最优化

闭函数和下半连续函数的定义

设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 为广义实值函数，则以下命题等价：

1.$f(x)$ 的$\forall\alpha,\{x|f(x)\le\alpha\}$ 为闭集

2.$f(x)$ 是$\mathbb{R}^n$上的下半连续函数$\Longleftrightarrow \liminf f(x)\ge f(x)$

> 什么是下极限？什么是下半连续函数
>
> 假如一个趋于a的子列有极限，可能有多个极限点。这样的极限点组成一个集合，这个集合的下确界就是$f(x)$在a处的下极
>
> $$\liminf_{x\to a} f(x)$$

3. $epif$为闭集（$f(x)$是闭函数的定义）

> 证明：1.$\Longrightarrow$2.:
>
> 通过反证法，假设$\exists\{x_k\}\to x$, 并且$\liminf f(x)<f(x)$. 那么一定$\exists\alpha$使得$\liminf f(x)<\alpha<f(x)$, 所以一定存在$\{x_k\}$
>
> 的子列$\{x_{ik}\}\to x$使得$f(x_{ik})\le\alpha$,由于命题1.，$x_{ik}\in\{x|f(x)\le\alpha\}$, 所以$x\in\{x|f(x)\le\alpha\}$.所以可以知道$f(x)\le\alpha$
>
> 与假设矛盾所以假设不成立
>
> 证明2.$\Longrightarrow$3.:
>
> 要证明上镜图是一个闭集，即证明$(x_k,\omega_k)\in epif$并且$(x_k,\omega_k)\to(x,\omega)$. 那么$(x,\omega)\in epif$,
>
> 假设$(x_k,\omega_k)\in epif$, 那么$f(x_k)\le\omega_k$,由于它是下半连续函数
>
> $$f(x)\le\lim_{k\to\infty}\inf f(x_k)\le\liminf\omega_k=\omega \tag{2}$$
>
> 所以$(x_k,\omega_k)\to(x,\omega)$
>
> 证明3.$\Longrightarrow$1.:
>
> 想证明$\{x_k\}\subseteq\{x|f(x)\le\alpha\}$, 且$x_k\to x$, 那么$x\in\{x|f(x)\le\alpha\}$
>
> $(x_k,\alpha)\in epif$, 那么$(x,\alpha)\in epif$. 因此$f(x)\le\alpha$

下面提出上面这个定理的条件放宽一些的情况：

1.假如不是$\mathbb{R}^n$上的闭函数，而是一个集合X上的闭函数。

> $$\begin{gathered}f:X\to[-\infty,+\infty], epif\subseteq\mathbb{R}^{n+1}\text{并且}epif=\{(x,\omega)|x\in X,\omega\in\mathbb{R},f(x)\le\omega\}\text{为闭集}\Leftrightarrow f\text{为闭函数}\\ \text{这时我们对}f(x)\text{进行延拓}\\ \tilde{f}(x)=\begin{cases}f(x) & x\in X\\ +\infty & x\ne X\end{cases}\end{gathered} \tag{3}$$
>
> $epif=epi\tilde{f}(x)$,显然我们知道$epi\tilde{f}(x)$是闭集并且$\tilde{f}(x)$的定义域为$\mathbb{R}^n$
>
> $$\Updownarrow$$
>
> $epi\tilde{f}(x)$ 是$\mathbb{R}^n$上的下半连续函数
>
> $$\Updownarrow$$
>
> $\forall\alpha\qquad \tilde{f}(x)\text{的水平集}=f(x)\text{的水平集}$为闭集
>
> f为X上的闭函数⇔f的水平集为闭集

2.假如不是$\mathbb{R}^n$上的下半连续函数，而是在$domf$上下半连续

> 由于前边两个条件是等价的，这个时候我们只要能推导出来满足其中一个，或者找出不满足其中一个的反例

> $$\begin{aligned}&f(x)\text{是}(0,+\infty)\text{上的下半连续函数}\\&f(x)=\begin{cases}1 & x\in(0,+\infty)\\+\infty & \text{否则}\end{cases}\end{aligned}\tag{4}$$
>
> 显然这个时候$epif(x)$不为闭集，而且$\alpha=2$的水平集为$(0,+\infty)$为开集
>
> 所以这个时候推不出$f(x)$是闭函数
>
> 倘若继续加条件，即$domf$有界+在$domf$上下半连续$\Longrightarrow$f(x)为闭函数

$f,epif,domf$,水平集的凸闭关系

这个里面前边的要求定义域为凸集

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{f}\text{为凸函数}\Longleftrightarrow \boldsymbol{epif}\text{为凸集}\\&\boldsymbol{f}\text{为闭函数}\Longleftrightarrow \boldsymbol{epif}\text{为闭集}\end{aligned}\tag{5}$$

这个里面定义域是任意的

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{f}\text{为凸函数}\rightharpoonup \boldsymbol{f}\text{的水平集为凸函数}\\&(\text{从这里我们明白}\forall\alpha\text{水平集为凸集只是}\boldsymbol{f}\text{为凸函数的必要条件})\\&\text{这里我们举个例子}\boldsymbol{f}=\sqrt{x}\text{对于}\alpha\geq 0,\text{它的水平集为}[0,\alpha^2],\text{为凸集};\alpha<0,\text{为空集也为凸集}\end{aligned}\tag{6}$$

$$\boldsymbol{f}\text{为闭集}\Longleftrightarrow \boldsymbol{f}\text{的水平集为闭集}\tag{7}$$

非负线性组合的保凸保闭研究

$$\begin{aligned}&f_i:\mathbb{R}^n\to(\infty,+\infty],\lambda_i\geq 0,i=1,2,\cdots,m\\&g(x)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i(x)\\&\text{那么就有}\boldsymbol{f_i(x)}\text{为凸函数}\Rightarrow \boldsymbol{g(x)}\text{为凸函数}\\&\boldsymbol{f_i(x)}\text{为闭函数}\Rightarrow \boldsymbol{g(x)}\text{为闭函数}\end{aligned}\tag{8}$$

> 证明：
>
> 非负的线性组合仍然是凸函数，这个显然
>
> 下面证明闭函数$f_i(x)$为闭函数所以它在$\mathbb{R}^n$上下半连续
>
> $$\begin{aligned}&\liminf f_i(x_k)\geq f_i(x)\\&\liminf g(x)=\liminf\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i(x)\geq\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\liminf f_i(x)\geq\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i(x)=g(x)\end{aligned}\tag{9}$$
>
> 因此我们也证明出来了g(x)在$\mathbb{R}^n$上下半连续，那么g(x)为闭函数

显然$\boldsymbol{epif_i(x)}$为闭集/凸集 $\Rightarrow \boldsymbol{g(x)}$为闭集/凸集

上下确界的保凸性，保闭性运算

$$\begin{aligned}&f_i:\mathbb{R}^n\to(\infty,+\infty],\lambda_i\geq 0,i=1,2,\cdots,m\\&g(x)=\sup f_i(x)\end{aligned}\tag{10}$$

> 不难发现$\mathrm{epi}(g)=\bigcap_i\mathrm{epi}(f_i)$,然而交集是保凸并且保闭的运算

可微凸函数

$C \subseteq \mathbb{R}^n$上的凸集，$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$且f为可微函数

1.

$$
\begin{gathered}
f\text{在}C\text{上为凸函数} \Leftrightarrow f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y),\, x-y \rangle \text{对于} \forall x, y \in \mathbb{C} \\
f\text{在}C\text{上为严格凸函数} \Leftrightarrow f(x) > f(y) + \langle \nabla f(y),\, x-y \rangle \text{对于} \forall x, y \in \mathbb{C}
\end{gathered} \tag{11}
$$

> "$\Leftarrow$"即要证明
>
> $$
> \begin{gathered}
> \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) \geq f(\alpha x + (1-\alpha) y) \\
> \text{对于} f(x) \geq f(z) + \langle \nabla f(z),\, x-z \rangle \\
> f(y) \geq f(z) + \langle \nabla f(z),\, y-z \rangle \\
> \text{令} z = \alpha x + (1-\alpha) y, \text{下面我们得到} \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) \geq \alpha f(z) + (1-\alpha) f(z) + 0 = f(z)
> \end{gathered} \tag{12}
> $$

> "$\Rightarrow$"不妨令$z > x$
>
> 于是我们构造出下面割线斜率的值$g(x) = \frac{f(\alpha z + (1-\alpha)x) - f(x)}{\alpha(z-x)}$
>
> 显然α越大斜率就越大
>
> $$
> \begin{gathered}
> g(\alpha) = \frac{f(\alpha z + (1-\alpha)x) - f(x)}{\alpha(z-x)} \\
> g(1) \geq g(0) \\
> \frac{f(z) - f(x)}{z-x} \geq \boldsymbol{\nabla} f(x)
> \end{gathered} \tag{13}
> $$