revolving $x = y^3$ about y-axis from $y = 0$ to $y = 2$

Solution

حيث أن محور الدوران هو المحور الرأسي وحدود المنطقة معطاة بدلالة y فعليه نبدأ الحل بكتابة العلاقة العامة للدوران حول المحور الرأسي y كالآتي:

$$S_y = 2\pi \int_{y=c}^{y=d} x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy \qquad (1)$$

الخطوة التالية: إيجاد المشتقة للدالة:

$$\frac{dx}{dy} = 3y^2 \qquad (2)$$

بالتعويض من (2) في (1) نحصل على الآتي:

$$S_y = 2\pi \int_0^2 x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy = 2\pi \int_{y=0}^{y=2} y^3\sqrt{1+9y^4}\,dy \tag{3}$$

$$= \left[\frac{\pi}{27}\left(1+9y^4\right)^{3/2}\right]_{y=0}^{y=2} = 64.6\pi$$

Example

Find the area of the surface generated by revolving the curve $y = 2\sqrt{x}$, $1 \le x \le 2$ about the x-axis.

Solution

$$S = \int_{x=a}^{x=b} (2\pi y)\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$y = 2\sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Substituting into formula for surface area of revolution leads to:

$$S = \int_{x=a}^{x=b} (2\pi y)\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_{x=1}^{x=2} \left(2\pi\left\{2\sqrt{x}\right\}\right)\sqrt{1+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}\,dx$$

Simplify, we get:

$$S = 4\pi \int_{x=1}^{x=2} \sqrt{x+1}\,dx = 4\pi\left(\frac{2}{3}\right)\left\{(x+1)^{\frac{3}{2}}\right\}_{x=1}^{x=2} = \left(\frac{8\pi}{3}\right)\left(3\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right)$$

Example

Find the area of the surface generated by revolving the line segment $x=1-y,\ 0\le y\le 1$ about the y-axis.

Solution

$$S=\int_{y=c}^{y=d}(2\pi x)\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$$

$$x=1-y\Rightarrow\frac{dx}{dy}=-1$$

Substituting into formula for surface area of revolution leads to:

$$S=\int_{y=c}^{y=d}(2\pi x)\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy=\int_{y=0}^{y=1}(2\pi\{1-y\})\sqrt{1+(-1)^2}\,dx$$

Simplify, we get:

$$S=2\sqrt{2}\pi\int_0^1(1-y)dy=\pi\sqrt{2}$$

المساحة السطحية الدورانية في الشكل البارامتري

Surface Area of Revolution in Parametric Form

فيما يلي وتكملة لموضوع المساحة السطحية الدورانية الناتجة من دوران دالة معطاة في فترة معينة حول أحد المحاور الكرتيزية، وفى موضوعنا الحالي سوف نتعرض بالشرح المساحة السطحية الدورانية في حالة ما إذا كانت الدالة (المنحنى)

الذي يدور في شكلها (شكله) البارامتري. لنفرض الآن أن كلا من المتغيرين x ، y دوال في المتغير البارامتري فعليه وإتباعا لنفس العلاقات الرياضية السابقة تكون المساحات السطحية الدورانية على النحو التالي:

الحالة الأولى: الدوران حول المحور الأفقي

$$S_x = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \qquad (1)$$

الحالة الثانية: الدوران حول المحور الرأسي

$$S_y = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} x(t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \qquad (2)$$

Example

Find the surface area generated by revolving the cardioid if its equation in parametric form given by: $x = 2\cos t - \cos 2t$ and $y = 2\sin t - \sin 2t$.

Solution

بداية نود أن نلفت نظر القارئ إلى أننا تعرضنا سابقا لمعادلات الكردويد Cardioid equation وما نود أن نشير إليه أنه توجد صور متعددة للمنحنى الواحد حسب طبيعة ذلك المنحنى. والآن نظرا للشكل البارامتري للمنحنى فإن أهم جزئية في هذا النوع من التطبيقات هو تحديد حدود التكامل بالنسبة للمتغير البارامتري وحيث أن t تتغير على الاتجاه الأفقي فإن حدود التكامل يتم تحديدها من خلال مساواة معادلة y بالصفر، والآن بوضع $y = 0$ نحصل على الآتي:

$$y = 2\sin t - \sin 2t = 0 \Rightarrow 2\sin t = \sin 2t \qquad (1)$$

والآن نبحث عن قيمة أو مجموعة قيم للمتغير البارامیتري t التي تحقق طرفي الجزء الأخير من المعادلة (1) وبالبحث نجد أن القيمتين $t = 0$ ، $t = \pi$ تحققان المطلوب. وحيث أن التكامل في الاتجاه الأفقي فسوف نستخدم العلاقة التالية في حساب المساحة السطحية الدورانية المطلوبة.

$$S_x = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \qquad (2)$$

بإيجاد التفاضلات المطلوبة والتي ظهرت في المعادلة (2) كالآتي:

$$\frac{dx}{dt} = -2\sin t + 2\sin 2t \qquad (3)$$

$$\frac{dy}{dt} = 2\cos t - 2\cos 2t \qquad (4)$$

باستخدام المعادلات (3) ، (4) في حساب المقدار تحت الجذر كنوع من التبسيط قبل حساب التكامل كالآتي:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = (-2\sin t + 2\sin 2t)^2 + (2\cos t - 2\cos 2t)^2$$
$$= \{8 - 8[\cos 2t \cos t + \sin 2t \sin t]\} \qquad (5)$$

تذكر العلاقات المثلثية التالية:

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) + \cos(A + B)] \qquad (6)$$

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) - \cos(A + B)] \qquad (7)$$

باستخدام العلاقات (6) ، (7) في المعادلة (5) فتصبح المعادلة (5) على الصورة التالية:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 8(1-\cos t) \tag{8}$$

والآن يمكننا استخدام المعادلة (2) في حساب المساحة السطحية الدورانية المطلوبة كالآتي:

$$S_x = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = 2\pi \int_0^{\pi} (2\sin t - \sin 2t)\sqrt{8(1-\cos t)}dt \tag{9}$$

بعد تبسيط المعادلة (9) تصبح على النحو التالي:

$$S_x = 2\pi\sqrt{8}\int_0^{\pi} \sin t(1-\cos t)^{\frac{3}{2}}\, dt \tag{10}$$

يمكن حساب التكامل (10) بالطرق الأولية البسيطة كالآتي:

$$\begin{aligned} S_x &= 2\pi\sqrt{8}\int_0^{\pi} \sin t(1-\cos t)^{\frac{3}{2}}\, dt \\ &= 2\pi\sqrt{8}\int_0^{\pi} (1-\cos t)^{\frac{3}{2}}\, d(1-\cos t) \\ &= \left(\frac{4\pi\sqrt{8}}{5}\right)\left[(1-\cos t)^{\frac{5}{2}}\right]_{t=0}^{t=\pi} = \left(\frac{4\pi\sqrt{8}}{5}\right)\left[(2)^{\frac{5}{2}}\right] \end{aligned} \tag{11}$$

التكامل المحدود والمنحنيات الشهيرة

Definite Integrals and Famous Curves

تقديم

عند التعامل مع التطبيقات المختلفة للتكامل المحدود وخاصة عندما نتعامل مع المنحنيات الخاصة والتي سبق الإشارة إليها فهذا يتطلب التعامل مع الشكل الباراميتري Parametric Form خاصة وانه في حال التكامل في المستوى الكرتيزي Cartesian plane يكون فيه نوع من الصعوبة خاصة صعوبة شكل المعادلات لهذه المنحنيات.

من أمثلة هذه المنحنيات ما يسمى بمنحنى النجمة Astroid ومعادلته في الإحداثيات الكرتيزية هي المعطاة في المثال الحالي والمطلوب حساب مساحته. لكننا وقبل البدء في التطبيق لابد أن نذكر القارئ بموضوع ذو صله بالموضوع الحالي ألا وهو المساحات للمنحنيات الباراميترية Areas in parametric form.

المساحات في الشكل الباراميترى Areas in Parametric Form

في هذا التطبيق نعبر عن كلا من المتغيرات الكرتيزية بدلالة متغير واحد يسمى المتغير الباراميترى Parametric حيث يتم توحيد هذا المتغير سواء في الدالة داخل التكامل وكذلك حدود التكامل وبالتالي يتحول التطبيق إلى حالة أسهل وبالتالي التكامل يكون بسيطا ويسهل التعامل معه.

لنفرض أن كلا من المتغيرين x ، y دالتين في متغير t على الصورة التالية:

$$x = \Phi(t) \qquad (1)$$

$$y = \Psi(t) \qquad (2)$$

وبفرض أن حدود التكامل لهذا المنحنى في الإحداثيات الكرتيزية كالآتي:

$$x = a \ \& \ x = b \tag{3}$$

من معلوماتنا السابقة نعرف أن المساحة تحت المنحنى لدالة في الفترة من a إلى b تكتب على الصورة التالية:

$$A = \int_{x=a}^{x=b} f(x)dx \tag{4}$$

والآن المعادلة (4) بدلالة المتغير الباراميتري t تكتب على الصورة التالية:

$$A = \int_{t=t_1}^{t=t_2} \left[\Psi(t)\Phi^{/}(t)\right]dt \tag{5}$$

وعن الأسلوب لتحديد حدود التكامل الجديدة نتبع الأسلوب التالي:

$$\begin{aligned} t_1: \quad & \text{at} \quad x = a \quad \Rightarrow a = \Phi(t) \\ t_2: \quad & \text{at} \quad x = b \quad \Rightarrow b = \Phi(t) \end{aligned} \tag{6}$$

كذلك الحال إذا كان التكامل في اتجاه y فعند إيجاد حدود التكامل يكون التعامل مع الدالة $\Psi(t)$ كالآتي:

$$\begin{aligned} t_1: \quad & \text{at} \quad y = c \quad \Rightarrow c = \Psi(t) \\ t_2: \quad & \text{at} \quad y = d \quad \Rightarrow d = \Psi(t) \end{aligned} \tag{7}$$

المثال الآتي يوضح كيفية التكامل الباراميتري.

Example

Find the entire area bounded by the x-axis and the first arc of the cycloid if its parametric equations are given by:

$$x = \Phi(t) = a(t - \sin t)$$

$$y = \Psi(t) = a(1 - \cos t)$$

Solution

منحنى السيكلويد Cycloid هو المحل الهندسي لنقطة على محيط دائرة نصف قطرها a وهذه الدائرة تتحرك على المحور الأفقي كما هو موضح بالشكل التالي:

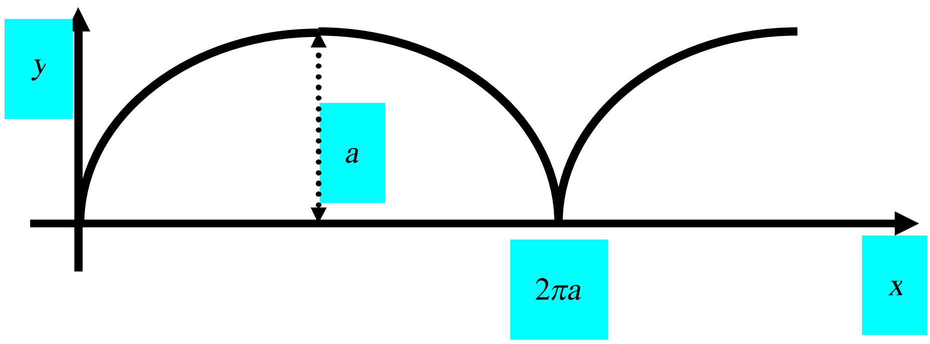


Figure 35: Cycloid

ولنبدأ الآن بكتابة العلاقة العامة المستخدمة في حساب المساحة كالآتي:

$$A = \int_{t=t_1}^{t=t_2} \left[\Psi(t)\Phi'(t)\right] dt \qquad (1)$$

$$\Phi(t) = a(t - \sin t) \tag{2}$$

$$\Phi^{/}(t) = a(1 - \cos t) \tag{3}$$

Limits of integration

$$\text{At } x = 0 \Leftrightarrow t - \sin t = 0 \Rightarrow t = 0 \tag{4}$$

$$\text{At } x = 2\pi a \Leftrightarrow 2\pi a = a(t - \sin t) \Rightarrow t = 2\pi \tag{5}$$

بالتعويض من (2) حتى (5) في المعادلة (1) فنحصل على الآتي:

$$A = \int_{t=t_1}^{t=t_2} [\Psi(t)\Phi^{/}(t)]dt = \int_{t=0}^{t=2\pi} [a(1 - \cos t)][a(1 - \cos t)]dt = a^2 \int_{t=0}^{t=2\pi} (1 - \cos t)^2 \, dt \tag{6}$$

والآن المساحة المطلوبة تأخذ الشكل التالي:

$$A = a^2 \int_{t=0}^{t=2\pi} (1 - \cos t)^2 \, dt = a^2 \int_{t=0}^{t=2\pi} (1 + \cos^2 t - 2\cos t)dt = 3\pi a^2 \tag{7}$$

Example

Find the entire area bounded by the ellipse if its parametric equations are given by:

$$x = \Phi(t) = a\cos t$$

$$y = \Psi(t) = b\sin t$$

Solution

منحنى القطع الناقص Ellipse موضح بالشكل التالي:

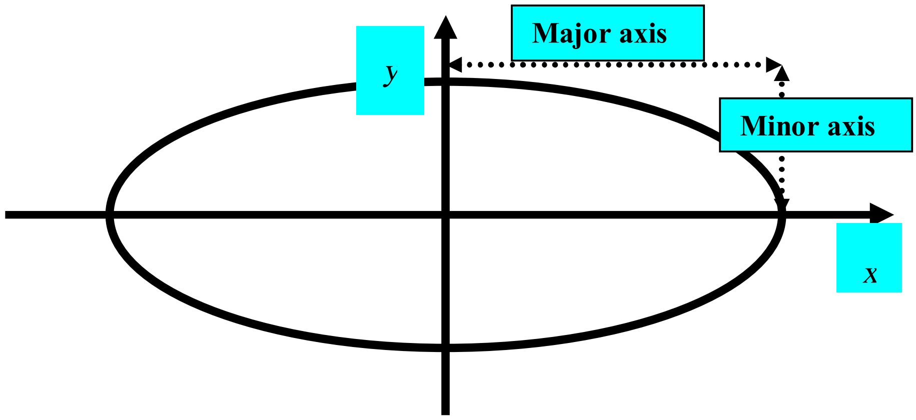


Figure 36: Ellipse

واضح من الرسم أن هناك تماثل على المحورين الأفقي والرأسي وعليه سوف يتم مساحة ربع واحد فقط ونضرب الناتج في أربعة. والآن نكتب العلاقة العامة المستخدمة في حساب المساحة مع مراعاة جزئية التماثل كالآتي:

$$A = 4\int_{t=t_1}^{t=t_2}\left[\Psi(t)\Phi^{/}(t)\right]dt \tag{1}$$

$$\Phi(t) = a\cos t \tag{2}$$

$$\Phi^{/}(t) = -a\sin t \tag{3}$$

Limits of integration

$$\text{At } x = 0 \Leftrightarrow a\cos t = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \tag{4}$$

$$\text{At } x = a \Leftrightarrow a = a\cos t \Rightarrow t = 0 \tag{5}$$

بالتعويض من (2) حتى (5) في المعادلة (1) فنحصل على الآتي:

$$A = 4\int_{t=t_1}^{t=t_2}\left[\Psi(t)\Phi^{/}(t)\right]dt = 4\int_{t=\frac{\pi}{2}}^{t=0}\left[b\sin t\right]\left[-a\sin t\right]dt = ab\int_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}}\sin^2 t dt = ab\pi \tag{6}$$

Example

Find the entire area bounded by the asteroid if its parametric equations are given by:

$$x = \Phi(t) = a\cos^3 t$$

$$y = \Psi(t) = a\cos^3 t$$

Solution

بداية نرسم الشكل العام لمنحنى Astroid كما يلي:

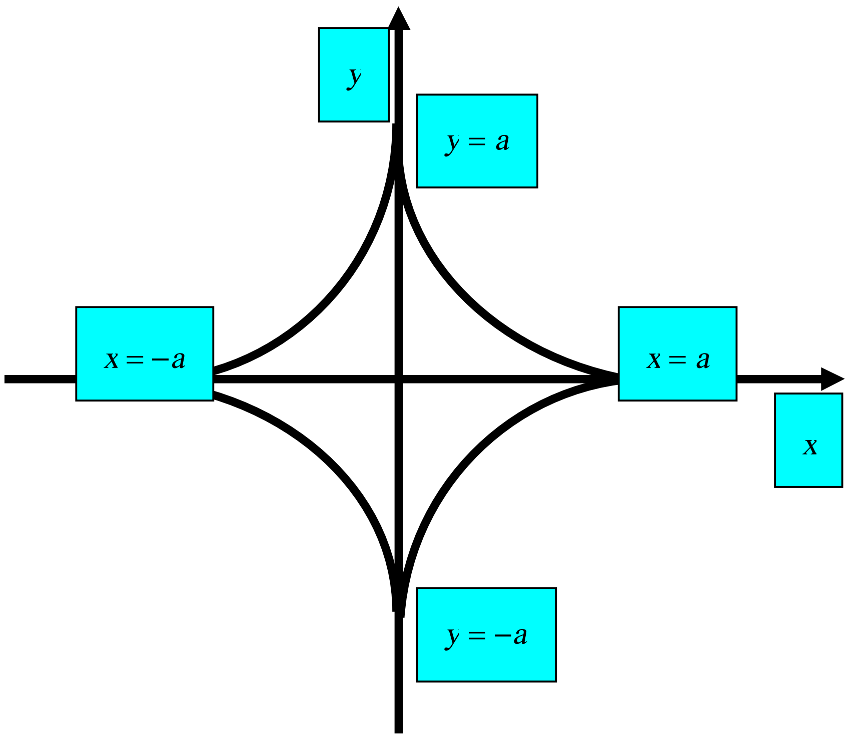


Figure 37: Asteroid

واضح من الرسم أن هناك تماثل على المحورين الأفقي والرأسي وعليه سوف يتم مساحة ربع واحد فقط ونضرب الناتج في أربعة. والآن نكتب العلاقة العامة المستخدمة في حساب المساحة مع مراعاة جزئية التماثل كالآتي:

$$A = 4\int_{t=t_1}^{t=t_2}\left[\Psi(t)\Phi^{/}(t)\right]dt \tag{1}$$

$$\Phi(t) = a\cos^3 t \tag{2}$$

$$\Phi^{/}(t) = -3a\cos^2 t\sin t \tag{3}$$

Limits of integration

$$\text{At } x = 0 \Leftrightarrow a\cos^3 t = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \tag{4}$$

$$\text{At } x = a \Leftrightarrow a = a\cos^3 t \Rightarrow t = 0 \tag{5}$$

بالتعويض من (2) حتى (5) في المعادلة (1) فنحصل على الآتي:

$$\begin{aligned} A &= 4\int_{t=t_1}^{t=t_2}\left[\Psi(t)\Phi^{/}(t)\right]dt = 4\int_{t=\frac{\pi}{2}}^{t=0}\left[a\sin^3 t\right]\left[-3a\cos^2 t\sin t\right]dt \\ &= 3a^2\int_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2 t\right)\sin^4 t\,dt = 3a^2\int_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}}\left(\sin^4 t-\sin^6 t\right)dt \end{aligned} \tag{6}$$

والآن بالنظر إلى المعادلة (6) نجد أننا يمكننا بل هو الطريق الأفضل هو أن نستخدم مفهوم التكامل بالاختزال Integration by successive reduction وقد أفردنا في باب التكامل المحدود جزء كبير بحالاته المختلفة يرجى مراجعة التكامل بالاختزال المتتالي.

والآن

$$I_n = \int_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt = \left(\frac{n-1}{n}\right) I_{n-2} \qquad (7)$$

بوضع $n = 4$ في المعادلة (7) فنحصل على الآتي:

$$I_4 = \int_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} \sin^4 t dt = -\left(\frac{1}{4}\right) \left[\cos t \sin^3 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left(\frac{3}{4}\right) I_2 \qquad (8)$$

مرة أخرى بوضع $n = 2$ في المعادلة (8) فنحصل على الآتي:

$$I_2 = \int_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = -\left(\frac{1}{2}\right) \left[\cos t \sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left(\frac{1}{2}\right) I_0 \qquad (9)$$

ومرة أخيرة بوضع $n = 0$ فنحصل على الآتي:

$$I_0 = \int_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2} \qquad (10)$$

بجمع المعادلات من (8) حتى (10) نحصل على الناتج النهائي كالآتي:

$$I_4 = \int_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} \sin^4 t dt = -\left(\frac{1}{4}\right) \left[\cos t \sin^3 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left(\frac{3}{4}\right) \left\{ -\left(\frac{1}{2}\right) \left[\cos t \sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left(\frac{\pi}{4}\right) \right\} = \frac{3\pi}{16}$$

(11)

بنفس الأسلوب يمكن حساب I_6 ثم جمع ناتج التكامل من المعادلة (11) على I_6 .

المساحات القطبية Polar Areas

أحيانا تفرض الظروف نفسها للتعامل في اتجاه نتيجة لمعطيات بعينها بمعنى أبسط لنفرض أن المطلوب المساحة المحصورة بين منحى ومحور أو بين أكثر من منحنيين وكانت المعادلات التي تعبر عن هذه المنحنيات في الإحداثيات القطبية Polar coordinates وبالتالي يتطلب الأمر التعامل مع هذه النوعية بأسلوب وعلاقات خاصة تختلف عنها كما لو كنا مثلا في الإحداثيات الكرتيزية Cartesian coordinates ولكي نتفهم هذا الموضوع يجب أن نعرف أولا أن المحاور في الإحداثيات القطبية كالآتي:

- الأفقي منها هو المحور $r-axis$
- الرأسي منها هو المحور $\theta-axis$

لنتخيل أن لدينا دالة في المستوى $r-\theta$ كما هو موضح بالشكل التالي:

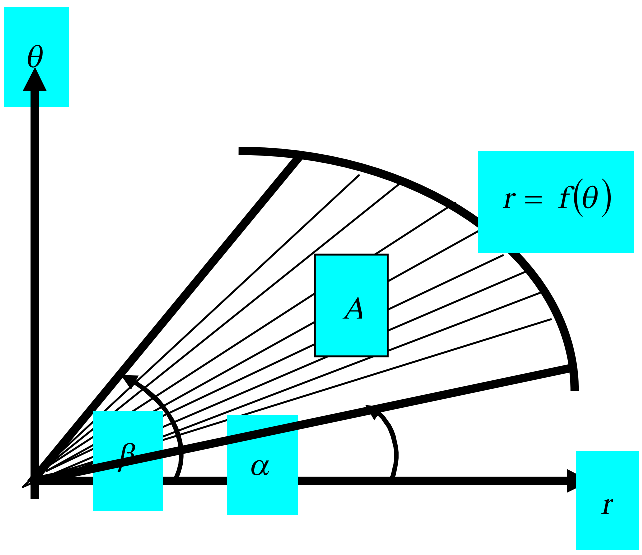


Figure 38: Area in polar coordinates

فإن المساحة المطلوبة في حالة الإحداثيات القطبية Polar coordinates يمكن حسابها من العلاقة التالية:

$$A=\frac{1}{2}\int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta}[f(\theta)]^2\theta$$

Example

Find the area of the cardioid if its equayion in a polar form is given by $r=2(1+\cos\theta)$

Solution

طالما معادلة (القلب) الكردويد Cardioid معطاة في شكلها القطبي Polar فإن هذا سببا كافيا لأن نتعامل مع علاقة المساحات في الإحداثيات القطبية وشكل منحنى القلب موضح في الشكل التالي:

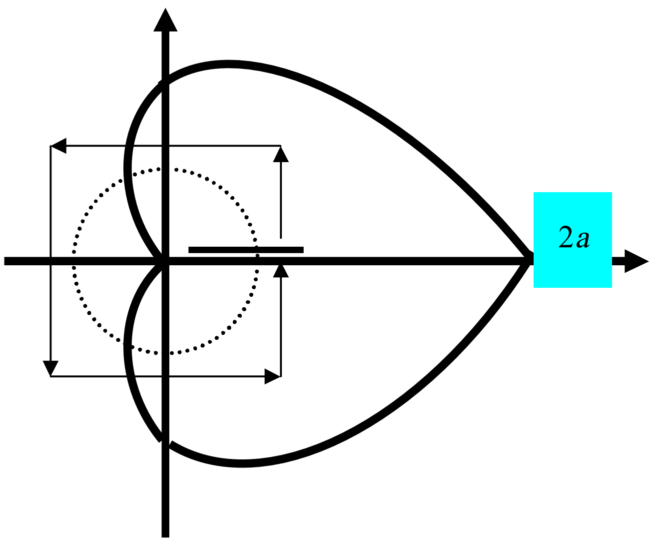


Figure 39: Cardioid

والآن لنبدأ بكتابة العلاقة العامة للمساحة في الإحداثيات القطبية كالآتي:

$$A=\frac{1}{2}\int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta}[f(\theta)]^2\theta \tag{1}$$

ونظرا لحالة التماثل حول المحور الرأسي فإنه سوف يتم التكامل على الجزء العلوي مع ضرب الناتج في 2 للتماثل والآن بالتعويض في المعادلة (1) تصبح على الشكل التالي:

$$A=2\times\frac{1}{2}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}[2a(1+\cos\theta)]^2\,d\theta=4a^2\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}[1+\cos^2\theta+2\cos\theta]d\theta \tag{2}$$

$$\cos^2\theta=\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta) \tag{3}$$

باستخدام العلاقة (3) في المعادلة (2):

$$A=4a^2\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\left[\frac{3}{2}+2\cos 2\theta+2\cos\theta\right]d\theta=6\pi a^2 \tag{4}$$

Example

Find the area contained inside Bernoulli's lemniscate if its equation in polar coordinates given by $r^2=a^2\cos 2\theta$

Solution

سبق وأن رسمنا شكل منحنى الفيونكة Lemniscate ذو اللفتين وأشرنا إلى أنه متماثل حول خطين يميلا بزاويتين $\left(\frac{\pi}{4}\right)$ مع الأفقي. وكما سبق في المثالين السابقين نكتب العلاقة العامة ثم التعويض فيها مع الأخذ في الاعتبار أننا سوف نتعامل مع جزء واحد فقط ونضرب الناتج في 4 كالآتي:

$$A = 4\left[\frac{1}{2}\int_{\phi=0}^{\pi/4} r^2\,d\theta\right] = 2a^2\int_0^{\pi/4}\cos\ 2\phi\ \mathrm{d}\phi = \mathrm{a}^2$$

Example

Find the area bounded by the first turn of Archimedes spiral if its polar equation is $r = k\theta, k > 0$ and the horizontal axis.

Solution

بداية وكما أشرنا في رسم منحنى حلزون أرشميدس أن اللفة الأولى First turn تبدأ من نقطة الأصل وتنتهي عند النقطة $2k\pi$ كما هو موضح بالرسم.

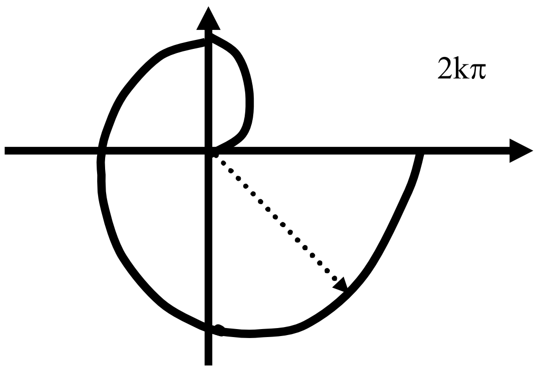


Figure 40: First turn of Archimades spiral

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(k\theta)^2\,d\theta = \frac{1}{2}k^2\int_0^{2\pi}\theta^2\,d\theta = \frac{4}{3}k^2\pi^3$$

Supplementary Problems

Problem (1)

Find the ***areas*** of the regions enclosed:

(a) $y = x^2 - 2$ and $y = 2$ Ans. $\frac{32}{3}$

(b) $y = x^4$ and $y = 8x$ Ans. $\frac{48}{5}$

(c) $y = x^2$ and $y = -x^2 + 4x$ Ans. $\frac{8}{3}$

(d) $y = 4 - 4x^2$ and $y = x^4 - 1$ Ans. $\frac{104}{15}$

(e) $y = \sqrt{|x|}$ and $5y = x + 6$ Ans. $\frac{34}{15}$

(f) $y = x^4 - 4x^2 + 4$ and $y = x^2$ Ans. 8

(g) $x = 2y^2$, $x = 0$ and $y = 3$ Ans. 18

(h) $4x = y^2 - 4$ and $4x = y + 16$ Ans. $\frac{243}{8}$

(i) $x = y^2 - 1$ and $x = |y|\sqrt{1 - y^2}$ Ans. 2

(j) $y = 2\sin x$ and $y = \sin 2x$ $0 \le x \le \pi$ Ans. 4

(k) $y = \sec^2 x$ and $y = \tan^2 x$ $-\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}$ Ans. $1 + \tan^2 x$

(l) $x = 3\sin y\sqrt{\cos y}$ and $x = 0$ $\quad 0 \le y \le \frac{\pi}{2}$ Ans. 2

(m) $y = 2 - (x - 2)^2$ and $y = x$ Ans. $\frac{1}{6}$

(n) $x = 4 - y^2$ and $x = y + 2$ Ans. $\frac{9}{2}$

Problem (2)

Find the ***area*** of the region in the first quadrant bounded by the line $y = x$, the line $x = 2$, the curve $y = \dfrac{1}{x^2}$ and the x-axis.

Ans. (1)

Problem (3)

Use the ***disk method*** to find the volume of solids generated by revolving about the ***x-axis*** the regions bounded by the following curves:

(a) $y = x^2,\ y = 0$ and $x = 2$ Ans. $\dfrac{32}{5}\pi$

(b) $y = x - x^2$ and $y = 0$ Ans. $\dfrac{1}{30}\pi$

(c) $y = \sqrt{\cos x},\ 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2},\ y = 0$ and $x = 0$ Ans. π

Problem (4)

Use the ***disk method*** to find the volume of solids generated by revolving about the ***y-axis*** the regions bounded by the following curves:

(a) $x = \sqrt{4 - y},\ x = 0$ and $y = 0$ Ans. 8π

(b) $x = 1 - y^2$ and $x = 0$ Ans. $\dfrac{16}{15}\pi$

(c) $x = \sqrt{2\sin 2y}\ ,\ 0 \le y \le \dfrac{\pi}{2},\ x = 0$ Ans. 2π

Problem (5)

Use the ***Washer method*** to find the volume of solids generated by revolving about the ***x-axis*** the regions bounded by the following curves:

(a) $y = x,\ y = 1$ and $x = 0$ Ans. $\frac{2}{3}\pi$

(b) $x = \sqrt{y},\ y = 4$ and $x = 0$ Ans. $\frac{128}{5}\pi$

(c) $y = x^2 + 1$ and $y = x + 3$ Ans. $\frac{117}{5}\pi$

(d) $y = \sec x,\ y = \sqrt{2},\ -\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}$ Ans. $\pi(\pi - 2)$

Problem (6)

Use the ***Washer method*** to find the volume of solids generated by revolving about the ***y-axis*** the regions bounded by the following curves:

(a) $y = x - 1,\ y = 1$ and $x = 1$ Ans. $\frac{4}{3}\pi$

(b) $y = x^2,\ y = 0$ and $x = 2$ Ans. 8π

(c) $y = x^2 + 1$ and $y = x + 3$ Ans. $\frac{117}{5}\pi$

(d) $x = \sqrt{25 - y^2}$ and $y - axis$ Ans. $\frac{500}{3}\pi$

Problem (7)

Find the volume of the solid generated by revolving the region bounded by $y = x^2$ and the line $y = 1$

(a) About the line $y=1$ Ans. $\frac{16}{15}\pi$

(b) About the line $y=2$ Ans. $\frac{56}{15}\pi$

(c) About the line $y=-1$ Ans. $\frac{64}{15}\pi$

Problem (8)

Find the lengths of the following curves:

(a) $y=\frac{1}{3}\left(x^2+2\right)^{\frac{3}{2}}$ from $x=0$ to $x=3$. Ans. 12

(b) $9x^2 = 4y^3$ from $(0,0)$ to $\left(2\sqrt{3},3\right)$. Ans. $\frac{14}{3}$

(c) $y=\frac{x^3}{3}+\frac{1}{4x}$ from $x=1$ to $x=3$. Ans. $\frac{53}{6}$

(d) $x=\frac{y^3}{4}+\frac{1}{4y^2}$ from $y=1$ to $y=2$. Ans. $\frac{123}{53}$

Problem (9)

Find the areas of the surfaces generated by revolving the curves below about the indicated axes:

(a) $y=\frac{x}{2},\ 0\le x\le 4,\ x-axis$ Ans. $4\sqrt{5}\pi$

(b) $y=\frac{x+1}{2},\ 1\le x\le 3,\ x-axis$ Ans. $3\sqrt{5}\pi$

(c) $y = \dfrac{x^3}{9},\ 0 \le x \le 2,\ x - axis$ Ans. $\dfrac{98}{81}\pi$

(d) $y = \sqrt{2x - x^2},\ 0 \le x \le 2,\ x - axis$ Ans. 4π

(e) $x = \dfrac{y^3}{3},\ 0 \le y \le 1,\ y - axis$ Ans. $\dfrac{\pi\left(\sqrt{8} - 1\right)}{9}$

(f) $x = 2\sqrt{4 - y},\ 0 \le y \le \dfrac{15}{4},\ y - axis$ Ans. $\dfrac{35\sqrt{5}\pi}{3}$

صفحة زوجية فارغة

4

الباب الرابع

التكامـل المتعـدد

Multiple Integrals

صفحة زوجية فارغة

الباب الرابع

التكامل المتعدد

Multiple Integrals

تقديم

إن التكامل موجود في حياتنا في شتى الموضوعات وفى كثير من التطبيقات إلا أن دراسته تتطلب ترتيب منطقي في عرض ودراسة موضوعاته المتشعبة وعليه كان حتما علينا أن نقوم بدراسة التكامل بدءا بالتكامل الغير محدد Indefinite integral من حيث تعريفه وطرق حسابه ثم موضوع التكامل المحدود Definite integrals ثم قمنا بعرض بعض من التطبيقات مثل الحجوم الدورانية والمساحات الدورانية السطحية وأطوال المنحنيات الخ هذه التطبيقات.

في الباب الحالي سوف ندرس بشيء من التفصيل موضوعات متعددة وتطبيقات هندسية كل ذلك من خلال دراسة التكاملات الخطية ، والمتعددة ، والسطحية والمعنى الهندسي والفيزيقي لكل نوع على حده والعلاقات المختلفة التي تربط أنواع من هذه التكاملات تحت شروط رياضية محددة. وكان حتما علينا أن نبدأ هذه الموضوعات بموضوع التكاملات الثنائية Double integrals وفيما يلي سوف نقوم بالعرض والتحليل هذا الموضوع لأنه يعتبر القاعدة الأساسية للموضوعات الأخرى. الشكل التوضيحي التالي هام للقارئ.

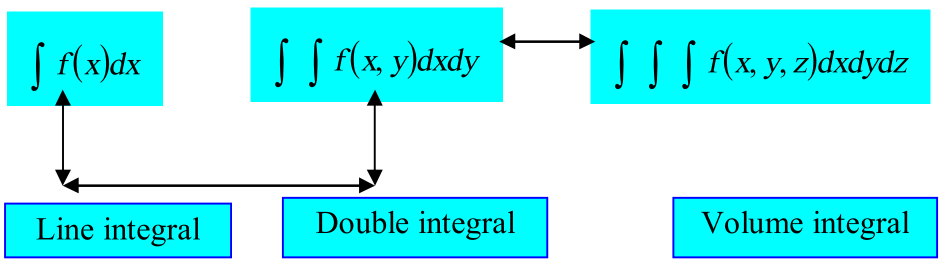


Figure 1: Different types of integrals

التكاملات الثنائية Double Integrals

التكامل الثنائي يبدأ بالتكامل الخطى بمعنى أننا لكي نفهم معنى التكامل الثنائي لابد أن نبدأ بالتكامل الخطى لدالة $f(x)$ معرفة على فترة (a,b) و عليه فالتكامل الخطى يأخذ الشكل التالي:

$$I=\int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

وليسأل القارئ نفسه سؤال ما المعنى الرياضي للمعادلة (1) والمعنى بسيط لنتخيل مجموع الحدود الموضحة في المعادلة التالية (2):

$$f(x_1)\delta x_1+f(x_2)\delta x_2+f(x_3)\delta x_3+\cdots+f(x_n)\delta x_n \tag{2}$$

فعندما تؤول n إلى المالانهاية أي $n\to\infty$ وكل المسافات الأفقية $\delta x_1,\delta x_2,\delta x_3$ تؤول إلى الصفر فهذا يعطى معنى التكامل المعرف بالمعادلة (1) ، والآن يمكننا وضع معنى للتكامل الثنائي وهي نفس المعالجة الرياضية السابقة لكن في البعدين.

لنفرض أن لدينا دالة $f(x, y)$ في متغيرين x،y معرفة على منطقة Region A كما هو موضح بالشكل (2) ولنفرض أننا قسمنا هذه المنطقة إلى مساحات كل مساحة جزئية $\delta A_1, \delta A_2, \delta A_3, \cdots, \delta A_n$ تساوى $\Delta x_1 \Delta y_1$ ، $\Delta x_2 \Delta y_2$ ، $\Delta x_2 \Delta y_2$ .... الخ.

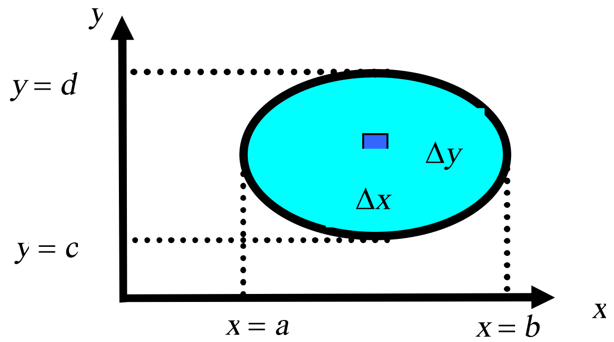


Figure 2

والآن بفرض وجود نقطة (x_r, y_r) في المنطقة المراد حساب مساحتها وبفرض حساب المجموع التالي:

$$f(x_1, y_1)\delta A_1 + f(x_2, y_2)\delta A_2 + f(x_3, y_3)\delta A_3 + \cdots + f(x_n, y_n)\delta A_n \qquad (3)$$

المعادلة (3) يمكن كتابتها على الصورة المختصرة التالية:

$$\sum_{r=1}^{n} f(x_r, y_r)\delta A_r \qquad (4)$$

والآن لو أخذنا نهاية هذا المجموع عندما تصل عدد الأقسام إلى مالانهاية والمساحة الجزئية للعنصر تصل إلى الصفر فهذا يعطينا تعريف علمي للتكامل الثنائي كالآتي:

Double integral of the function $f(x, y)$ over the region A is written as:

$$\iint_A f(x, y)dA = \iint_A f(x, y)dxdy = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \delta A\to 0}} \sum_{r=1}^{\infty} f(x_r, y_r)\delta A_r \qquad (5)$$

والآن وقبل البدء في التعامل مع التكامل الثنائي بالتفصيل نود الإشارة إلى بعض النقاط والمفاهيم الهامة التي تساعد القارئ في التعامل مع التكامل الثنائي بشيء من الحذر. من المعتاد عند حساب التكامل الثنائي على منطقة Region أن نقوم بتقسيم المنطقة إلى شرائح أفقية Horizontal strips أو شرائح رأسية Vertical strips ثم نكامل هذه الشريحة في الاتجاه الموازى لها ثم نحرك الشريحة من أقل نقطة في الاتجاه الأخر إلى أعلى نقطة فيه وهذا ما نسميه التكامل الداخلي Inner integration المتبوع بالتكامل الخارجي Outer integration والشكل التالي يوضح ذلك.

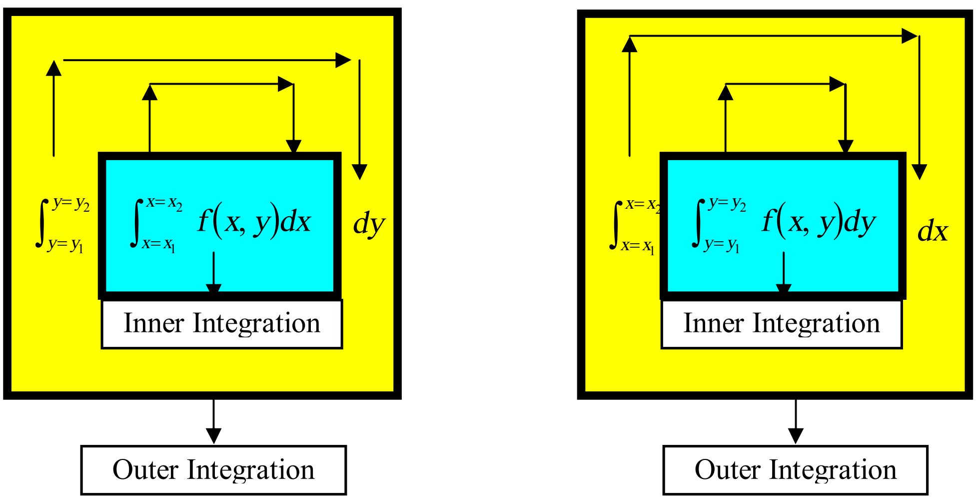


Figure 3:Double Integration

بالرجوع إلى الشكل رقم (3) هناك ملاحظات يجب على من يتعامل مع التكامل الثنائي أن يكون ملما بها قبل الشروع في حل أي مسألة وهذه الملاحظات كالآتي:

- حدود التكامل الداخلي Innner limits of integration ممكن تكون دوال Functions أو ثوابت
- حدود التكامل الخارجي Outer limits of integration لابد من أن تكون ثوابت
- تحديد موضع الشريحة Position of Strip أفقي أم رأسي أولا يتوقف على شكل منطقة التكامل
- إذا تغير مسار الحد الأدنى للشريحة فعند هذا التغيير نقسم منطقة التكامل
- عند إجراء التكامل الداخلي وليكن في اتجاه x نتعامل مع أي متغير أخر على أنه ثابت مع مراعاة أن جميع قواعد التكامل صحيحة.

الشكل التالي يوضح لنا شكل الشريحة واتجاه حركة الشريحة عندما نأخذ الشريحة أفقية وحدودها $x = x_1$ ، $x = x_2$ ثم اتجاه حركة الشريحة من أدنى نقطة في المنطقة إلى أعلى نقطة في المنطقة.

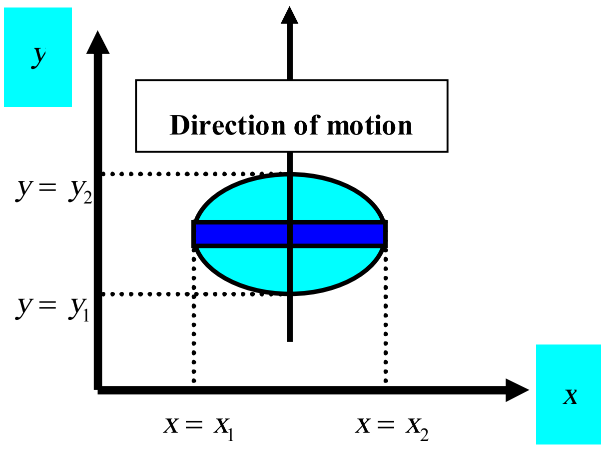


Figure 4: Strip and its direction of movement

فيما يلي سوف نقوم لحل مجموعة من مسائل التكامل الثنائي وذلك لنوضح للقارئ القواعد العامة المتبعة عند حساب مثل هذه التكاملات.

Example

Evaluate: $I=\int_{x=0}^{x=5}\int_{y=0}^{y=x^2}\left(x^3+xy^2\right)dydx$

Solution

بداية بالنظر إلى المسألة نجد الآتي:

(1) التكامل في اتجاه y أولا يليه التكامل في اتجاه x

(2) حدود التكامل الداخلية الأدنى فيها ثابت في حين الأعلى فيها متغير

سؤال يطرح نفسه داخل نفس القارئ هل من الضروري عند حساب التكامل الثنائي أن نرسم منطقة التكامل أم من الممكن إجراء التكامل مباشرة؟ والإجابة ببساطة تتلخص في أنه إذا كانت اتجاهات التكامل محددة وحدود التكامل في الشكل العام مثل المثال الحالي فلاداعي لرسم منطقة التكامل. أما في الحالات التي تكون فيها منطقة التكامل محاطة بأكثر منحنى وحدود التكامل غير واضحة منذ البداية ففى مثل هذه الحالات يجب رسم منطقة التكامل وسوف تتضح هذه المعلومة أكثر في حينها.

والآن لنبدأ التكامل في اتجاه y على اعتبار أن المتغير x يعتبر ثابت كالآتي:

$$I=\int_{x=0}^{x=5}\int_{y=0}^{y=x^2}\left(x^3+xy^2\right)dydx=\int_{x=0}^{x=5}\left(x^3y+x\frac{y^3}{3}\right)_{y=0}^{y=x^2}dx$$
$$=\int_{x=0}^{x=5}\left\{x^5+\frac{x^7}{3}\right\}dx \qquad (1)$$

بعد إجراء التكامل السابق لنبدأ التكامل في اتجاه x:

$$I=\int_{x=0}^{x=5}\left\{x^5+\frac{x^7}{3}\right\}dx=\left\{\frac{x^6}{6}+\frac{x^8}{24}\right\}_{x=0}^{x=5} \tag{2}$$

$$=\left[\left\{\frac{(5)^6}{6}+\frac{(5)^8}{24}\right\}-\left\{\frac{(0)^6}{6}+\frac{(0)^8}{24}\right\}\right]\approx 18880.2$$

Example

Evaluate $I=\iint_A (xy)dxdy$. Where A is a region bounded by the curve $x^2=4ay$, the line $x=2a$ and $x-axis$ in the positive direction of x only

Solution

في هذا المثال منطقة التكامل محاطة بأكثر من منحنى وعليه لابد من عمل إجراءات قبل البدء في حساب التكامل. أول هذه الإجراءات رسم منطقة التكامل من خلال مجموعة المنحنيات المعطاة كالآتي:

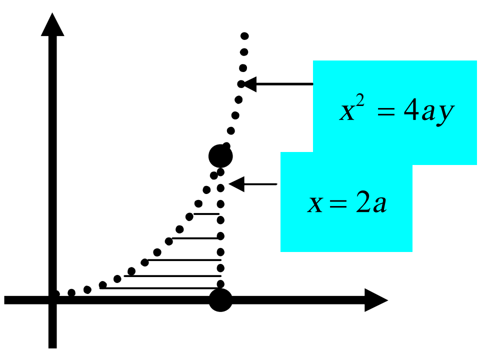


Figure 5

بالنظر إلى منطقة التكامل فيجد القارئ نفسه أمام اختيارين:

(1) إما أن يأخذ شريحة أفقية أولا ثم يحركها رأسيا بدءا من $y=0$ حتى نقطة تقاطع الخط $x=2a$ مع القطع المكافئ Parabola المعطى بالمعادلة $x^2=4ay$

(2) أو أن يأخذ شريحة راسية أولا ثم يحركها أفقيا بدءا من $x=0$ حتى الخط $x=2a$

الحل الأول شريحة أفقية وحركة رأسية

$$I=\int_{y=0}^{y=a}\int_{x=2\sqrt{ay}}^{x=2a}\{xy\}dxdy=\frac{1}{2}\int_{y=0}^{y=a}\{x^2y\}_{x=2\sqrt{ay}}^{y=a}dy \\ =\int_{y=0}^{y=a}\{2a^2y-2ay^2\}dy \tag{1}$$

بإجراء التكامل في اتجاه y كالآتي:

$$I=\int_{y=0}^{y=a}\{2a^2y-2ay^2\}dy=\frac{a^4}{3} \tag{2}$$

الحل الأول شريحة رأسية وحركة أفقية

$$I=\int_{x=0}^{x=2a}\int_{y=0}^{y=\frac{x^2}{4a}}\{xy\}dydx=\int_{x=0}^{x=2a}\left\{x\frac{y^2}{2}\right\}_{y=0}^{y=\frac{x^2}{4a}}dx \tag{3}$$

$$I=\int_{x=0}^{x=2a}\left\{x\frac{y^2}{2}\right\}_{y=0}^{y=\frac{x^2}{4a}}dx=\frac{1}{32a^2}\int_{x=0}^{x=2a}x^5\,dx=\frac{1}{32a^2}\left(\frac{x^6}{6}\right)_{x=0}^{x=2a}=\frac{a^4}{3} \tag{4}$$

تغيير ترتيب التكامل Change of Order of Integration

في كثير من مسائل التكامل الثنائي يكون من الصعب إجراء التكامل في أحد الاتجاهات أو أن يكون ناتج التكامل في الاتجاه الأول من الصعب حسابه في الاتجاه

الأخر وبناء على ذلك يتطلب الأمر في كثير من الأحيان استبدال ترتيب التكامل بمعنى أننا بدلا من إجراء التكامل في اتجاه x أولا نجرى التكامل في الاتجاه الأخر لكن يجب الحذر عند عمل هذا الإجراء من حيث شكل وحركة الشريحة إضافة إلى التغير الذي سوف يحدث في شكل حدود التكامل.

Example

Change the order of integration for $I=\int_{y=-a}^{y=a}\int_{x=0}^{x=\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dxdy$ over a circle of radius a and center at the origin

Solution

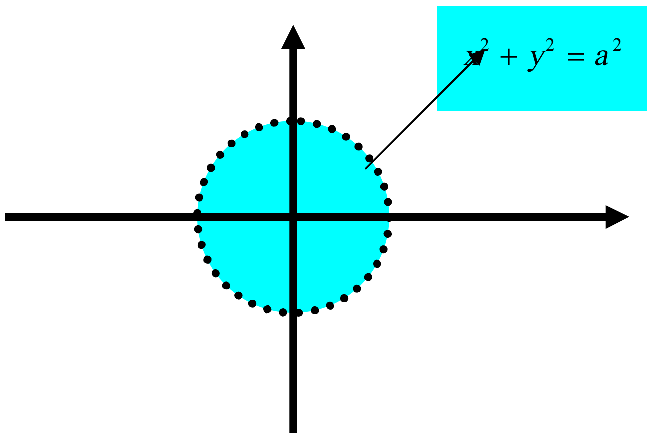


Figure 6

بالنظر إلى التكامل المعطى والمراد تغيير ترتيبه يمكننا من اللحظة الأولى أن التكامل المعطى فيه الشريحة أفقية وحركتها رأسية ومعنى أننا نود تغيير اتجاه التكامل أننا نريد أخذ الشريحة رأسية والحركة أفقية إذن لن يتغير سوى حدود التكامل وبالتالي يصبح التكامل على الصورة التالية:

$$I=\int_{x=0}^{x=a}\int_{x=-\sqrt{a^2-x^2}}^{x=\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)dxdy$$

Example

Change the order of integration for $I=\int_{x=0}^{x=1}\int_{y=x^2}^{y=2-x}(xy)dydx$ then, evaluate it over a region A bounded by the parabola $y=x^2$, straight line $y=2-x$ and $y-$axis.

Solution

نبدأ أولا برسم منطقة التكامل وذلك من خلال حدود التكامل المعطاة وهي كالآتي:

- قطع مكافئ $y=x^2$
- خط مستقيم $y=2-x$
- المحور الرأسي $y-axis$

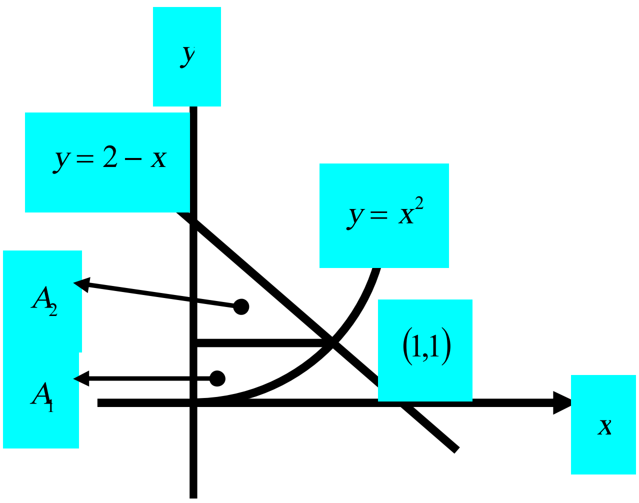


Figure 7

معنى تغيير ترتيب التكامل معناه أننا سوف نأخذ شريحة أفقية ونحركها رأسي وهنا لابد من وقفة ألا وهي أن الشريحة الأفقية سوف تغير مسارها عند تقاطع القطع المكافئ مع الخط المستقيم وقد أشرنا سابقا إلى أنه عندما تغير الشريحة مسارها فعند التغيير يجب تقسيم المنطقة. بناء عليه سوف تكون لدينا منطقتين كما هو موضح بالشكل (7). والآن نبدأ بحساب التكامل على كل منطقة على حده بالترتيب التالي:

- **التكامل على المنطقة** A_1

$$I=\int_{y=0}^{y=1}\int_{x=0}^{x=\sqrt{y}}(xy)dxdy=\int_{y=0}^{y=1}\left(\frac{x^2}{2}y\right)_{x=0}^{x=\sqrt{y}}dy$$
$$=\int_{y=0}^{y=1}\left(\frac{y^2}{2}\right)dy=\left(\frac{y^3}{6}\right)_{y=0}^{y=1}=\frac{1}{6} \tag{1}$$

- **التكامل على المنطقة** A_2

$$I=\int_{y=1}^{y=2}\int_{x=0}^{x=2-y}(xy)dxdy=\int_{y=1}^{y=2}\left(\frac{x^2}{2}y\right)_{x=0}^{x=2-y}dy=\int_{y=1}^{y=2}\left(\frac{y(2-y)^2}{2}\right)dy$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{y^4}{4}-\frac{4y^3}{3}+2y^2\right)_{y=1}^{y=2}=\frac{5}{24} \tag{2}$$

بجمع المعادلتين (1) ، (2) نحصل على الناتج النهائي للتكامل:

$$I=\frac{1}{6}+\frac{5}{24}=\frac{3}{8} \tag{3}$$

معامل التحويل جاكوبيان Jacobians

الـ Jacobian نستطيع تسميته بمعامل التحويل (تصغير أو تكبير) بمعنى أبسط لو لدينا مساحة في المستوى (x, y) وأردنا نقلها إلى محاور أخرى (r,θ) فإننا كما نعلم نقسم المساحة إلى مجموعة مساحات صغيرة كل واحدة منها $dxdy$ فعند نقل المساحة من (x, y) إلى (r,θ) فما علاقة $dxdy$ بـ $drd\theta$ العلاقة كالآتي:

$$dxdy = Jdrd\theta$$

المعامل J يسمى الـ Jacobian وهو عبارة عن محدد يحسب كالآتي:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Is called the *Jacobian*

يمكن كتابة الـ Jacobian على النحو التالي: $J\left(\dfrac{u, v}{x, y}\right)$ Or $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$

Example

If $x = r\cos\theta$ and $y = r\sin\theta$. Find $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r,\theta)}$

Solution

ملاحظات على عناصر محدد الـ Jacobian

كل عنصر عبارة عن كسر مكون من بسط ومقام.

(1) البسط في الكسر السابق (الخطوة الأولى) عبارة عن تفاضل جزئي للمتغير التابع الأول.

(2) المقام في الكسر السابق (الخطوة الأولى) عبارة عن تفاضل جزئي للمتغير المستقل الأول والذي يليه المتغير المستقل الثاني وهكذا.. معنى ذلك أن مقام الكسور في الصف الأول تفاضلات جزئية لجميع المتغيرات المستقلة وهكذا..

(3) تتكرر الثلاثة خطوات السابقة مع كل صف من صفوف المحدد.

(4) عدد صفوف المحدد تساوى عدد المعادلات وبالتالي المتغيرات التابعة

(5) عدد الأعمدة تساوى عدد المتغيرات المستقلة.

$$J\left(\frac{x,y}{r,\theta}\right)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta}\\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=\left\{r\cos^2\theta+r\sin^2\theta\right\}$$

But

$$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$$

Then

$$J\left(\frac{x,y}{r,\theta}\right)=r$$

التكامل الثنائي في الإحداثيات القطبية

Double Integrals in Polar Coordinates

سبق وأن تكلمنا عن الإحداثيات القطبية وقلنا أنها نوع من أنواع الإحداثيات تحتوى على متغيرين (r,θ)وفى هذا الجزء نود أن نوضح للقارئ شكل التكامل الثنائي

في الإحداثيات القطبية كما نود الإشارة إلى أن مثل هذا الموضوع في الغالب نلجأ إليه عندما يكون التكامل في الإحداثيات الكرتيزية صعب أو معقد لدرجة كبيرة فنلجأ إلى تحويل التكامل من على الإحداثيات الكرتيزية إلى الإحداثيات القطبية التي عادة تسهل إجراء التكامل.

$$I=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{r_1}^{r_1} f(r,\theta)\,dr\,d\theta$$

Example

Evaluate the following integral $I=\iint\limits_A r^3\,dr\,d\theta$ Over a region A included between the circles $r=2\sin\theta$ and $r=4\sin\theta$.

Solution

منطقة التكامل عبارة عن المساحة المحصورة بين المنحنيين $r=2\sin\theta$ ، $r=4\sin\theta$ وعليه يمكننا تطبيق العلاقة السابقة في حساب التكامل المطلوب وذلك كالآتي:

$$I=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{r_1}^{r_1} f(r,\theta)\,dr\,d\theta$$

$$I=\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta} r^3\,dr\,d\theta=\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=2\sin\theta}^{r=4\sin\theta}d\theta$$

$$=\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\left[\frac{(4\sin\theta)^4}{4}-\frac{(2\sin\theta)^4}{4}\right]d\theta=\frac{240}{4}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\sin^4\theta\,d\theta \qquad (1)$$

لحساب التكامل الأخير في المعادلة (1) يمكننا استخدام علاقة التكامل بالاختزال وذلك على النحو التالي:

$$I_n = -\left(\frac{1}{n}\right)\cos x \sin^{n-1} + \left(\frac{n-1}{n}\right) I_{n-2} \qquad (2)$$

بوضع $n = 4$ في المعادلة (2) نحصل على الآتي:

$$I_4 = \int_0^{\pi} \sin^4 \theta d\theta = -\left(\frac{1}{4}\right)\left[\cos x \sin^3\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi} + \left(\frac{3}{4}\right) I_2 \qquad (3)$$

مرة أخرى بالتعويض عن $n = 2$ في المعادلة (2):

$$I_2 = \int_0^{\pi} \sin^2 \theta d\theta = -\left(\frac{1}{2}\right)\left[\cos x \sin\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi} + \left(\frac{1}{2}\right) I_0 \qquad (4)$$

وأخيرا نحسب التكامل الأخير في المعادلة (4):

$$I_0 = \int_0^{\pi} d\theta = \pi \qquad (5)$$

بالتعويض من المعادلات (3) ، (4) ، (5) في المعادلة (1) فنحصل على المساحة المطلوبة:

$$I = \frac{240}{4}\left[-\left(\frac{1}{4}\right)\left[\cos x \sin^3\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi} + \left(\frac{3}{4}\right)\left[-\left(\frac{1}{2}\right)\left[\cos x \sin\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi} + \left(\frac{1}{2}\right)\pi\right]\right] \qquad (6)$$

المساحة المحصورة بين منحنيات في المستوى

Area Enclosed by Plane Curves

لنفرض أن لدينا منحنيين معادلاتهما $y = f_1(x)$ ، $y = f_2(x)$ وهذين المنحنيين محصورين بين خطين رأسيين معادلاتهما $x = x_1$ ، $x = x_2$ والمطلوب إيجاد المساحة المحصورة بين المنحنيين والخطين الرأسيين،وإتباعا لنفس الأسلوب السابق في حساب التكامل الثنائي كالآتي:

(1) نحدد اتجاه وحركة الشريحة

(2) نحدد حدود التكامل في كلا من الاتجاهين

(3) نحسب التكامل الداخلي

(4) وأخيرا نحسب التكامل الخارجي

Example

Find the area of a plate in the form of a quadrant of an ellipse, whose equation in Cartesian coordinates given by: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Solution

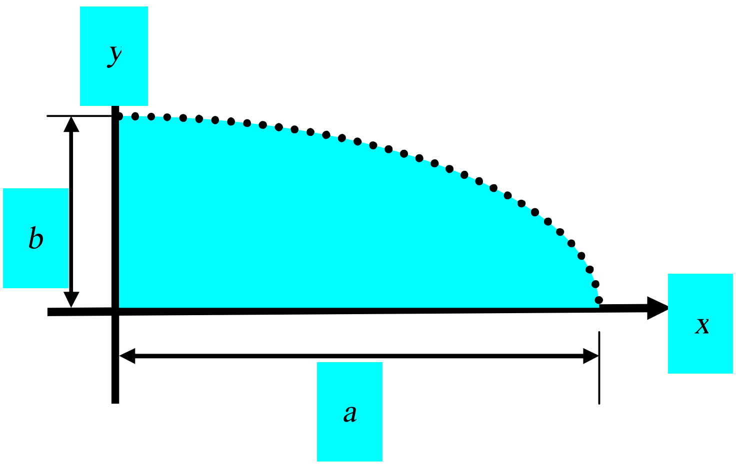


Figure 8

بأخذ شريحة رأسية حدودها من $y=0$ إلى $y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ وتحريكها أفقيا من $x=0$ إلى $x=a$ ، وعليه المساحة المطلوبة تأخذ الصورة التالية:

$$A=\int_{x=0}^{x=a}\int_{y=0}^{y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dy=\frac{b}{a}\int_{x=0}^{x=a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx \qquad (1)$$

التكامل الأخير في المعادلة (1) يتم إيجاده من خلال استخدام موضوع التكامل باستخدام الدوال المثلثية يرجى مراجعة هذا الموضوع في جزء التكامل في هذه الموسوعة وناتج التكامل الأخير يصبح على الصورة التالية:

$$A=\frac{b}{a}\int_{x=0}^{x=a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{\pi ab}{4} \qquad (2)$$

التكامل الثلاثي Triple Integrals

واضح من مسمى الموضوع أننا نتعامل مع نوع مختلف من التكاملات مع إنه امتداد لموضوع التكامل الثنائي من حيث بديهيات التكاملات العليا (الثنائية – الثلاثية) الخ. وعندما نتطرق بالحديث على تكاملات ثلاثية فإننا سوف نتعامل مع ثلاثة متغيرات ومن ثم نتكلم على دالة في ثلاثة متغيرات $f(x, y, z)$.

لنفرض أن لدينا حجم معرف على الدالة $f(x, y, z)$ فبنفس الأسلوب الذي اتبعناه عن إيجاد المساحة باستخدام مفهوم التكامل الثنائي من حيث تقسيم المساحة إلى مساحات جزئية ناتجة عن شرائح أفقية ورأسية ثم تجميع هذه المساحات وأخذ النهاية عندما تؤول أطوالها إلى الصفر ويؤول عدد المساحات إلى المالانهاية فنتج عن ذلك المساحة. نفس الكلام هنا من حيث تقسيم الحجم إلى حجوم متناهية في الصغر ثم إتباع نفس الأسلوب كالآتي:

- If this volume is subdivided into (n) elementary volumes

$$\delta V_1, \delta V_2, \delta V_3, \cdots, \delta V_n \qquad (1)$$

- Let (x_r, y_r, z_r) be any point within the $r\underline{th}$ sub-division δV_r
- Consider the sum

$$\sum_{r=1}^{\infty} f(x_r, y_r, z_r) \qquad (2)$$

The limit of this sums as $(n \to \infty)$ and $(\delta V_r \to 0)$ called the ***triple integral of*** $f(x, y, z)$ over the region, V and denoted by:

$$V = \iiint f(x, y, z)\,dV \qquad (3)$$

ملاحظات وإرشادات

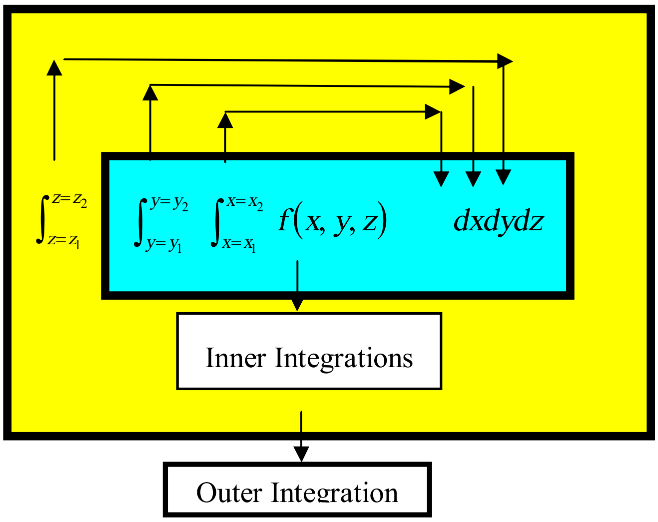


Figure 9

(1) حدود التكاملات الداخلية إما ثوابت أو دوال في المتغير الأخير للتكامل الخارجي.

(2) عند إجراء التكاملات الداخلية نتعامل مع المتغيرات الأخرى على أنها ثوابت.

Example

Show that $I=\int_{x_1=0}^{x_2=1}\int_{y_1=0}^{y_2=\sqrt{(1-x^2)}}\int_{z_1=0}^{z_2=\sqrt{(1-x^2-y^2)}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}\,dzdydx=\frac{\pi^2}{8}$

Solution

$$I=\int_{x_1=0}^{x_2=1}\int_{y_1=0}^{y_2=\sqrt{(1-x^2)}}\int_{z_1=0}^{z_2=\sqrt{(1-x^2-y^2)}}\frac{1}{\sqrt{(1-x^2-y^2)-z^2}}\,dzdydx \qquad (1)$$

بداية بإجراء التكامل في اتجاه z وبالتالي نتعامل مع كلا من x ، y على أنهما ثوابت وهذا يعنى أن المقدار تحت الجذر يمكن اعتباره $\sqrt{a^2-z^2}$ وباسترجاع معلوماتنا فهذا التكامل على إحدى الصور القياسية ، وبناء عليه فالتكامل سوف يؤول إلى الآتي:

$$I=\int_{x_1=0}^{x_2=1}\int_{y_1=0}^{y_2=\sqrt{(1-x^2)}}\left[\sin^{-1}\frac{z}{\sqrt{(1-x^2-y^2)}}\right]_{z_1=0}^{z_2=\sqrt{(1-x^2-y^2)}}dydx \qquad (2)$$

$$=\left[\sin^{-1}(1)-\sin^{-1}(0)\right]\int_{x_1=0}^{x_2=1}\int_{y_1=0}^{y_2=\sqrt{(1-x^2)}}dydx$$

والآن بإجراء التكامل في اتجاه y مع الأخذ في الاعتبار أن x نعاملها على أنها ثابت فنحصل على الآتي:

$$I=\left[\sin^{-1}(1)-\sin^{-1}(0)\right]\int_{x_1=0}^{x_2=1}\int_{y_1=0}^{y_2=\sqrt{(1-x^2)}}dy=\frac{\pi}{2}\int_{x_1=0}^{x_2=1}\sqrt{(1-x^2)}\,dx \tag{3}$$

$$I=\frac{\pi}{2}\int_{x_1=0}^{x_2=1}\sqrt{(1-x^2)}\,dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\left\{\frac{x\sqrt{(1-x^2)}}{2}+\frac{1}{2}\sin^{-1}x\right\}_{x_1=0}^{x_2=1} \tag{4}$$

$$=\frac{\pi^2}{8}$$

الأحجــام المصمتة Volumes of Solids

عندما نتكلم عن الحجوم المصمتة Solid volumes فنقصد بذلك الأحجام لأشكال مثل الكرة، الأسطوانة المصمتة، الهرم بأشكاله المختلفة.... الخ. مثل هذه الأحجام وقد ذكرنا سابقا في مقدمة التكامل المتعدد Multiple integrals أنه يمكننا إيجاد الحجم من خلال التكامل الثنائي Double integrals أو التكامل الثلاثي Tripple integrals وفيما يلي سوف نبدأ هذا الموضوع باستخدام التكامل الثنائي في حساب الحجوم.

الحجوم من التكامل الثنائي Volume from Double Integrals

لنتخيل أن لدينا سطح معادلته $z=f(x,y)$ ولنتخيل أن الإسقاط العمودي لهذا السطح على المستوى الأفقي xy يمثل بالمساحة S كمو هو موضح بالشكل التالي:

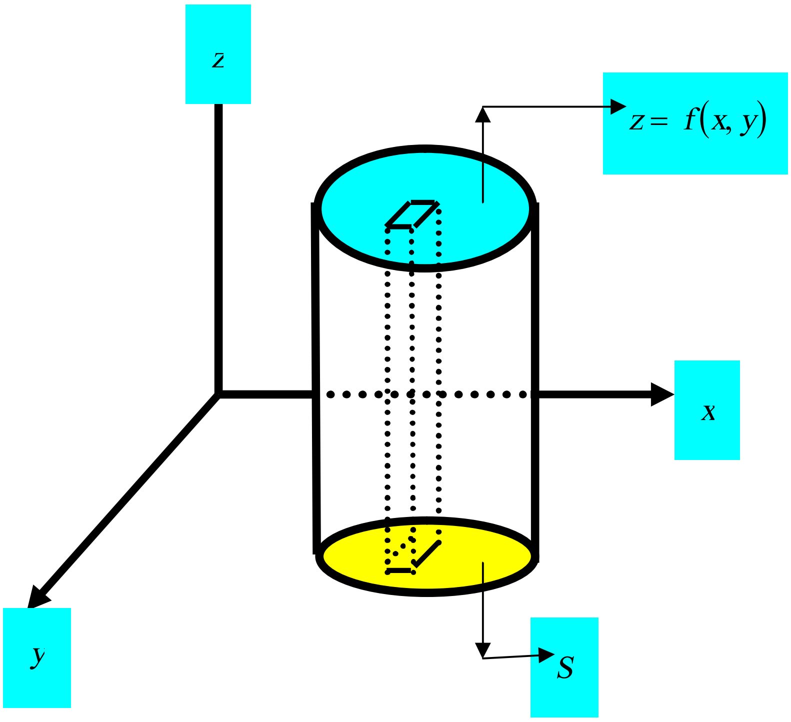


Figure 10

بتقسيم المساحة S إلى مستطيلات مساحة كل منها في المستوى xy عبارة عن $\delta x\delta y$ والآن بأخذ خطوط رأسية من رؤوس أي مستطيل في هذا المستوى بحيث تكون موازية للمحور الرأسي z حتى تتقاطع مع السطح محل الدراسة فينتج عن هذا منشورPrism بارتفاع يساوى OZ وعليه فإن حجم المنشور الناتج يصبح مساويا لحاصل ضرب مساحة القاعدة في الارتفاع أي $z\delta x\delta y$. والآن لو استخدمنا مفهوم التقسيم والتجميع ثم النهاية لهذا المجموع فنحصل على علاقة للحجم على النحو التالي:

$$V = \lim_{\substack{\delta x \to 0 \\ \delta y \to 0}} \sum\sum z\delta x\delta y = \iint z dx dy \qquad (1)$$

But

$$z = f(x, y) \tag{2}$$

Then, the volume will take the following form:

$$V = \iint f(x, y)\,dxdy \tag{3}$$

Example

Find the volume of the solid bounded by the cylinder $x^2 + y^2 = 4$ and the planes $y + z = 4$ and $z = 0$

Solution

لدينا أسطوانة قطعت بمستويين ونتج عن هذه التقاطعات حجم مصمت ومطلوب حجم الجسم المصمت الناتج كما هو موضح بالشكل.

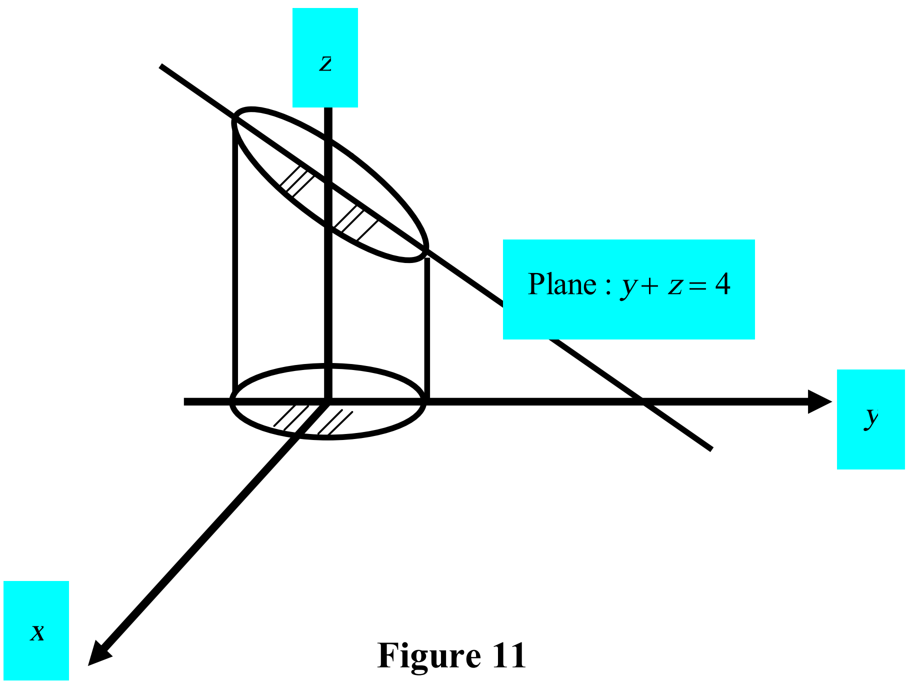


Figure 11

في منطوق المثال لم يحدد أسلوب محدد بعينه في حساب الحجم المصمت الناتج وهذا يعنى أننا من الممكن استخدام التكامل الثنائي في حساب التكامل المطلوب وعليه نبدأ بكتابة العلاقة التي تستخدم في الحل:

$$V = \int\int f(x, y)dxdy \qquad (1)$$

من الشكل التوضيحي يتبين لنا أن الجزء المراد حساب حجمه هو نصف الأسطوانة الأمامي وعليه فإن علاقة الحجم تأخذ الشكل التالي:

$$V = 2\int_{y=-2}^{y=2}\int_{x=0}^{x=\sqrt{4-y^2}} (z)dxdy \qquad (2)$$

لكن سطح الأسطوانة العلوي محدد بالمستوى $y+z=4$ وهذا يعطينا الإمكانية في إيجاد علاقة عامة للمتغير z على النحو التالي:

$$z = f(x, y) = 4 - y \qquad (3)$$

بالتعويض من (3) في (2) نحصل على الآتي:

$$V = 2\int_{y=-2}^{y=2}\int_{x=0}^{x=\sqrt{4-y^2}} (4-y)dxdy = 2\int_{y=-2}^{y=2}(4-y)[x]_{x=0}^{x=\sqrt{4-y^2}}\; dy$$

$$= 2\int_{y=-2}^{y=2}\left((4-y)\sqrt{4-y^2}\right)dy = 2\int_{y=-2}^{y=2}\left(4\sqrt{4-y^2}\right)dy - 2\int_{y=-2}^{y=2}\left(y\sqrt{4-y^2}\right)dy \qquad (4)$$

$$= V_1 + V_2$$

في المعادلة (4):

$$V_1 = 2\int_{y=-2}^{y=2}\left(4\sqrt{4-y^2}\right)dy \qquad (5)$$

$$V_2 = -2\int_{y=-2}^{y=2}\left(y\sqrt{4-y^2}\right)dy \qquad (6)$$

نلاحظ في المعادلتين (5) ، (6) أن التكامل يتم على فترة متماثلة حول الصفر وهذا يذكرنا بقاعدة التكامل على فترة متماثلة وتأثير نوع الدالة التي نكاملها من حيث كونها زوجية Even أو Odd وهذا ما سوف نحاول الاستفادة منه في حساب التكاملات في المعادلات (5) ، (6).

في المعادلة (6) الدالة التي نكاملها دالة **فردية** وذلك للآتي:

$$f_2(y) = \left(y\sqrt{4-y^2}\right) \Rightarrow f_2(-y) = \left(-y\sqrt{4-(-y)^2}\right) = -f_2(y) \Rightarrow V_2 = 0 \qquad (7)$$

في المعادلة (7) الدالة التي نكاملها دالة **زوجية** وذلك للآتي:

$$f_1(y) = \left(4\sqrt{4-y^2}\right) \Rightarrow f_1(-y) = \left(4\sqrt{4-(-y)^2}\right) = f_1(y) \qquad (8)$$

$$V_1 = 2\int_{y=-2}^{y=2}\left(4\sqrt{4-y^2}\right)dy = (16)\int_{y=0}^{y=2}\sqrt{4-y^2}\,dy$$

$$(9)$$

$$= (16)\left(\frac{y\sqrt{4-y^2}}{2} + \frac{4}{2}\sin^{-1}\frac{y}{2}\right)_{y=0}^{y=2} = 16\pi$$

Example

Find the volume bounded by the paraboloid $z^2 + y^2 = az$, the cylinder $x^2 + y^2 = 2ay$ and the plane $z = 0$

Solution

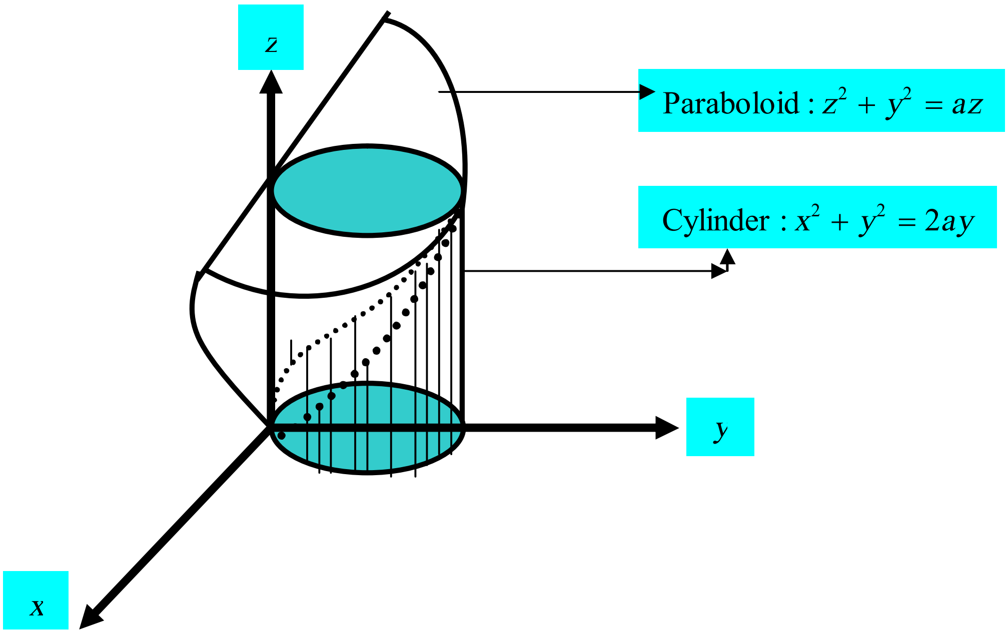


Figure 12

الجزء المصمت المراد إيجاد حجمه هي المنطقة الناتجة من تقاطع Paraboloid مع الأسطوانة القائمة الموازية للمحور الرأسي z معنى هذا أن إسقاط هذه المنطقة على المستوى الأفقي xy إنما هو شكل دائري وهذا يعطينا مؤشر إلى أن التكامل المطلوب ما هو إلا تكامل الدالة:

$$z = \left(\frac{x^2 + y^2}{a}\right) \qquad (1)$$

على دائرة في المسقط الأفقي معادلتها

$$x^2 + y^2 = 2ay \qquad (2)$$

بما أن منطقة التكامل على شكل دائري فهذا يعطينا فكرة إجراء التكامل على الإحداثيات القطبية ومن ثم لابد أن نتذكر معامل التحويل Jacobian الذي يمثل حلقة الوصل عند التعامل من محاور إلى محاور أخرى. بناء عليه لنفرض الآتي:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned} \tag{3}$$

باستخدام المعادلة (3) في المعادلة (1) تتحول إلى الصورة التالية:

$$z = \frac{r^2}{a} \tag{4}$$

باستخدام المعادلة (3) في المعادلة (2) تتحول إلى الصورة التالية:

$$r = 2a\sin\theta \tag{5}$$

والآن العلاقة التي سوف نستخدمها في حساب الحجم المطلوب في شكلها الكرتيزى كالآتي:

$$V = \int\int z\,dx\,dy \tag{6}$$

المعادلة (6) في الإحداثيات القطبية على النحو التالي:

$$V = \int\int\left(\frac{r^2}{a}\right) r\,dr\,d\theta \tag{7}$$

$$V = \frac{1}{a}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} d\theta \int_{r=0}^{r=2a\sin\theta} r^3\,dr = 4a^3\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} (\sin\theta)^4\,d\theta = \frac{3\pi a^3}{2} \tag{8}$$

الحجوم من التكاملات الثلاثية Volume as Triple Integrals

Suppose that we have a solid shown in the following figure.

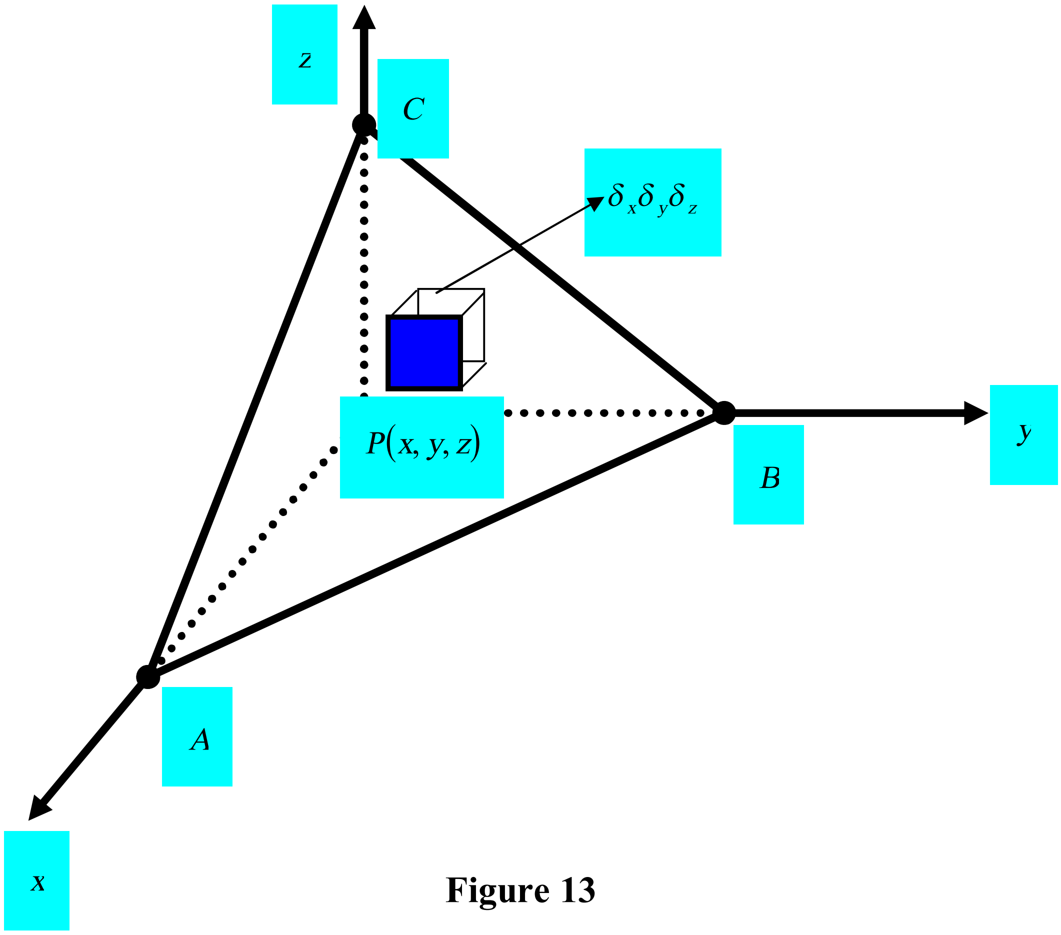


Figure 13

لنفرض أن لدينا منشور ثلاثي كما هو موضح بالشكل ، ولنفرض أننا قسمنا المنشور إلى مكعبات حجم كل واحد منها $\delta x \delta y \delta z$ ولو اتبعنا نفس الأسلوب في استنتاج العلاقة العامة للتكامل الثنائي لأمكننا استنتاج العلاقة العامة لحساب الحجم بدلالة التكامل الثلاثي Tripple integral + على الصورة التالية:

$$V = \lim_{\substack{\delta x \to 0 \\ \delta y \to 0 \\ \delta z \to 0}} \sum\sum\sum \delta x \delta y \delta z = \iiint dxdydz \qquad (1)$$

Example

Find the volume of the ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Solution

درسنا في الهندسة التحليلية السطح Elliposid وهو مجسم مصمت Solid من خواصه تماثله حول المحاور الرئيسية x ، y ، z ويقطع على الترتيب a ، b ، c من هذه المحاور. فلو افترضنا أننا سوف نتعامل مع الربع الأول ونضرب الناتج في 8 فبذلك نكون قد بسطنا التكامل إلى حد ما.

فلو أخذنا مكعب من هذا المجسم فسوف يتغير ارتفاعه من z = 0 حتى النقطة z التي تحقق معادلة Ellipsoid أي أننا يمكننا إيجاد هذه النقطة من معادلة Ellipsoid. مسقط هذا الشكل على المستوى الأفقي xy عبارة عن قطع ناقص Ellipse وعلى هذا الحجم المطلوب حدود تكامله تصبح على النحو التالي:

(1) The variable z varies from $z = 0$ to $z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$

(2) The variable y varies from $y = 0$ to $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$

(3) The variable x varies from $x = 0$ to $x = a$

حجم ربع واحد من مجموع ثمانية أرباع على الصورة التالية:

$$V = 8 \int_{x=0}^{x=2} \int_{y=0}^{y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \int_{z=0}^{z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dzdydx \qquad (1)$$

$$V = 8c \int_{x=0}^{x=2} \int_{y=0}^{y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \left(\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\right) dydx = 8c \int_{x=0}^{x=2} \int_{y=0}^{y=\sigma} \sqrt{\sigma^2 - y^2}\, dydx \qquad (2)$$

Where

$$\sigma = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \qquad (3)$$

بإجراء التكامل في اتجاه y نحصل على الآتي:

$$V = \frac{8c}{b} \int_{x=0}^{x=2} \left[\frac{\sigma\sqrt{\sigma^2 - y^2}}{2} + \frac{\sigma^2}{2} \sin^{-1} \frac{y}{\sigma}\right]_{y=0}^{y=\sigma} dx$$

$$= \frac{8c}{b} \int_{x=0}^{x=2} \left[\frac{b^2}{2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\frac{\pi}{2}\right] dz = \frac{4\pi abc}{3} \qquad (4)$$

وأخيرا بإجراء التكامل في اتجاه x فنحصل على الحجم المطلوب:

$$V = \frac{8c}{b} \int_{x=0}^{x=2} \left[\frac{b^2}{2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\frac{\pi}{2}\right] dz = \frac{4\pi abc}{3} \qquad (5)$$

مساحة الأسطح المنحنية Area of A Curved Surface

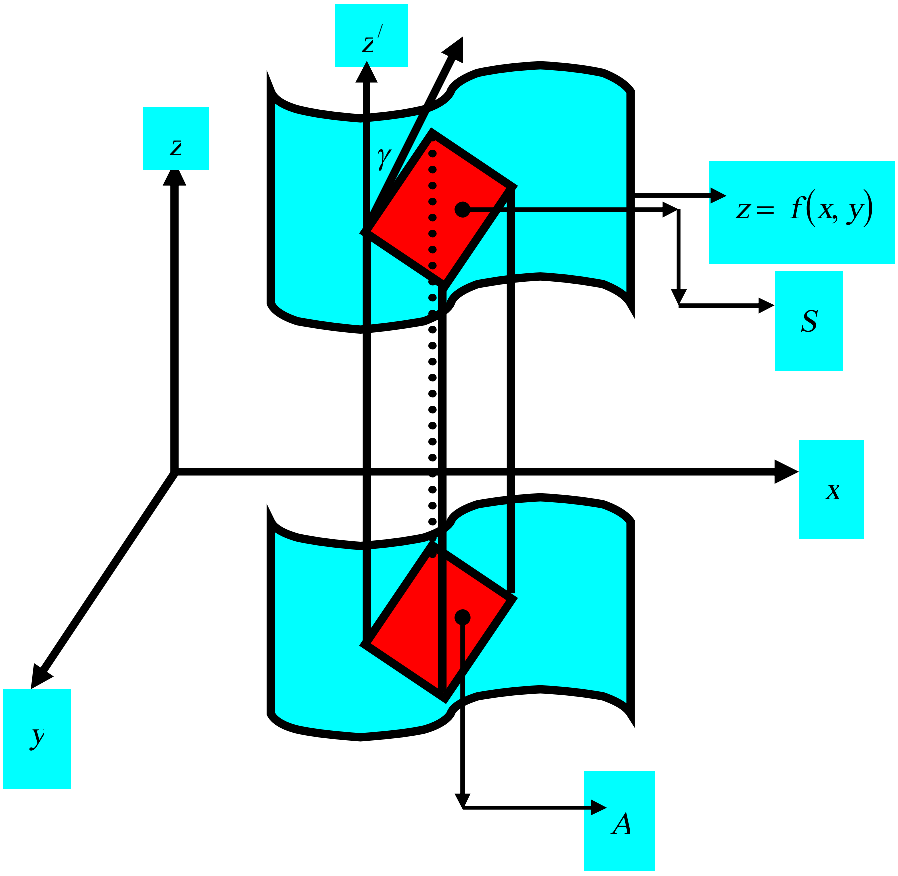


Figure 14

لنفرض أن لدينا سطح منحنى معادلته $z = f(x, y)$ وأخذنا جزء منه S لنفرض أن إسقاط هذا الجزء على المستوى الأفقي $xy-$plane هو المنطقة A كما هو موضح بالشكل (14). لنفرض أننا قسمنا هذه المساحة A إلى مساحات صغيرة مساحة كل جزئ $\delta A = \delta x \delta y$.

لنفرض الآن أننا أقمنا أسطوانة Cylinder على المساحة الجزئية السابقة فيكون

امتداد هذه المساحة وتلاقيها مع السطح هو δS، وحيث أن السطح منحنى فهذا يعنى أننا لو أخذنا مماس لهذا السطح فسوف يصنع هذا المماس زاوية γ وبالتالي يمكننا استنتاج علاقة بين $\delta A = \delta x \delta y$ ، δS بدلالة زاوية الميل γ كالآتي:

$$\delta x \delta y = \delta S \times \cos\gamma \tag{1}$$

نحن نعلم أن اتجاهات جيوب التمام Direction cosines للسطح $F(x, y, z) = 0$ تتناسب مع التفاضلات الجزئية لهذا السطح بالنسبة للمتغيرات الرئيسية x ، y ، z أي مع $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$، وعليه فإن اتجاهات جيوب التمام Direction cosines للعمودي على السطح $S[F = f(x, y) - z]$ تتناسب مع $-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1$ ، ومن خبراتنا السابقة فإن اتجاهات جيوب التمام للمحور الرأسي z هي 0,0,1 وعليه:

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{\left\{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1\right\}}} \tag{2}$$

إذن المساحة المنحنية δS يمكن أن تأخذ الشكل التالي:

$$\delta S = \frac{\delta x \delta y}{\cos\gamma} = \left\{\sqrt{\left\{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1\right\}}\right\} \delta x \delta y \tag{3}$$

بتعميم المعادلة (3) على السطح المنحنى فيمكننا إيجاد المساحة للسطح المنحنى كالآتي:

$$S = \iint_A \sqrt{\left\{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1\right\}}\, dx dy \tag{4}$$

المساحة المنحنية S يمكن أن تأخذ صور متعددة هذه الصور تعتمد على إسقاط المساحة S على المستويات الرئيسية yz ، $zx-$ ومن ثم يمكننا كتابة العلاقات المختلفة التالية للمساحة S كالآتي:

$$S=\iint_A \sqrt{\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2+1\right\}}dydz \tag{5}$$

$$S=\iint_A \sqrt{\left\{\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+1\right\}}dzdx \tag{6}$$

Example

Find the area of the portion of the cylinder $x^2+z^2=4$ lying inside the cylinder $x^2+y^2=4$

Solution

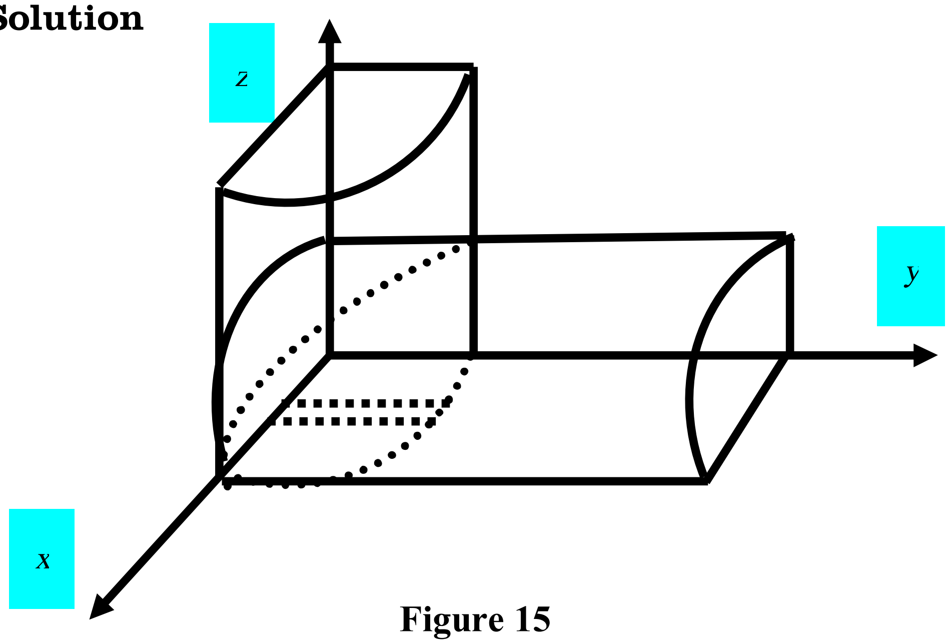


Figure 15

من الشكل (15) يتضح لنا أن الجزء الناتج من تقاطع الأسطوانتين هو المراد إيجاد مساحته، والآن لنسأل أنفسنا سؤال ما هي العلاقة التي سوف نستخدمها خاصة وأنه لدينا ثلاثة علاقات مختلفة ، والإجابة تكمن في المستوى الذي سوف يتم إسقاط الشكل عليه بمعنى أبسط لنفرض أننا سوف نسقط الشكل على المستوى الأفقي فهذا يتطلب استخدام العلاقة التالية:

$$S = \iint_A \sqrt{\left\{ \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + 1 \right\}} dxdy \tag{1}$$

بالنظر إلى العلاقة (1) نجد أنفسنا مطالبين بحساب التفاضلات الجزئية $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \& \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ وهذا يعنى أننا سوف نفاضل جزئيا معادلة الأسطوانة $x^2 + z^2 = 4$.

والآن بإجراء التفاضلات الآتية:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z} \tag{2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \tag{3}$$

كنوع من التبسيط الرياضي لا أكثر سوف نقوم بحساب المقدار تحت الجذر في المعادلة (1) وتبسيطه قبل التعويض في المعادلة (1) كالآتي:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + 1 = \frac{x^2 + z^2}{z^2} \tag{4}$$

والآن بالتعويض من المعادلة (4) في المعادلة (1) تأخذ المعادلة (1) الشكل التالي:

$$S = 8 \int_{x=0}^{x=2} \int_{y=0}^{y=\sqrt{4-x^2}} \frac{2}{\sqrt{4-x^2}} dydx = 16 \int_{x=0}^{x=2} \left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{4-x^2}} \right) dx = 16 \int_{x=0}^{x=2} dx = 32 \tag{5}$$

تطبيقات هندسية Engineering Applications

حساب الكتلة Evaluation of Mass

الكتلة تعرف دائما بأنها كمية المادة لجسم ما، إلا أن العلماء عادة ما يُعرّفون الكتلة بأنها مقياس القصور الذاتي الذي هو خاصَّة من خواص جميع المواد. والقصور الذاتي هو ميل الجسم الساكن لأن يبقى ساكنا، والجسم المتحرك لأن يستمر في حركته بسرعة منتظمة وفي نفس الاتجاه. واستخدام القوة هو فقط الذي يجعل الجسم الساكن يتحرك ، أو يغير من سرعة أو اتجاه الجسم المتحرك. وكلما زادت كتلة الجسم زادت صعوبة تغيير سرعته. فالقاطرة مثلا لها كتلة أكبر من السيارة، ولهذا يتطلب إيقاف القاطرة، على سبيل المثال، قوة أكبر من القوة اللازمة لإيقاف سيارة إذا كان كل منهما يتحرك بنفس السرعة. تتوقف وحدة الكتلة على نظام الوحدات الميكانيكية المستخدم. ويفضل العلماء نظام الوحدات المطلقة (متر - كيلو جرام - ثانية)، حيث تكون وحدة الكتلة هي الكيلو جرام (1000جرام). ويستخدم بعض المهندسين نظام التثاقل (قدم - رطل - ثانية) 14,594كجم.

الكتلة والوزن

يختلف كل منهما عن الآخر؛ فالوزن هو القوة المؤثرة على الجسم نتيجة لجاذبية كوكب أو جسم سماوي آخر. ويقل وزن الجسم في نطاق جاذبية كوكب ما كلما ابتعد عن سطح الكوكب. أمّا كتلته فتبقى ثابتة في أي مكان كانت. قانون بقاء الكتلة .ينص قانون بقاء الكتلة على أن الكتلة لا يمكن استحداثها أو إفناؤها. ويُسمى هذا القانون أيضًا قانون بقاء المادة لأن العلماء اعتقدوا يومًا أن الجسم تتغير كتلته فقط عندما يفقد جزءاً من مادته. ولكنا نعلم الآن أن الجسم تتغير كتلته أيضا عندما تتغير طاقته، وتزداد الكتلة بزيادة الطاقة.

وفي التفاعلات الكيميائية تكون التغيرات في الكتلة طفيفة جدًا. فمثلا عندما يحترق الفحم تنتج طاقة حرارية بالإضافة إلى ثاني أكسيد الكربون وبخار الماء والرماد. ولا ينتج عن هذا التفاعل إلا فقدان 0,0003 جم فقط لكل مليون جم من الفحم المحترق. ولكن التفاعلات النووية مثل التي تحدث في مفاعل ذري ينتج عنها انطلاق طاقة هائلة، مصحوبة بنقص ملحوظ في الكتلة. فالمليون جرام من اليورانيوم، عند انشطارها نوويًا، تفقد حوالي 750جم. ومعظم الطاقة التي تُفقد نتيجة لاحتراق الفحم أو انشطار نوويّ، يعاد امتصاصها ثانية بذرات أخرى وتصبح كتلة مرة أخرى. لنفرض الآن أن لدينا جسم صلب كثافته ρ فإنه يمكننا حساب كتلة هذا الجسم من العلاقة التالية:

$$M = \iiint_V \rho dxdydz \qquad (1)$$

Example

Find the mass of the tetrahedron bounded by the coordinate planes and the plane $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ if its density is given by μxyz

Solution

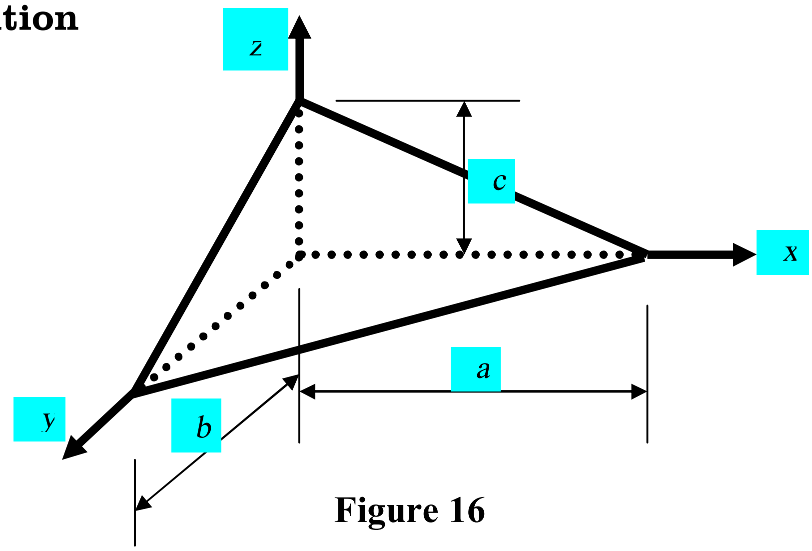


Figure 16

لدينا مجسم بالشكل (16) ومطلوب كتلته ومعطى لنا كثافة مادته. واضح أن المثال مجرد تطبيق مباشر على مسألة تعيين كتلة المجسم وعليه نبدأ الحل بكتابة الصورة العامة لحساب الكتلة على النحو التالي:

$$M = \iiint_V \rho dxdydz \qquad (1)$$

$$M = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \rho dzdydx = \int_{x_1=0}^{x_2=a} \int_{y_1=0}^{y_2=b\left(1-\frac{x}{a}\right)} \int_{z_1=0}^{z_2=c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)} (\mu xyz) dzdydx \qquad (2)$$

وبحساب التكامل في الاتجاهات z ، y ، x على التوالي نحصل على الكتلة المطلوبة:

$$M = \frac{\mu}{2} \int_{x_1=0}^{x_2=a} \int_{y_1=0}^{y_2=b\left(1-\frac{x}{a}\right)} xy\left\{c^2\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^2\right\} dydx = \frac{\mu(abc)^2}{720}$$

مركز ثقل الجسم Center of Gravity

ما هو مركز الثقل ؟

مركز الثقل هو نقطة افتراضية تعبر عن محصلة أثقال عناصر المجسم وهي أيضاً نقطة الاتزان، كما نستطيع القول بأنه النقطة التي تتوزع حولها ثقل الجسم بالتساوي من جميع الجهات. على سبيل المثال في حال انتظام كثافة مادة الجسم فإن مركز ثقل الكرة هو مركزها ومركز ثقل المكعب أو متوازي المستطيلات هو منتصف الوتر الذي يصل بين ركنين متقابلين فيه ومركز ثقل الأسطوانة هو منتصف محورها ، ومن اليسير حسابياً تحديد مكان مركز الثقل للمجسمات المنتظمة بينما كثير من المجسمات الغير منتظمة تحتاج لحسابات معقدة لتحديد مركز ثقلها.

ماذا نعني بقاعدة الارتكاز ؟

قاعدة الارتكاز هي مساحة مسقط المحيط الخارجي الواصل بين نقاط التلامس للمجسم على المستوى المتعامد مع اتجاه الثقل (عادة المستوى الأفقي) وكلما زادت مساحة قاعدة الارتكاز كلما زادت مقاومة الجسم للحركة وأيضاً كلما قلت المسافة بين مركز الثقل وقاعدة الارتكاز كلما زاد اتزان الجسم وزادت مقاومته للحركة والعكس صحيح مؤكد أن الكلام علمي أكاديمي جاف وربما معقد ولكن بعد تطبيقه على نماذج ملموسة لدينا يكون أكثر واقعية ، ولنجرب مع كوب أسطواني طويل موضوع على منضده حين إمالته قليلاً نجد أنه يقاوم الميل محاولاً العودة إلى وضعه الأصلي وباستمرار إمالته حتى حد معين نجده يسقط في اتجاه الإمالة وفي هذه الحالة نستطيع القول بأنه حينما خرج ظل مركز الثقل للكوب عن محيط قاعدة الكوب قد بدأ في السقوط ، وبتكرار التجربة مع كوب أقصر وأوسع (محيط قاعدته أكبر) من السابق سنجد أننا نحتاج إلى إمالته بدرجة أكبر لدفعه للسقوط في اتجاه الإمالة، فماذا سيكون الحال مع طبق ؟

التطبيقات التي تحتاج لحسابات مراكز الثقل للمجسمات كثيرة ومنها البديهي ومنها المعقد حسابياً وعلى سبيل المثال حينما يحتاج المهندسون عند تصميم سفينة لتحديد مكان غرف المحركات ذات الأوزان الثقيلة وتحديد أماكن وضع الحاويات وتوزيع الأحمال للحفاظ على اتزان السفينة ومقاومتها لقوى الإمالة من الأمواج والتيارات البحرية ، وما يقال في شأن السفينة يقال أيضاً حين تصميم هيكل طائرة وتوزيع الأحمال فيه وأماكن تثبيت الأجنحة و .... والتطبيقات في هذا الشأن كثيرة بما يكفي للقول بأنه لا يخلو تصميم هندسي من حسابات مركز الثقل.

مركز الثقل لشكل Plane في المستوى والإحداثيات الكرتيزية

يرمز لمركز الثقل لأي شكل في المستوى بالإحداثيات $(\bar{x}, \bar{y})$ ويتعين من العلاقتين التاليتين:

$$\bar{x} = \frac{\iint x\rho dxdy}{\iint \rho dxdy} \qquad (1)$$

$$\bar{y} = \frac{\iint y\rho dxdy}{\iint \rho dxdy} \qquad (2)$$

مركز الثقل لشكل Plane في المستوى والإحداثيات القطبية

في حالة استخدام الإحداثيات القطبية لإيجاد مركز ثقل أي شكل في المستوى وذلك باستخدام التعويض بالعلاقات التالية:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned} \qquad (3)$$

بالتعويض من المعادلة (3) في المعادلات (1) ، (2) فنحصل على مركز ثقل الشكل بدلالة الإحداثيات القطبية على النحو التالي:

$$\bar{x} = \frac{\iint r\cos\theta\rho rdrd\theta}{\iint \rho drd\theta} \qquad (4)$$

$$\bar{y} = \frac{\iint r\sin\theta\rho rdrd\theta}{\iint \rho rdrd\theta} \qquad (5)$$

مركز الثقل لمجسم Solid في الإحداثيات الكرتيزية

أي مجسم يقع في الفراغ الثلاثي وعلى ذلك فإن مركز ثقل وزنه يتعين بثلاثة إحداثيات $(\bar{x}, \bar{y})$ على النحو التالي:

$$\bar{x} = \frac{\iiint x\rho dxdydz}{\iiint \rho dxdydz} \qquad (6)$$

$$\bar{y} = \frac{\iiint y\rho dxdydz}{\iiint \rho dxdydz} \qquad (7)$$

$$\bar{z} = \frac{\iiint z\rho dxdydz}{\iiint \rho dxdydz} \qquad (8)$$

Example

Find the center of gravity of the area of the cardioid $r = a(1+\cos\theta)$

Solution

نذكر القارئ بأننا تعرضنا بالتفصيل لأنواع مختلفة من المنحنيات واسعة النطاق والتي لها مواصفات خاصة جدا وكل منحنى له أكثر من صورة ومن ضمن هذه المنحنيات منحنى الكردويد Cardioid (منحنى القلب) ومن أحد صوره ما هو معطى في مسألتنا الحالية.

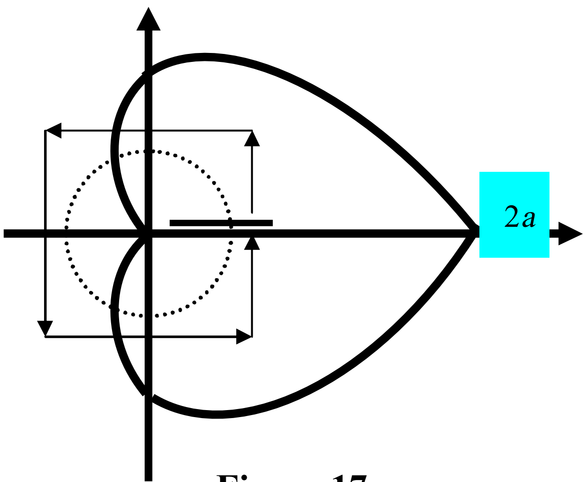


Figure 17

والآن نبدأ بكتابة العلاقات الخاصة بمركز الثقل وهي على النحو التالي:

$$\bar{x} = \frac{\iint r\cos\theta\rho r dr d\theta}{\iint \rho dr d\theta} \tag{1}$$

$$\bar{x} = \frac{\int_{\theta=-\pi}^{\theta=+\pi} \int_{r=0}^{r=a(1+\cos\theta)} r^2 \cos\theta \rho dr d\theta}{\int_{\theta=-\pi}^{\theta=+\pi} \int_{r=0}^{r=a(1+\cos\theta)} r dr d\theta} = \frac{\int_{\theta=-\pi}^{\theta=+\pi} \left(\frac{r^3}{3}\right)_{r=0}^{r=a(1+\cos\theta)} \cos\theta \rho d\theta}{\int_{\theta=-\pi}^{\theta=+\pi} \left(\frac{r^2}{2}\right)_{r=0}^{r=a(1+\cos\theta)} d\theta} \tag{2}$$

$$\bar{x} = \left[\frac{2a}{3}\right] \frac{\int_{\theta=-\pi}^{\theta=+\pi} \cos\theta(1+\cos\theta)^3 d\theta}{\int_{\theta=-\pi}^{\theta=+\pi} (1+\cos\theta)^2 d\theta} = \left[\frac{2a}{3}\right] \frac{\int_{\theta=-\pi}^{\theta=+\pi} \left(3\cos^2\theta + 4\cos^2\theta\right) d\theta}{\int_{\theta=-\pi}^{\theta=+\pi} \left(1+\cos^2\theta\right) d\theta} \tag{3}$$

هناك تكامل نود أن نذكر القارئ به وهو على الصورة التالية:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos^n \theta d\theta = \begin{cases} 2\int_0^{+\pi} \cos^n \theta d\theta \\ 0 \end{cases} \tag{4}$$

ولنستفيد من هذه الصورة في حساب التكاملات في المعادلة (4) فيمكننا إجراء التكاملات على النحو التالي:

$$\bar{x} = \left[\frac{2a}{3}\right] \frac{2\left(\int_{\theta=0}^{\theta=+\pi} \left(3\cos^2\theta + 4\cos^2\theta\right) d\theta\right)}{2\left(\int_{\theta=0}^{\theta=+\pi} \left(1+\cos^2\theta\right) d\theta\right)} = \frac{5a}{6} \tag{5}$$

نود أن نلفت نظر القارئ إلى أنه يمكننا من خلال شكل منحنى الكردويد

Cardioid أن الإحداثي الرأسي لمركز ثقل الشكل المعطى يقع على المحور الأفقي وعليه فأن مركز الثقل المطلوب هو $\left(\frac{5a}{6},0\right)$.

عـزم القصور الذاتي Moment of Inertia

القصور الذاتي خاصية من خواص كل المواد تجعل الجسم الذي لا يتحرك مستمرًا في حال عدم حركته، ما لم تدفعه قوة إلى الحركة. ويجعل القصور الذاتي أيضًا الجسم المتحرك مستمرًا في الحركة بسرعة ثابتة وفي الاتجاه ذاته ما لم تتدخل قوة خارجية وتغير حركته. ومثل هذه القوة وحدها هي القادرة على أن تجعل الجسم المتحرك يبطئ من سرعة حركته، أو يُسرع، أو يتوقف، أو يدور. والاحتكاك مع الأجسام الأخرى إحدى القوى التي تُبطّئ، عادة، أو ُتوقِف الأجسام المتحركة. وتتوقف القوة المطلوبة لتغيير حركة جسم ما على كتلة ذلك الجسم. ويمكن تعريف الكتلة بأنها كمية المادة الموجودة في جسم ما. وكلما كبرت كتلة الجسم كان تحريكه أو تغيير اتجاهه وسرعته أصعب. فإيقاف قاطرة متحركة، على سبيل المثال، يحتاج إلى جهد أكبر من إيقاف سيارة تسير بالسرعة ذاتها. والسبب في ذلك هو العلاقة بين القصور الذاتي والكتلة. ويعرف علماء الفيزياء الكتلة عادة بأنها قياس للقصور الذاتي عِوضًا عن قياس المادة.

وتتوقف الصعوبة في تغيير اتجاه أو سرعة جسم ما أيضًا على السرعة التي يتم بها التغيير. وإبطاء، أو زيادة سرعة جسم ما، أو جعله يدور فجأة تكون أصعب من إحداث هذه التغيرات بالتدرج. وتجد السيارة صعوبة أكثر في التوقف على طريق منحنٍ وهي تسير بسرعة عالية عنها وهي تسير بسرعة بطيئة. ويستخدم علماء الفيزياء مصطلح تسارع لوصف معدل التغير في اتجاه أو سرعة جسم ما. وكان العالم البريطاني السير إسحق نيوتن أول من وصف القصور الذاتي. وقدَّم هذه الفكرة في أول قانون خاص بالحركة، نُشر عام 1687م.

هناك حالات مختلفة لعزم القصور الذاتي فمنها عزم القصور الذاتي حول المحور الأفقي x ومنها عزم القصور الذاتي حول المحور الرأسي y ومنها ما هو على المستوى الأفقي xy وفيما يلي سوف نرد تباعا هذه الحالات على النحو التالي:

الحالة الأولى: عزم القصور الذاتي في المستوى حول المحور الأفقي x

$$I_x = \iint \rho y^2\, dxdy \qquad (1)$$

الحالة الثانية: عزم القصور الذاتي في المستوى حول المحور الرأسي y

$$I_y = \iint \rho x^2\, dxdy \qquad (2)$$

الحالة الثالثة: عزم القصور الذاتي حول العمودي على المستوى

$$I_\perp = \iint \rho\left(x^2 + y^2\right)dxdy \qquad (3)$$

والآن نتكلم عن عزم القصور الذاتي لمجسم Solid وأيضا سوف نذكر الحالات المختلفة سواء حول x أو y أو z وهذه الحالات كالآتي:

الحالة الأولى: عزم القصور الذاتي لمجسم حول المحور x

$$I_x = \iiint \rho\left(y^2 + z^2\right)dxdydz \qquad (4)$$

لاحظ أن الدالة التي نكاملها هي مجموع مربع الإحداثيات لكل من y ، z

الحالة الثانية: عزم القصور الذاتي لمجسم حول المحور y

$$I_y = \iiint \rho\left(x^2 + z^2\right)dxdydz \qquad (5)$$

لاحظ أن الدالة التي نكاملها هي مجموع مربع الإحداثيات لكل من x ، z

الحالة الثانية: عزم القصور الذاتي لمجسم حول المحور z

$$I_z = \iiint \rho\left(x^2 + y^2\right)dxdydz \qquad (6)$$

لاحظ أن الدالة التي نكاملها هي مجموع مربع الإحداثيات لكل من y ، x

Example

Find the moment of inertia of the area bounded by the lemniscate curve $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ about its axis.

Solution

في هذا المثال نتعامل مع مساحة مستوية محاطة بنوع من المنحنيات نوعية أشرنا إليها سابقا وهي من المنحنيات المشهورة التي لها مواصفات وشكل خاص ألا وهو منحنى الفيونكة Lemniscate.

لنفرض الآن أن كثافة المادة للمساحة المستوية والمراد إيجاد عزم القصور الذاتي لها هي ρ ومن ثم فإن كتلة جزئ من هذه المساحة يمكن كتابته على الصورة التالية:

$$\rho M = \rho r dr d\theta \qquad (1)$$

إذن الكتلة الكلية للمساحة المستوية تحت الدراسة يمكن حسابها من التكامل التالي:

$$M = 4\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}} \int_{r=0}^{r=a\sqrt{\cos 2\theta}} \rho r dr d\theta = 2\rho a^2 \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta = \rho a^2 \qquad (2)$$

بعد حساب الكتلة يمكننا الآن حساب عزم القصور الذاتي حول المحور x للمساحة المستوية على النحو التالي:

$$I_x = 4\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}}\int_{r=0}^{r=a\sqrt{\cos 2\theta}} \rho r^3 \sin^2\theta dr d\theta = \rho a^4 \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}} \cos^2 2\theta \sin^2 2\theta d\theta \qquad (3)$$

$$= \frac{\rho a^4}{48}(3\pi - 8)$$

Example

A horizontal boiler has a flat bottom and its ends are plane and semi-circle. If it is just full of water, show that the depth of the center of the pressure of either end is 0.7 times the total depth approximately.

Solution

لنفرض أن الغلاية Boiler نصف كرة كما هو موضح بالرسم ومعادلتها $x^2 + y^2 = a^2$.

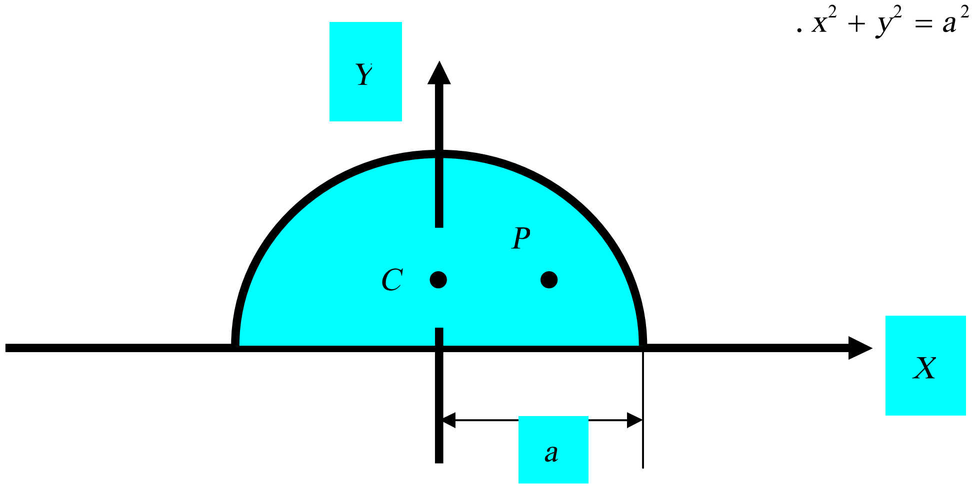


Figure 18

والآن لنفرض أن w تمثل وزن الماء لكل وحدة حجم وعليه فإن ضغط الماء P عند أي نقطة في الغلاية يمكن التعبير عنه رياضيا كالآتي:

$$P(x, y) = w(a - y) \tag{1}$$

لنفرض أن k تمثل ارتفاع مركز الضغط فوق المحور OX وعليه فأن مركز الضغط المطلوب يمكن إيجاده من العلاقة التالية:

$$k = \frac{\int\int yP(x, y)dxdy}{\int\int P(x, y)dxdy} \tag{2}$$

بالتعويض بحدود التكامل من خلال منطقة التكامل فتأخذ المعادلة (2) الصورة التالية:

$$k = \frac{\int\int yP(x, y)dxdy}{\int\int P(x, y)dxdy} = \frac{\int_{x=-a}^{x=a}\int_{y=0}^{y=\sqrt{a^2-x^2}} w(a-y)ydydx}{\int_{x=-a}^{x=a}\int_{y=0}^{y=\sqrt{a^2-x^2}} w(a-y)dydx} \tag{3}$$

والآن بحساب التكاملات في كلا من البسط والمقام للمعادلة (3) فنحصل على الآتي:

$$k = \frac{\int_{x=-a}^{x=a}\left[\frac{a^2}{2}\left(a^2 - x^2\right) - \frac{1}{3}\left(a^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]dx}{\int_{x=-a}^{x=a}\left[a\left(a^2 - x^2\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\left(a^2 - x^2\right)\right]dx} \tag{4}$$

لحساب التكاملات في المعادلة (4) يمكننا استخدام التعويض الآتي:

$$x = a\sin\theta \Rightarrow dx = a\cos\theta \quad d\theta$$

$$x = -a \Rightarrow \theta = -\left(\frac{\pi}{2}\right) \qquad (5)$$

$$x = +a \Rightarrow \theta = +\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

باستخدام المعادلة (5) في (4) يمكننا الحصول على ناتج التكامل النهائي كالآتي:

$$k = \frac{\int\limits_{x=-a}^{x=a}\left[\frac{a^2}{2}\left(a^2 - x^2\right) - \frac{1}{3}\left(a^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]dx}{\int\limits_{x=-a}^{x=a}\left[a\left(a^2 - x^2\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\left(a^2 - x^2\right)\right]dx} = \left(\frac{a}{4}\right)\left(\frac{16 - 3\pi}{3\pi - 4}\right) \approx 0.3a \qquad (6)$$

والآن مركز الضغط المطلوب كالآتي:

$$C.P. = a - k = a - 0.3a = 0.7a \qquad (7)$$

التكامل الخطى Line Integrals

النوع الثالث من التكاملات التي نحن بصددها في هذا الباب هو التكامل الخطى Line integral والتي يرمز له بعلامة تكامل واحده. كنا من قبل تعرضنا للتكامل الغير محدود Indefinite integral في الباب الأول ثم التكامل المحدود Definite integrals في الباب الثاني وكنا قد تعرضنا بالتفصيل لطرق إجراء التكامل في هذين البابين. وفى هذا الباب سوف نتعرض بالتفصيل للتكامل الخطى لكن من رؤية مختلفة سواء من ناحية شكله العام ، تطبيقاته، صوره المختلفة... الخ. كما سنتعرض إلى العلاقة بين التكامل الخطى والتكامل الثنائي وذلك من خلال نظرية جرين.

عندما نبدأ الحديث عن التكامل الخطى على منحنى لدالة معرفة في مستوى سوف نتعرض في داخل الحديث عن نوع من الدوال يسمى Single-valued function أي الدالة أحادية القيمة وفيما يلي سوف نذكر القارئ بتعريف هذه الدالة كالآتي:

Single-Valued Function

Definition

A single-valued function is function that, for each point in the domain, has a unique value in the range. It is therefore one-to-one or many-to-one.

Or

Any function in which each point in the domain maps to just one point in the range.

أي أنها الدالة التي كل نقطة في مجالها Domain تناظرها قيمة واحدة وواحدة فقط في مداها Range وهناك من يقول أنه مهما تعددت القيم في المجال يناظر هذا التعدد قيمة واحدة في المدى وتسمى Many-to-one.

معنى التكامل الخطي

لنفرض انه لدينا متجه A ولدينا سلك طوله L وكانت النقطتين a و b تنتميان إلى ذلك السلك فان تكامل ممسات المتجه A على السلك L من a إلى b يعطي التكامل الخطي.

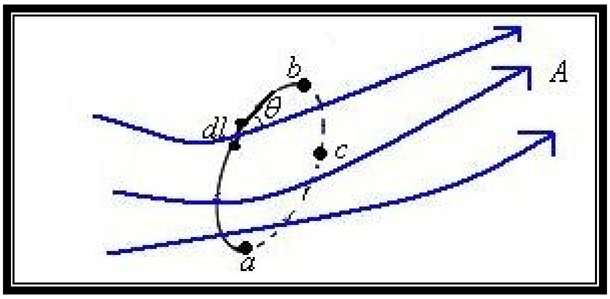


Figure 19

ما معنى التكامل الخطى "تكامل المسار" Line integral هندسيا؟

فإن تكامل ممسات المتجه A على السلك L من a إلى b يعطي التكامل الخطي.

والسؤال الآن ما المقصود بتكامل الممسات على السلك؟

التكامل الخطي أو تكامل المسار يعطي قيمة عددية scaler ولا يعطي قيمة متجهة.

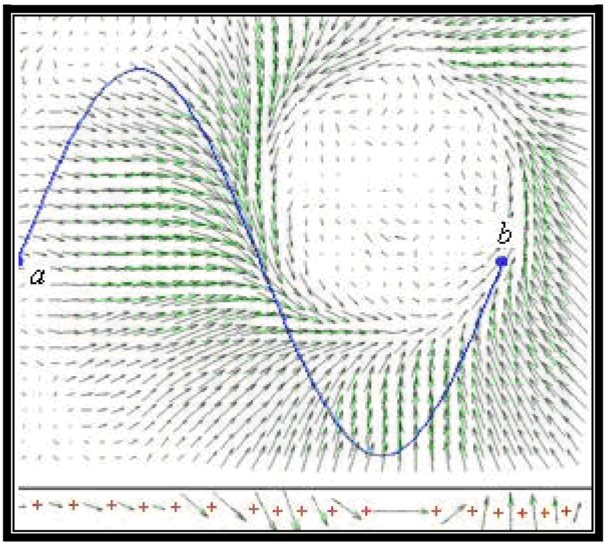


Figure 20

وبعد هذه المقدمة نبدأ الكلام عن التكامل الخطى وذلك بفرض أن لدينا منحنى C في المستوى xy وهذا المنحنى يصل بين نقطتين $A(a_1,b_1)$ ، $B(a_2,b_2)$ ، وبفرض وجود دالتين $P(x,y)$ ، $Q(x,y)$ وهما من نوع Single-valued functions معرفتين على كل نقطة في المنحنى C كما هو موضح بالشكل.

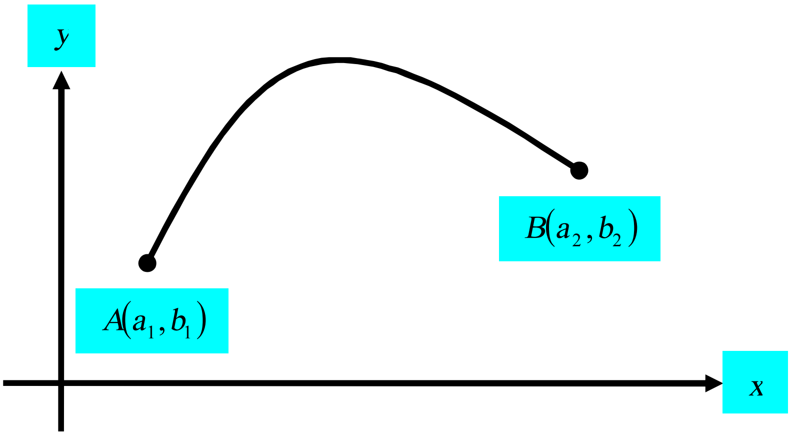


Figure 21

ومرة أخرى وبإتباع الأسلوب السابق في الوصول للمعنى الرياضي للتكامل أيا كان نوعه فسوف نبدأ الاستنتاج بتقسيم المنحنى إلى عدد n من الأجزاء متناهية الصغر وحيث أننا وكما ذكرنا سابقا أن هناك دالتين P ، Q معرفتين على كل جزئية على المنحنى C فسوف يكون التجميع الأجزاء على النحو التالي:

$$\sum_{k=1}^{n} p(x_k,y_k)\,\Delta x_k + Q(x_k,y_k)\,\Delta y_k \tag{1}$$

بأخذ نهاية المجموع في المعادلة (1) عندما تؤول $n \to \infty$ فبناء على معلوماتنا السابقة نستطيع أن نقول أن نهاية المجموع السابق عندما تؤول n إلى المالانهاية أنه التكامل الخطى ورياضيا نعرفه كالآتي:

$$I=\int_C p(x,y)dx+Q(x,y)dy \qquad (2)$$

طرق حساب التكامل الخطى Evaluation of Line Integral

قبل البدء في الحديث عن الطرق المختلفة لحساب التكامل لنلقى نظرة مرة أخرى إلى المعادلة رقم (2) فنجد أنها تحتوى على دالتين P ، Q وكلا من الدالتين دالة في كل من x ، y ، كذلك حدود التكامل هي النقطتين (x_1,y_1) ، (x_2,y_2) وبناء عليه يمكننا استنتاج الحالات المختلفة التالية:

الحالة الأولى

في هذه الحالة يتم إجراء التكامل في الاتجاه الأفقي x حيث يتم إستبدل كل y بما يناظره من المتغير x مع مراعاة أن تكون حدود التكامل $(x_1 \to x_2)$ وبناء عليه لنفرض أن العلاقة بين كل من x ، y معطاه بالعلاقة التالية:

$$\begin{aligned}&y=\Phi(x)\\&\Rightarrow\\&dy=\Phi^{/}(x)dx\end{aligned} \qquad (3)$$

بالتعويض من المعادلة (3) في الصورة العامة للتكامل الخطى (2) فتأخذ الشكل التالي:

$$I=\int_C\{P(x,\Phi(x))+Q(x,\Phi(x))\}\Phi^{/}(x)dx \qquad (4)$$

الحالة الثانية

في هذه الحالة يتم إجراء التكامل في الاتجاه الرأسي y حيث يتم استبدل كل x بما يناظره من المتغير y مع مراعاة أن تكون حدود التكامل $(y_1 \to y_2)$ وبناء عليه لنفرض أن العلاقة بين كل من x ، y معطاه بالعلاقة التالية:

$$
\begin{aligned}
& x=\Psi(y) \\
& \Rightarrow \\
& dx=\Psi^{/}(y)dy
\end{aligned} \tag{5}
$$

بالتعويض من المعادلة (5) في الصورة العامة للتكامل الخطى (2) فتأخذ الشكل التالي:

$$
I=\int_{C}\{P(\Psi(y),y)\Psi^{/}(y)+Q(\Psi(y),y)\}dy \tag{6}
$$

الحالة الثالثة

هذه الحالة تختلف عن الحالتين من حيث الشكل فنجد أن كلا من المتغيرين x ، y دالتين في متغير باراميتري t ففي هذه الحالة يتم التعبير عن كل من x ، y بدلالة المتغير t وكذلك تصبح حدود التكامل الجديدة بدلالة المتغير t وعليه لنفرض الآتي:

$$
\begin{aligned}
& x=\Phi(t) \\
& \& \\
& y=\Psi(t) \\
& \Rightarrow \\
& dx=\Phi^{/}(t)dt \\
& \& \\
& dy=\Psi^{/}(t)dt
\end{aligned} \tag{7}
$$

بالتعويض من المعادلة (7) في المعادلة (2) فتصبح الصورة العامة للتكامل الخطى في الحالة الباراميترية على النحو التالي:

$$
I=\int_{C}\{P(\Phi(t),\Psi(t))\Phi^{/}(t)dt+Q(\Phi(t),\Psi(t))\Psi^{/}(t)dt\} \tag{8}
$$

Example

Evaluate: $\int_{(0,1)}^{(1,2)} (x^2 - y)\,dx + (y^2 + x)\,dy$

Along the following passes:

(a) A straight line from (0,1) to (1,2)

(b) Straight line from (0,1) to (1,1) ,then from (1,1) to (1,2)

(c) Parabola $x = t$, $y = t^2+1$

Solution

(a) A straight line from (0,1) to (1,2)

المسار في هذه الحالة هو خط مستقيم يصل بين النقطتين $(0,1) \to (1,2)$ وعليه يجب أولا وقبل البدء في الحل في إيجاد معادلة الخط الواصل بين هاتين النقطتين ، معادلة الخط الواصل بين نقطتين من الهندسة التحليلية كالآتي:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \tag{1}$$

ومنها نجد أن معادلة الخط المستقيم كالآتي:

$$y = x + 1 \tag{2}$$

والآن بالتعويض من المعادلة (2) في التكامل المراد حسابه كالآتي:

$$I = \int_{(0,1)}^{(1,2)} (x^2 - y)\,dx + (y^2 + x)\,dy \tag{3}$$

$$I = \int_{x=0}^{x=1} \left[(x^2 - x - 1) + (x+1)^2 + x\right]dx = 2\int_0^1 (x^2 + x)\,dx = \frac{5}{3} \tag{4}$$

(b) Straight line from (0,1) to (1,1) ,then from (1,1) to (1,2)

في هذه الحالة المسار Pass عبارة عن خطين الأول من النقطة (0,1) إلى النقطة (1,1)، والثاني من النقطة (1,1) إلى النقطة (1,2) وعليه وإتباعا نفس الأسلوب في الجزء الأول يتم أولا إيجاد معادلات المسارات المختلفة ثم تكملة الحل بنفس الأسلوب.

معادلة المسار الأول

واضح أن المسار الأول هو خط أفقي معادلته على النحو التالي:

$$\begin{aligned} & y = 1 \\ & \Rightarrow \\ & dy = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

معادلة المسار الثاني

المسار الثاني من خلال النقط المعطاة عبارة عن خط رأسي معادلته على النحو التالي:

$$\begin{aligned} & x = 1 \\ & \Rightarrow \\ & dx = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

الخطوة التالية حساب التكامل على المسارين الأفقي والرأسي ويصبح التكامل هو مجموع التكامل على المسارين معا.

حساب التكامل على المسار الأفقي

باستخدام المعادلة (5) في التكامل المعطى فيأخذ الشكل التالي:

$$I_1 = \int_{(0,1)}^{(1,2)} \left(x^2 - y\right) d\,x + \left(y^2 + x\right) d\,y = \int_{x=0}^{x=1} \left(x^2 - 1\right) dx = -\left(\frac{2}{3}\right) \tag{7}$$

حساب التكامل على المسار الرأسي

باستخدام المعادلة (6) في التكامل المعطى فيأخذ الشكل التالي:

$$I = \int_{(0,1)}^{(1,2)} \left(x^2 - y\right) d\,x + \left(y^2 + x\right) d\,y = \int_{y=1}^{y=2} \left(y^2 + 1\right) dy = \frac{10}{3} \qquad (8)$$

بجمع ناتج التكامل في المعادلتين (7) ، (8) فنحصل على الناتج النهائي المطلوب أي أن:

$$I = -\left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{10}{3}\right) = \left(\frac{8}{3}\right) \qquad (9)$$

(c) Parabola

والآن حساب التكامل على المسار الثالث وهو قطع مكافئ معادلاته في شكلها البار اميتري معطاه على الصورة التالية:

$$\begin{aligned} &x = t \Rightarrow dx = dt \\ &\& \\ &y = t^2 + 1 \Rightarrow dy = 2t \end{aligned} \qquad (10)$$

والآن إيجاد حدود التكامل للمتغير t كالآتي:

$$\text{At } x = 0 \;\&\; y = 1 \Rightarrow t = 0 \qquad (11\text{-}1)$$

$$\text{At } x = 1 \;\&\; y = 2 \Rightarrow t = 1 \qquad (11\text{-}2)$$

والآن التكامل يأخذ الشكل التالي:

$$\int_0^1 \left(t^2 - t^2 - 1\right) dt + \left[\left(t^2 + 1\right)^2 + t\right] 2t\,dt = 2 \qquad (12)$$

نظرية جريـن Green's Theorem

لنفرض أن لدينا دالتين $P(x,y)\,\&\,Q(x,y)$ وأن كلا من $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ ، $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ دوال متصلة على منطقة Region محاطة بمنحنى مغلق C إذن توجد علاقة بين التكامل الخطى على المنحنى C والمنطقة المحصورة داخله هذه العلاقة ما نسميها بنظرية جرين Green's theorem وهذه العلاقة على الصورة التالية:

$$\oint P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy \qquad (1)$$

في المعادلة (1) علامة التكامل $\oint$ تشير إلى التكامل حول مسار مغلق في اتجاه عكس عقارب الساعة Counterclock direction.

Example

Verify Green's theorem in the plane for $\oint_c \left(2xy - x^2\right)dx + \left(x + y^2\right)dy$,

C is the closed curve of the region bounded by $y = x^2$ and $y^2 = x$

Solution

بداية نود الإشارة إلى أن المطلوب يعنى أننا لابد من حساب كلا من التكامل الخطى على المسار وكذلك التكامل الثنائي على المنطقة داخل نفس المسار ونتأكد من أن الناتج في الحالتين متساوي وهذا هو المقصود بالتحقق من نظرية جرين. وفى البداية نرسم منطقة التكامل حتى يتسنى لنا حساب كلا من التكامل الخطى والتكامل الثنائي.

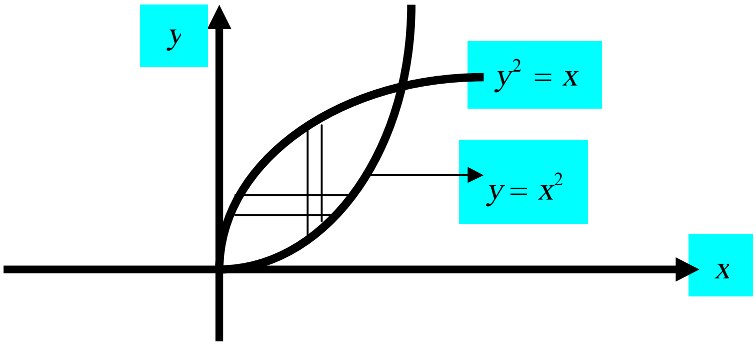


Figure 22

والآن وكما هو واضح من الشكل أن التكامل الخطى سوف يتم حسابه على مسارين متتاليين في عكس عقارب الساعة على النحو التالي:

$$I_1 = \int_{c_1} \ \& \ c_1 : \ y = x^2 \qquad (1)$$

$$I_2 = \int_{c_2} \ \& \ c_2 : \ x = y^2 \qquad (2)$$

بإجراء التكامل على المسار الأول

$$c_1 : \ y = x^2 \Rightarrow dy = 2xdx \qquad (3)$$

$$I_1 = \int_0^1 \left(2x^3 - x^2\right)dx + \left(x + x^4\right)2xdx = \frac{7}{6} \qquad (4)$$

بإجراء التكامل على المسار الثاني

$$c_2 : x = y^2 \\ \Rightarrow \\ dx = 2y\,dy \tag{5}$$

$$I_2 = \int_1^0 \left(2y^3 - y^4\right)2y\,dy + \left(y^2 + y^2\right)dy = \left|\frac{-17}{15}\right| = \left(\frac{17}{15}\right) \tag{6}$$

$$\oint_c = \frac{1}{30} \tag{7}$$

والآن وبعد حساب التكامل المعطى على أنه تكامل خطى نحسب التكامل على المنطقة المحصورة بين المنحنيين اللذان يمثلان المسار ولعمل هذا نبدأ بكتابة الدوال P، Q كالآتي:

$$P(x,y) = 2xy - x^2 \\ \& \\ Q(x,y) = x + y^2 \tag{8}$$

كذلك الدوال الآتية:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 2x \\ \& \\ \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = 1 \tag{9}$$

إذن

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 - 2x \tag{10}$$

والآن وبعد تجهيز الدالة التي سوف تستخدم في التكامل الثنائي على المنطقة المشار إليها سابقا فسوف نقوم بحساب التكامل في الاتجاه الأفقي أولا وذلك بأخذ شريحة أفقية ثم تحريك الشريحة في الاتجاه الرأسي وعلي ذلك التكامل الثنائي على المنطقة يأخذ الشكل التالي:

$$I = \int_{y=0}^{y=1} \int_{x=y^2}^{x=\sqrt{y}} (1-2x)dxdy = \int_0^1 \left(\sqrt{y} - y - y^2 + y^4\right)dy = \frac{1}{30} \qquad (11)$$

واضح من المعادلتين (7) ، (11) أن نظرية جرين محققه على التكامل المعطى

اللاإعتمادية على المسار Independence of Path

قلنا سابقا أن نظرية جرين تستخدم في تحويل التكامل الخطى إلى تكامل ثنائي أو العكس في حالة توافر مجموعة من الشروط أهمها أن $Pdx + Qdy$ لا تكون تامة Not exact أي أن $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$ وبالتالي يصبح للتكامل الثنائي وجود وذلك من خلال وجود للدالة التي توضع داخل التكامل الثنائي. والآن ماذا لو لم يتحقق شرط التمام أي أن $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ في هذه الحالة نقول أن التكامل الخطى لا يعتمد على المسار.

Example

Prove that $\int_{(1,2)}^{(3,4)} \left(6xy^2 - y^3\right)dx + \left(6x^2y - 3xy^2\right)dy$ is independent of path then evaluate the given integral.

Solution

بداية الحل هي تحديد كلا من الدالتين P ، Q من المسألة المعطاة كالآتي:

$$P(x,y)=\left(6xy^2-y^3\right) \tag{1}$$

$$Q(x,y)=\left(6x^2y-3xy^2\right) \tag{2}$$

الخطوة التالية هي اختبار شرط التمام ونبدأ هذه الخطوة إيجاد التفاضلات التالية:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\left(12xy-3y^2\right) \tag{3}$$

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=\left(12xy-3y^2\right) \tag{4}$$

من المعادلة (3) ، (4) نحصل على المعادلة التالية:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \tag{5}$$

من المعادلة (5) يمكننا القول بأن شرط التمام Exactness condition متحقق وعليه فإن التكامل الخطى لا يعتمد على المسار. الرسم التالي يوضح لنا احتمالية المسارات الممكنة التي من خلالها نحسب التكامل الخطى.

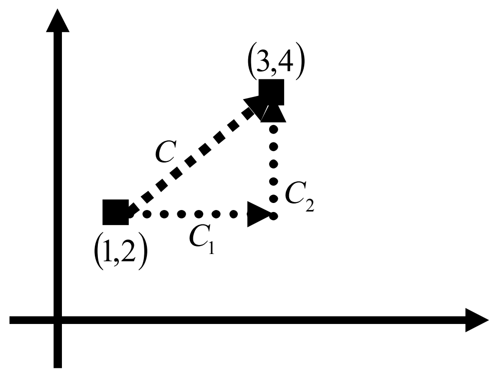


Figure 23

الطريقة الأولى لحساب التكامل

والآن إذا حسبنا التكامل على المسار C مباشرة بين النقطتين فهذا يتطلب إيجاد معادلة خط مستقيم بين النقطتين فنجد أن المعادلة كالآتي:

$$y = x + 1 \qquad (6)$$

شيء آخر يتطلبه التكامل الخطى وهو توحيد المتغيرات أضف إلى هذا إيجاد علاقة بين تفاضل المتغيرين x ، y و نوجدها من معادلة المسار في المعادلة (6).

$$dy = dx \qquad (7)$$

والآن بعد كل هذه التجهيزات نبدأ في حساب التكامل المطلوب على النحو التالي مع الأخذ في الاعتبار سؤال نسأله لأنفسنا هل سنكامل بالنسبة للمتغير x أم للمتغير y وسوف نكامل بالنسبة للمتغير x كالآتي:

$$\begin{aligned} I &= \int_{(1,2)}^{(3,4)} \left(6xy^2 - y^3\right)dx + \left(6x^2y - 3xy^2\right)dy \\ I &= \int_{x=1}^{x=3} \left(6x(x+1)^2 - (x+1)^3\right)dx + \left(6x^2(x+1) - 3x(x+1)^2\right)dx \end{aligned} \qquad (8)$$

واضح من المعادلة (8) أننا حصلنا على تكامل من السهل إجراؤه ولنتركه للقارئ كنوع من التدريب.

الطريقة الثانية لحساب التكامل

سوف نقوم بحساب التكامل على المسار المكون من المسار الأفقي C_1 إضافة للمسار الرأسي C_2 ونود الإشارة إلى بعض الملاحظات الهامة الآتية:

- **المسار الأفقي** C_1

Its equation $y = 0 \Rightarrow dy = 0$

Therefore the line integral will take the following form:

$$I_H = \int_{x=1}^{x=3} \left(6x(0)^2 - (0)^3\right)dx = 0 \qquad (9)$$

- المسار الرأسي C_2

Its equation $x = 3 \Rightarrow dx = 0$

Therefore the line integral will take the following form:

$$I_V = \int_{y=2}^{y=4} \left(54y - 9y^2\right)dy \qquad (10)$$

والآن مجموع التكاملين في المعادلتين (9) ، (10) يعطى نتيجة التكامل الخطى المطلوب.

$$I = I_H + I_V \qquad (11)$$

صفحة زوجية فارغة

5

الباب الخامس

التكامـل العددي

Numerical Integration

صفحة زوجية فارغة

الباب الخامس

التكامل العددي

Numerical Integration

تقديم

عندما نتكلم عن التكامل العددي فإنما نقصد بذلك التعامل مع التكاملات التي يكون من الصعب التعامل معها بالطرق التقليدية. وقبل البدء في الحديث عن التكامل العددي نود أن نذكر القارئ بأننا سبق وأن شرحنا باستفاضة الموضوع المرافق لهذا الموضوع ألا وهو التفاضل العددي في الجزء الخاص بالتفاضل.

إن موضوع التكامل العددي موضوع شائك وكبير وتجده في العديد من الموضوعات ويكفى أن نقول أن الأفرع الجديدة في التحليل العددي المتقدم مثل طرق العناصر الحدية Boundary Element Methods بكل تقنياتها المختلفة تقوم أساسا على التكامل العددي لكننا لسنا بصدد الحديث عن هذه الطرق لأنها سوف يكون لها جزء خاص بها في الموسوعة.

وقبل البدء في الكلام عن التكامل العددي نود الإشارة إلى ملحوظة هامة جدا ألا وهي أن نتائج التكامل العددي ليست دقيقة كما يتصور البعض لكن التحكم في دقتها يتوقف على عوامل كثيرة وخاصة عند التعامل مع التطبيقات الهندسية ذات الأهمية البالغة.

درسنا من قبل التكامل المحدود لدالة Definite integral لدالة في فترة ولتكن $[a,b]$ وقد ذكرنا المعنى العام لهذا التكامل ولكي نثبته كنا قد قمنا بتقسيم المساحة تحت

المنحنى في الفترة المعرفة لها إلى مجموعة من الشرائح الرأسية متساوية في العرض على المحور الأفقي ثم تجميع مساحات هذه الشرائح وأطلقنا على هذا المجموع مجموع ريمان Riemann sums ثم أخذنا نهاية هذا المجموع عندما تصل عدد الشرائح إلى مالانهاية ويؤول عرض الشريحة إلى الصفر وهذه العملية رياضيا ت تعرف رياضيا بالآتي:

$$I(f)=\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a) \tag{1}$$

في المعادلة (1) $F(x)$ تمثل ناتج التكامل للدالة $f(x)$.

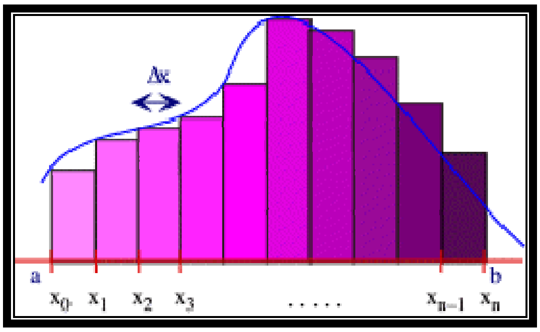


Figure 24

سؤال يفرض نفسه:

إذا كنا قد درسنا العديد من الطرق التحليلية لحساب التكامل فلماذا إذن نلجأ للتكامل العددي Numerical Integration؟

الإجابة بسيطة وتكمن في أنه ليست كل الطرق صالحة لكل أنواع التكاملات والأمثلة على ذلك كثيرة إلا أننا سوف نعطى مثالين من أمثلة التكامل التي من الصعب إيجاد قيمتها بالطرق التحليلية التقليدية كما هو في المعادلة (2).

$$I = \int_{0}^{1} e^{-x^2}\,dx$$

$$\& \qquad (2)$$

$$I = \int_{0}^{\pi} x^{\pi} \sin\sqrt{x}\,dx$$

بعد هذه المقدمة التفصيلية نود أن ننوه إلى أن دراسة موضوع التكامل العددي لابد أن يسبقها دراسة التفاضل العددي حتى يكون هناك ترابط في الأفكار وحتى يكون هناك تواصل فكرى للقارئ وعليه سوف نبدأ هذا الباب بموضوع التفاضل العددي الذي أوردناه من قبل في جزء التفاضل من هذا العمل.

التفاضل العددي Numerical Differentiation

فيما يلي سوف نحاول وضع إطار عام للتفاضل العددي بالطرق المختلفة لإيجاد المشتقات بدءا بالمشتقة الأولى ثم المشتقة الثانية ثم المشتقات الأعلى وسوف نبدأ هذا الجزء بأول الطرق الأولية لاستنتاج علاقات للمشتقات ألا وهي المشتقات من مفكوك تيلور على النحو التالي.

استنتاج المشتقة الأولى من مفكوك تيلور

First Derivative Form Taylor Series

سنبدأ هذه الجزئية بكتابة مفكوك تيلور لدالة في متغير واحد ونقطة الفك Point of expansion ستكون أية نقطة ولتكن x_0 وهي كالآتي:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \ldots.. \qquad (1)$$

تعالى الآن لننظر إلى المعادلة (1) بنظرة تقريب وهي إهمال الحدود من الرتبة الأعلى ونعيد كتابة المعادلة (1) على الصورة التالية:

$$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0) \qquad (2)$$

من المعادلة (2) يمكننا وضع المشتقة الأولى في طرف وباقي المعادلة في طرف أخر فنحصل على:

$$f'(x_0)\cong\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \qquad (3)$$

لو دققنا النظر إلى المعادلة (3) ورجعنا إلى تعريف المشتقة الأولى نجد أن المعادلة (3) هي المشتقة الأولى التي حصلنا عليها من مفكوك تيلور.

Example

Use the data in table (1) to estimate the first derivative of y at $x=1.7$, use $h=0.2$.

Hint: The numerical values given below in table (1) is for the function $f(x)=e^x$

Table 1

x	1.3	1.5	1.7	1.9	2.1	2.3	2.5
y	3.669	4.482	5.474	6.686	8.166	9.974	12.182

أولا هذه البيانات هي للدالة $f(x)=e^x$ وعند استخدام بيانات مجدولة لإيجاد المشتقة الأولى يجب أن نختار نقطة من الجدول تكون قريبة من القيمة المراد إيجاد

المشتقة عندها. كما هو مطلوب يراد إيجاد المشتقة عند x = 1.7 وعليه أقرب نقطة لها هي $x_0 = 1.5$. يلي ذلك كتابة العلاقة الخاصة بإيجاد قيمة المشتقة عدديا وهي:

$$f'(x_0) \cong \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$f'(x_0) \cong \frac{5.474 - 4.482}{0.2} = 4.960$$

نود أن نلفت نظر القارئ إلى نقطة هامة ألا وهي أننا عندما نتعامل مع الطرق العددية فيجب أن لا نتوقع قيم دقيقة إلا في حدود ضيقة وتحت شروط هامة جدا. بناء على ذلك القيمة الصحيحة لهذه المشتقة بعد تفاضل الدالة الناتج منها الجدول تجدها تساوى 5.474 وعلى هذا تجد أن هناك فرقا بين النتيجتين وهذا شيء متوقع مقدما.

المشتقات الأعلى من مفكوك تيلور

Higher Derivatives from Taylor Series

فيما يلي سوف نقوم باستنتاج المشتقات الأعلى من خلال مفكوك تيلور على اعتبار أن نقطة الفك هي نفس النقطة التي اعتبرناها عند استنتاج المشتقة الأولى ولنبدأ بكتابة مفكوك تيلور مرة أخرى ولكن في صورتين مختلفتين كالآتي:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}\, f''(x_0) + \frac{h^3}{3!}\, f''(x_0) + + ... \qquad (4)$$

$$f(x_0-h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}\, f''(x_0) - \frac{h^3}{3!}\, f''(x_0) + - ... \qquad (5)$$

بجمع المعادلتين (4) ، (5) فنحصل على المعادلة التالية:

$$f(x_0+h) + f(x_0-h) = 2\, f(x_0) + h^2\, f''(x_0) \qquad (6)$$

بإعادة كتابة المعادلة (6) على الشكل التالي:

$$f''(x_0)=\frac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2} \qquad (7)$$

المعادلة (7) هي الصورة التي من خلالها يمكننا حساب المشتقة الثانية والمثال التالي يوضح ذلك.

Example

Use the data in table (2) to estimate the second derivative of y at $x=1.7$. Use $h=0.2$

Table 2

x	1.3	1.5	1.7	1.9	2.1	2.3	2.5
y	3.669	4.482	5.474	6.686	8.166	9.974	12.182

أولا هذه البيانات هي للدالة $f(x)=e^x$ وعند استخدام بيانات مجدولة لإيجاد المشتقة الثانية يجب أن نختار نقطة من الجدول تكون قريبة من القيمة المراد إيجاد المشتقة عندها. كما هو مطلوب يراد إيجاد المشتقة عند x = 1.7 وعليه أقرب نقطة لها هي $x_0=1.5$ ثم يلي ذلك كتابة العلاقة العامة للمشتقة الأولى كالآتي:

$$f''(x_0)=\frac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2}$$

$$f''(x_0)=\frac{3.669-2(4.482)+5.474}{(0.2)^2}=4.475$$

بنفس الأسلوب الذي اتبعناه في استنتاج المشتقة الأولى أو الثانية يكون نفسه إذا أردنا استنتاج أية مشتقة أخرى لكننا نود الإشارة إلى أن هذه الطريقة بدائية للغاية والدقة فيها ضعيفة ولا تعبر عن الواقع إلا في حدود ضيقة لكننا استعرضناها فقط من الباب التعليمي للقارئ.

من الطرق التي لها أثر واضح ودقة عالية إلى حد ما في حساب المشتقات هي ما تسمى طريقة توليد البيانات Interpolation of data حيث يمكننا من خلال بيانات خام بعمل جدولة معينه سواء كانت أمامية Forward أو خلفية Backward أو مركزية Central ثم باستخدام علاقات خاصة مبنية على استنتاجات دقيقة حساب المشتقات وسنبدأ أولا باستنتاج المشتقة الأولى حتى يتضح الأمر للقارئ.

المشتقة الأولى من التوليد الأمامي للبيانات

First Derivative from Forward Interpolation

في كثير من التطبيقات الهندسية لا يمكننا وضع دالة في صورة معادلة لكن تكون الدالة على هيئة بيانات مستنتجة من المعمل أو القياسات الأخرى وفى نفس الوقت نريد معرفة أي المشتقات عند نقط بعينها تكون هذه النقط محل اهتمام لباحث ما في أحد المجالات. بناء على الحقيقة العلمية أنه إذا تم تقريب دالة بكثيرة حدود في أضيق حدود الخطأ فمن المفروض أن ميل المماس للدالة لا يختلف كثيرا عن ميل المماس لكثيرة الحدود التي تناظرها بعد التقريب وعلى أساس هذه الحقيقة سنبدأ بكتابة العلاقة التي أثبتها نيوتن-جريجورى Newton-Greogory للتقريب الأمامي Forward interpolation وهي كالآتي:

$$f(x_S) = P_n(x_S) + error = f_0 + S\Delta f_0 + \binom{S}{2}\Delta^2 f_0 + \ldots + \binom{S}{n}\Delta^n f_0 + error \quad (8)$$

نسبة الخطأ في المعادلة (8) يمكن حسابها من العلاقة التالية:

$$error\ of\ P_n(x_S)=\binom{S}{n+1}h^{n+1}\,f^{(n+1)}(\xi)\quad,\quad x_0<\xi<x_n \tag{9}$$

بإجراء التفاضل على المعادلة (8) مع التذكر بأن f_0 وجميع الحدود التي تحتوى على Δ ثوابت يمكننا الحصول على المعادلة التالية:

$$f^{/}(x_S)\approx P_n^{/}(x_S)=\frac{d}{ds}\left(P_n(x_S)\right)\frac{ds}{dx}=\frac{d}{ds}\left(P_n(x_S)\right)\frac{1}{h} \tag{10}$$

$$f^{/}(x_S)\approx P_n^{/}(x_S)=\frac{1}{h}\left(\begin{array}{l}\Delta f_0+\frac{1}{2}(s-1+s)\Delta^2 f_0\\ +\frac{1}{6}((s-1)(s-2)+s(s-2)+s(s-1))\Delta^3 f_0+....\end{array}\right) \tag{11}$$

بوضع $s=0$ في المعادلة (11) فتأخذ الشكل التالي:

$$f^{/}(x_0)\approx\frac{1}{h}\left(\Delta f_0-\frac{1}{2}\Delta^2 f_0+\frac{1}{3}\Delta^3 f_0-\frac{1}{4}\Delta^4 f_0....\pm\frac{1}{n}\Delta^n f_0\right) \tag{12}$$

معنى ذلك أنه بمعرفة جدول الفروق الأمامي Forward difference table يمكننا حساب المشتقة الأولى من العلاقة (12) كذلك يمكننا حساب نسبة الخطأ من العلاقة التالية:

$$error\ of\ P_n^{/}(x_0)=h^{n+1}\,f^{(n+1)}(\xi)\left[\frac{(-1)^n n!}{(n+1)!}\right]\left(\frac{1}{h}\right)=\frac{(-1)^n}{n+1}h^n\,f^{(n+1)}(\xi) \tag{13}$$

المثال التالي سوف يوضح للقارئ كيفية حساب المشتقة الأولى لدالة معطاة على هيئة بيانات.

Example

Use the data in table (3) to estimate the first derivative of y at $x=1.7$. Use $h=0.2$, and compute using one, two, three or four terms of the first derivative formula.

في البداية نود أن نعتبر القارئ على دراية بعمل جداول الفروق سواء كانت أمامية Forward أو خلفية Backward أو مركزية Central لأن هذا يعتبر موضوعا مستقلا بذاته.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
1.3	3.669				
		0.813			
1.5	4.482		0.179		
		0.992		0.041	
1.7	5.474		0.220		0.007
		1.212		0.048	
1.9	6.686		0.268		0.012
		1.480		0.060	
2.1	8.166		0.328		0.012
		1.808		0.072	
2.3	9.974		0.400		
		2.208			
2.5	12.182				

البيانات المعطاة للدالة $y = e^x$ وذلك حتى يمكننا مقارنة النتيجة العددية مع الحل الدقيق لنرى الفرق والتطابق بين الحلين. فيما يلي المشتقة الأولى مستخدمين حد ، وحدين ، ثلاثة ، أربعة حدود لنبين شيء أساسي أنه كلما ذادت حدود الحدود المستخدمة في الحسابات كلما ازدادت الدقة التي نحصل عليها.

With ***one*** term

$$y'(1.7) = \frac{1}{0.2}(1.212) = 6.060$$

With ***two*** terms

$$y'(1.7) = \frac{1}{0.2}\left[(1.212) - \frac{1}{2}(0.268)\right] = 5.390$$

With ***three*** terms

$$y'(1.7) = \frac{1}{0.2}\left[(1.212) - \frac{1}{2}(0.268) + \frac{1}{3}(0.060)\right] = 5.490$$

With ***four*** terms

$$y'(1.7) = \frac{1}{0.2}\left[(1.212) - \frac{1}{2}(0.268) + \frac{1}{3}(0.060) - \frac{1}{4}(0.012)\right] = 5.475$$

The exact numerical value of the derivative at the indicated point is $y'(1.7) = e^{1.7} = 5.474$, while the computed value to four terms is 5.475. If we apply equation (13) to find error associated with evaluating the first derivative will be as follows:

$$error = \frac{(-1)^n}{n+1} h^n f^{(n+1)}(\xi)$$

With ***one*** term:

$$error = \frac{(-1)^1}{1+1} h^1 f^{(2)}(\xi) \;, \quad 1.7 \le \xi \le (1.7+h) = 1.9$$

$$error = \frac{(-1)}{2}(0.2)^1 \begin{Bmatrix} e^{1.7} & \min \\ e^{1.9} & \max \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.547 & \min \\ -0.669 & \max \end{Bmatrix}$$

With ***two*** terms:

$$error = \frac{(-1)^{21}}{2+1} h^2 f^{(3)}(\xi) \;, \quad 1.7 \le \xi \le (1.7+2h) = 2.1$$

$$error = \frac{1}{3}(0.04) \begin{Bmatrix} e^{1.7} & \min \\ e^{2.1} & \max \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.073 & \min \\ 0.109 & \max \end{Bmatrix}$$

With ***three*** terms:

$$error = \frac{(-1)^{31}}{3+1} h^3 f^{(4)}(\xi) \;, \quad 1.7 \le \xi \le (1.7+3h) = 2.3$$

$$error = \frac{-1}{4}(0.008) \begin{Bmatrix} e^{1.7} & \min \\ e^{2.3} & \max \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.011 & \min \\ -0.020 & \max \end{Bmatrix}$$

With ***four*** terms:

$$error = \frac{(-1)^{41}}{4+1} h^4 f^{(5)}(\xi) \;, \quad 1.7 \le \xi \le (1.7+4h) = 2.5$$

$$error = \frac{1}{5}(0.0016) \begin{Bmatrix} e^{1.7} & \min \\ e^{2.5} & \max \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.002 & \min \\ 0.004 & \max \end{Bmatrix}$$

المشتقات الأعلى من التوليد الأمامي للبيانات

Higher Derivatives from Forward Interpolation

المشتقات الأعلى يتم استنتاجها من تفاضل العلاقة الخاصة بالمشتقة الأولى على حسب المشتقة المطلوبة وعليه يتم تفاضل المعادلة (12) لإيجاد المشتقات الأعلى

وتفاضل المعادلة (13) لإيجاد نسبة الخطأ المناظرة لكل مشتقة مع الأخذ في الاعتبار ملحوظة هامة وهي وضع $s=0$ في المشتقة. على سبيل المثال المشتقة الثانية بناء على هذا الأسلوب من الاستنتاج تأخذ الشكل التالي:

$$f^{//}(x_0) \cong \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 f_0 - \Delta^3 f_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 f_0 - \frac{5}{6}\Delta^5 f_0 + \ldots\right) \qquad (14)$$

Example

Use the data in table (4) to estimate the second derivative of y at $x=1.7$, use $h=0.2$.

Table 4

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
1.3	3.669				
		0.813			
1.5	4.482		0.179		
		0.992		0.041	
1.7	5.474		0.220		0.007
		1.212		0.048	
1.9	6.686		$\Delta^2 y_0$=0.268		0.012
		1.480		0.060	
2.1	8.166		0.328		0.012
		1.808		0.072	
2.3	9.974		0.400		
		2.208			
2.5	12.182				

في البداية وبعد تكوين جدول الفروق الأمامي نحدد النقطة المطلوب إيجاد المشتقة عندها وفى المثال الحالي $x = 1.7$ ثم نكتب العلاقة الخاصة بالمشتقة الثانية وكنوع من التطبيق المباشر نكتب المعادلة (14) ثم نحسب منها المشتقة الثانية:

$$f^{//}(x_0) \cong \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 f_0 - \Delta^3 f_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 f_0 - \frac{5}{6}\Delta^5 f_0 + ...\right)$$

$$f^{//}(x_0) \cong \frac{1}{(0.2)^2}\left(0.268 - 0.06 + \frac{11}{12}(0.012)\right) = 5.475$$

شكل لوزنج للمشتقات Lozenge Diagram for Derivatives

هو جدول عام لإيجاد معاملات أي المشتقات من أي رتبة والتي تظهر في علاقات المشتقات مع ملاحظة أن كل صيغ المشتقات يضرب في 1/h:

Figure 25

f_{-3}	1	$\Delta^2 f_{-4}$	$13/3$	$\Delta^4 f_{-5}$	$137/60$
0	Δf_{-3}	$5/2$	$\Delta^3 f_{-4}$	$25/12$	$\Delta^5 f_{-5}$
f_{-2}	1	$\Delta^2 f_{-3}$	$11/6$	$\Delta^4 f_{-4}$	$1/5$
0	Δf_{-2}	$3/2$	$\Delta^3 f_{-3}$	$1/4$	$\Delta^5 f_{-4}$
f_{-1}	1	$\Delta^2 f_{-2}$	$1/3$	$\Delta^4 f_{-3}$	$-1/20$
0	Δf_{-1}	$1/2$	$\Delta^3 f_{-2}$	$-1/12$	$\Delta^5 f_{-3}$
f_0	1	$\Delta^2 f_{-1}$	$-1/6$	$\Delta^4 f_{-2}$	$1/30$
0	Δf_{-1}	$-1/2$	$\Delta^3 f_{-1}$	$1/12$	$\Delta^5 f_{-2}$
f_1	1	$\Delta^2 f_0$	$1/3$	$\Delta^4 f_{-1}$	$-1/20$
0	Δf_{-2}	$-3/2$	$\Delta^3 f_0$	$-1/4$	$\Delta^5 f_{-1}$
f_2	1	$\Delta^2 f_1$	$11/6$	$\Delta^4 f_0$	$1/5$
0	Δf_{-3}	$-5/2$	$\Delta^3 f_1$	$-25/12$	$\Delta^5 f_0$
f_3	1	$\Delta^2 f_2$	$13/3$	$\Delta^4 f_1$	$137/60$

Lozenge diagram has the property that it is easy to construct it. The diagram can be considered of two parts:

(1) The differences of the function

(2) The interspersed coefficients, one superimposed on the other.

Consider the array of coefficients in the above figure:

Figure 26

	1		$13/3$		$137/60$
0		$5/2$		$25/12$	
	1		$11/6$		$1/5$
0		$3/2$		$1/4$	
	1		$1/3$		$-1/20$
0		$1/2$		$-1/12$	
	1		$-1/6$		$1/30$
0		$-1/2$		$1/12$	
	1		$1/3$		$-1/20$
0		$-3/2$		$-1/4$	
	1		$11/6$		$1/5$
0		$-5/2$		$-25/12$	
	1		$13/3$		$137/60$

سبق وأن أشرنا إلى أن جدول لوزنج يستخدم لإيجاد علاقات المشتقات التي سبق وأن أوردناها من قبل ولكي نفهم ذلك لنفرض أننا سوف نسير في مسار أفقي في الجدول التالي:

Figure 27

f_{-3}	0	$\Delta^2 f_{-4}$	3	$\Delta^4 f_{-5}$	$15/4$
0	Δf_{-3}	1	$\Delta^3 f_{-4}$	$35/12$	$\Delta^5 f_{-5}$
f_{-2}	0	$\Delta^2 f_{-3}$	2	$\Delta^4 f_{-4}$	5/6
0	Δf_{-2}	1	$\Delta^3 f_{-3}$	11/12	$\Delta^5 f_{-4}$
f_{-1}	0	$\Delta^2 f_{-2}$	1	$\Delta^4 f_{-3}$	-1/12
0	Δf_{-1}	1	$\Delta^3 f_{-2}$	$-1/12$	$\Delta^5 f_{-3}$
f_0	0	$\Delta^2 f_{-1}$	0	$\Delta^4 f_{-2}$	0
0	Δf_0	1	$\Delta^3 f_{-1}$	-1/12	$\Delta^5 f_{-2}$
f_1	0	$\Delta^2 f_0$	-1	$\Delta^4 f_{-1}$	1/12
0	Δf_1	1	$\Delta^3 f_0$	11/12	$\Delta^5 f_{-1}$
f_2	0	$\Delta^2 f_1$	-2	$\Delta^4 f_0$	-5/6
0	Δf_2	1	$\Delta^3 f_1$	35/12	$\Delta^5 f_0$
f_3	0	$\Delta^2 f_2$	-3	$\Delta^4 f_1$	-15/4

Beginning at f_0:

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_o} = \frac{1}{h}\left[\frac{\Delta f_0 + \Delta f_{-1}}{2} + (0)\Delta^2 f_{-1} + \left(-\frac{1}{6}\right)\frac{\Delta^3 f_{-1} + \Delta^3 f_{-2}}{2} + ...\right] \qquad (15)$$

Or

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_o} = \frac{1}{h}\left[\frac{(f_1 - f_0) + (f_0 - f_{-1})}{2} + 0(h^3)\right] = \left[\frac{f_1 - f_{-1}}{2h}\right] + 0(h^2) \qquad (16)$$

باستخدام الجدول في الشكل (26) لإيجاد المشتقة الثانية مع مراعاة أن تكون الحركة في الجدول على مسار أفقي:

$$\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_o} = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 f_{-1} + 0 + \left(-\frac{1}{12}\right)\Delta^4 f_{-2} + ...\right] \qquad (17)$$

Or

$$\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_o} = \left[\frac{f_1 - 2 f_0 + f_{-1}}{h^2}\right] + 0(h^2) \qquad (18)$$

Example

Estimate the second derivative of y at $x = 1.7$, use $h = 0.2$

Table 3

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
1.3	3.669				
		0.813			
1.5	4.482		0.179		
		0.992		0.041	
1.7	5.474		0.220		0.007
		1.212		0.048	
1.9	6.686		0.268		0.012
		1.480		0.060	
2.1	8.166		0.328		0.012
		1.808		0.072	
2.3	9.974		0.400		
		2.208			
2.5	12.182				

بتطبيق المعادلة (18) للحصول على المشتقة الثانية عند النقطة المشار إليها:

$$\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x = x_o} = \left[\frac{f_1 - 2 f_0 + f_{-1}}{h^2}\right] + 0\left(h^2\right)$$

$$\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x = 1.7} = \left[\frac{6.686 - 2(5.474) + 4.482}{(0.2)^2}\right] = \frac{0.220}{(0.2)^2} = 5.5$$

علاقات نيوتن-كوتز لحساب التكامل

Newton-Cotes integration formulas

عندما نتكلم عن التكامل العددي لابد أن يتذكر القارئ شيء مهم ألا وهو أنه من المحتمل أن نتعامل مع دالة مجدولة Tabulated function وهذا يعنى أن الدالة معرفة عند قيم محددة لعينها فقط والمثال المباشر على ذلك كالآتي:

المهندس المساحي عندما يقوم بعمل مسح لمنطقة معينة لعمل ميزانية Levelling لهذه المنطقة ولنفرض أنه يأخذ الأطوال وزوايا الارتفاع أو الانخفاض فإنه في نهاية الأمر يحصل على مجموعة قراءات Readings هذه القراءات في باطنها إنما تمثل دالة مجهولة كمعادلة إلا أنها معلومة بمجموعة من القراءات. وعليه فإن الرياضيين يلجأوا لما يسمى بالتوفيق Fitting لهذه النتائج لاستنتاج كثيرة حدود تمثل إلى حد ما الدالة المجهولة والمعلومة في آن واحد كونها مجهولة لعدم توافر معادلة رياضية تعبر عنها وكونها معلومة من خلال مجموعة من القراءات.

والآن عندما نريد حساب التكامل العددي لمثل هذه الدالة فإننا أولا نحاول استنتاج كثيرة حدود Polynomial ثم إجراء التكامل على كثيرة الحدود التي تكون قريبة إلى حد ما من الدالة الأصلية. هذا الكلام رياضيا يمكن ترجمته إلى شكل رياضي على النحو التالي:

The usual strategy in developing formulas for numerical integration is to pass a polynomial through points of the function, and then integrate this polynomial approximation to the function. This permits us to integrate a function known only as a table of values. When the values of the function are **equi-spaced**, Newton-Gregory forward polynomial is a convenient starting point, therefore,

$$I(f)=\int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b P_n(x_s)dx \tag{3}$$

التكامل الناتج من المعادلة (3) ليس دقيقا بالدرجة التي نرغبها وفيه نسبة خطأ ويمكن قياس هذا الخطأ من العلاقة التالية:

$$Error=\int_a^b \binom{s}{n+1} h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)dx \tag{4}$$

والآن وبعد هذه المقدمة الطويلة لنبدأ باستنتاج علاقات نيوتن-كوتز للتكامل العددي مع مراعاة أننا سوف نستبدل الرمز x إلى s حيث أن كثيرة الحدود Polynomial متغيرها الأساسي هو s ومع الأخذ في الاعتبار العلاقة التالية $dx=hds$.

طريقة شبه المنحرف Trapezoidal Rule

طريقة شبه المنحرف Trapezoid لحساب التكامل العددي تتلخص في أننا نقوم بتقسيم المساحة تحت المنحنى إلى عدد كبير من الشرائح الرأسية ثم نقوم لتوصيل بتوصيل تقاطعات هذه الشرائح مع منحنى الدالة بمجموعة من الخطوط فنحصل على أشباه منحرفات Trapezoids.

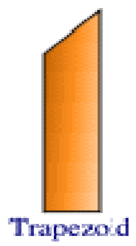


Figure 28

نعلم أن مساحة شبه المنحرف تساوى متوسط مجموع القاعدتين المتوازيتين في طول المسافة بينهما.

Trapezoid area

The area of a trapezoid is the average length of the parallel sides, times the distance between them.

لنفرض أن لدينا دالة $f(x)$ معرفة في الفترة [a, b] كما هو موضح بالشكل (3) وقمنا بتقسيم هذه الفترة إلى مجموعة أشباه منحرفات وعرض كل منها Δxونريد الآن إيجاد قيمة التكامل للدالة $f(x)$ على الفترة $x_0 \to x_1$ فهذا التكامل يمكن كتابته على الصورة التالية:

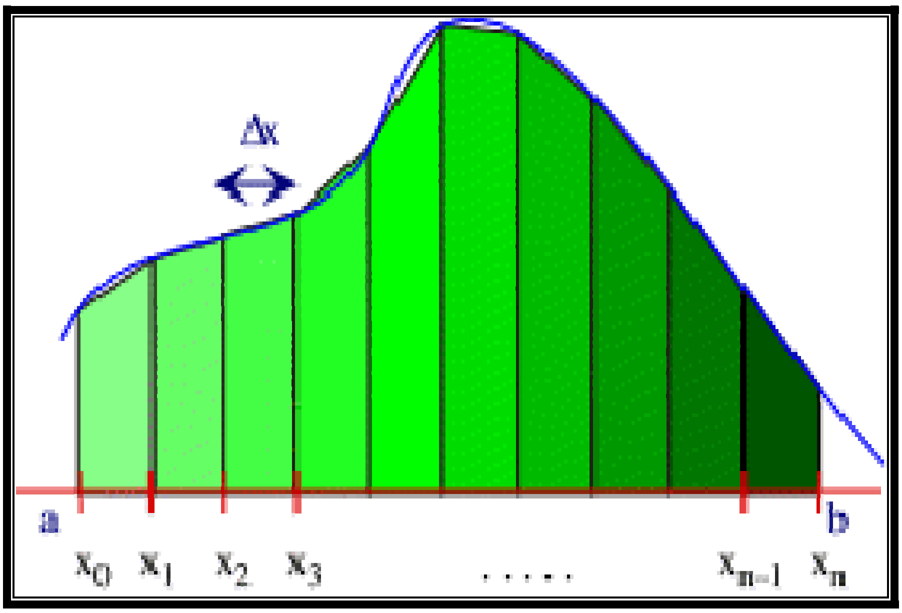


Figure 29

$$\int_{x_o}^{x_1} f(x)dx \cong \int_{x_o}^{x_1} (f_o + s\Delta f_o)dx \qquad (1)$$

الطرف الأيمن من المعادلة (1) بدلالة المتغير s يمكن صياغته على الصورة التالية:

$$\int_{x_o}^{x_1} (f_o + s\Delta f_o)dx = h \int_{s=0}^{s=1} (f_o + s\Delta f_o)ds = \frac{h}{2}(f_o + f_1) \qquad (2)$$

وبناء عليه المعادلتين (1) ، (2) يصلوا إلى المعادلة التالية:

$$\int_{x_o}^{x_1} f(x)dx \cong \frac{h}{2}(f_o + f_1) \qquad (3)$$

عند حساب التكامل من المعادلة (3) تكون هناك نسبة خطأ وذلك لأننا قمنا بتقريب شكل الدالة إلى خط مستقيم لنحصل على شبه منحرف كما هو موضح في الشكل (4) التالي:

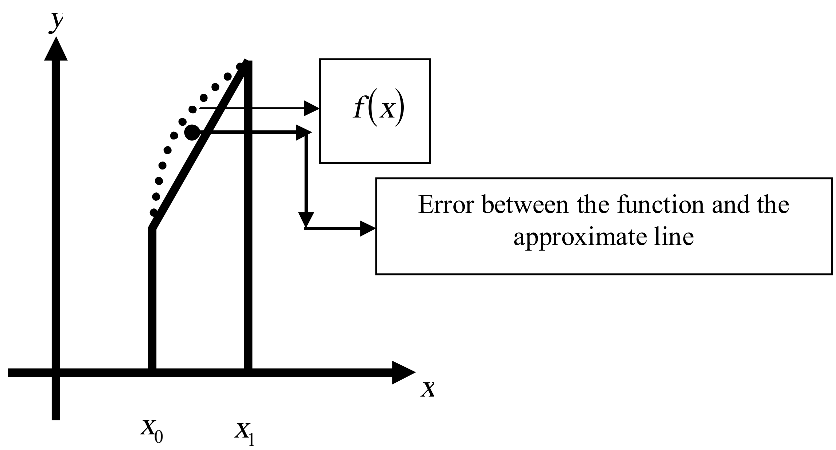


Figure 30

نسبة الخطأ في المعادلة (3) يمكن حسابها من المعادلة التالية

$$Error = -\frac{1}{12} h^3 f^{//}(\xi_1) \quad , x_o \le \xi_1 \le x_1 \tag{4}$$

تكلمنا حتى الآن على كيفية إيجاد مساحة شريحة واحدة من خلال مفهوم التكامل العددي ونريد الآن إيجاد الصيغة العامة لقاعدة شبة المنحرف لحساب التكامل العددي.

كما سبق وأشرنا نقوم بتقسيم المساحة تحت المنحنى في الفترة المراد حساب مساحتها إلى عدد n من الشرائح الرأسية ولنفرض أننا نريد إيجاد المساحة بين أي نقطتين x_i ، x_{i+1} فيمكن بناء على الاستنتاج السابق أن نكتب التكامل بين هاتين النقطتين على الصورة التالية:

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \cong \left\{ \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \right\} \Delta x \tag{5}$$

بفرض أن

$$\Delta x = h \tag{6}$$

إذن التكامل في المعادلة (5) يصبح على الشكل التالي:

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{2} \{ f(x_i) + f(x_{i+1}) \} \tag{7}$$

المعادلة (7) يمكن تعميمها على النحو التالي:

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{2} \{ f_1 + f_2 + f_2 + f_3 + f_3 + \ldots\ldots + f_n + f_{n+1} \} \tag{8}$$

نلاحظ أنه في الطرف الأيمن من المعادلة (8) أن كل حد من حدود الوسط Mid-terms يتكرر مرتين وعليه يمكن إعادة كتابة المعادلة (8) بصورة أبسط على النحو التالي:

$$I(f)=\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{2}\left\{ f_1 + f_{n+1} + \sum_{i=2}^{n} f_i \right\} \qquad (9)$$

المعادلة (9) هي القاعدة العامة لحساب التكامل عدديا بطريقة شبه المنحرف Trapezoidial rule ولتذكر هذه القاعدة يمكننا القول بأن القاعدة تتمثل في حساب قيمة الدالة المراد تكاملها عند كل نقطة داخل الفترة المراد إجراء التكامل عليها ثم نقوم بجمع قيمة الدالة عند كل من نقطتي البداية والنهاية ثم ضرب مجموع القيم الداخلية في 2 وأخيرا نطبق العلاقة (9).

Example

For the following tabulated function given below. Evaluate the integration of that function between 1.8 and 3.4

Table 4

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1.6	4.953	2.8	16.445
1.8	$f_1 = 6.05$	3.0	20.086
2.0	7.389	3.2	24.533
2.2	9.025	3.4	29.964
2.4	11.023	3.6	36.598
2.6	13.464	3.8	$f_{n+1} = 44.701$

لدينا في هذا المثال دالة مجدولة Tabulated function وقد عرفنا هذا النوع من الدوال من قبل وأعطينا عليه أمثلة في مجالات الهندسة والمطلوب حساب التكامل للدالة التي يمثل مجموعة الأرقام في الجدول. أي أن المطلوب حساب التكامل الآتي:

$$I(f)=\int_{1.8}^{3.4} f(x)dx \qquad (1)$$

وفى البداية وطالما أننا سوف نستخدم قاعدة شبه المنحرف Trapezoidal rule فنبدأ بكتابة العلاقة العامة التي سوف تستخدم في حساب التكامل المطلوب وهي ممثلة في المعادلة العامة (9) كالآتي:

$$I(f)=\int_{a}^{b} f(x)dx \cong \frac{h}{2}\left\{ f_1+\ f_{n+1}+\sum_{i=2}^{n} f_i \right\} \qquad (2)$$

من الجدول قيمة الدالة عند البداية والنهاية للفترة المعطاة على النحو التالي:

$$\begin{aligned} f_1 &= 6.05 \\ f_{n+1} &= 44.701 \end{aligned} \qquad (3)$$

كذلك مجموع الحدود المتوسطة كالآتي:

$$\begin{aligned} & f_2+\ f_3+......+\ f_n \\ &=\begin{bmatrix} 7.389+9.025+11.023+13.464+16.445 \\ +20.086+24.533+29.964+36.598 \end{bmatrix} \end{aligned} \qquad (4)$$

والآن بالتعويض من (3) ، (4) في المعادلة (2) نحصل على التكامل المطلوب كالآتي:

$$\begin{aligned} & I(f)=\int_{a}^{b} f(x)dx \cong \\ & \frac{0.2}{2}\left\{ (6.05+44.701)++2\bullet \begin{bmatrix} 7.389+9.025+11.023+13.464+16.445 \\ +20.086+24.533+29.964+36.598 \end{bmatrix} \right\} \qquad (5) \\ & = 23.9944 \end{aligned}$$

Example

Evaluate the following integral $I=\int_0^1\left(\frac{1}{1+x}\right)dx$ using trapezoidal rule and number of sub-division equals 6.

Solution

نود الإشارة قبل البدء في حل المثال أن ننوه إلى أنه ليست كل مسائل التكامل العددي تكون فيها الدالة مجدولة لكن من الجائز أن تكون الدالة معطاة والفترة المراد إيجاد التكامل فيها معروف ويكون المطلوب حساب التكامل.

في هذا المثال لدينا دالة:

$$f(x)=\left(\frac{1}{1+x}\right) \tag{1}$$

والمطلوب إجراء التكامل لهذه الدالة على الفترة $[a=0, b=1]$

ولدينا معلومة يجب الحفاظ عليها وهي أن عدد التقسيم الداخلي لهذه الفترة يساوى 6 أي أن:

Number of sub-division = 6 (2)

نود أن نشير إلى أن هناك علاقة تجريبية Imperical relation بين بداية ونهاية فترة التكامل وعدد التقسيمات الداخلية وكذلك طول عرض الشريحة كلها في علاقة واحدة كالآتي:

$$h=\frac{b-a}{n} \tag{4}$$

في المثال الحالي لدينا معلومات حول بداية ونهاية فترة التكامل بالإضافة إلى عدد التقسيمات الداخلية Number of internal sub-division وعليه يكون المجهول الوحيد هو عرض الشريحة الأفقي ويحسب من العلاقة (4) على النحو التالي:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{6} = \frac{1}{6} \tag{5}$$

الخطوة التالية هي تحويل الدالة المعطاة والمراد تكاملها من صورة معادلة إلى صورة مجدولة Tabulated وذلك بالتعويض المباشر بالنقاط في الدالة المعطاة مع مراعاة عدد التقسيمات الداخلية وبناء على المعلومات المتاحة في المثال الحالي نحصل على الجدول التالي:

Table 5

x	0	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	1
$f(x)$	$f_1 = 1$	6/7	6/8	6/9	6/10	6/11	$f_7 = \frac{1}{2}$

الخطوة التالية كتابة العلاقة العامة لحساب التكامل عدديا باستخدام قاعدة شبه المنحرف كالآتي:

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{2}\left\{ f_1 + f_{n+1} + 2\sum_{i=2}^{n} f_i \right\}$$

$$= \int_{a=0}^{b=1} f(x)dx \cong \frac{1}{12}\left\{ f_1 + f_7 + 2\sum_{i=2}^{6} f_i \right\} \tag{6}$$

$$= \int_{a=0}^{b=1} f(x)dx \cong \frac{1}{12}\left\{ f_1 + f_7 + 2\left(f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 \right) \right\}$$

والآن بالتعويض من الجدول في المعادلة (6) نحصل على التكامل عدديا كالآتي:

$$I(f)=\int_a^b f(x)dx \cong \frac{0.2}{2}\left\{\left(1+\frac{1}{2}\right)++2\bullet\left[\frac{6}{7}+\frac{6}{8}+\frac{6}{9}+\frac{6}{10}+\frac{6}{11}\right]\right\}=0.6948 \quad (7)$$

قاعدة سمبسون ذات الثلث Simpson 1/3 Rule

عندما لجأ الباحثون إلى الطرق العددية كان ذلك بسبب العديد من الأسباب:

(1) صعوبة التعامل بالطرق التحليلية

(2) التقدم في علوم الحاسوب وسهولة التعامل معها ودقتها الفائقة

لماذا التطوير في الطرق العددية؟

للإجابة على هذا السؤال ليكن إجابتنا من خلال الطرق المختلفة للتكامل العددي فقد بدءنا بطريقة شبة المنحرف Trapezoidal ووجدنا أن نسبة التقريب فيها عالية ومن ثم تتزايد الأخطاء ومن هنا كان لابد من استنتاج طرق أخرى أكثر دقة وكانت طريقة سمبسون ذات الثلث Simpson 1/3 rule ونود أن نشير إلى أن هذه الطريقة مستنتجة أساسا من علاقات نيوتن- كوتز Newton-Cotes عندما $n=2$. ولكي نفهم الأسلوب الذي أتبع لاستنتاج المعادلة العامة للتكامل العددي باستخدام قاعدة سمبسون ذات الثلث إليك الآتي:

لنفرض أننا أخذنا شريحتين متتاليتين كما هو موضح بالشكل (5) مع مراعاة أن عرض الشرائح Strips كلها متساوي وأردنا الآن إجراء التكامل على الشريحتين معا في الفترة من x_0 حتى x_2

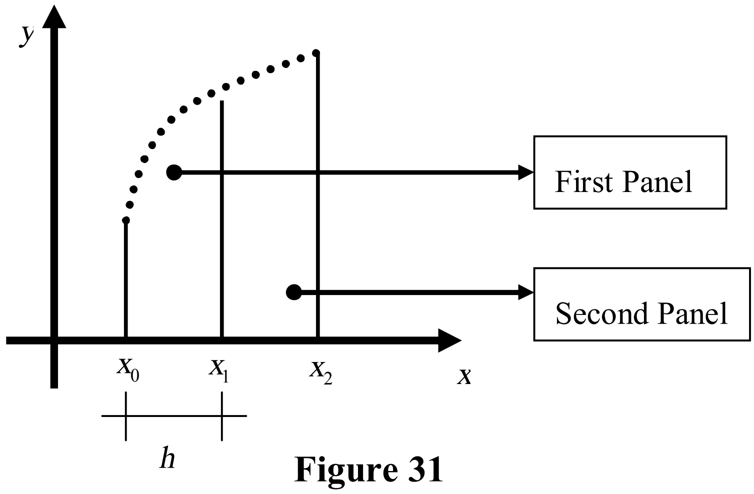


Figure 31

إذن تكامل الدالة على الفترة الموضحة بالشكل (5) من خلال علاقات نيوتن-كوتز Newton-Cotes يمكن كتابتها على الصورة التالية:

$$\int_{x_o}^{x_2} f(x)dx \cong \frac{h}{3}\left(f_o + 4 f_1 + f_2 \right) - \frac{h^5}{90} f^{(5)}(\xi) \qquad (1)$$

الحد الأخير في المعادلة (1) يمثل نسبة الخطأ عند حساب التكامل على الفترة المبينة بالشكل (5) ، والآن بتعميم Generalize المعادلة (1) على الفترة الكلية للدالة من $x = a$ حتى $x = b$ فنحصل على المعادلة العامة التالية:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \cong \frac{h}{3}\left(\underset{value}{f_{starting}} + \underset{value}{f_{end}} + 2 \bullet \left[\sum_{i=odd} f_i \right] + 4 \bullet \left[\sum_{i=even} f_i \right] \right) \qquad (2)$$

المعادلة (2) هي القاعدة العامة لحساب التكامل عدديا باستخدام سمبسون ذات الثلث Simpson 1/3 rule مع مراعاة أن نسبة الخطأ في هذه المعادلة يمكن حسابها من المعادلة التالية:

$$Error = -\left(\frac{b-a}{180}\right)h^4 f^{(4)}(\xi_1) \quad , a \le \xi_1 \le b \qquad (3)$$

هناك شرط أساسي يجب مراعاته عند تطبيق قاعدة سمبسون ذات الثلث Simpson 1/3 rule ألا وهو يجب مراعاة أن تكون عدد فترات التقسيم الداخلي Internal sub-interval عدد زوجي.

There is a very important note when using Simpson'1/3 rule, is that the number of intervals must be an even.

Example

Evaluate the integration of the tabulated function below between 1.8 and 3.4

Table 6

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1.6	4.953	2.8	16.445
1.8	$f_s = 6.05$	3.0	20.086
2.0	7.389	3.2	24.533
2.2	9.025	3.4	$f_e = 29.964$
2.4	11.023	3.6	36.598
2.6	13.464	3.8	44.701

بتطبيق القاعدة في المعادلة (2) على النحو التالي:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{3}\left(f_{\substack{starting\\value}} + f_{\substack{end\\value}} + 2\bullet\left[\sum_{i=odd} f_i\right] + 4\bullet\left[\sum_{i=even} f_i\right]\right)$$

$$\int_a^b f(x)dx \cong \left(\frac{0.2}{3}\right)\begin{pmatrix} 6.05 + 29.964 + 2\bullet[9.025 + 13.464 + 20.086] \\ + 4\bullet[7.389 + 11.023 + 16.445 + 24.533] \end{pmatrix}$$
$$= 23.915$$

قاعدة سمسون ذات الثلاثة أثمان Simpson (3/8) Rule

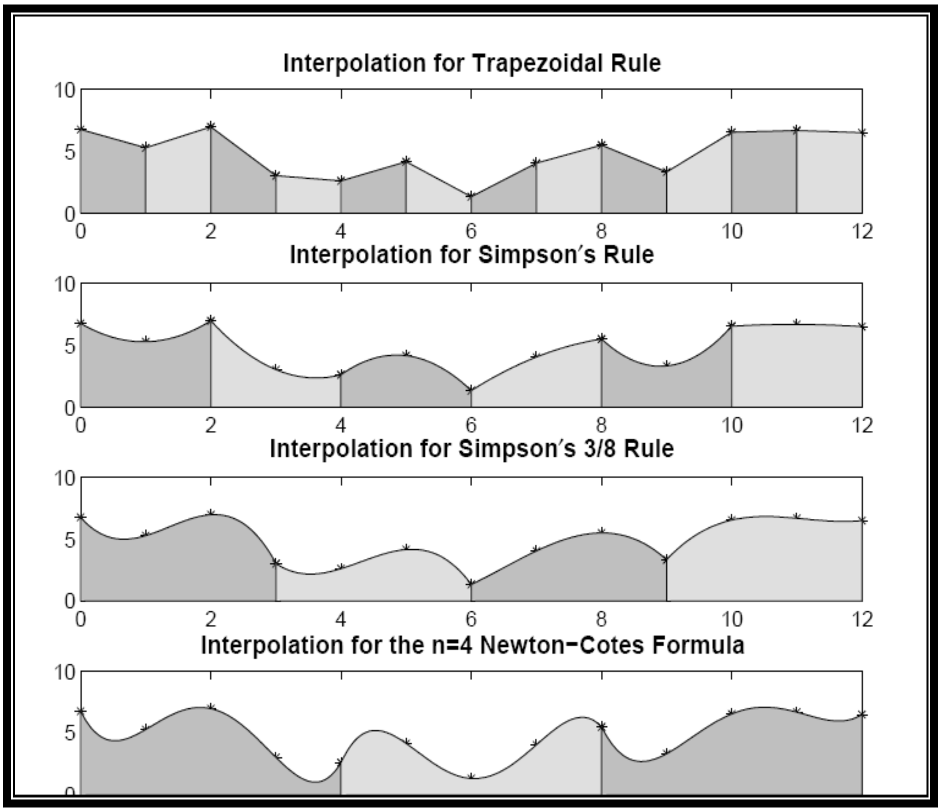
بإتباع الأسلوب السابق عند استنتاج قاعدة سمبسون ذات الثلث Simpson' 1/3 rule فنحصل على قاعدة سمبسون ذات الثلاثة أثمان Simpson's 3/8 rule على النحو التالي:

$$\int_{x_o}^{x_3} f(x)dx \cong \frac{3h}{8}\left(f_o + 3\, f_1 + 3\, f_2 + \, f_3 \right) \tag{4}$$

وكما تعودنا عادة ما تكون هناك نسبة خطأ وعليه فإن نسبة الخطأ في العلاقة السابقة يمكن حسابها من العلاقة التالية:

$$Error = -\frac{3}{80}\, h^5\, f^{(5)}(\xi_1) \quad , x_o \le \xi_1 \le x_3 \tag{5}$$

الشكل التالي هو مجرد رسم توضيحي للقارئ وكملخص عام لدارس التكامل العددي حيث نوضح فيه من خلال الرسم المفهوم الرياضي وراء كل طريقة سبق شرحها في التكامل العددي.



طريقة رومبرج للتكامل العددي Romberg's Integration Method

عادة عندما بدأت الطرق العددية في الانتشار ومع التقدم التكنولوجي في البرمجيات ازدهرت الطرق العددية ومن ثم ازدادت التقنيات في الطرق العددية وذلك من أجل الوصول إلى طرق أكثر دقة من التي قبلها ومن هنا كانت لطرق التكامل العددي مجال أيضا حيث وكما رأينا من ذى قبل بدأت الطرق بالطرق الأولية التي فيها نسبة خطأ كبيرة إلى حد ما ثم تلا ذلك طرق أكثر دقة ومنها الطريقة التالية:

This method is more accurate than Newton-Cotes formulas. Its implementation starts by assuming the area of a trapezoid under the whole area.

تبدأ هذه الطريقة بتقسيم المساحة على مدار فترة التكامل كلها على شكل شبه منحرف Trapezoid وعليه نحصل على الناتج الأولى التالي:

$$I_{1,1} = \frac{h}{2}\left(f_0 + f_1 \right) \tag{1}$$

الخطوة التالية تقسيم المساحة الكلية إلى قسمين وبالتالي تصبح المساحة على النحو التالي:

$$I_{2,1} = \frac{h}{4}\left(f_0 + f_{\frac{1}{2}} \right) + \frac{h}{4}\left(f_{\frac{1}{2}} + f_1 \right) = \frac{h}{4}\left(f_0 + f_1 \right) + \frac{h}{2}\left(f_{\frac{1}{2}1} \right) = \frac{1}{2}\left(I_{1,1} + hf_{\frac{1}{2}} \right) \tag{2}$$

الخطوة التالية تقسيم المساحة الكلية إلى ثلاثة أقسام وبالتالي تصبح المساحة على النحو التالي:

$$I_{3,1} = \frac{1}{2}\left(I_{2,1} + \frac{h}{2}\left(f_{\frac{1}{4}} + f_{\frac{3}{4}} \right) \right) \tag{3}$$

وبإتباع الأسلوب السابق والتكرار ، ولتعميم لنفرض أن التكامل في شكله العام هو $I_{i,j}$ حيث:

- i :تمثل مستوى التقريب Level of approximation
- j :تمثل عدد مرات التقريب Number of approximation

من هذا التعريف العام يتضح للقارئ أننا في المعادلات من (1) حتى (3) كنا قد أجرينا التكامل حتى المستوى الثالث لكن التقريب كان لمرة واحدة.

وهكذا يمكننا إجراء التكامل مرة أخرى وهنا يكون التكامل مقرب للمرة الثانية مع اختلاف عدد مرات التقريب وهكذا...

Note that $I_{i,j}$ the subscript (i) denotes the level of approximation, while (j) denotes the iteration number. Similar procedure, for the second iteration and also starting from one, two and three sub-divisions, one can get the following second iteration relations:

$$I_{1,2}=\frac{1}{3}\left(4I_{2,1}-I_{1,1}\right) \tag{4}$$

$$I_{2,2}=\frac{1}{3}\left(4I_{3,1}-I_{2,1}\right) \tag{5}$$

$$I_{3,2}=\frac{1}{3}\left(4I_{4,1}-I_{3,1}\right) \tag{6}$$

ومن الشرح السابق يمكن وضع الصيغة العامة لقاعدة رومبرج Romberg في العلاقة التكرارية التالية:

$$I_{i,j}=\frac{1}{\left(4^{j-1}-1\right)}\left(4^{j-1}I_{i+1,\,j-1}-I_{i,\,j-1}\right) \qquad i=1,2,3,\ldots\ \&\ j=2,3,4,\ldots. \tag{7}$$

Example

Using Romberg method to evaluate the integral: $\int_0^8\left(\frac{5}{8}x^4-4x^3+2x+1\right)dx$

Solution

The first step is to construct the following table starts from the lower limit of integration to the upper limit of integration, see table (6).

Table 7

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	1	-0.375	-17	-50.375	-87
x	5	6	7	8	
$f(x)$	-98.375	-41	143.625	529	

Now fellow up the procedure described above:

$$I_{1,1}=\frac{h}{2}(f_0+f_1)=\frac{8}{2}(1+529)=2120$$

$$I_{2,1}=\frac{1}{2}\left(I_{1,1}+hf_{\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{2}(2120+8\bullet(-87))=712$$

$$I_{3,1}=\frac{1}{2}\left(I_{2,1}+\frac{h}{2}\left(f_{\frac{1}{4}}+f_{\frac{3}{4}}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(712+\frac{8}{2}(-17-41)\right)=240$$

To improve the accuracy of the results, use equation (47), and construct the following table (7)

$I_{i,1}$	$I_{i,2}$	$I_{i,3}$	$I_{i,4}$
2120	242.6667	72.00003	
712	82.6667	72.00003	
240	72.6667		
114.5			

Then the approximate value of the given integral will be 72.00003

التكامل العددي للتكامل المتعدد Multiple Integrals

In this section, we will learn how to evaluate numerically double integral having the following general form:

$$I = \int_{c}^{d} \int_{a}^{b} f(x, y) dxdy \qquad (48)$$

The main idea for evaluating such integrals is that we apply the trapezoidal rule in the x-direction and then Simpson'1/3 or 3/8 rule in the y-direction. The following examples will illustrate the procedure very well.

Example

Evaluate the integral $I = \int_{c}^{d} \int_{a}^{b} f(x, y) dxdy$, in which $a = 1.5$, $b = 3.0$ $c = 0.2$ and $d = 0.6$. Note the numerical values for the function inside the integral are given in table below.

Table 8

y/x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
0.5	0.165	0.428	0.678	0.942	1.190	1.431
1.0	0.271	0.640	1.003	1.359	1.703	2.035
1.5	0.447	0.990	1.524	2.045	2.549	3.031
2.0	0.738	1.568	2.384	3.177	3.943	4.672
2.5	1.216	2.520	3.800	5.044	6.241	7.379
3.0	2.005	4.090	6.136	8.122	10.030	11.841
3.5	3.306	6.679	9.986	13.196	16.277	19.198

Let us start with *x*-direction:

At $y = 0.2$

$$\int_{1.5}^{3.0} f(x, y)dx = \int_{1.5}^{3.0} f(x, 0.2)dx = \frac{h}{2}\left(f_1 + 2 \bullet [\, f_2 + f_3 \,] + f_4 \right)$$

$$\int_{1.5}^{3.0} f(x, y)dx = \frac{0.5}{2}(0.990 + 2 \bullet [1.568 + 2.520] + 4.090) = 3.3140$$

At $y = 0.3$

$$\int_{1.5}^{3.0} f(x, y)dx = \int_{1.5}^{3.0} f(x, 0.3)dx = \frac{h}{2}\left(f_1 + 2 \bullet [\, f_2 + f_3 \,] + f_4 \right)$$

$$\int_{1.5}^{3.0} f(x, y)dx = \frac{0.5}{2}(1.524 + 2 \bullet [2.384 + 3.800] + 6.136) = 5.007$$

Similarly, one can continue computations for the remaining values of y, leads to:

$y = 0.4$	$I = 6.6522$
$y = 0.5$	$I = 8.2368$
$y = 0.6$	$I = 9.7435$

Now sum these results in the y-direction according to Simpson's 1/3 rule:

$$I \cong \frac{h}{3}\left(\underset{value}{f_{starting}} + \underset{value}{f_{end}} + 2 \bullet \left[\sum_{i = odd} f_i \right] + 4 \bullet \left[\sum_{i = even} f_i \right] \right)$$

$$= \frac{0.1}{3}(3.314 + 9.7435 + 4 \bullet [5.5.007 + 8.2368] + 2 \bullet [6.6522]) = 2.6446$$

Example

Evaluate the integral $I = \int_{4}^{4.6}\int_{2}^{2.6}\left(\frac{1}{xy}\right)dxdy$, in which the step in x-direction $h = 0.2$ and the step in y-direction $k = 0.3$. Note the numerical values for the function inside the integral are given in table (9) below.

Table 9

y \ x	4	4.2	4.4	4.6
2.0	0.125	0.119	0.114	0.109
2.3	0.109	0.104	0.099	0.095
2.6	0.096	0.092	0.087	0.084

Let us start with *x*-direction:

$y = 2.0 \qquad I = 0.0698$

$y = 2.3 \qquad I = 0.0608$

$y = 2.6 \qquad I = 0.0538$

Now sum these results in the y-direction according to Simpson's 1/3 rule:

$$I \cong \frac{k}{3}\left(f_{\substack{starting\\ value}} + f_{\substack{end\\ value}} + 2\bullet\left[\sum_{i=odd} f_i\right] + 4\bullet\left[\sum_{i=even} f_i\right]\right) = 0.03667$$

Supplementary Problems

Problem (1)

The following table (10) is for $f(x)=(1+\ln x)$. Determine estimates of its first derivative at x = 0.15, x = 0.19 and 0.23 using:

(a) One term (b) Two terms

(c) Three terms (d) Four terms

By comparing the analytical values, determine the errors of each estimate.

x	$(1+\ln x)$	Δ	Δ^2	$\Delta^3 x$
0.15	0.1761			
		0.0543		
0.17	0.2304		-0.0059	
		0.0484		0.0009
0.19	0.2788		-0.0050	
		0.0434		0.0011
0.21	0.3222		-0.0039	
		0.0395		0.0006
0.23	0.3617		-0.0033	
		0.0362		0.0005
0.25	0.3979		-0.0027	
		0.0335		0.0002
0.27	0.4314		-0.0025	
		0.0310		0.0005
0.29	0.4624		-0.0020	
		0.0290		
0.31	0.4914			

Problem (2)

The following table (11) is for $f(x) = \sin x$. Determine estimates of its first derivative at x =0.9 using:

(b) One term (b) Two terms

(d) Three terms (d) Four terms

By comparing the analytical values, determine the errors of each estimate.

x	sin x	x	sin x
0.800	0.71736	0.901	0.78395
0.850	0.75128	0.902	0.78457
0.880	0.77074	0.905	0.78643
0.890	0.77707	0.910	0.78950
0.895	0.78021	0.920	0.79560
0.898	0.78208	0.950	0.81342
0.899	0.78270	1.000	0.84147

Problem (3)

Compute the first and the second derivative for $f(x) = \exp(x)$, using h = 0.1 at x = 1.8, then compare the results with the exact values.

Problem (3)

Compute the first and the second derivative for $f(x)=\cos\pi x$, at x = 0.45 with the values of the given function at x = 0, 0.25, 0.50, 0.75 and 1.0, then compare the results with the exact values.

Problem (4)

Construct the Lozenge's diagram for the three problems above, and then find:

(a) The first derivative

(b) The second derivative

Problem (5)

Evaluate the following integrals:

(1) $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{x}{\cos^2 x}\right)dx$ (2) $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{x}{\sin^2 x}\right)dx$ (3) $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{x}{\tan^2 x}\right)dx$

(a) Trapezoidal rule (b) Simpson's 1/3 rule

Problem (6)

For the following tabulated function, find the integration of the function between the initial and the terminated points, given in table (12).

x	$f(x)$	x	$f(x)$
0.0	93	0.6	35
0.1	87	0.7	39
0.2	68	0.8	48
0.3	55	0.9	53
0.4	42		
0.5	37		

Problem (7)

Use Romberg method to evaluate the following integrals up to three decimal places:

(a) $I = \int_{0}^{2} \sqrt{\tan x}\, dx$ (b) $I = \int_{1}^{2} \exp\left(x^2\right) dx$

Problem (8)

Evaluate the following integral: $I = \int_{-0.2}^{0.6} \int_{0.1}^{0.7} e^{x} \sin y\, dx$

Problem (9)

Use Simpson'1/3 rule to evaluate the following integrals:

(a) $I = \int_{0}^{1} \frac{\sin x}{x} dx$ (b) $I = \int_{0}^{1} \frac{\cos x}{x} dx$

6

الباب السادس

متسلسلات فورير والتحليل الهارموني

Fourier Series

and Harmonic Analysis

صفحة زوجية فارغة

الباب السادس

متسلسلات فورير والتحليل الهارموني

Fourier Series and Harmonic Analysis

نبذة تاريخية عن فورير

ولد 21 مارس 1768 م في اوكسير بفرنسا. ماتت أمه وهو في التاسعة ثم مات والده كان يعمل خياطا من زواجه الأول أنجب ثلاثة أولاد وبعد موت زوجته الأولى تزوج ثانية ورزق باثني عشرا. فوريير كان التاسع من الزواج الثاني.

أبوه وهو في العاشرة. بداية لا تبشر. درس واظهر نبوغا منذ صغره وهو في الرابعة عشر أكمل ذاتيا قراءة دروس الرياضيات Bezout ستة أجزاء!! طبعا من لا يؤنب نفسه لن يصل لشيء و هكذا Fourier يصف نفسه في قوله:

Yesterday was my 21st birthday, at that age Newton and Pascal had already acquired many claims to immortality.

بعد تقلب في أحواله مواصلة الدراسة على أيدي Lagrange, Laplace and Monge، ثم مع تقلب أحوال فرنسا وصعود نابليون للحكم لم يتخلف فوريير عن "نداء واجبه نحو بلده" فترك الأهل والمنصب ولحق بجيش نابليون لغزو مصر بعد العودة "خاسرين بفضل الله" من مصر عين في مدرسة حربية بجرنوبل بامر من نابليون لم يرفض وهناك قدم أهم إسهاماته للعلم أبحاثه في توصيل الحرارة في الأجسام الصلبة On the Propagation of Heat in Solid Bodies هنا مربط الفرس ظهرت متسلسلات فوريير للوجود. عمله رفض من جانب لابلاس Laplace ولاجرانج Lagrange وكلها أمور كثيرا ما تكررت في تاريخ الرياضيات وغيرها من العلوم المختلفة. لكن فوريير لم يلن وأصر على رأيه وعمل جاهدا لضحد منتقديه. بالتأكيد عمله كان سابقا لعصره وحتى لعصرنا فهناك حتى الآن مسائل رياضية لم تثبت بخصوص متسلسلات فوريير ولكن وجهة النظر السائدة بعد النجاح منقطع النظير في مجالات شتى. العيب منا وناتج عن قصور علمنا فسبحان العليم الأحد. من كلمات فوريير في كتاب الحرارة.

Heat, like gravity, penetrates every substance of the universe its rays occupy all parts of space. The object of our work is to set forth the mathematical laws which this element obeys. The theory of heat will hereafter form one of the most important branches of general physics.

Analytical Theory of Heat

هكذا كانت الأمور في الماضي غالبا ما يبدأ بمشكلة رياضية واقعية يعمل بجد ويزيد في الرياضيات وكما نعلم فالرياضيات لها ألف روح. نيوتن من تحليل نتائج الأرصاد استنتج معادلات الحركة وليحل هذه المعادلات ويفسرها اوجد علم التحليل الرياضي. طبعا هناك أمور أخرى ظهرت في الرياضيات وشاع تطبيقها في مواضع مختلفة ثم في النهاية توفي فورريير في 1830 .

عن متسلسلة فورير About Fourier Series

ماذا قالوا عن متسلسلة فورير؟

- متسلسلة فورير Fourier Series هي المفكوك لدالة ترددية Expansion of periodic function بدلالة مجموع لانهائي من الحدود مكوناته دالتي الجيب Sine وجيب التمام Cosine.
- متسلسلة تيلور تستخدم خاصية التعامد لدالتي الجيب Sine، وجيب التمام Cosine.
- دراسة موضوع متسلسلة فورير وحساباتها هو ما نسميه التحليل الهارموني Harmonic Analysis حيث يتم تحويل الدالة إلى حدود أولية بسيطة يتم التعامل معها ثم إعادة تجميعها مرة أخرى لنصل في النهاية إلى حل المسألة الأصلية.

الدوال الترددية Periodic Functions

تعريف

الدالة الترددية Periodic function هي الدالة التي تكرر نفسها كل مقدار ثابت يسمى مقدار تردد الدالة Period ويرمز له بالرمز T.

A function $f(x)$ is said to be periodic if and only if there exist a positive number "T" such that for any "x" in the domain, $f(x+T)=f(x)$ where T is called the Period of $f(x)$

الأمثلة كثيرة على الدوال الترددية منها دالة أسنان المنشار Saw tooth الموضحة في الشكل التالي:

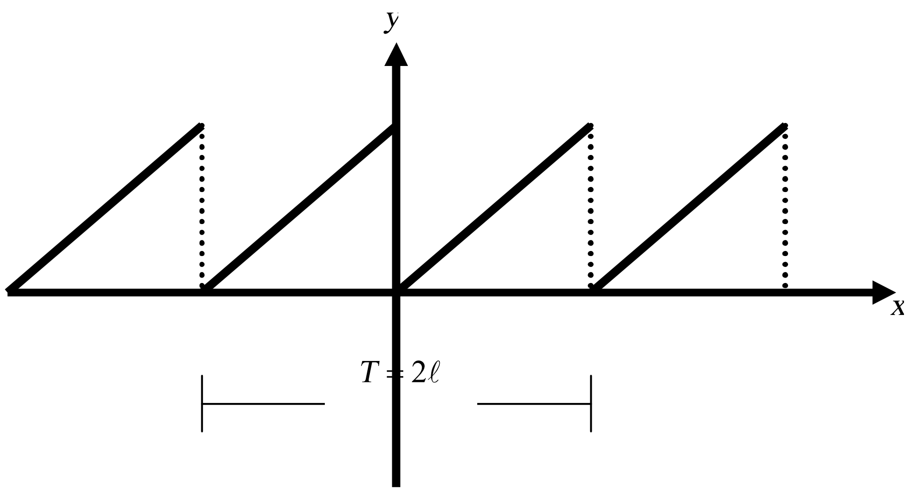


Figure 32

نود الإشارة إلى أنه لكي نحدد الفترة التي تكرر الدالة فيها نفسها أو ما يسمى بمقدار التكرار Period فإننا نلجأ لاستخدام التعريف الأولى للدالة المترددة Periodic function وهذا ما سنحاول من خلال الأمثلة المتنوعة العرف عليه.

Example

Find the period for the following function, $f(x) = \cos x$

Solution

كتطبيق مباشر على إيجاد طول فترة تكرار الدالة أو ما نسميه التردد Period نتبع الآتي:

نبدأ بكتابة العلاقة العامة التي سوف نستخدمها في سبيل الوصول إلى هذا الغرض وهي على الصورة التالية:

$$f(x) = f(x+T) \tag{1}$$

الخطوة التالية التعويض بالدالة المراد إيجاد قيمة ترددها كالآتي:

$$f(x) = f(x+T) \Rightarrow \cos x = \cos(x+T) \tag{2}$$

$$\cos x = \cos x \cos T - \sin x \sin T \tag{3}$$

بعد ذلك ننظر إلى الطرف الأيمن من المعادلة (3) ونحاول إيجاد قيمة T التي تجعل طرفي المعادلة (3) متساويين فنجد أننا نبحث عن قيمة T التي تجعل الحد الثاني من الطرف الأيمن مساويا للصفر في حين تجعل cos T في الحد الأول من الطرف الأيمن مساويا للواحد أي أن:

$$\cos T = 1 \Rightarrow T = 2\pi \tag{4}$$

Example

Find the period for the following function, $f(x)=\sin x$

Solution

مرة أخرى وكتطبيق مباشر على إيجاد طول فترة تكرار الدالة أو ما نسميه التردد Period نتبع الآتي:

نبدأ بكتابة العلاقة العامة التي سوف نستخدمها في سبيل الوصول إلى هذا الغرض وهي على الصورة التالية:

$$f(x)= f(x+T) \tag{1}$$

الخطوة التالية التعويض بالدالة المراد إيجاد قيمة ترددها كالآتي:

$$f(x)= f(x+T) \Rightarrow \sin x=\sin(x+T) \tag{2}$$

$$\sin x=\sin x\cos T-\cos x\sin T \tag{3}$$

بعد ذلك ننظر إلى الطرف الأيمن من المعادلة (3) ونحاول إيجاد قيمة T التي تجعل طرفي المعادلة (3) متساويين فنجد أننا نبحث عن قيمة T التي تجعل الحد الثاني من الطرف الأيمن مساويا للصفر في حين تجعل cos T في الحد الأول من الطرف الأيمن مساويا للواحد أي أن:

$$\cos T=1 \Rightarrow T=2\pi \tag{4}$$

تمثيل الدالة الترددية بدلالة متسلسلة فورير

Function Representation in Terms of Fourier Series

لنفرض أن لدينا دالة $f(x)$ تكرر نفسها في كل $T=2\ell$ إذن متسلسلة فورير

التي تناظرها على الصورة التالية:

$$f(x)=a_o+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}+b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right) \qquad (1)$$

في المعادلة (1) المعاملات a_o, a_n, b_n تسمى معاملات أويلر Euler coefficients وهي معاملات مجهولة بإيجادها تصبح المتسلسلة التي تكافئ الدالة معلومة.

تحديد المعامل a_o Determination of a_o

فيما يلي سوف نتبع الأسلوب الرياضي لاستنتاج معاملات أويلر ونبدأ الاستنتاج بتكامل متسلسلة فورير على الفترة التي تكرر فيها الدالة نفسها كالآتي:

$$\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx=\int_{-\ell}^{\ell}\left\{a_o+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}+b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right)\right\}dx \qquad (2)$$

$$\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx=\int_{-\ell}^{\ell}a_o\,dx+\int_{-\ell}^{\ell}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}+b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right)\right\}dx \qquad (3)$$

وحيث أنه رياضيا في حال وجود تكامل مع مجموع فالتكامل يسبق المجموع وبالتالي المعادلة (3) تأخذ الشكل التالي:

$$\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx=\int_{-\ell}^{\ell}a_o\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\ell}^{\ell}\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx+b_n\int_{-\ell}^{\ell}\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx\right) \qquad (4)$$

التكامل في الحد الأول من الطرف الأيمن من المعادلة (4) يساوى $2\ell a_o$ في حين أن التكاملين الآخرين في نفس الطرف يساويا الصفر وبناء على ذلك المعادلة (4) تأخذ الشكل التالي:

$$\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx=2\ell a_o \qquad (5)$$

أي أن:

$$a_o = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx \qquad (6)$$

تحديد المعامل a_n a_n Determination of

نبدأ خطوات إيجاد هذا المعامل بضرب طرفي المعادلة (1) والتي تمثل متسلسلة فورير في $\left(\cos\frac{m\pi x}{\ell}\right)$ حيث m عدد صحيح موجب ثم إجراء التكامل على الفترة التي تكرر فيها الدالة نفسها فنحصل على الآتي:

$$\int_{-\ell}^{\ell}\left(\cos\frac{m\pi x}{\ell}\ f(x)\right)dx = \int_{-\ell}^{\ell}\left[\left\{a_o + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_o\cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_o\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right)\right\}\cos\frac{n\pi x}{\ell}\right]dx \ (7)$$

لنتعامل مع الطرف الأيمن من المعادلة (7) على النحو التالي:

$$\text{R.H.S.} = \int_{-\ell}^{\ell} a_o\cos\frac{m\pi x}{\ell}\,dx$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(\int_{-\ell}^{\ell}\cos\frac{n\pi x}{\ell}\cos\frac{m\pi x}{\ell}\,dx\right) \qquad (8)$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} b_n\left(\int_{-\ell}^{\ell}\sin\frac{n\pi x}{\ell}\cos\frac{m\pi x}{\ell}\,dx\right)$$

حساب التكامل الأول في الطرف الأيمن من المعادلة (8)

$$I_1 = \int_{-\ell}^{\ell} a_o \cos\frac{m\pi x}{\ell}\, dx = a_o \left\{ \frac{\sin\frac{m\pi x}{\ell}}{\frac{m\pi}{\ell}} \right\}_{x=-\ell}^{x=\ell} = 0 \qquad (9)$$

حساب التكامل الثاني في الطرف الأيمن من المعادلة (8)

$$I_2 = \int_{-\ell}^{\ell} \cos\frac{n\pi x}{\ell} \cos\frac{m\pi x}{\ell}\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\ell}^{\ell} \cos\frac{(n+m)\pi x}{\ell}\, dx + \frac{1}{2}\int_{-\ell}^{\ell} \cos\frac{(n-m)\pi x}{\ell}\, dx \quad (10)$$

التكامل الأول في الطرف الأيمن من المعادلة (10) يساوى صفر في حين أن التكامل الثاني في نفس الطرف يساوى ℓ عندما $m = n$.

حساب التكامل الثالث في الطرف الأيمن من المعادلة (8)

$$I_3 = \int_{-\ell}^{\ell} \sin\frac{n\pi x}{\ell} \cos\frac{m\pi x}{\ell}\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\ell}^{\ell} \sin\frac{(n+m)\pi x}{\ell}\, dx + \frac{1}{2}\int_{-\ell}^{\ell} \sin\frac{(n-m)\pi x}{\ell}\, dx \quad (11)$$

التكاملات في المعادلة (11) كلها مساوية للصفر وذلك لأن الدالة التي تكامل دالة فردية وهذه خاصية من خواص التكامل المحدود وبناء عليه تأخذ معادلة المعامل a_n الشكل التالي:

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos\frac{n\pi x}{\ell}\, dx \qquad n = 1,2,3,\cdots \qquad (12)$$

بنفس الأسلوب يمكن استنتاج معادلة للمعامل b_n وذلك من خلال ضرب طرفى

المعادلة (1) في $\left(\sin\frac{m\pi x}{\ell}\right)$ وإجراء التكامل على الطرفين على طول فترة التكرار وحساب التكاملات التي تظهر وبعد كل هذه الخطوات نحصل على معادلة هذا المعامل لتصبح على النحو التالي:

$$b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx \qquad n = 1,2,3,\cdots \tag{13}$$

ملخص عام لمتسلسلة فورير لدالة ترددية

General Summary for Periodic Function

فيما يلي سوف نوجز بعمل ملخص عام لمتسلسلة فورير Fourier series لدالة ترددية Periodic Function وترددها كل $T = 2\ell$

$$f(x) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_o\cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_o\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

$$a_o = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx \qquad n = 1,2,3,\cdots$$

$$b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx \qquad n = 1,2,3,\cdots$$

Example

Expand the following function in Fourier series:

$$f(x)=\begin{cases}0 & -\pi < x \le 0\\ x & 0 \le x < \pi\end{cases} \qquad \text{Period} = 2\pi$$

Solution

في هذا المثال نريد إيجاد متسلسلة فورير للدالة المبينة وأن فترة ترددها $\text{Period} = 2\pi$ ونبدأ الحل بكتابة العلاقة العامة للمتسلسلة أضف إلى ذلك كتابة العلاقات الرياضية للمعاملات على النحو التالي:

$$f(x) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_o \cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_o \sin\frac{n\pi x}{\ell}\right) \tag{1}$$

$$a_o = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx \tag{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx \qquad n = 1,2,3,\cdots\cdot \tag{3}$$

$$b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx \qquad n = 1,2,3,\cdots\cdot \tag{4}$$

الخطوة التالية حساب المعاملات في مجموعة المعادلات (2-4):

$$a_o = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} xdx = \frac{\pi}{4} \tag{5}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nxdx \tag{6}$$

بإجراء التكامل بالتجزئ للتكامل الأخير في المعادلة (6):

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx dx = \left(\frac{1}{\pi}\right)\left\{x\frac{\sin nx}{n} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx dx\right\}$$

$$= \left(\frac{1}{\pi}\right)\left\{x\frac{\sin nx}{n} - \frac{1}{n^2}\cos nx\right\}_0^{\pi}$$

$$= \left(\frac{1}{\pi}\right)\left[\left\{\pi\frac{\sin n\pi}{n} - \frac{1}{n^2}\cos n\pi\right\} - \left\{0\frac{\sin n0}{n} - \frac{1}{n^2}\cos n0\right\}\right] \tag{7}$$

$$= \left(\frac{1}{\pi n^2}\right)[1 - \cos n\pi]$$

المعادلة (7) يمكن كتابتها على الصورة المختصرة التالية:

$$a_n = \frac{1}{n^2\pi}(\cos nx)_0^{\pi} = \frac{1}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1) = \begin{cases} \dfrac{-2}{n^2\pi} & n: odd \\ 0 & n: even \end{cases} \tag{8}$$

يتبقى لنا حساب التكامل الذي يناظر المعامل الأخير كالآتي:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx dx \tag{9}$$

بإتباع نفس الخطوات في إجراء التكامل بالتجزئ للمعادلة (9) يمكننا أن نصل في النهاية إلى الصورة التالية:

$$b_n = \frac{-1}{n}(\cos nx)_0^{\pi} = \frac{1}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & n: odd \\ -\dfrac{1}{n} & n: even \end{cases} \tag{10}$$

والآن يمكن استخلاص متسلسلة فورير للدالة المعطاة بكل معاملاتها على الشكل النهائي التالي:

$$f(x) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right) \qquad (11)$$

Where

$$a_0 = \frac{\pi}{4} \qquad (12)$$

$$a_n = \frac{1}{n^2\pi} \left(\cos nx \right)_0^{\pi} = \frac{1}{n^2\pi} \left(\cos n\pi - 1 \right) = \begin{cases} \dfrac{-2}{n^2\pi} & n : odd \\ 0 & n : even \end{cases} \qquad (13)$$

$$b_n = \frac{-1}{n} \left(\cos nx \right)_0^{\pi} = \frac{1}{n^2\pi} \left(\cos n\pi - 1 \right) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & n : odd \\ -\dfrac{1}{n} & n : even \end{cases} \qquad (14)$$

Example

Expand the following function in Fourier series:

$$f(x) = \begin{cases} -x & -\pi < x \le 0 \\ +x & 0 \le x < \pi \end{cases} \qquad \text{Period} = 2\pi$$

Solution

مثال أخر على كيفية إيجاد متسلسلة فورير للدالة المعطاة في المثال المبين ولسوف نتبع كل الخطوات السابق شرحها بالتفصيل على النحو الموضح سابقا:

$$f(x) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_o \cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_o \sin\frac{n\pi x}{\ell}\right) \qquad (1)$$

$$a_o = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx \qquad (2)$$

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx \qquad n = 1,2,3,\cdots\cdots \qquad (3)$$

$$b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx \qquad n = 1,2,3,\cdots\cdots \qquad (4)$$

بإتباع نفس الخطوات السابقة وحساب التكاملات يمكننا استخلاص النتائج على صورتها النهائية التالية:

$$a_o = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}[-x]dx + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}[x]dx \qquad (5)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\cos nxdx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(x)\cos nxdx \qquad (6)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\sin nxdx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(x)\sin nxdx \qquad (7)$$

Example

Find the Fourier series to represent $x - x^2$ from $x = -\pi$ to $x = \pi$

Solution

مرة أخرى لدينا دالة ترددية ومطلوب متسلسلة فورير التي تناظرها وكما علمنا سابقا فإن الخطوة الأولى هي كتابة العلاقة العامة لمتسلسلة فورير والتكاملات المختلفة للمعاملات التي تظهر في المتسلسلة على النحو التالي:

$$f(x) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_o \cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_o \sin\frac{n\pi x}{\ell}\right) \tag{1}$$

$$a_o = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx \tag{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx \qquad n = 1,2,3,\cdots\cdot \tag{3}$$

$$b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx \qquad n = 1,2,3,\cdots\cdot \tag{4}$$

بإتباع الأسلوب السابق في حساب التكاملات يمكننا الوصول بالنتائج على النحو التالي:

$$a_o = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[x - x^2\right]dx = -\left(\frac{\pi^2}{3}\right) \tag{5}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(x - x^2\right)\cos nx dx \tag{6}$$

بإجراء التكامل بالتجزئ للمعادلة (6):

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[(x-x^2)\left(\frac{\sin n\pi}{n}\right)-(1-2x)\left(-\frac{\cos n\pi}{n^2}\right)-2\left(-\frac{\sin n\pi}{n^3}\right)\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= -4\left(\frac{\cos n\pi}{n^2}\right) = -4\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right) \tag{7}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x-x^2)\sin nx dx \tag{8}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[(x-x^2)\left(\frac{\cos n\pi}{n}\right)-(1-2x)\left(-\frac{\sin n\pi}{n^2}\right)-2\left(-\frac{\cos n\pi}{n^3}\right)\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= -2\left(\frac{\cos n\pi}{n}\right) = -4\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) \tag{9}$$

خاصية التعامد للدوال المثلثية

Orthogonality of Trigonometric System

عندما نذكر خاصية التعامد فإننا بذلك نذكر الضرب الداخلي Inner Product لدالتين من نفس النوع وعلاقة ناتج الضرب بهذا الموضوع وفى حالتنا هذه $\langle xx, xx\rangle$ يمكننا القول بأن أي دالتين من الدوال المثلثية $\cos nx, \sin nx,\ n = 1,2,3,.....$ متعامدة مع بعضهما في الفترة $-\pi \le x \le \pi$ وهذا يعنى أن حاصل ضرب أي أثنتين معا يساوى الصفر.

The system of trigonometric functions $\cos nx, \sin nx,\ n = 1,2,3,.....$ is orthogonal on the interval $-\pi \le x \le \pi$. By definition, this means that the integral of the product of any two different of these functions over that interval is zero; in formulas, for any integers m, n and $m \neq n$, we have:

رياضيا يمكننا صياغة خاصية التعامد لدالتين مثلثتين كالآتي:

$$\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = 0 \qquad m \neq n \\ &\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = 0 \qquad m \neq n \end{aligned} \tag{1}$$

And for any integers m and n , we have:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx = 0 \tag{2}$$

Even and Odd Functions الدوال الزوجية والفردية

Even Function الدالة الزوجية

إذا تم استبدال كل x بـ x– في الدالة الأصلية لحصلنا على أصل الدالة تسمى الدالة زوجية. من أهم مواصفات هذه الدالة تماثلها حول المحور الرأسي.

(1) A function $y = g(x)$ is **even** if $g(-x) = g(x)$.

(2) Symmetric about y axis.

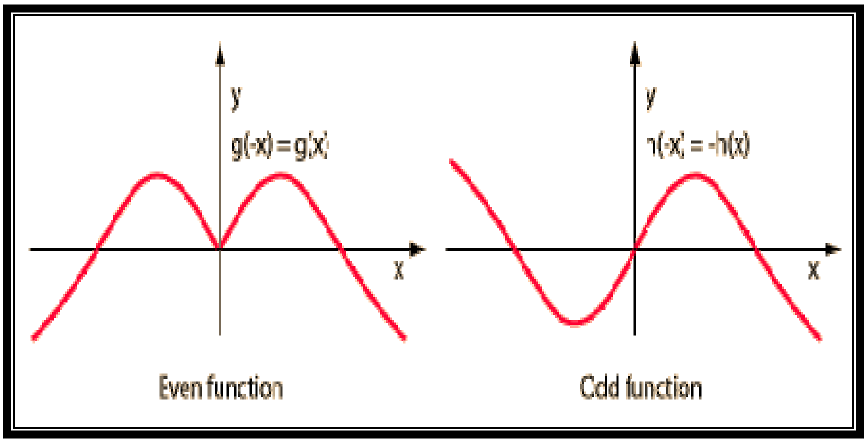


Figure 33

الدالة الفردية Odd Function

إذا تم استبدال كل x بـ x– في الدالة الأصلية لحصلنا على أصل الدالة مضروبا في إشارة سالبة تسمى الدالة فردية. من أهم مواصفات هذه الدالة تماثلها حول نقطة الأصل.

(1) A function $y = h(x)$ is **odd** if $h(-x) = -h(x)$.

(2) Anti-symmetric about y axis.

بعض الخصائص الهامة والمفيدة في حل كثير من المسائل:

إذا كان التكامل على فترة متماثلة ولتكن من L– إلى L حول نقطة الأصل وكانت الدالة **زوجية** إذن يمكننا إجراء التكامل من 0 إلى L مع ضرب الناتج في 2

لاحظ هذا على رسم الدالة الزوجية: $\int_{-L}^{L} g(x)dx = 2\int_{0}^{L} g(x)dx$

- إذا كان التكامل على فترة متماثلة ولتكن من $-L$ إلى $+L$ حول نقطة الأصل وكانت الدالة **فردية** إذن يصبح الناتج مساويا للصفر : $\int_{-L}^{L} h(x)dx = 0$

من المحتمل أن يسأل القارئ نفسه سؤالا هل هناك سبب للحديث عن الدوال الزوجية والفردية هنا؟

والإجابة بالتأكيد والسبب واضح في صور التكاملات التي نحسب منها المعاملات لمتسلسلة فورير حيث أن كل التكاملات على فترة متماثلة من ℓ إلى $-\ell$ وعليه وحسب محتوى التكامل فإنه من المحتمل أن تكون الدالة داخل التكامل دالة فردية Odd أو دالة زوجية Even وعليه وطبقا لنوع هذه الدالة وحسب ما عرفنا من خصائص الدوال الفردية والزوجية تتوقف عليه قيمة التكامل. ومن خبراتنا السابقة استطعنا وضع جدول وضحنا فيه الاحتمالات المختلفة لحالة الدالة واحتمالات وجود قيم للمعاملات من عدمها.

Case	$f(x)$	**Fourier coefficients**		
1	Odd	$a_o = 0$	$a_n = 0$	$b_n \neq 0$
2	Even	$a_o \neq 0$	$a_n \neq 0$	$b_n = 0$
3	Neither odd nor even	$a_o \neq 0$	$a_n \neq 0$	$b_n \neq 0$

يجدر بنا الإشارة إلى شيء هام جدا ألا وهو أن الجدول السابق يفيد بشكل مباشر

في اختصار الوقت والمجهود عند حساب المعاملات وهذا ما سوف نوضحه من خلال الأمثلة التالية:

Example

Expand the following function in Fourier series:

$$f(x)=\begin{cases} x & \dfrac{-\pi}{2}<x<\dfrac{+\pi}{2} \\ \pi - x & \dfrac{+\pi}{2}<x<\dfrac{3\pi}{2} \end{cases} \qquad \text{Period} = 2\pi$$

Solution

الدالة المراد إيجاد متسلسلة فورير لها في الشكل الموضح التالي:

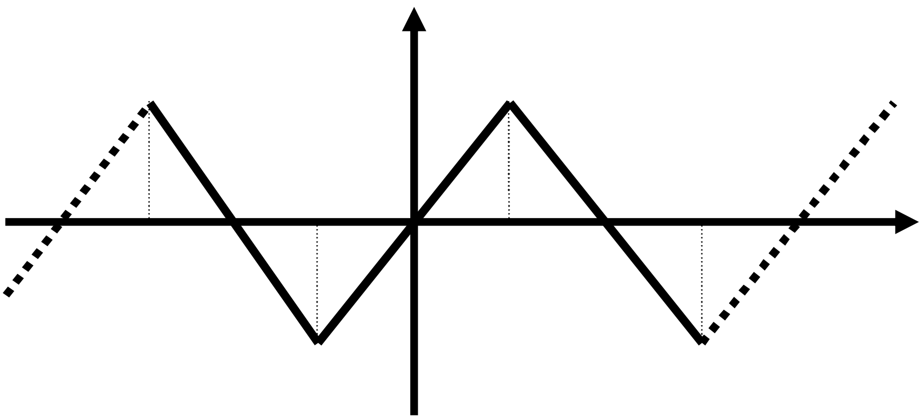


Figure 34

واضح من شكل الدالة أنها دالة فردية Odd Function وعليه وحسب الحالات المختلفة في الجدول السابق يمكننا استنتاج أننا لسنا مضطرين لحساب كل المعاملات

ولكن فقط نحتاج حساب المعامل $b_n \neq 0$ وبناء على ذلك فإن متسلسلة فورير المطلوبة سوف تصبح على الشكل التالي:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_o \sin nx \tag{1}$$

وعليه نبدأ بكتابة العلاقة العامة التي نحسب منها المعامل b_n على النحو التالي:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nxdx \tag{2}$$

الخطوة التالية مثلما سبق نحسب التكامل في المعادلة (2) كالآتي:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin nxdx + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - x)\sin nxdx \tag{3}$$

الخطوة التالية هي إجراء التكاملات في المعادلة (3) فنحصل على الآتي:

$$b_n = \frac{4}{\pi n^2}\sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} +\left(\dfrac{4}{\pi n^2}\right) & n = 1,5,9,13,..... \\ 0 & n = 2,4,6,8,...... \\ -\left(\dfrac{4}{\pi n^2}\right) & n = 3,7,11,15,..... \end{cases} \tag{4}$$

نود أن نذكر القارئ إلى مدى التوفير في الوقت والمجهود عند استخدام خاصية كون الدالة فردية أو زوجية وكيف أن هذا بسط الحل بطريقة واضحة.

متسلسلة الجيب وجيب التمام لفورير Fourier Sine and Cosine Series

في هذا الجزء نريد توضيح جزئية هامة للقارئ وهو أننا عند إيجاد متسلسلة فورير لدالة ما من المحتمل أن يكون محتوى المتسلسلة دالة الجيب Sine Function

أو دالة جيب التمام Cosine Function أو الإثنين معا وهذا يتوقف على نوع الدالة كونها دالة فردية Odd function أو زوجية Even function أو ليست بالفردية أو الزوجية Neither odd nor even.

والموضوع التالي نناقش فيه حالتين مختلفتين وهما متسلسلة جيب التمام لفورير Fourier cosine series ، متسلسلة الجيب لفورير Fourier sine series.

متسلسلة جيب التمام لفورير Fourier Cosine Series

إذا كانت الدالة المراد التعبير عنها بدلالة متسلسلة فورير دالة **زوجية** فإن متسلسلة فورير المناظرة لها تأخذ الشكل التالي:

$$f(x)=a_o+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{nx\pi}{\ell} \tag{1}$$

$$a_o=\frac{1}{\ell}\int_0^{\ell}f(x)dx \tag{2}$$

$$a_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(x)\cos\frac{nx\pi}{\ell}\,dx \tag{3}$$

متسلسلة الجيب لفورير Fourier Sine Series

إذا كانت الدالة المراد التعبير عنها بدلالة متسلسلة فورير دالة **فردية** فإن متسلسلة فورير المناظرة لها تأخذ الشكل التالي:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{nx\pi}{\ell} \tag{1}$$

$$b_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(x)\sin\frac{nx\pi}{\ell}\,dx \tag{2}$$

هناك ملحوظة هامة وتذكرة للقارئ بخصوص هذا الموضوع ألا وهي أنه ليس

من الضروري أن تكون الدالة تحت الدراسة فردية أو زوجية إنما الذي يحدد نوعيتها هو المطلوب نفسه بمعنى أنه لو لدينا دالة في فترة ما وأردنا إيجاد متسلسلة الجيب أو جيب التمام لفورير لتلك الدالة فإننا نتصرف حسب المطلوب أي أننا نتعامل معها على أنها فردية إذا كان المطلوب متسلسلة الجيب لفورير ونتعامل معها كدالو زوجية إذا كان المطلوب متسلسلة جيب التمام وهكذا وفيما يلي سوف نوضح هذه الملاحظة للقارئ من خلال الأمثلة التالية.

Example

Expand $f(x) = x \qquad 0 < x < 2$ as:

1. Fourier Sine series
2. Fourier Cosine series

Solution

الدالة المعطاة موضحة في الشكل التالي.

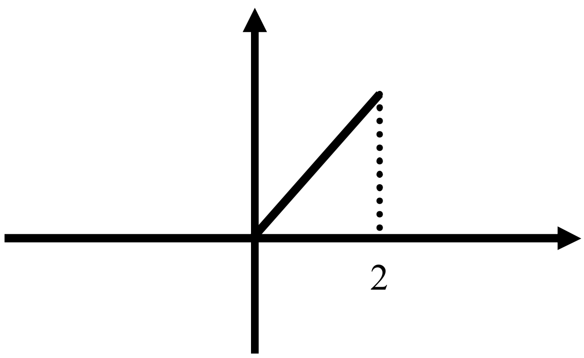


Figure 35

الجزء الأول من المطلوب

والآن عندما نريد إيجاد متسلسلة الجيب لفورير Fourier sine series لهذه الدالة فهذا يتطلب منا التعامل مع هذه الدالة على أنها دالة فردية وبالتالي شكل الدالة يصبح على النحو الموضح أدناه كالآتي:

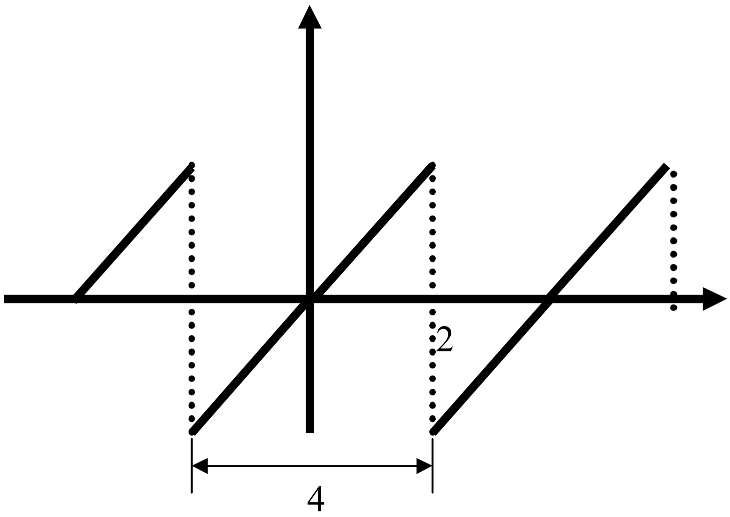


Figure 36

وبعد تجهيزنا للدالة على اعتبار أنها دالة فردية كما هو واضح الآن نبدأ بكتابة العلاقة الخاصة بمتسلسلة الجيب لفورير كالآتي:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{nx}{2} \tag{1}$$

With

$$b_n=\frac{2}{2}\int_0^2 x\sin\frac{nx\pi}{2}\,dx \tag{2}$$

الخطوة التالية حساب التكامل في المعادلة (2) على النحو التالي:

$$b_n = \frac{2}{2}\int_0^2 x\sin\frac{n x\pi}{2}\,dx = \left\{ x\left(\frac{-\cos\frac{n x\pi}{2}}{\frac{n\pi}{2}} \right) \right\}_{x=0}^{x=2} - \int_0^2 \left(\frac{-\cos\frac{n x\pi}{2}}{\frac{n\pi}{2}} \right) dx \tag{3}$$

$$= (-1)^{n+1}\frac{4}{n\pi}$$

الجزء الثاني من المطلوب

إيجاد متسلسلة جيب التمام لفررير Fourier cosine expansion ونبدأ كما سبق بإعادة رسم الدالة بحيث تكون دالة زوجية كما هو موضح أدناه كالآتي:

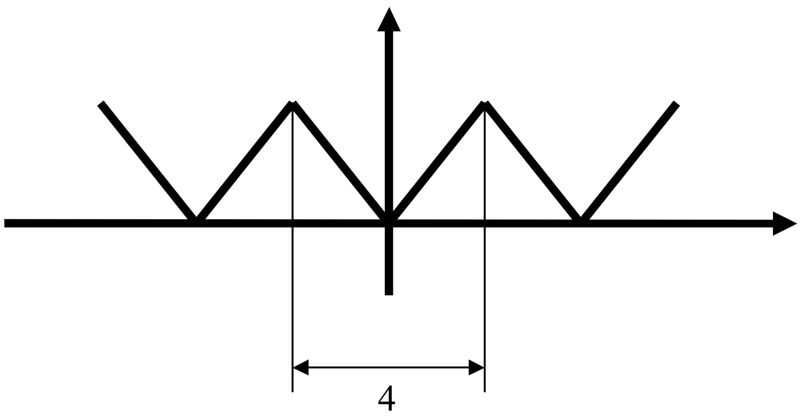


Figure 37

وكما سبق في الجزء الأول الخطوة التالية كتابة الصورة العامة لمتسلسلة جيب التمام لفورير للدالة المعطاة على فرضية أنها دالة زوجية على النحو التالي:

$$f(x) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n x\pi}{2} \tag{4}$$

$$a_o = \frac{1}{2}\int_0^2 x dx = 1 \tag{5}$$

$$a_n = \frac{2}{2}\int_0^2 x\cos\frac{nx\pi}{2}\,dx = \frac{4}{(n\pi)^2}(\cos n\pi - 1) \tag{6}$$

مفكوك نصف المدى Half-Range Expansions

هناك في العديد من التطبيقات يكون مطلوب التعبير عن دالة معرفة في فترة بعينها ولتكن $0 \le x \le L$ أن نعبر عنها بدلالة متسلسلة فورير Fourier series كما هو موضح بالشكل التالي:

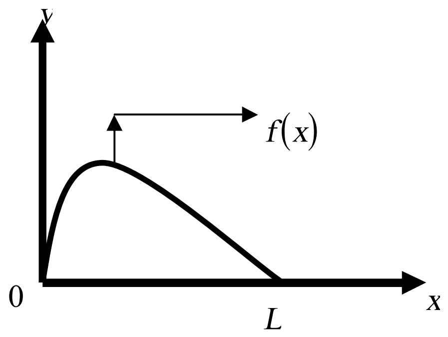


Figure 38

هذا النوع من الدوال من المحتمل أن تكون هذه الدالة إزاحة الوتر في آلة الكمان Violin ذات طول L أو درجة الحرارة في قضيب معدني Metal Bar الخ من هذه التطبيقات. نود أن نلفت النظر إلى أننا في مثل هذه الحالات يكون لدينا من الحرية عن التعبير عن الدالة المعطاة بدلالة متسلسلة الجيب لفورير Fourier sine series أو متسلسلة جيب التمام لفورير Fourier cosine series.

Example

Find the two half-range expansions of the function

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2k}{L}x & 0<x<\dfrac{L}{2}\\[2mm] \dfrac{2k}{L}(L-x) & \dfrac{L}{2}<x<L\end{cases}$$

Solution

ملاحظات قبل الحل:

الدالة معرفة في الفترة $0\le x\le L$

المطلوب ما يسمى مفكوك نصف المدى Half-range Fourier expansion

الحل الأول

متسلسلة جيب التمام لفورير Fourier cosine expansion

سبق وأن أوضحنا وبالأمثلة التوضيحية كيفية إيجاد متسلسلة جيب التمام لفورير Fourier cosine series لدالة حيث أوضحنا أن الخطوة الأولى هي اعتبار أن الدالة المعطاة دالة زوجية ثم نكتب العلاقات المناظرة لها والخطوة الأخيرة تكون حساب التكاملات وفيما يلي الحل المطلوب.

Case (1) Even periodic function

Even periodic expansion for the function $f(x)$ is expressed as:

$$f(x)=a_o+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{nx\pi}{\ell} \tag{1}$$

Where

$$a_o=\frac{1}{\ell}\int_0^{\ell}f(x)dx \tag{2}$$

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\cos\frac{nx\pi}{\ell}\,dx \tag{3}$$

والآن حساب التكاملات في المعادلتين (2) ، (3):

$$a_o = \frac{1}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)dx = \frac{1}{L}\int_0^{L} f(x)dx = \frac{1}{L}\left(\frac{2k}{L}\int_0^{\frac{\ell}{2}} xdx + \frac{2k}{L}\int_{\frac{L}{2}}^{L}(L-x)dx\right) = \frac{k}{2} \tag{4}$$

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\cos\frac{nx\pi}{\ell}\,dx = \frac{2}{L}\int_0^{L} f(x)\cos\frac{nx\pi}{L}\,dx$$

$$= \frac{2}{L}\left(\frac{2k}{L}\int_0^{\frac{L}{2}} x\cos\frac{nx\pi}{L}\,dx + \frac{2k}{L}\int_{\frac{L}{2}}^{L}(L-x)\cos\frac{nx\pi}{L}\,dx\right)$$

(5)

$$= \frac{L^2}{2n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{L^2}{(n\pi)^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - 1\right)$$

$$= \frac{4k}{(n\pi)^2}\left(2\cos\frac{n\pi}{2} - \cos n\pi - 1\right)$$

الحل الثاني

متسلسلة الجيب لفورير Fourier sine expansion

Case (2) Odd periodic function

Odd periodic expansion for a function $f(x)$ is expressed as:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{nx\pi}{\ell} \tag{1}$$

$$b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{nx\pi}{\ell}\,dx \qquad (2)$$

بإتباع الأسلوب السابق نحصل على المعامل b_n ويصبح كالآتي:

$$b_n = \frac{8k}{(n\pi)^2}\sin\frac{n\pi}{2} \qquad (3)$$

التحليل التوافقي التطبيقي Practical Harmonic Analysis

فيما سبق درسنا باستفاضة مطولة كيفية التعبير عن دالة $y = f(x)$ بدلالة متسلسلة فورير Fourier series وكان هناك شيء مشترك في الحالات المختلفة التي تعاملنا معها ألا وهي أن الدالة التي نتعامل معها عبارة عن علاقة صريحة بين متغيرين المتغير x ، المتغير y. لكننا في واقع الأمر وفى كثير من التطبيقات العملية أيا كان نوعها فإن الدالة لا تكن علاقة صريحة كما سبق لكنها من الممكن أن تكون في شكل منحنى Curve أو معطاة بشكل مجدول Tablated function وفى مثل هذه الحالات وعند استبدال الدالة بمتسلسلة فورير Fourier series لا يمكننا حساب التكاملات كما سبق لكن نضطر للتعامل معها بشكل مختلف على النحو التالي.

في هذه الحالة نلجأ إلى مفهوم القيمة المتوسطة لدالة معرفة في فترة ما ولتكن (a,b) وهذه القيمة المتوسطة تحسب من العلاقة التالية:

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

وبناء عليه فإن التكاملات التي سبق وأوردناها تأخذ الصور التالية:

$$a_o = 2\times\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx = 2\times\mu \quad \text{over } (0,2\pi) \qquad (2)$$

$$a_n = 2 \times \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx = 2 \times \mu \times \cos nx \text{ over } (0, 2\pi) \quad (3)$$

$$b_n = 2 \times \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx = 2 \times \mu \times \sin nx \text{ over } (0, 2\pi) \quad (4)$$

ملاحظات هامة

- **الحد الذي محتواه الدالة** $a_1 \cos x + b_1 \sin x$ يسمى التوافق الأول First harmonic.
- **الحد الذي محتواه الدالة** $a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x$ يسمى التوافق الثاني Second harmonic

وهكذا.....

Example

The displacement y of a part of a mechanism is tabulated with the corresponding angular movement x of the crank. Express y as a Fourier series neglecting the harmonic above three.

x	0	30	60	90	120	150
y	1.80	1.10	0.30	0.16	0.50	1.30
x	180	210	240	270	300	330
y	2.16	1.25	1.30	1.52	1.76	2.00

Solution

بفرض أن متسلسلة فورير في الفترة $(0,2\pi)$ للحد التوافقي الثالث على الصورة التالية:

$$y=\frac{a_o}{2}+a_1\cos x+a_2\cos 2x+a_3\cos 3x+b_1\sin x+b_2\sin 2x+b_3\sin 3x \quad (1)$$

في هذه المتسلسلة وبناء على العلاقات السابقة يمكننا استنتاج معاملات الحدود على النحو التالي:

$$a_o=2\times\frac{\sum_{i=1}^{n=12} y_i}{n}=\frac{15.15}{6}=2.53 \quad (2)$$

$$a_1=2\times\frac{\sum_{i=1}^{n=12}\left(y_i\cos x_i\right)}{n}=\frac{0.25}{6}=0.04 \quad (3)$$

$$a_2=2\times\frac{\sum_{i=1}^{n=12}\left(y_i\cos 2x_i\right)}{n}=\frac{3.18}{6}=0.53 \quad (4)$$

$$a_3=2\times\frac{\sum_{i=1}^{n=12}\left(y_i\cos 3x_i\right)}{n}=\frac{-0.62}{6}=-0.1 \quad (5)$$

$$b_1=2\times\frac{\sum_{i=1}^{n=12}\left(y_i\sin x_i\right)}{n}=\frac{-3.76}{6}=-0.63 \quad (6)$$

$$b_2=2\times\frac{\sum_{i=1}^{n=12}\left(y_i\sin 2x_i\right)}{n}=\frac{-1.39}{6}=-0.23 \quad (7)$$

$$b_3 = 2 \times \frac{\sum_{i=1}^{n=12} (y_i \sin 3x_i)}{n} = \frac{0.51}{6} = 0.085 \quad (8)$$

بالتعويض من المعادلات من (2) حتى (8) في المعادلة (1) نحصل على الآتي:

$$\begin{aligned} y &= 1.26 + 0.04\cos x + 0.53\cos 2x - 0.10\cos 3x \\ &- 0.63\sin x - 0.23\sin 2x + 0.085\sin 3x \end{aligned} \quad (9)$$

متسلسلة فورير المركبة Complex Fourier Series

عرفنا منذ بدءنا الحديث عن متسلسة فورير أنه لو لدينا دالة $f(x)$ ترددية وتتكرر كل فترة مقدارها 2π فإنه يمكننا التعبير عن هذه الدالة بمتسلسلة فورير التي كانت على الصورة التالية:

$$f(x) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1)$$

وحيث أن محتوى المتسلسلة دالتي الجيب Sine وجيب التمام Cosine ونعلم من دراسة التحليل المركب Complex analysis أن هناك علاقة بين هاتين الدالتين والدالة الأسية Exponential complex function فهذا يعنى أنه يمكن التعبير عن متسلسلة فورير في الشكل المركب. نعلم من التحليل المركب العلاقات التالية:

$$e^{inx} = \cos nx + i\sin nx \quad (2)$$

$$e^{-inx} = \cos nx - i\sin nx \quad (3)$$

بفرضية جمع العلاقتين (2) ، (3) والقسمة على 2 فنحصل على الآتي:

$$\cos nx = \left(\frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \right) \qquad (4)$$

و بفرضية طرح العلاقتين (2) ، (3) والقسمة على 2 فنحصل على الآتي:

$$\sin nx = \left(\frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \right) \qquad (5)$$

كذلك نعلم من التحليل المركب العلاقة التالية:

$$\frac{1}{i} = -i \qquad (6)$$

معنى هذا أنه يمكننا الآن كتابة العلاقات التالية:

$$\cos nx + b_n \sin nx = \frac{1}{2} a_n \left(e^{inx} + e^{-inx} \right) + \frac{1}{2i} b_n \left(e^{inx} - e^{-inx} \right) \qquad (7)$$

$$\cos nx + b_n \sin nx = \frac{1}{2} (a_n - ib_n) e^{inx} + \frac{1}{2} (a_n + ib_n) e^{-inx} \qquad (8)$$

وبناء على ما سبق فإن متسلسلة فورير في شكلها المركب Complex Fourier Series تصبح على النحو التالي:

$$f(x) = c_o + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n e^{inx} + k_n e^{-inx} \right) \qquad (9)$$

ومعاملاتها تأخذ الصور التالية:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \qquad (10)$$

$$k_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx \qquad (11)$$

نود الإشارة إلى شيء مهم في حالة التعامل مع متسلسلات فورير في شكلها

المركب بأنه يمكن دمج المعاملين c_n ، k_n معا وذلك بالاستعانة بالعلاقة التالية:

$$k_n = c_{-n} \tag{12}$$

وبناء علية تصبح متسلسلة فورير المركبة Complex Fourier Series على الشكل البسيط التالي:

$$f(x) = \sum_{n=\infty}^{\infty}\left(c_n e^{inx}\right) \tag{13}$$

والتي فيها:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ... \tag{14}$$

حالة خاصة

متسلسلة فورير المركبة في حالة أن تتكرر الدالة في مسافة $2L$

من الشرح السابق علمنا أن المعادلتين (13) ، (14) تمثلان متسلسلة فورير المركبة بشكل عام والآن إذا كانت الدالة ترددية وتتردد كل مسافة ثابتة مقدارها $2L$ فإن المعادلتين (13) ، (14) يأخذا الشكل التالي:

$$f(x) = \sum_{n=\infty}^{\infty}\left(c_n e^{\frac{inx\pi}{L}}\right) \tag{15}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-\frac{in\pi x}{L}}dx \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ... \tag{16}$$

Example

Find complex Fourier series of $f(x) = e^x, -\pi < x < \pi$ and $f(x + 2\pi) = f(x)$

Solution

Since

$$\sin(n\pi) = 0 \text{ for an integer} \tag{1}$$

We have:

$$e^{\pm in\pi} = \cos n\pi \pm i\sin n\pi = \cos n\pi = (-1)^n \tag{2}$$

We have

$$f(x) = \sum_{n=\infty}^{\infty} \left(c_n e^{inx}\right) \tag{3}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\ldots\ldots \tag{4}$$

Substituting the given function into equation (4) and integrate:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{-inx}dx = \left(\frac{1}{2\pi}\right)\left(\frac{1}{1-in}\right)\left(e^{n-inx}\right)_{x=-\pi}^{x=\pi} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)\left(\frac{1}{1-in}\right)\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right)(-1)^n \end{aligned} \tag{5}$$

Also note that:

$$\left(\frac{1}{1-in}\right) = \left(\frac{1}{1-in} \times \frac{1+in}{1+in}\right) = \left(\frac{1+in}{1+n^2}\right) \tag{6}$$

And

$$\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right) = 2\sinh\pi$$

Hence, Complex Fourier Series takes the following form:

$$e^{\pi} = \frac{\sinh\pi}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}(-1)^n\left(\frac{1+in}{1+n^2}\right)e^{inx}, \quad -\pi < x < \pi$$

Supplementary Problems

Problem (1)

Find the period for:

(1) $f(x) = \cos x, \cos 2x, \cos 4x$

(2) $f(x) = \sin x, \sin 3x, \sin 5x$

(3) $f(x) = \sin \dfrac{2\pi x}{k}, \sin \dfrac{2n\pi x}{k}$

Problem (2)

Graph the following functions, in which $T = 2\pi$

(1) $f(x) = \begin{cases} x & -\pi < x < 0 \\ 0 & 0 < x < \pi \end{cases}$

(2) $f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ x^3 & 0 < x < \pi \end{cases}$

(3) $f(x) = \begin{cases} x^2 & -\pi < x < 0 \\ -x^2 & 0 < x < \pi \end{cases}$

(4) $f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ e^{-x} & 0 < x < \pi \end{cases}$

Problem (3)

Find Fourier series for the following functions:

(1) $f(x) = x, -\pi \le x \le \pi$

(2) $f(x) = x^2, -\pi \le x \le \pi$

(3) $f(x) = x^3, -\pi \le x \le \pi$

(4) $f(x) = \begin{cases} 1 & -\pi < x < 0 \\ -1 & 0 < x < \pi \end{cases}$

(5) $f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi < x < 0 \\ 0 & 0 < x < \pi \end{cases}$

(6) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & -\pi < x < 0 \\ +x^2 & 0 < x < \pi \end{cases}$

(7) $f(x) = \begin{cases} -1 & -2 < x < 0 \\ 1 & 0 < x < 2 \end{cases}$

(8) $f(x) = |x| \qquad -2 < x < 2 \qquad T = 4$

(9) $f(x) = \begin{cases} 1+x & -1 < x < 0 \\ 1-x & 0 < x < 1 \end{cases}$

Problem (4)

Find Fourier sine or cosine series for:

(a) $f(x) = x \qquad -\pi < x < \pi$

(b $f(x)=|x| \qquad -\pi < x < \pi$

(c) $f(x)=x^3 \qquad -\pi < x < \pi$

(d) $f(x)=|\sin x| \qquad -\pi < x < \pi$

Problem (5)

Obtain the constant term and the coefficients of the first sine and cosine terms in the Fourier expansion for the following data:

x	0	1	2	3	4	5
y	9	18	24	28	26	20

Problem (6)

Obtain the Fourier expansion for the following data:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$
y	0	9	14	17	17	11

Problem (7)

Find Complex Fourier series for the following functions:

(a) $f(x)=-1 \qquad -\pi < x < \pi$

(b) $f(x)=x \qquad -\pi < x < \pi$

(c) $f(x)=x^2 \qquad -\pi < x < \pi$

(d) $f(x)=0 \qquad -\pi < x < \pi$

صفحة زوجية فارغة

7

الباب السابع

المتسلسلات اللانهائية

Infinite Series

صفحة زوجية فارغة

الباب السابع

المتسلسلات اللانهائية

Infinite Series

تقديم

عندما نريد الحديث عن موضوع معين فمن الطبيعي أن نعرف معناه أولا وليسأل القارئ نفسه سؤالا ما معنى المتسلسلة؟

المتسلسلة هي عدد لانهائي من الحدود تربطهم خاصية مشتركة والإشارة بين هذه الحدود إما موجبة أو مترددة بين الموجب والسالب وهذا ما نطلق عليه المتسلسلة المترددة أو الترددية.

والمتسلسلة يمكن كتابتها على الشكل العام التالي:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_n + \ldots\ldots \qquad (1)$$

في المعادلة (1) الحد a_n يسمى الحد النونى للمتسلسلة n^{th} term.

المجموع الجزئي للحدود PARTIAL SUMS of a Series

بالنظر إلى المتسلسلة المعطاة بالمعادلة (1) نود أن نلفت نظر القارئ إلى معنى المجموع الجزئي للمتسلسلة Partial sums of a series على النحو التالي:

- يرمز للمجموع بشكل عام بالرمز S
- مجموع عدد n من الحدود يرمز له بالرمز S_n ... الخ.

والآن ماذا نقصد بـS_1 أو S_2 ...الخ ذلك؟

S_1 مجموع عدد واحد من حدود المتسلسلة أي أن $S_1 = a_1$

S_2 مجموع عدد حدين من حدود المتسلسلة أي أن $S_2 = a_1 + a_2$

S_3 مجموع عدد ثلاثة حدود من حدود المتسلسلة أي أن $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

بناء على ما سبق يمكننا الآن القول بأن المجموع الجزئي Partial sums هو مجموع عدد من الحدود بحسب عدد حدود هذا المجموع.

قبل الخوض في تفاصيل فكرة التقارب والتباعد Converge and diverge للمتسلسلة نود في البداية القول بأن تقارب المتسلسلة يعنى أن مجموع n من الحدود يؤول إلى قيمة معرفة Defined value وكلمة معرف Defined تعنى أي قيمة باستثناء ثلاثة قيم $+\infty, -\infty, \sqrt{-1}$. وموضوع التقارب والتباعد هو موضوع متشعب وله طرقة المختلفة التي سوف نتطرق إليها بالتفصيل في هذا الباب لكن قبل الخوض فيه سوف نتذكر سويا بعض الأنواع الخاصة من المتسلسلات المفيدة في دراسة هذا الموضوع سواء حاليا أو فيما بعد.

A sequence u_n is a function defined on the set of natural numbers. This sequence is said to be ***convergent*** if there is a number ℓ with the property that for every $\varepsilon > 0$ there exists an integer N such that $|u_n - \ell| < \varepsilon$ for all $n > N$

We can write

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \ell \tag{2}$$

This sequence converges to ℓ.

Examples

The sequence $1,4,9,16,.....$ is ***divergent*** because $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty$

The sequence: $1,\frac{1}{e},\frac{1}{e^2},\frac{1}{e^3},\frac{1}{e^4},.....,\frac{1}{e^n}$ is convergent because

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{e^n} = 0$

أنواع خاصة من المتسلسلات Special Types of Series

المتسلسلة الهندسية Geometric Series

تعرف المتسلسلة الهندسية بالشكل التالي:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a\left(1 + r + r^2 + r^3 + \cdots............\infty\right) \qquad (2)$$

نود الإشارة إلى أن مجموع n من الحدود يساوى المجموع الجزئي والأخير على الصورة $\frac{a}{1-r}$. المتسلسلة الهندسية تتقارب في الفترة $|r| < 1$ وتتباعد في الفترة $|r| > 1$

Example

The following series is an example of the geometric series

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \cdots \qquad (1)$$

The sum of the first n terms:

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \cdots + \frac{1}{2^n} \qquad (2)$$

It can take the following form:

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \tag{3}$$

The limit of the closed form of the *nth* terms equals one. Therefore, the geometric series is convergent.

المتسلسلة التوافقية Harmonic Series

تأخذ المتسلسلة التوافقية الشكل التالي:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n} + \ldots\ldots\ldots\infty \tag{1}$$

المجموع الجزئي لعدد n من حدود هذه المتسلسلة يؤول إلى مالانهاية $\lim_{n\to\infty} S_n \to \infty$

ولكي نثبت ذلك إليك الآتي:

$$S_1 = 1 \tag{2}$$

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2} \tag{3}$$

$$S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \tag{4}$$

Then

$$s_n \geq 1 + \frac{n-1}{2} \tag{5}$$

يتضح من مجموعة المعادلات (2) حتى (5) أن المتسلسلة التوافقية من النوع المتباعد Divergent series.

المتسلسلة بى P-series

تعرف المتسلسلة بى P-Series بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^P} \text{.........} \begin{cases} \text{Convergent.........P} > 1 \\ \text{Divergent...........P} \le 1 \end{cases} \qquad (1)$$

Example

Determine whether the given series is converges or divergence $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)$

Solution

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(1) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (1)$$

معنى هذا أن المتسلسلة المراد اختبارها تحولت إلى مجموع متسلسلتين كما هو واضح من الطرف الأيمن من المعادلة (1) وبناء عليه سيتم اختبار كل واحدة على حده على النحو التالي:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty}(1) \qquad (2)$$

المتسلسلة في المعادلة (2) تباعدية Divergent وذلك بحسب اختبار مجموع عدد لانهائي من الحدود فنجد أن المجموع يتزايد في كل مرة.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (3)$$

المتسلسلة في المعادلة (3) من النوع التوافقي والذي فيه$P=1$ وحسب تعريف هذا النوع من المتسلسلات فإن المتسلسلة في المعادلة (3) تقاربي Convergent وحسب خصائص المتسلسلات فإن مجموع متسلسلتين أحدهما تقاربي Convergent والأخر تباعدي Divergent فإن المتسلسلة الناتجة ستكون تباعدية بناء على ما سبق فإن المتسلسلة المراد اختبارها تكون تباعدية Divergent.

Example

Test the series $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3}{10^{n}}$ for convergency?

Solution

في البداية نحاول وضع المتسلسلة المعطاة في صورة بسيطة يسهل التعامل معها وذلك كي نتمكن من تحديد نوعها كونها تقاربية أو تباعدية وذلك على النحو التالي:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^{n}}$$

$$\Rightarrow \tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} 3\left(\frac{1}{10}\right)^{n}$$

الشكل الأخير للمتسلسلة هو في الحقيقة متسلسلة هندسية Geometric series وحسب تعريف المتسلسلة الهندسية فإن المتسلسلة المعطاة تقاربية.

خصائص المتسلسلات Series Properties

لنفرض أن لدينا متسلسلتين $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ وهذه المتسلسلة تقاربية Convergent وتؤول إلى a ولدينا متسلسلة أخرى $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ تقاربية أيضا وتؤول إلى b فعليه الاستنتاجات التالية صحيحة:

(1) The series $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ will be convergent to $(a+b)$

(2) The series $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ can be written as $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n) + \sum_{n=1}^{\infty}(b_n)$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(Ca_n)$ will converge to (Ca) if $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(Ca_n) = C\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$

اختبار المتسلسلات Series Tests

تكلمنا في بداية الحديث على جزئية تخص ما يسمى بالتقارب والتباعد للمتسلسلة Convergence and Divergence of the series وقلنا معنى تقارب المتسلسلة أن مجموع عدد لانهائي من الحدود معرف Sum of infinite number of terms is defined وأعطينا معنى علمي لكلمة "معرف" والآن لكي يكتمل معنى التقارب والتباعد للمتسلسلة لابد من إعطاء مساحة للقارئ لندرس معه الاختبارات المختلفة للمتسلسلة Different series tests وفيما يلي سوف نوضح أشهر الطرق لاختبارات المتسلسلة.

الاختبار الأول

اختبار المجموع المتتالي Sequence Test

ملخص الاختبار

في هذا الاختبار نوجد مجموع n من الحدود ثم نأخذ نهاية هذا المجموع عندما $n \to \infty$ وناتج الاختبار يتحدد على النحو التالي:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} \text{Defined.....................series converges} \\ \text{Not defined..............series diverges} \\ 0\text{.............................Test fails} \end{cases} \qquad (1)$$

عندما يفشل الاختبار نلجأ إلى اختبار المجموع الجزئي Partial sums ونرى مقدار الزيادة عند كل مجموع وإذا كانت الزيادة مقدار يمكن إهماله فتكون المتسلسلة تقاربية أما إذا كانت عكس ذلك فتكون تباعدية.

Example

The series $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ in which $S_n = \frac{1}{n}$ is divergent since $\lim_{n\to\infty} S_n = 0$ therefore, we will use partial sum test as follow:

$S_1 = 1$

$S_2 = 1 + \frac{1}{2}$

$S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

$S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$

....

....

$S_{100} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ...+ \frac{1}{100}$

نلاحظ أنه مع زيادة عدد الحدود مقدار الزيادة كبير ولا يمكن إهماله وعليه فإن المتسلسلة تباعدية.

الاختبار الثاني

اختبار المقارنة Comparison Test

ملخص الاختبار

في هذا الاختبار يكون لدينا متسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ والمطلوب اختبارها من حيث التقارب أو التباعد واختبار المقارنة يقوم على أساس اختيار متسلسلة جديدة نعطى لها مسمى $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ ويكون نوع الأخيرة معروف مسبقا وتتم المقارنة على النحو المبين كالآتي:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \le \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

$$\text{If} \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{convergent} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{convergent}$$

$$\text{If} \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{Divergent} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{Test fails}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \geq \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

If $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ Convergent $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ Test fails

If $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ Divergent $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ Divergent

سؤال يبدو إلى الذهن مباشرة ألا وهو كيف يمكننا اختيار المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ بحيث تتم المقارنة على أساس واضح. بداية هناك طريق أساسي للاختيار وهو الأنواع الخاصة من المتسلسلات التي سبق وأن أشرنا إليها لكن ماذا يحدث لو نجد المتسلسلة المناسبة من مجموعة المتسلسلات الخاصة تلعب الخبرة دورها في هذا الاتجاه لكننا سنحاول بعضا من هذه الخبرات أمام القارئ في موضوع الاختيار حتى تساعده في التعرف على كيفية الاختيار.

Example

Use comparison test the series $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2 + 100n}$

Solution

نود الإشارة إلى أننا عندما نتعامل مع متسلسلة محتواها كثيرات بسطا ومقاما فإن

أفضل اختيار للمتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ وهذا من باب الخبرة يتم على النحو التالي:

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \frac{\text{نختار n ذات أكبر أس في البسط بمعامله}}{\text{نختار n ذات أكبر أس في البسط بمعامله}}$$

بناء على القاعدة العملية السابقة يكون اختيارنا $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ كالآتي:

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2} \qquad (1)$$

نود التنبيه إلى ملحوظة هامة جدا إلى أن المتسلسلة المعطاة بالمعادلة (1) عند استخدامها في مقارنتها مع $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ من حيث كونها أكبر أو أصغر نستخدمها كما هي أما عند معرفة نوعها تقاربية أم تباعدية يمكننا في هذه الحالة تبسيطها. وبناء عليه ومن خلال مقارنة $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ مع $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ كما هو معرف في (1) فإننا نستنتج أن $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} v_n$

يبقى لنا معرفة نوع المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ وفى هذه الحالة يمكننا تبسيطها بحيث تصبح على الشكل التالي:

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{............Diverge} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{............Diverge}$$

Example

Prove that the series $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \frac{1}{3\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 15}+.......$is convergent

Solution

كخطوة أولى يجب إيجاد الحد العام في مثل هذه النوعية من المتسلسلات وعليه فإن المتسلسلة المعطاة بحدها العام تأخذ الشكل التالي:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \frac{1}{3\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 15}+.......=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-1)(4n+3)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{16n^2+8n-3}$$

(1)

والآن ولطالما سنستخدم اختبار المقارنة فيجب اختيار متسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ على أساسها تتم المقارنة ويتم الاختبار.

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{16n^2} \qquad (2)$$

المتسلسلة في المعادلة (2) تستخدم كما هي في المقارنة بينما يتم تبسيطها عند اختبارها وبمقارنة $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ بـ $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ نجد أنه دائما $\sum_{n=1}^{\infty} u_n < \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ والآن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ على شكل المتسلسلة بي P-Series وفيها الأس n أكبر من الواحد الصحيح ، وبناء على ذلك يمكننا استنتاج أن $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ تقاربية Convergent.

الاختبار الثالث

اختبار القسمة Quotient Test

ملخص الاختبار

في هذا الاختبار يكون لدينا متسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ والمطلوب اختبارها من حيث التقارب أو التباعد واختبار القسمة يقوم على أساس اختيار متسلسلة جديدة نعطى لها مسمى $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ ويكون نوع الأخيرة معروف مسبقا وتتم المقارنة على النحو المبين كالآتي:

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} u_n \Big/ \sum_{n=1}^{\infty} v_n\right\} = \begin{cases} 0, \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{Convergent} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{Convergent} \\ \pm\infty, \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{Divergent} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{Divergent} \\ \left[\begin{array}{l} \text{Any number} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{fellows} \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{as it will,} \\ \text{if} \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{convergent} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{convergent} \end{array}\right] \end{cases}$$

Example

Test the following series for convergence: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+4}{(n^2+n)2^n}$

Solution

طالما سنستخدم اختبار القسمة فأول شيء هو اختيار $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ من المتسلسلة المعطاة على النحو التالي:

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{(n^2)2^n} \tag{1}$$

لمعرفة نوع $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ من حيث كونها تباعدية أم تقاربية يتم تبسيطها على النحو التالي:

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{(n^2)2^n} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \tag{2}$$

المتسلسلة في المعادلة (2) متسلسلة هندسية والأساس فيها اقل من الواحد الصحيح إذن فهي متسلسلة تقاربية Convergent series.

الخطوة التالية في اختبار القسمة هي إجراء النهاية التالية:

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{\sum_{n=1}^{\infty} u_n}{\sum_{n=1}^{\infty} v_n} \right\} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+4}{(n^2+n)2^n} \frac{n^2\, 2^n}{2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{2}{n^2}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)} = 1 \tag{3}$$

وحيث أن $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ وبناء على الناتج في المعادلة (3) فإن $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ تقاربية.

Example

Test the following series for convergence: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}$

Solution

Since $\frac{1}{2^n + 1} < \frac{1}{2^n}$ and $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converges. Then $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}$ converges

Example

Test the following series for convergence $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$

Solution

Since, $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$ for all $n \geq 2$, and $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverges,

Then $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ also diverges.

الاختبار الرابع

اختبار التكامل Integral Test

ملخص الاختبار

في هذا الاختبار يتم استبدال بتكامل محدود مع الأخذ في الاعتبار أن حدود التكامل هي نفسها الحدين الأدنى والأعلى لعلامة المجموع. والاختبار يتم على النحو التالي:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \int_{n=1}^{n=\infty} u_n \, dn = \begin{cases} \text{Exist} \Rightarrow u_n \text{Converge} \\ \text{Not Exist} \Rightarrow u_n \text{Diverge} \end{cases}$$

Example

Test the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^3 - 1}$ for convergence.

Solution

سنستخدم اختبار التكامل وعلى ذلك نكتب التكامل الآتي:

$$I = \int_{2}^{\infty} \frac{2n}{n^2 - 1} \, dn = \left[\ln\left(n^2 - 1\right) \right]_{n=2}^{n=\infty} = \infty$$

حيث أن ناتج التكامل غير محدد فهذا مؤشر على أن المتسلسلة تباعدية.

Example

Test the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^3}$ for convergence.

Solution

سنستخدم اختبار التكامل وعلى ذلك نكتب التكامل الآتي:

$$I = \int_{2}^{\infty} \left(\frac{1}{n(\ln n)^3} \right) dn = \left[(\ln n)^{-2} \right]_{n=2}^{n=\infty} \neq \infty$$

حيث أن ناتج التكامل محدد فهذا مؤشر على أن المتسلسلة تقاربية.

الاختبار الخامس

اختبار النسبة Ratio Test

ملخص الاختبار

يقوم هذا الاختبار على أساس إيجاد الحد العام $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ والحد الذي يليه $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1}$ ثم نوجد نهاية خارج قسمة $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1}$ على $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ والاختبار يتم على النحو التالي:

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1}}{\sum_{n=1}^{\infty} u_n}\right\} = \begin{cases} < 1 \Rightarrow u_n \text{Converge} \\ > 1 \Rightarrow u_n \text{Diverge} \\ = 1 \text{ Test fails} \end{cases}$$

Example

Test the series $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 e^{-n^2}$ for convergence.

Solution

$$u_n = \sum_{n=1}^{\infty} n^4 e^{-n^2} \Rightarrow |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} n^4 e^{-n^2}$$

and

$$|u_{n+1}| = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^4 e^{-(n+1)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4 e^{-(n+1)^2}}{(n)^4 e^{-(n)^2}} = 0 < 1$$

Therefore, the series is convergent.

Example

Test the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}}$ for convergence.

Solution

بإتباع الخطوات الرئيسية لاختبار القسمة على النحو التالي:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}} \tag{1}$$

And

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-(n+1)}}{\sqrt{n+1}} \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1}}{\sum_{n=1}^{\infty} u_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-(n+1)}}{\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-(n+1)}\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}e^{-(n)}} = e^{-1} < 1$$

$$\Rightarrow \tag{2}$$

u_nConverge

بعد دراستنا للمتسلسلات من حيث تعريفها وطرق اختبارها من حيث كونها تقاربية أو تباعدية كان هناك شيء مشترك وهو أننا تعاملنا مع المتسلسلات العادية أي التي فيها الإشارة بين الحدود موجبة وفيما يلي سوف نتعامل مع نوع أخر لا يمكننا إهماله ألا وهو المتسلسلات الترددية Alternative series وهذا هو موضوع الجزء التالي.

المتسلسلات الترددية Alternative Series

تعريف

تعرف المتسلسلة الترددية بأنها المتسلسلة التي تتردد فيها الإشارة بين الحدود مابين الموجب والسالب أو العكس بشكل منتظم.

والآن هل هناك شوط يجب توافرها ليكون الحكم على المتسلسلة بأنها ترددية؟

نعم هنالك ثلاثة شروط يجب توافرها لكي نقول بأن المتسلسلة التي تتغير فيها الإشارة بين الحدود مابين الموجب والسالب بشكل منتظم وهذه الشروط على النحو التالي:

(1) The sign between terms changes from positive and negative or opposite

(2) $|u_{n+1}| \le |u_n|$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n| = 0$

نود الإشارة إلى ملحوظة هامة وهي أننا عندما نتكلم عن المتسلسلة فيخطر على الذهن موضوع مرافق لهذا الموضوع ألا وهو التقارب والتباعد للمتسلسلة Convergency and Divergency of the series وهكذا الحال نحن نبدأ في نوع أخر من المتسلسلات ألا وهو المتسلسلات الترددية ونسأل أنفسنا سؤال **هل التقارب والتباعد يكون له هنا نفس المعنى أم أن مسماه سيختلف؟**

عندما نريد إعطاء مسمى للتقارب والتباعد عند التعامل مع المتسلسلات الترددية فيجدر بنا المقام أن نعطيه مسمى مختلف ألا وهو التقارب المطلق والمشروط Absolute and Conditionally Convergence.

التقارب المطلق والمشروط

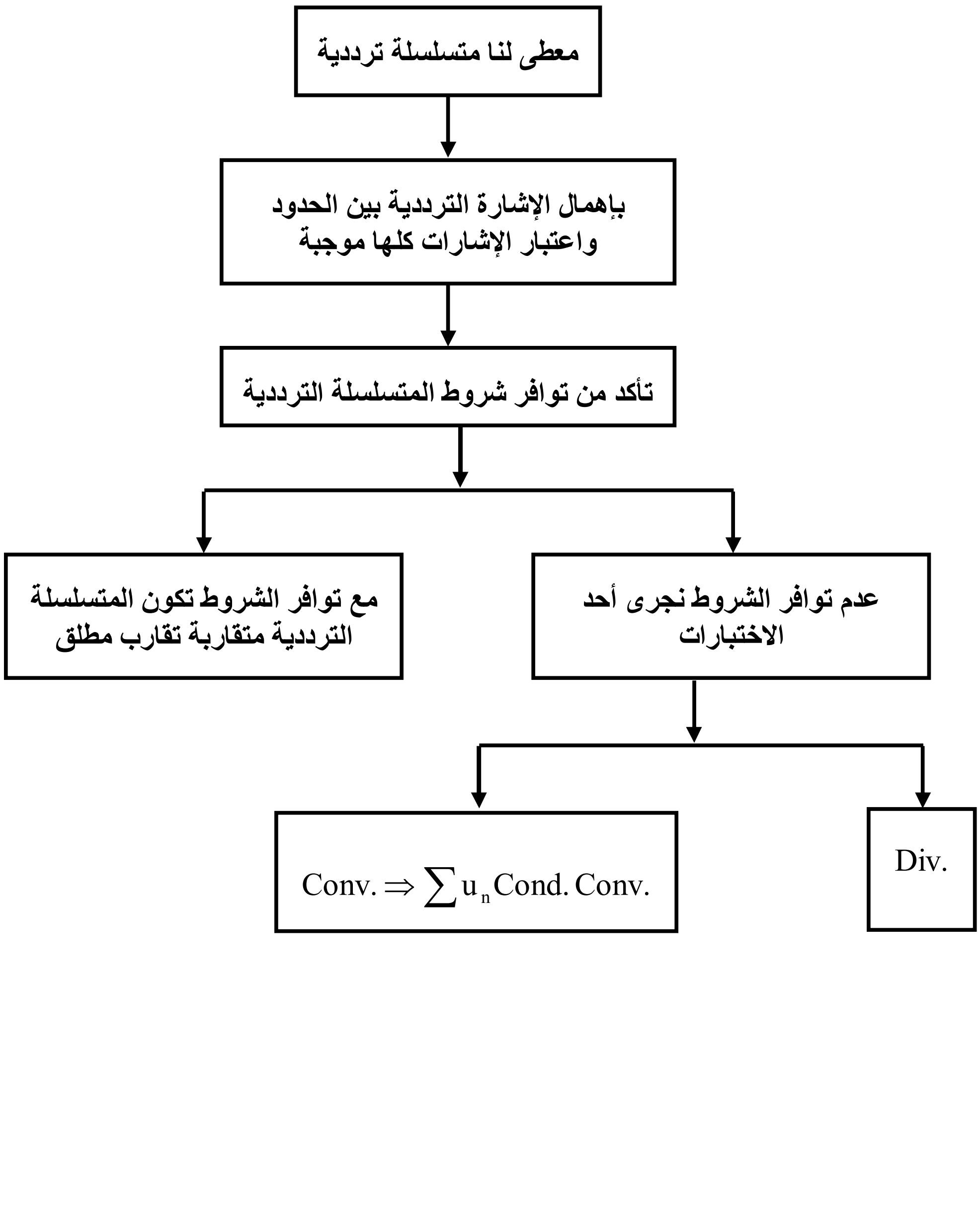
Absolute and Conditionally Convergence

تعريفات

(1) يطلق على المتسلسلة الترددية Alternative series بأنها متقاربة تقارب مطلق Absolutly converge وذلك إذا افترضها عدم تردد الإشارة بين الحدود ثم أجرينا أي من الاختبارات السابقة فكان ناتج الاختبار أنها تقاربية ولذا يطلق عليها متقاربة تقارب مطلق.

(2) يطلق على المتسلسلة الترددية Alternative series بأنها متقاربة تقارب مشروط Conditionally converge وذلك إذا أجرينا أي من الاختبارات السابقة على المتسلسلة كما هي بدون أية تغييرات فكان ناتج الاختبار أنها تقاربية ففي هذه الحالة يطلق عليها أنها متقاربة تقارب مشروط.

الشكل التوضيحي التالي يبين لنا كيفية التعامل مع المتسلسلة الترددية بشكل عام.



Example

Test the series $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{n^2+1}$ for convergence

Solution

حيث أن المتسلسلة المعطاة ترددية فهنا يجب إتباع طريقة اختبار المتسلسلة من هذا النوع وأول هذه الخطوات إهمال الإشارة الترددية بين الحدود واعتبارها كلها موجبة ثم نجرى أحد الاختبارات السابق شرحها ونرى:

$$u_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{n^2+1}\Rightarrow |u_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$$
$$\Rightarrow$$
$$|u_{n+1}|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)}{(n+1)^2+1}$$

Since $|u_{n+1}|<|u_n|$ for all values of $n\geq 1$ and $\lim_{n\to\infty}|u_n|=0$

وجدنا أن الثلاثة شروط التي من خلالها يمكننا القول بأن المتسلسلة ترددية أم لا ووجدنا أنها متحققة تماما وهذا يعنى أنها متقاربة تقارب مطلق Absolutely convergent.

Example

Test the series $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$ for convergence

Solution

حيث أن المتسلسلة المعطاة ترددية فهنا يجب إتباع طريقة اختبار المتسلسلة من

هذا النوع وأول هذه الخطوات إهمال الإشارة الترددية بين الحدود واعتبارها كلها موجبة ثم نجرى أحد الاختبارات السابق شرحها ونرى:

$$u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \Rightarrow |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

$$\Rightarrow$$

$$|u_{n+1}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \qquad (1)$$

$$\Rightarrow$$

$$|u_{n+1}| \le |u_n|$$

Now

$$\lim_{n\to\infty} |u_n| = 0 \qquad (2)$$

واضح أنه مع إهمال الإشارة توافرت لدينا كل شروط المتسلسلة الترددية وبالتالي فهي متقاربة تقاربا مطلقا Absolutly convergent.

Example

Test the series $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$ for convergence

Solution

حيث أن المتسلسلة المعطاة ترددية فهنا يجب إتباع طريقة اختبار المتسلسلة من هذا النوع وأول هذه الخطوات إهمال الإشارة الترددية بين الحدود واعتبارها كلها موجبة ثم نجرى اختبار التكامل على النحو التالي:

$$I = \int_{n=2}^{n=\infty} \frac{1}{n \ln n} dn = \infty \qquad (1)$$

Now carry out the alternative test in the following steps:

$$|u_{n+1}| \le |u_n| \qquad (2)$$

$$\lim_{n\to\infty} |u_n| = 0 \qquad (2)$$

واضح من مجموعة المعادلات أن المتسلسلة متقاربة تقاربا شرطيا Conditionally convergent.

متسلسلات القوى Power Series

كما سبق وقلنا هناك الكثير من الموضوعات إن أردنا تعريب عنوانها فسدت أو على الأقل لا يمكننا وضع معنى دقيق لما يتضمنه هذا الموضوع ولا غبار من المحاولات التي تسعى الوصول بالقارئ إلى أقرب معنى نحاول الوصول إليه. كان حتما علينا هذه المقدمة قبل الخوض في أحد موضوعات المتسلسلات ألا وهو متسلسلات القوى Power series.

Definition

If c_0 is a real number and c_n is a sequence of real numbers, then:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x^1 + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots\ldots + c_{n-1} x^{n-1} + \ldots.$$

is called power series in x

ملاحظات ذات صلة

(1) أنها تتقارب لجميع قيم المتغير x

(2) أنها تتقارب لقيمة المتغير $x = 0$ وتتباعد عند $x \ne 0$

(3) يوجد رقم موجب R بشرط تقارب المتسلسلة في الفترة $|x| < R$ وتتباعد في الفترة $|x| > R$

(4) قيم x التي تتقارب عندها المتسلسلة تسمى فترة التقارب Interval of convergence

(5) الاختبار الوحيد الذي من خلاله يمكننا تحديد فترة التقارب هو اختبار النسبة Ratio test.

(6) الرقم R يطلق عليه نصف قطر التقارب Radius of convergence

(7) المتسلسلة ربما تتقارب عند الحدود بمعنى عن $x = -R$ ، $x = +R$ أو عند أحدهما.

Example

Determine the interval of convergence of the following series:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n)!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots..$$

Solution

Appling the ratio test, we get:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{(n)!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^n}{(n)!} \frac{(n-1)!}{x^{n-1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x}{(n)} \right| = 0 \forall x$$

Therefore, the radius of convergence is ∞

Example

Determine the interval of convergence of the following series:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n)!\,x^n$$

Solution

Appling the ratio test, we get:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!\,x^{n+1}}{(n)!\,x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}|nx| = \begin{cases} +\infty & \text{for } x\neq 0 \\ +0 & \text{for } x=0 \end{cases}$$

المفكوك التسلسلي للدوال في متغير واحد

Series Expansion of Functions of One Variable

لقد تعرضنا لموضوع مفكوك تيلور وماكلورين Taylor and Maclaurin لدالة في متغير واحد وفى متغيرين وقلنا أن الفرق بين مفكوك تيلور ومفكوك مكلورين هي النقطة التي يتم إيجاد المفكوك حولها فإذا كانت أي نقطة فالمفكوك في هذه الحالة يسمى تيلور أما إذا كانت النقطة التي يتم إيجاد المفكوك حولها فيسمى المفكوك ماكلورين.

مفكوك تيلور Taylor's Expansion

مفكوك تيلور لدالة في متغير واحد حول نقطة $x = a$ يعرف بالشكل التالي:

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!}f^{/}(x) + \frac{(x-a)^2}{2!}f^{//}(x) + \cdots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x) + R_n$$

المقدار R_n يسمى الباقي ويعرف بالعلاقة التالية:

$$R_n = \frac{(x-x_o)^n}{(n)!} f^{(n)}(x), \qquad x < x_o < a$$

مفكوك تيلور لبعض الدوال الأساسية الهامة

Taylor's Expansion for Some Basic Functions

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\cdots\cdots -\infty < x < \infty$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \cdots\cdots\cdots -\infty < x < \infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \cdots\cdots\cdots -\infty < x < \infty$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + - \cdots\cdots\cdots -1 < x \le 1$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \cdots\cdots\cdots -1 \le x \le 1$$

مفكوك الدوال الأساسية له فوائد هامة وكثيرة ومن أحد هذه الفوائد هي استخدام المفكوك بدلا من الدالة الأساسية عند التعامل مع مسائل حساب تكاملات على سبيل المثال كما أنها تستخدم في كثير من التطبيقات الهندسية عوضا عن الدالة الأساسية.

Example

Evaluate $I = \int_{x=0}^{x=1} \frac{1-e^{-x^2}}{x^2} dx$ correct to three decimal places.

Solution الحل

باستخدام مفكوك e^{-x} مع استبدال كل x بـ x^2 لكي نحصل على e^{-x^2}

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \cdots\cdots$$

باستخدام هذا المفكوك في الدالة داخل التكامل المطلوب حسابه فيأخذ التكامل الشكل التالي:

$$\int_0^1 \frac{1-e^{-x^2}}{x^2} dx = \left(x - \frac{x^3}{2!\times 3} + \frac{x^5}{3!\times 3} - \frac{x^7}{4!\times 7} + \cdots \right)_{x=0}^{x=1} = 0.862$$

Supplementary Problems

Test the following series

(1) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+..........$

(2) $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+..........$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$

$\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{4}{6})^n$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n^2-3}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{(n+1)\sqrt{n-3}}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n1}{n}(\frac{3}{7})^n$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5n\ -3}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{(3n+2)n^{4/3}}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2n^3-1}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\ }\frac{n-\ln n}{n^2-10n^3}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2+5n+9}{n(n^2+1)^{3/2}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$$

Test the following series for absolute or conditional convergence

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{(3n+2)n^{4/3}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)e^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n}{(n-1)!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n n1}{n^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n n1}{n^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1`)^n n^3}{(n^2+1)^{4/3}}$$