最优化

作者：朱占义

1.1 一些定义

闭函数和下半连续函数的定义

设 $f:\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}$ 为广义实值函数，则以下命题等价：

1.$f(x)$ 的$\forall\alpha,\{x|f(x)\leq\alpha\}$ 为闭集

2.$f(x)$ 是$\mathbb{R}^n$上的下半连续函数$\Longleftrightarrow \liminf f(x)\geq f(x)$

> 什么是下极限？什么是下半连续函数
>
> 假如一个趋于a的子列有极限，可能有多个极限点。这样的极限点组成一个集合，这个集合的下确界就是$f(x)$在a处的下极限
>
> $$\liminf_{x\rightarrow a} f(x)$$

3. $epif$为闭集（$f(x)$是闭函数的定义）

> 证明：1.$\Longrightarrow$2.:
>
> 通过反证法，假设$\exists\{x_k\}\rightarrow x,$ 并且 $\liminf f(x)<f(x).$ 那么一定$\exists\alpha$使得$\liminf f(x)<\alpha<f(x)$,所以一定存在$\{x_k\}$
>
> 的子列$\{x_{ik}\}\rightarrow x$使得$f(x_{ik})\leq\alpha$,由于命题1.，$x_{ik}\in\{x|f(x)\leq\alpha\},$ 所以$x\in\{x|f(x)\leq\alpha\}$.所以可以知道$f(x)\leq\alpha$
>
> 与假设矛盾所以假设不成立
>
> 证明2.$\Longrightarrow$3.:
>
> 要证明上镜图是一个闭集，即证明$(x_k,\omega_k)\in epif$并且$(x_k,\omega_k)\rightarrow(x,\omega).$ 那么$(x,\omega)\in epif,$
>
> 假设$(x_k,\omega_k)\in epif,$ 那么$f(x_k)\leq\omega_k$,由于它是下半连续函数
>
> $$f(x)\leq\lim_{k\rightarrow\infty}\inf f(x_k)\leq\liminf\omega_k=\omega \tag{2}$$
>
> 所以$(x_k,\omega_k)\rightarrow(x,\omega)$
>
> 证明3.$\Longrightarrow$1.:
>
> 想证明$\{x_k\}\subseteq\{x|f(x)\leq\alpha\},$ 且$x_k\rightarrow x,$ 那么$x\in\{x|f(x)\leq\alpha\}$
>
> $(x_k,\alpha)\in epif,$ 那么$(x,\alpha)\in epif.$ 因此$f(x)\leq\alpha$

下面提出上面这个定理的条件放宽一些的情况：

1.假如不是$\mathbb{R}^n$上的闭函数，而是一个集合X上的闭函数。

> $$\begin{gathered} f:X\to[-\infty,+\infty],epif\subseteq\mathbb{R}^{n+1}\text{并且}epif=\{(x,\omega)|x\in X,\omega\in\mathbb{R},f(x)\le\omega\}\text{为闭集}\Leftrightarrow f\text{为闭函数} \\ \text{这时我们对}f(x)\text{进行延拓} \\ \tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x) & x\in X \\ +\infty & x\neq X \end{cases} \end{gathered} \tag{3}$$
>
> $epif=epi\tilde{f}(x)$,显然我们知道$epi\tilde{f}(x)$是闭集并且$\tilde{f}(x)$的定义域为$\mathbb{R}^n$
>
> $$\Updownarrow$$
>
> $$epi\tilde{f}(x)\text{ 是}\mathbb{R}^n\text{上的下半连续函数}$$
>
> $$\Updownarrow$$
>
> $$\forall\alpha\qquad\tilde{f}(x)\text{的水平集}=f(x)\text{的水平集为闭集}$$
>
> f为X上的闭函数⇔f的水平集为闭集

2.假如不是$\mathbb{R}^n$上的下半连续函数，而是在$dom f$上下半连续

> 由于前边两个条件是等价的，这个时候我们只要能推导出来满足其中一个，或者找出不满足其中一个的反例
>
> $$\begin{gathered} f(x)\text{是}(0,+\infty)\text{上的下半连续函数} \\ f(x)=\begin{cases} 1 & x\in(0,+\infty) \\ +\infty & \text{否则} \end{cases} \end{gathered} \tag{4}$$
>
> 显然这个时候$epif(x)$不为闭集，而且$\alpha=2$的水平集为$(0,+\infty)$为开集
>
> 所以这个时候推不出$f(x)$是闭函数
>
> 倘若继续加条件，即$dom f$有界+在$dom f$上下半连续$\Longrightarrow$f(x)为闭函数

$f,epif,domf$,水平集的凸闭关系

1.f和epif

这个里面前边的要求定义域为凸集

$$\begin{gathered} f\text{为凸函数}\Longleftrightarrow epif\text{为凸集} \\ f\text{为闭函数}\Longleftrightarrow epif\text{为闭集} \end{gathered} \tag{5}$$

2.f和f的水平集

这个里面定义域是任意的

$$\begin{gathered} f\text{为凸函数}\longrightarrow f\text{的水平集为凸集} \\ (\text{从这里我们明白}\forall\alpha\text{水平集为凸集只是}f\text{为凸函数的必要条件}) \\ \text{这里我们举个例子}f=\sqrt{x}\text{对于}\alpha\ge0,\text{它的水平集为}[0,\alpha^2],\text{为凸集};\alpha<0,\text{为空集也为凸集} \end{gathered} \tag{6}$$

$$f\text{为闭集}\Longleftrightarrow f\text{的水平集为闭集} \tag{7}$$

3.f和domf

$$f\text{为凸函数}\longrightarrow domf\text{为凸集} \tag{8}$$

> $$\begin{gathered} f(x)=\begin{cases} \sqrt{x} & ,x\in[0,+\infty) \\ +\infty & ,otherwise \end{cases} \\ \text{有效域为}[0,+\infty)\text{为凸集，但是}f(x)\text{并不是凸函数} \end{gathered} \tag{9}$$

> 所以有效域为凸推不处出凸函数，但是根据凸函数的定义就要求这个函数的有效域是一个凸集

$$f\text{为闭函数} \nLeftrightarrow dom f\text{为闭集} \tag{10}$$

> $$f=\frac{1}{x},\text{是一个闭函数，但是有效域是}(0,+\infty)\text{并不是闭集} \tag{11}$$

> $$f(x)=\begin{cases}0 & ,x\in(1,2)\\ 1 & x\in\{1,2\}\end{cases} \tag{12}$$
> 显然函数并不是闭函数，但是有效域是闭集

4.epif和domf

$$dom f\text{为凸/闭集} \Longleftrightarrow epi f\text{为凸/闭集} \tag{13}$$

> $$dom f=\{x|f(x)<+\infty\}, epi f=\{(x,\omega),f(x)\le\omega\} \tag{14}$$
>
> 上镜图可以投影到$\mathbb{R}^n$(可以通过线性变换得到有效域)线性变换后还是凸集/闭集

1.2一些保凸、闭性的运算

非负线性组合的保凸保闭研究

$$\begin{gathered} f_i:\mathbb{R}^n\to(\infty,+\infty],\lambda_i\ge 0,i=1,2,\cdots,m\\ g(x)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i(x)\\ \text{那么就有}f_i(x)\text{为凸函数}\Rightarrow g(x)\text{为凸函数}\\ f_i(x)\text{为闭函数}\Rightarrow g(x)\text{为闭函数}\end{gathered} \tag{15}$$

> 证明:
>
> 非负的线性组合仍然是凸函数，这个显然
>
> 下面证明闭函数$f_i(x)$为闭函数所以它在$\mathbb{R}^n$上下半连续
>
> $$\begin{gathered}\liminf f_i(x_k)\ge f_i(x)\\ \liminf g(x)=\liminf\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i(x)\ge\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\liminf f_i(x)\ge\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i(x)=g(x)\end{gathered} \tag{16}$$
>
> 因此我们也证明出来了g(x)在$\mathbb{R}^n$上下半连续，那么g(x)为闭函数

显然$epi f_i(x)$为闭集/凸集 $\Rightarrow g(x)$为闭集/凸集

上下确界的保凸性，保闭性运算

$$\begin{gathered} f_i:\mathbb{R}^n\to(\infty,+\infty],\lambda_i\ge 0,i=1,2,\cdots,m\\ g(x)=\sup f_i(x)\end{gathered} \tag{17}$$

> 不难发现$\mathrm{epi}(g)=\bigcap_i\mathrm{epi}(f_i)$,然而交集是保凸并且保闭的运算

可微凸函数

$C \subseteq \mathbb{R}^n$上的凸集，$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$且f为可微函数

1.

$$
\begin{aligned}
f\text{在}C\text{上为凸函数} \Leftrightarrow f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y),\, x-y \rangle \text{对于} \forall x, y \in \mathbb{C} \\
f\text{在}C\text{上为严格凸函数} \Leftrightarrow f(x) > f(y) + \langle \nabla f(y),\, x-y \rangle \text{对于} \forall x, y \in \mathbb{C}
\end{aligned} \tag{18}
$$

> "$\Leftarrow$"即要证明
>
> $$
> \begin{gathered}
> \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) \geq f(\alpha x + (1-\alpha) y) \\
> \text{对于} f(x) \geq f(z) + \langle \nabla f(z),\, x-z \rangle \\
> f(y) \geq f(z) + \langle \nabla f(z),\, y-z \rangle \\
> \text{令} z = \alpha x + (1-\alpha) y, \text{下面我们得到} \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) \geq \alpha f(z) + (1-\alpha) f(z) + 0 = f(z)
> \end{gathered} \tag{19}
> $$

> "$\Rightarrow$"不妨令$z > x$
>
> 于是我们构造出下面割线斜率的值$g(x) = \frac{f(\alpha z + (1-\alpha)x) - f(x)}{\alpha(z-x)}$
>
> 显然α越大斜率就越大
>
> $$
> \begin{gathered}
> g(\alpha) = \frac{f(\alpha z + (1-\alpha)x) - f(x)}{\alpha(z-x)} \\
> g(1) \geq g(0) \\
> \frac{f(z) - f(x)}{z-x} \geq \nabla f(x)
> \end{gathered} \tag{20}
> $$

1.3凸包与仿射包

(下面介绍的无论是凸包，还是仿射包，还是生成锥我们都要研究它保闭性吗？保凸性吗？)

凸组合：

$$
(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3), \sum \alpha_i = 1, \alpha_i \in [0,1] \tag{21}
$$

仿射组合：

$$
(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3), \sum \alpha_i = 1, \alpha_i \in \mathbb{R} \tag{22}
$$

1.凸包： （convex hull）$X \subseteq \mathbb{R}^n$

$$
\begin{aligned}
conv(X) &= \{\text{包含}X\text{的最小的凸集}\} \\
&= \{\text{包含}X\text{的所有凸集的交}\} \\
&= \{X\text{中所有元素的凸组合}\}
\end{aligned} \tag{23}
$$

1）对于保凸性：显然的

2）对于保闭性，可以举出下面的这个反例

例子：$X = \left\{(x_1, x_2) \mid x_1 \geq \frac{1}{x_1},\ x_1, x_2 > 0\right\} \cup \{(0,0)\}$

> 显然在这个例子中，X是一个闭集，但是它的凸包是一个第一象限包含原点但不含坐标轴的集合，显然是一个开集

> 此时的conv(X)不是一个闭集

那我们知道了凸包不能保持集合的闭性，但是如果这个闭集是有界的呢？(直接记住这个结论)

$$X\text{为紧集} \Rightarrow conv(X)\text{为紧集} \tag{24}$$

2.生成锥： （cone）

$$\begin{gathered} cone(X):\{X\text{中所有元素的非负组合}\} \\ cone(X)=\{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x_i | x_i \in X\} \end{gathered} \tag{25}$$

1)对于保凸性：(容易证明)

2）对于保闭性：（可以举下面的反例）

$$\overline{B}((0,1),1)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+(y-1)^2\le 1\right\} \tag{26}$$

显然它的生成锥是X轴上方的全体，不包含x轴但包含原点，我们发现它的生成锥不是一个闭集

3.仿射包： （affine hull）

$$\begin{aligned} aff(X) &= \{\text{含}X\text{的最小仿射集}\} \\ &= \{\text{含}X\text{的所有仿射集的交}\} \\ &= \{X\text{中所有元素的仿射组合}\} \end{aligned} \tag{27}$$

仿射包的性质：

1.仿射包的单调性

2仿射包的幂等性

仿射包、闭包、凸包的关系：remark:

1)$conv(X)\subseteq aff(X)$

2)$aff(X)=aff(cl(X))=aff(conv(X))$(可以自己证明一下)

> $aff(X)=aff(conv(X))$:
>
> 首先证明$aff(X)\subseteq aff(conv(X))$
>
> $$\begin{gathered} X\subseteq conv(X),\text{由于仿射包的单调性} \\ aff(X)\subseteq aff(conv(X)) \end{gathered} \tag{28}$$
>
> 其次证$aff(X)\supseteq aff(conv(X))$
>
> $$\begin{gathered} \text{由仿射包和凸包的定义不难发现，}conv(X)\subseteq aff(X) \\ \text{所以}aff(conv(X))\subseteq aff(aff(x)) \end{gathered} \tag{29}$$

> $aff(X)=aff(cl(X))$
>
> 首先证明$aff(X)\subseteq aff(cl(X))$

> $$X \subseteq cl(X)\text{，由于仿射包具有单调性} \\ aff(X) \subseteq aff(cl(X)) \tag{30}$$
>
> 其次证$aff(X) \supseteq aff(cl(X))$
>
> $$\text{由于仿射包为闭集，}cl(X)\text{是包含}X\text{的最小闭集，即包含}X\text{的所有闭集的交集} \\ \text{那么}cl(X) \subseteq aff(X), \text{所以}aff(cl(X)) \subseteq aff(aff(X)) = aff(X) \tag{31}$$

3)$\dim(X) = \dim(aff(X))$

1.4相对内点、相对内部

相对内点：

$$C \subseteq \mathbb{R}^n\text{且}C \neq \Phi, x \in C \\ B(x,\varepsilon) \cap aff(C) \subseteq C\text{那么就称}x\text{是相对于}aff(C)\text{的内点} \\ x\text{为}C\text{的相对内点} \tag{32}$$

（一定要记住无论是内点还是相对内点，他都属于这个集合C）

相对内部：由C中所有相对内点构成的集合　relative interior　riC

相对内部和内部的关系：

$$\text{intC} = \{x \in C \mid \exists\delta > 0 \text{ s.t. } B(x,\delta) \subseteq C\} \\ \text{riC} = \{x \in C \mid \exists\delta > 0 \text{ s.t. } B(x,\delta) \cap \text{aff}C \subseteq C\} \\ \text{那么}intC \subseteq riC \tag{33}$$

> 证明：任取$intC$中的元素x, 如果$B(x,\delta_0) \subseteq C$, 可得$B(x,\delta_0) \cap \text{aff}C \subseteq C$

相对边界：clC/riC

$$\text{相对边界} \cup \text{相对内部} = \text{闭包} \tag{34}$$

例1：

$$\{(x,y)|x \in [1,2], y = 1\} \tag{35}$$

它的相对内部就是不包含两个端点的线段

例2：假如平面上一个实心的正方形，那么它的相对内部是什么？如果只有四条边呢？

实心的话相对内部就是不含边界的这个正方形，如果只有四条边的话相对内部是空集

需要注意以下所有的性质针对的都是非空凸集

非空凸集的相对内部一定非空，但是内部可能是空集

1.4.1线段原则、仿射包和相对内部的关系、相对内点的等价定义

c是非空凸集：

1）$\forall x \in riC, \forall y \in clC.$ 则x, y两点连线线段之间的所有点（不含y）均在riC中

（$\alpha x + (1-\alpha)y \in riC$且$\alpha \in (0,1]$） **（线段原则）**这个证明不要求掌握

仿射包和相对内部的关系

2）$aff(C) = aff(riC)$ （自己的仿射包等于相对内部的仿射包）

> $aff(riC) \subseteq aff(C)$:
>
> 显然，$riC \subseteq C$由仿射包的性质$aff(riC) \subseteq aff(C)$
>
> $aff(riC) \supseteq aff(C)$:
>
> $$\begin{gathered} \forall x \in C, y \in riC\text{根据线段原则令}z = \alpha y + (1-\alpha)x \in riC, \alpha \in (0,1] \\ \text{那么}z\text{和}y\text{都属于}riC \\ \text{分情况}:1)x = y \in riC \subseteq aff(riC) \\ 2)x = \frac{1}{1-\alpha}z - \frac{\alpha}{1-\alpha}y; \alpha \in (0,1)\text{并且}y, z \in riC \\ x \in aff(riC) \\ \text{所以}C \subseteq aff(riC), \text{由仿射包的性质}aff(C) \subseteq aff(aff(riC)) \subseteq aff(riC) \end{gathered} \tag{36}$$

3)$x \in riC \Leftrightarrow \forall y \in C \ \ \exists \gamma > 1$使得$x + (\gamma - 1)(x-y) \in riC$

> 证明：$\Leftarrow$
>
> $$\begin{gathered} z = x + (\gamma-1)(x-y) \in riC\text{并且}y \in C \subseteq clC \\ x = \frac{1}{r}z + \frac{r-1}{r}y\text{在}y, z\text{连线的线段上} \end{gathered} \tag{37}$$
>
> $\Rightarrow$
>
> $$\begin{gathered} x \in riC, \text{于是}\exists \varepsilon\text{使得}B(x,\varepsilon) \cap aff(C) \subseteq C \\ \forall y \in C, \gamma - 1 = \frac{\varepsilon}{2}|x-y|, \varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{4} \\ B(x+(\gamma-1)(x-y), \varepsilon^*) \subseteq B(x,\varepsilon) \qquad \gamma x + (1-\gamma)y \in aff(C) \\ B(x+(\gamma-1)(x-y), \varepsilon^*) \cap aff(C) \subseteq C \\ x + (\gamma-1)(x-y) \in riC \end{gathered} \tag{38}$$

1.4.2 常值性定理

$X \subseteq \mathbb{R}^n$是非空凸集，$f: X \to \mathbb{R}$为凹函数，$X^* = \{x^* | f(x^*) = \inf_{x \in X} f(x)\}; X^* \cap riX \neq \phi$

那么$f(x)$在X上为常值函数 **(自己理解：凹函数在相对内部取不到最小值)**

> 证明：

> $$\text{取}x^* \in X^* \cap riX, \text{那么}\forall y \in X\text{得}z = x^* + (\gamma - 1)(x^* - y) \in riX$$
> $$x^* = \frac{\gamma - 1}{\gamma}y + \frac{1}{\gamma}z; \text{且}y\text{和}z\text{均为}X\text{得相对内点}$$
> $$\text{由于}f(x)\text{为凹函数，}f(x^*) \geq \frac{\gamma - 1}{\gamma}f(y) + \frac{1}{\gamma}f(z) \tag{39}$$
> $$\text{由于}x^* \in X^*, \frac{\gamma - 1}{\gamma}f(y) + \frac{1}{\gamma}f(z) \geq f(x^*)$$
> $$f(y) = f(x^*)\text{为定值}$$

例子1：

$$\begin{gathered} \min c^T x + b \\ x \in X(X\text{为凸集}) \end{gathered} \tag{40}$$

那么我们就能知道最小值点一定不会取在X的相对内部

例子2：

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|_2 = -\inf_{\|x\| \leq 1} -\|Ax\|_2$$
$$\text{注意到在这里面}\|x\| \leq 1\text{是凸集，}-\|Ax\|_2\text{是凹函数}$$
$$\text{所以最小值肯定不能在内部取，那么}-\inf_{\|x\| \leq 1} -\|Ax\|_2 = -\inf_{\|x\| = 1} -\|Ax\|_2 = \sup_{\|x\| = 1} \|Ax\|_2(\text{也是一种}A\text{的}2\text{范数的定义}$$

1.4.3 相对内部和闭包的关系

C是一个非空凸集：

1.$riC = ri(clC)$(一个集合的相对内部等于这个集合闭包的相对内部)

> 证明：$ri(C) \subseteq ri(clC)$
> $$C \subseteq clC, \text{由仿射包的单调性}ri(C) \subseteq ri(clC) \tag{42}$$
> $ri(C) \supseteq ri(clC)$
> $$\begin{gathered} \forall x \in ri(clC), \text{根据相对内部的等价定义，}\forall y \in clC \ \exists \gamma > 1\text{使得}z = x + (\gamma - 1)(x - y) \in ri(clC) \\ y \in clC, z \in ri(clC) \\ x = \frac{1}{\gamma}z + \frac{\gamma - 1}{\gamma}y(\text{根据线段原则}), x \in clC \\ \text{因此我们知道}ri(clC) \subseteq clC \end{gathered} \tag{43}$$

2.$clC = cl(riC)$

> 证明：$cl(riC) \subseteq clC$:
> $$\text{由于闭包也具有单调性，}riC \subseteq C\text{则}cl(riC) \subseteq clC \tag{44}$$
> $cl(riC) \supseteq clC$:
> $$\begin{gathered} \forall x \in clC, \forall y \in riC\text{根据线段原则} \\ z = \alpha x + (1 - \alpha)y \in riC\text{其中}\alpha \in (0, 1] \\ \text{令}\alpha = 1 - \frac{1}{n}, z_n = (1 - \frac{1}{n})x + \frac{1}{n}y \in riC \\ \text{随后我们知道}n \to +\infty, z_n \to x\text{那么}x \in cl(riC) \end{gathered} \tag{45}$$

3.D也为非空凸集则下列3个条件等价

下边这三个没必要可以会，会用上边的来推导就可以了

1） $riD = riC$

2)$clD = clC$

3)$riC \subseteq D \subseteq clC$

> 这个的证明用上面结论以后过于简单就不证了

1.4.4 闭包、相对内部线性变换下的性质

补充知识：对于连续函数开集的原像是开集

连续函数可以把紧集映射成紧集

c是非空凸集$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$$\begin{gathered} AclC \subseteq cl(AC) \\ (\text{当}C\text{集合有界时取等}) \end{gathered} \tag{46}$$

e.g.比方说$y = \frac{1}{x}$这个函数的上镜图组成的集合，A把它映射到x轴上。那么Acl(C)是不包含原点的x轴正半轴，cl(AC)是包含原点的x轴正半轴

$$AriC = ri(AC) \tag{47}$$

1.4.5 闭包、相对内部有关集合的交、和的性质

(没有证明，知识举了例子辅助理解)

$$ri(A \cap B) \supseteq riA \cap riB \tag{48}$$

e.g.　A:在平面上x轴的非负半轴

　　B:在平面上x轴的非正半轴

那么：riA 是平面上x轴的正半轴　 riB 是平面上x轴的负半轴　$riA \cap riB = \phi$

而$A \cap B = (0,0)$,单点集是非空凸集，那么它的相对内部也是非空

$$cl(A \cap B) \subseteq clA \cap clB \tag{49}$$

e.g.　A:在平面上x轴的正半轴

　　B:在平面上x轴的负半轴

那么clA在平面上x轴的非负半轴,clB在平面上x轴的非正半轴;$clA \cap clB = \{(0,0)\}$

而$cl(A \cap B) = \phi$

$$
\begin{aligned}
ri(C_1)+ri(C_2)=ri(C_1+C_2)\\
cl(C_1)+cl(C_2)\subseteq cl(C_1+C_2)
\end{aligned} \tag{50}
$$

e.g.$C_1=\left\{(x_1,x_2)\mid x_1\geq\frac{1}{x_1},\ x_1,x_2>0\right\}$　C_2是y轴

那么$cl(C_1)+cl(C_2)$是第一、四象限不包含y轴的点的集合

$cl(C_1+C_2)$是第一、四象限包含y轴的点的集合

1.5 回收锥（recession cone）

回收方向　回收锥：（recession direction）

$$
\begin{aligned}
C\subseteq\mathbb{R}^n\text{的非空凸集，}\forall x\in C\text{，}\forall\alpha\geq 0\exists y\text{使得}x+\alpha y\in C\\
\text{那么}y\text{被称为集合}C\text{的回收方向}\\
\text{由所有回收方向组成的集合称为}C\text{的回收锥}\\
R_C=\{y\mid\forall x\in C,\forall\alpha\geq 0,x+ay\in C\}
\end{aligned} \tag{51}
$$

$$
\begin{aligned}
X^* &= \{x^* | f(x^*) = \inf_{x \in X} f(x)\} \\
&= \cap \{x \in X | f(x) \leq r_k, r_k \downarrow \inf_{x \in X} f(x)\}
\end{aligned} \tag{52}
$$

若f(x)是个闭凸函数，那么水平集仍然为闭凸集。

对于满足$c_k \supseteq c_{k+1}$:

在这种情况下，这些闭凸集的交是空集；但是如果这些集合中存在某个c_k是紧集，那么他们的交就不是空集