最优化

闭函数和下半连续函数的定义

设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 为广义实值函数，则以下命题等价：

1.$f(x)$ 的$\forall\alpha,\{x|f(x)\le\alpha\}$ 为闭集

2.$f(x)$ 是$\mathbb{R}^n$上的下半连续函数$\Longleftrightarrow \liminf f(x)\ge f(x)$

> 什么是下极限？什么是下半连续函数
>
> $$\text{假如一个趋于}a\text{的子列有极限，可能有多个极限点。这样的极限点组成一个集合，这个集合的下确界就是}f(x)\text{在}a\text{处的下极}\\ \liminf_{x\to a} f(x)$$

3. $epif$为闭集（$f(x)$是闭函数的定义）

> 证明：1.$\Longrightarrow$2.:
>
> 通过反证法，假设$\exists\{x_k\}\to x,\text{并且}\liminf f(x)<f(x).\text{那么一定}\exists\alpha\text{使得}\liminf f(x)<\alpha<f(x),$ 所以一定存在$\{x_k\}$
>
> 的子列$\{x_{ik}\}\to x\text{使得}f(x_{ik})\le\alpha$,由于命题1.，$x_{ik}\in\{x|f(x)\le\alpha\},\text{所以}x\in\{x|f(x)\le\alpha\}$.所以可以知道$f(x)\le\alpha$
>
> 与假设矛盾所以假设不成立
>
> 证明2.$\Longrightarrow$3.:
>
> 要证明上镜图是一个闭集，即证明$(x_k,\omega_k)\in epif\text{并且}(x_k,\omega_k)\to(x,\omega).\text{那么}(x,\omega)\in epif,$
>
> 假设$(x_k,\omega_k)\in epif,\text{那么}f(x_k)\le\omega_k$,由于它是下半连续函数
>
> $$f(x)\le\liminf_{k\to\infty} f(x_k)\le\liminf\omega_k=\omega \tag{62}$$
>
> 所以$(x_k,\omega_k)\to(x,\omega)$
>
> 证明3.$\Longrightarrow$1.:
>
> 想证明$\{x_k\}$$\subseteq\{x|f(x)\le\alpha\},\text{且}x_k\to x,\text{那么}x\in\{x|f(x)\le\alpha\}$
>
> $(x_k,\alpha)\in epif,\text{那么}(x,\alpha)\in epif.\text{因此}f(x)\le\alpha$

下面提出上面这个定理的条件放宽一些的情况：

1.假如不是$\mathbb{R}^n$上的闭函数，而是一个集合X上的闭函数。

> $$f:X\to[-\infty,+\infty],epif\subseteq\mathbb{R}^{n+1}\text{并且}epif=\{(x,\omega)|x\in X,\omega\in\mathbb{R},f(x)\le\omega\}\text{为闭集}\Leftrightarrow f\text{为闭函数}\\ \text{这时我们对}f(x)\text{进行延拓}\\ \tilde{f}(x)=\begin{cases}f(x) & x\in X\\ +\infty & x\ne X\end{cases} \tag{63}$$
>
> $epif=epi\tilde{f}(x)$,显然我们知道$epi\tilde{f}(x)$是闭集并且$\tilde{f}(x)\text{的定义域为}\mathbb{R}^n$
>
> $\Updownarrow$
>
> $epi\tilde{f}(x)$ 是$\mathbb{R}^n$上的下半连续函数
>
> $\Updownarrow$
>
> $\forall\alpha\qquad\tilde{f}(x)\text{的水平集}=f(x)\text{的水平集}$为闭集
>
> f为X上的闭函数$\Leftrightarrow$f的水平集为闭集

2.假如不是$\mathbb{R}^n$上的下半连续函数，而是在$domf$上下半连续

> 由于前边两个条件是等价的，这个时候我们只要能推导出来满足其中一个，或者找出不满足其中一个的反例

> $$f(x)是(0,+\infty)上的下半连续函数 \\ f(x)=\begin{cases}1 & x\in(0,+\infty)\\ +\infty & 否则\end{cases} \tag{64}$$
>
> 显然这个时候$epif(x)$不为闭集，而且$\alpha=2$的水平集为$(0,+\infty)$为开集
>
> 所以这个时候推不出$f(x)$是闭函数
>
> 倘若继续加条件，即$domf$有界+在$domf$上下半连续$\Longrightarrow$f(x)为闭函数

$f,epif,domf$,水平集的凸闭关系

1.f和epif

这个里面前边的要求定义域为凸集

$$f为凸函数 \Longleftrightarrow epif为凸集 \\ f为闭函数 \Longleftrightarrow epif为闭集 \tag{65}$$

2.f和f的水平集

这个里面定义域是任意的

$$f为凸函数 \longrightarrow f的水平集为凸函数 \\ (从这里我们明白\forall\alpha水平集为凸集只是f为凸函数的必要条件) \\ 这里我们举个例子f=\sqrt{x}对于\alpha\geq 0,它的水平集为[0,\alpha^2],为凸集;\alpha<0,为空集也为凸集 \tag{66}$$

$$f为闭集 \Longleftrightarrow f的水平集为闭集 \tag{67}$$

3.f和domf

$$f为凸函数 \longrightarrow domf为凸集 \tag{68}$$

> $$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & ,x\in[0,+\infty)\\ +\infty & ,otherwise\end{cases} \\ 有效域为[0,+\infty)为凸集，但是f(x)并不是凸函数 \tag{69}$$
>
> 所以有效域为凸推不处出凸函数，但是根据凸函数的定义就要求这个函数的有效域是一个凸集

$$f为闭函数 \nLeftrightarrow domf为闭集 \tag{70}$$

> $$f=\frac{1}{x},是一个闭函数，但是有效域是(0,+\infty)并不是闭集 \tag{71}$$

> $$f(x)=\begin{cases}0 & ,x\in(1,2)\\ 1 & x\in\{1,2\}\end{cases} \\ 显然函数并不是闭函数，但是有效域是闭集 \tag{72}$$

4.epif和domf

$$domf为凸/闭集 \Longleftrightarrow epif为凸/闭集 \tag{73}$$

> $$domf=\{x|f(x)<+\infty\},epif=\{(x,\omega),f(x)\leq\omega\} \tag{74}$$
>
> 上镜图可以投影到$\mathbb{R}^n$(可以通过线性变换得到有效域)线性变换后还是凸集/闭集

非负线性组合的保凸保闭研究

$$f_i:\mathbb{R}^n\to(\infty,+\infty],\lambda_i\geq 0,i=1,2,\cdots,m \\ g(x)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i(x) \\ 那么就有f_i(x)为凸函数\Rightarrow g(x)为凸函数 \\ f_i(x)为闭函数\Rightarrow g(x)为闭函数 \tag{75}$$

> 证明：
>
> 非负的线性组合仍然是凸函数，这个显然
>
> 下面证明闭函数$f_i(x)$为闭函数所以它在$\mathbb{R}^n$上下半连续
>
> $$\begin{aligned}\liminf f_i(x_k) \geq f_i(x) \\ \liminf g(x) = \liminf \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x) \geq \sum_{i=1}^m \lambda_i \liminf f_i(x) \geq \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x) = g(x)\end{aligned} \tag{76}$$
>
> 因此我们也证明出来了g(x)在$\mathbb{R}^n$上下半连续，那么g(x)为闭函数

显然$epi f_i(x)$为闭集/凸集 $\Rightarrow$ $g(x)$为闭集/凸集

上下确界的保凸性，保闭性运算

$$\begin{aligned}f_i : \mathbb{R}^n \to (\infty, +\infty], \lambda_i \geq 0, i = 1, 2, \cdots, m \\ g(x) = \sup f_i(x)\end{aligned} \tag{77}$$

> 不难发现$\operatorname{epi}(g) = \bigcap_i \operatorname{epi}(f_i)$,然而交集是保凸并且保闭的运算

可微凸函数

$C \subseteq \mathbb{R}^n$上的凸集，$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$且f为可微函数

1.

$$\begin{aligned}f\text{在}C\text{上为凸函数} \Leftrightarrow f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y),\, x - y \rangle \text{对于}\forall x, y \in \mathbb{C} \\ f\text{在}C\text{上为严格凸函数} \Leftrightarrow f(x) > f(y) + \langle \nabla f(y),\, x - y \rangle \text{对于}\forall x, y \in \mathbb{C}\end{aligned} \tag{78}$$

> "$\Leftarrow$"即要证明
>
> $$\begin{aligned}\alpha f(x) + (1 - \alpha) f(y) \geq f(\alpha x + (1 - \alpha) y) \\ \text{对于} f(x) \geq f(z) + \langle \nabla f(z),\, x - z \rangle \\ f(y) \geq f(z) + \langle \nabla f(z),\, y - z \rangle \\ \text{令} z = \alpha x + (1 - \alpha) y, \text{下面我们得到} \alpha f(x) + (1 - \alpha) f(y) \geq \alpha f(z) + (1 - \alpha) f(z) + 0 = f(z)\end{aligned} \tag{79}$$

> "$\Rightarrow$"不妨令$z > x$
>
> 于是我们构造出下面割线斜率的值$g(x) = \frac{f(\alpha z + (1 - \alpha) x) - f(x)}{\alpha (z - x)}$
>
> 显然α越大斜率就越大
>
> $$\begin{aligned}g(\alpha) = \frac{f(\alpha z + (1 - \alpha) x) - f(x)}{\alpha (z - x)} \\ g(1) \geq g(0) \\ \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \geq \nabla f(x)\end{aligned} \tag{80}$$

1.3凸包与仿射包

(下面介绍的无论是凸包，还是仿射包，还是生成锥我们都要研究它保闭性吗？保凸性吗？)

凸组合：

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3), \sum \alpha_i = 1, \alpha_i \in [0, 1] \tag{81}$$

仿射组合：

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3), \sum \alpha_i = 1, \alpha_i \in \mathbb{R} \tag{82}$$

1.凸包： （convex hull）$X \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} conv(X) &= \{包含X的最小的凸集\} \\ &= \{包含X的所有凸集的交\} \\ &= \{X中所有元素的凸组合\} \end{aligned} \tag{83}$$

1）对于保凸性：显然的

2）对于保闭性，可以举出下面的这个反例

例子：$X=\left\{(x_1,x_2) \mid x_1 \geq \frac{1}{x_1},\ x_1,x_2>0\right\} \cup \{(0,0)\}$

> 显然在这个例子中，X是一个闭集，但是它的凸包是一个第一象限包含原点但不含坐标轴的集合，显然是一个开集
>
> 此时的conv(X)不是一个闭集

那我们知道了凸包不能保持集合的闭性，但是如果这个闭集是有界的呢？(直接记住这个结论)

$$X为紧集 \Rightarrow conv(X)为紧集 \tag{84}$$

2.生成锥： （cone）

$$\begin{aligned} cone(X) &: \{X中所有元素的非负组合\} \\ cone(X) &= \{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i | x_i \in X\} \end{aligned} \tag{85}$$

1)对于保凸性：(容易证明)

2）对于保闭性：（可以举下面的反例）

$$\overline{B}((0,1),1)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y-1)^2 \leq 1\right\} \tag{86}$$

显然它的生成锥是X轴上方的全体，不包含x轴但包含原点，我们发现它的生成锥不是一个闭集

3.仿射包： （affine hull）

$$\begin{aligned} aff(X) &= \{含X的最小仿射集\} \\ &= \{含X的所有仿射集的交\} \\ &= \{X中所有元素的仿射组合\} \end{aligned} \tag{87}$$

remark:

1)$conv(X) \subseteq aff(X)$

2)$aff(X)=aff(cl(X))=aff(conv(X))$(可以自己证明一下)

3)dim(X)=dim(aff(X))

1.4相对内点、相对内部

相对内点：

$$\begin{gathered} C \subseteq \mathbb{R}^n 且 C \neq \Phi, x \in C \\ B(x,\varepsilon) \cap aff(C) \subseteq C 那么就称 x 是相对于 aff(C) 的内点 \\ x 为 C 的相对内点 \end{gathered} \tag{88}$$

（一定要记住无论是内点还是相对内点，他都属于这个集合C）

相对内部： 由C中所有相对内点构成的集合　relative interior　riC

相对边界： clC/riC

$$相对边界 \cup 相对内部 = 闭包 \tag{89}$$

例1：

$$\{(x,y)|x\in[1,2],y=1\} \tag{90}$$

它的相对内部就是不包含两个端点的线段

例2：假如平面上一个实心的正方形，那么它的相对内部是什么？如果只有四条边呢？

实心的话相对内部就是不含边界的这个正方形，如果只有四条边的话相对内部是空集